

## **MODELO MATEMÁTICO DEL CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE IDEAL**

Ing. Jorge Jazni (UTN – FRC)

Ing. Carlos Cagliolo (UTN – FRC)

Ing. Gustavo González (UTN – FRC)

### **1. RESUMEN**

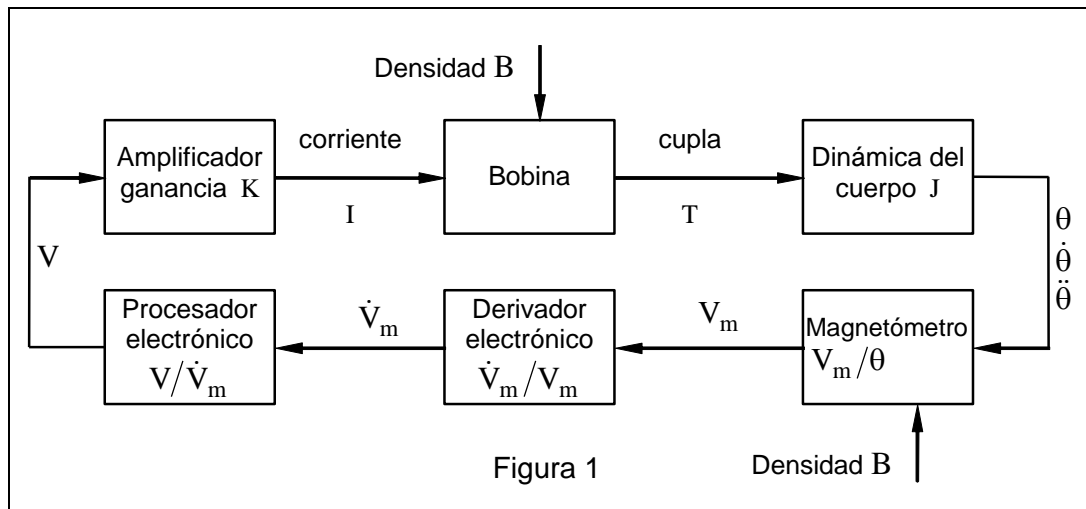
El presente documento muestra el desarrollo de las formulaciones físico-matemáticas de las leyes de variación de la inducción magnética terrestre a lo largo de una trayectoria circular cuyo centro es coincidente con el de la tierra.

El objeto de estudio está basado en el hecho de haber seleccionado para el amortiguamiento de los movimientos de rotación del satélite  $\mu$ Sat un sistema activo de bobinas de a bordo las que, convenientemente energizadas, interaccionan con la inducción magnética terrestre en el punto generando cuplas mecánicas opuestas a las velocidades angulares en cada uno de sus tres ejes.

Aunque este trabajo no es inherente al sistema de control en sí, una breve descripción del mismo ayudará a esclarecer sus objetivos.

El servosistema será implementado con tres magnetómetros dispuestos ortogonalmente para medir las componentes de la inducción magnética terrestre en el punto. Las derivadas del valor de la inducción magnética, obtenidas mediante un cálculo a bordo, servirán para energizar adecuadamente a las bobinas de alambre de cobre, con el objeto de reproducir, en forma activa y potenciada, el comportamiento de una bobina en cortocircuito rotando inmersa en un campo magnético. Conviene destacar que un magnetómetro mide el valor instantáneo de la inducción según su eje sensible y no su derivada, motivo por el cual esta última deberá ser obtenida como dijimos, a través del cálculo.

La figura 1 muestra un diagrama en bloques esquemático del principio de funcionamiento de un canal del servosistema amortiguador.



## 2. INTRODUCCIÓN

La resolución del problema global consiste en los siguientes pasos:

- a) Consideración del dipolo magnético terrestre ocasionado por una corriente eléctrica circulando por una espira ubicada en el centro de la tierra con el eje magnético coincidente con el eje geográfico terrestre y el punto en estudio describiendo una trayectoria circular polar cuyo centro coincide con el centro de la tierra. En este caso la rotación de la tierra no tiene incidencia en el desarrollo.
- b) Consideración de la inclinación del campo, la rotación terrestre y un ángulo cualquiera de inclinación de la trayectoria orbital del punto. Es conveniente hacer notar que éste estudio no contempla el corrimiento de la recta que contiene el dipolo magnético con el centro geográfico terrestre. Esta fue una decisión del grupo de investigadores que trabajaron en el tema habida cuenta de que la precisión que se hubiera obtenido de los resultados no justificaba la complicación que implicaba la inclusión del mencionado corrimiento.

Los resultados obtenidos de éste trabajo serán de suma utilidad para:

- Simular numéricamente el comportamiento del sistema de estabilización y control del satélite en sus distintas fases.
- Construir un banco de ensayos magnético que simule la inducción terrestre a lo largo de la trayectoria del satélite en órbita.

### 3. DESARROLLO

#### 3.1. EJES DE REFERENCIA Y CONVENCIONES

Durante el desarrollo adoptamos como sistema de ejes de referencia una terna ortogonal cuasi-inercial derecha con origen en el centro de la tierra haciendo coincidir el eje Z con el eje geopolar con sentido positivo hacia el polo norte geográfico; el eje X, perpendicular al anterior (yacente en el plano ecuatorial) obtenido como la intersección del plano ecuatorial con el plano orbital con sentido arbitrario; el eje Y resulta del análisis de la convención de la mano derecha.

Las rotaciones serán consideradas positivas cuando los giros sean antihorarios, vistos desde los extremos positivos de los ejes de referencia.

El vector dipolo magnético terrestre será considerado con sentido saliente en el polo Sur.

#### 3.2. LA SOLUCIÓN EN EL PLANO

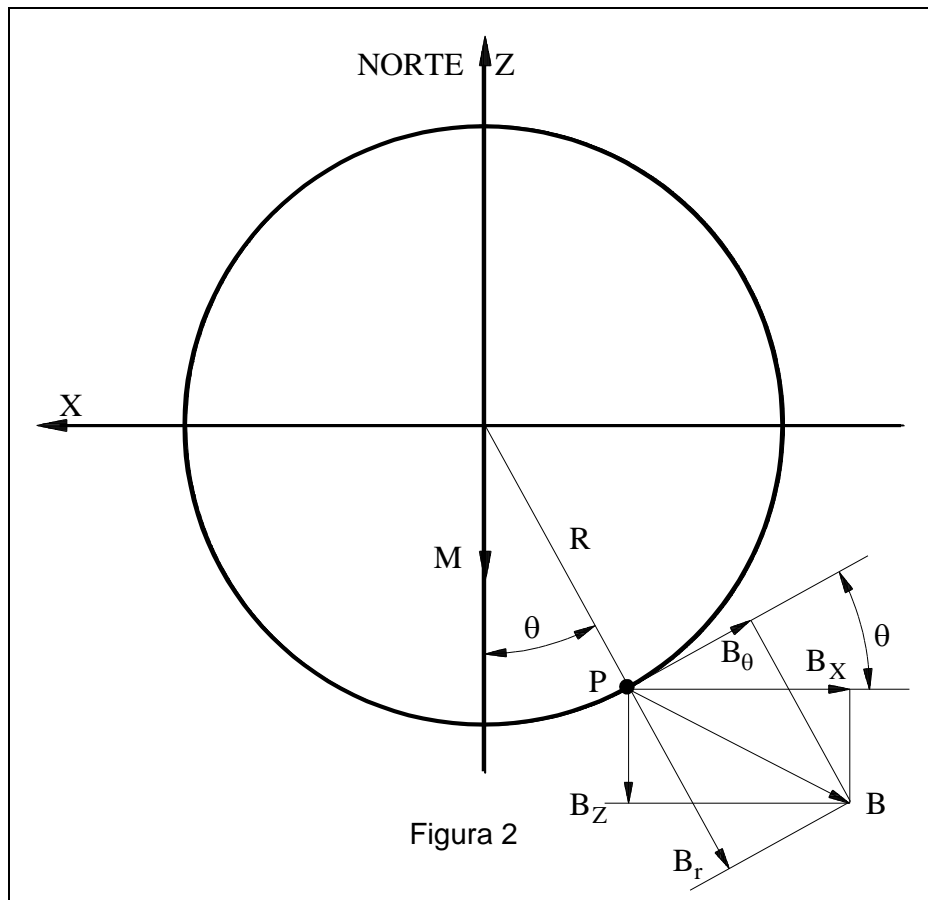
Las condiciones hipotéticas de resolución de este caso son las siguientes:

- Grandes distancias al centro de la tierra (mayores a un radio terrestre) lo cual nos permite usar fórmulas simples para la determinación de las densidades de flujo inducidas.
- Inclinación nula de la órbita.

Las dos últimas suposiciones nos permiten decir que la trayectoria del punto en estudio estará contenida permanentemente en el plano XZ.

La Figura 2 muestra la disposición de los elementos esenciales para el cálculo donde:

- M : Dipolo magnético terrestre
- $B_r$  : Densidad de flujo inducido radial
- $B_\theta$  : Densidad de flujo inducido tangencial
- $\theta$  : Posición angular del punto P en análisis medido desde la recta que contiene al dipolo M.
- R : Radio vector del punto en análisis P.
- $B_x$  : Proyección de la densidad de flujo en P según X.
- $B_z$  : Proyección de la densidad de flujo en P según Z.



### 3.2.1. Determinación de las componentes cartesianas de la inducción

Las componentes de la densidad de flujo en coordenadas polares pueden escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{4\pi} 2M \frac{\cos \theta}{R^3} \\ B_\theta &= \frac{1}{4\pi} M \frac{\sin \theta}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad 1$$

Como consideraremos trayectorias del punto P circulares, podemos poner:

$$\frac{M}{4\pi R^3} = C \quad 2$$

siendo C constante; teniendo en cuenta el sistema de Ecuaciones 1 queda:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= 2C \cos \theta \\ B_\theta &= C \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad 3$$

Pasando a las coordenadas cartesianas X y Z resulta:

$$\left. \begin{aligned} B_X &= -B_r \sin \theta - B_\theta \cos \theta \\ B_Z &= -B_r \cos \theta + B_\theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad 4$$

Reemplazando  $B_r$  y  $B_\theta$  por los valores de la Ecuación 3 queda:

$$\left. \begin{aligned} B_X &= -2C \cos \theta \sin \theta - C \sin \theta \cos \theta \\ B_Z &= -2C \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad 5$$

Con lo que inmediatamente podemos poner:

$$B_X = -3C \cos \theta \sin \theta \quad 6$$

pero como

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad 7$$

resulta

$$B_X = -\frac{3}{2} C \sin 2\theta \quad 8$$

Además, como:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \quad 9$$

resulta

$$B_Z = -2C(1 - \sin^2 \theta) + C \sin^2 \theta \quad 10$$

$$B_Z = -2C + 2C \sin^2 \theta + C \sin^2 \theta \quad 11$$

$$B_Z = 3C \sin^2 \theta - 2C \quad 12$$

Por otra parte, como:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -[\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)] \quad 13$$

haciendo  $\alpha = \beta$  queda:

$$2 \sin^2 \alpha = -(\cos 2\alpha - 1) \quad 14$$

de donde:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad 15$$

Usando la expresión 15 en la Ecuación 12 queda:

$$B_Z = 3\frac{C}{2} - 3\frac{C}{2} \cos 2\theta - 2C \quad 16$$

$$B_Z = -\frac{C}{2} - 3\frac{C}{2} \cos 2\theta \quad 17$$

$$B_Z = -\left(\frac{C}{2} + 3\frac{C}{2} \cos 2\theta\right) \quad 18$$

Como resulta conveniente medir los ángulos descritos por el satélite en órbita a partir de la dirección positiva del eje X haremos la siguiente transformación:

$$\theta_S = 90^\circ + \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_S - 90^\circ \quad 19$$

siendo  $\theta_S$  el ángulo descrito por el punto P medido desde +X, con lo que:

$$B_X = -\frac{3}{2}C \operatorname{sen} 2(\theta_S - 90^\circ) \quad 20$$

$$B_X = -\frac{3}{2}C \operatorname{sen} (2\theta_S - 180^\circ) \quad 21$$

Pero:

$$\operatorname{sen} (2\theta_S - 180^\circ) = \operatorname{sen} 2\theta_S \cos 180^\circ - \operatorname{sen} 180^\circ \cos 2\theta_S \quad 22$$

$$\operatorname{sen} (2\theta_S - 180^\circ) = -\operatorname{sen} 2\theta_S \quad 23$$

Reemplazando la 23 en la 21 resulta:

$$B_X = \frac{3}{2}C \operatorname{sen} 2\theta_S \quad 24$$

Por otra parte:

$$B_Z = -\left[\frac{C}{2} + 3\frac{C}{2} \cos (2\theta_S - 180^\circ)\right] \quad 25$$

pero:

$$\cos (2\theta_S - 180^\circ) = \cos 2\theta_S \cos 180^\circ + \operatorname{sen} 2\theta_S \operatorname{sen} 180^\circ \quad 26$$

$$\cos (2\theta_S - 180^\circ) = -\cos 2\theta_S \quad 27$$

Reemplazando la 27 en la 25 resulta

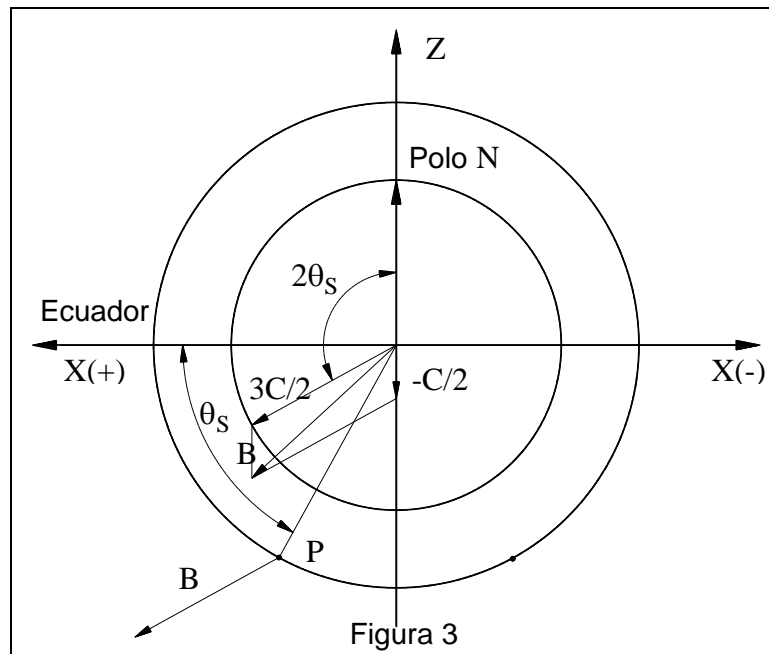
$$B_Z = -\frac{C}{2} + \frac{3}{2}C \cos 2\theta_S \quad 28$$

La combinación de las componentes  $B_X$  y  $B_Z$  mostradas respectivamente en las Ecuaciones 24 y 28 muestran un vector estacionario de amplitud  $C/2$  dirigido en el sentido negativo del eje

Z al que se le superpone un vector de amplitud constante  $3C/2$  rotando en el mismo sentido y con argumentos dobles a los barridos por el punto en su trayectoria orbital.

Esto nos permite decir que un cuerpo acoplado hipotéticamente en forma rígida al campo magnético terrestre, haría 2 giros alrededor de su eje cuando el mismo haya descrito una órbita alrededor de la tierra.

En la Figura 3 vemos el diagrama vectorial del fenómeno en el que están materializados el punto P, el vector estacionario  $-C/2$ , el rotante  $3C/2$  y la inducción total B que observaríamos en esa posición genérica.

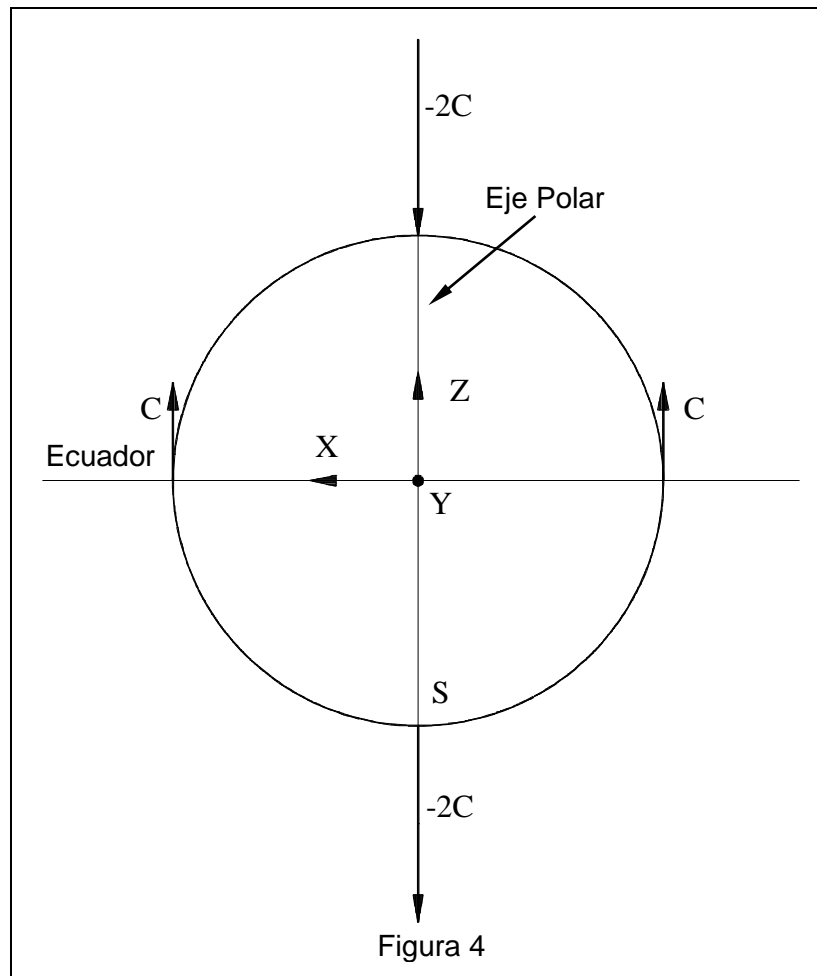


Obsérvese que los ángulos descriptos por el vector rotante deben medirse desde el semieje positivo de Z ya que, para  $\theta_s = 0$  resulta  $B_x = 0$  y  $B_z = -C/2 + 3C/2$ .

Usando las Ecuaciones 24 y 28 podemos realizar la siguiente tabla con los puntos más resaltantes de la órbita

	$\theta_s$	$B_x$	$B_z$	B
Polo N	$0^\circ$	0	C	C
Ecuador +	$90^\circ$	0	-2C	-2C
Polo S	$180^\circ$	0	C	C
Ecuador -	$270^\circ$	0	-2C	-2C

A los valores de la tabla los vemos representados en la Figura 4.



Otro punto que resulta de interés es aquel en el que la proyección de la inducción en Z es cero, por lo que la única componente es  $B_X$ .

De la Ecuación 28 podemos poner (para  $B_Z = 0$ ):

$$\frac{3}{2}C \cos 2\theta_S = \frac{C}{2} \quad 29$$

$$\theta_S = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \quad 30$$

$$\theta_S = 54.73^\circ \quad 31$$

### 3.2.2. Valor absoluto de la inducción

A la expresión que vincula el valor absoluto de B con los ángulos girados por el punto podemos encontrarlos a partir de las Ecuaciones 3 haciendo:

$$B^2 = B_r^2 + B_\theta^2 \quad 32$$



$$B^2 = 4C^2 \cos^2 \theta + C^2 \sin^2 \theta \quad 33$$

$$B^2 = 4C^2(1 - \sin^2 \theta) + C^2 \sin^2 \theta \quad 34$$

$$B^2 = 4C^2 - 4C^2 \sin^2 \theta + C^2 \sin^2 \theta \quad 35$$

$$B^2 = 4C^2 - 3C^2 \sin^2 \theta \quad 36$$

$$B^2 = C^2(4 - 3\sin^2 \theta) \quad 37$$

Para poder medir los ángulos a partir de +X debemos realizar lo mismo que en I9, es decir:

$$\theta = \theta_S - 90^\circ$$

quedando entonces:

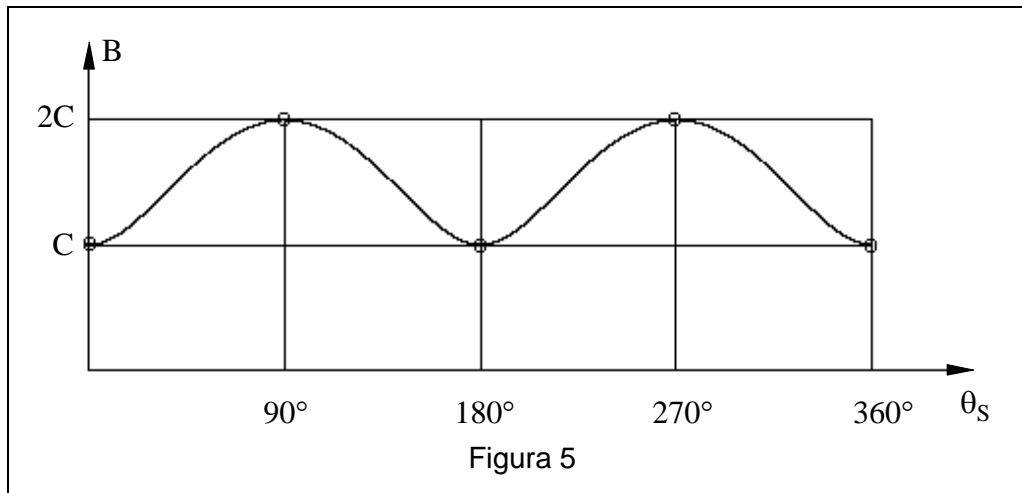
$$\sin \theta = \sin (\theta_S - 90^\circ) = \sin \theta_S \cos 90^\circ - \sin 90^\circ \cos \theta_S \quad 38$$

$$\sin \theta = -\cos \theta_S \quad 39$$

por lo que la Ecuación (37) se convierte en:

$$B = C\sqrt{4 - 3\cos^2 \theta_S} \quad 40$$

A la ley de variación del valor absoluto de la inducción a lo largo de una órbita podemos verla gráficamente en la Figura 5.



### 3.2.3. Determinación de la velocidad de rotación de la inducción

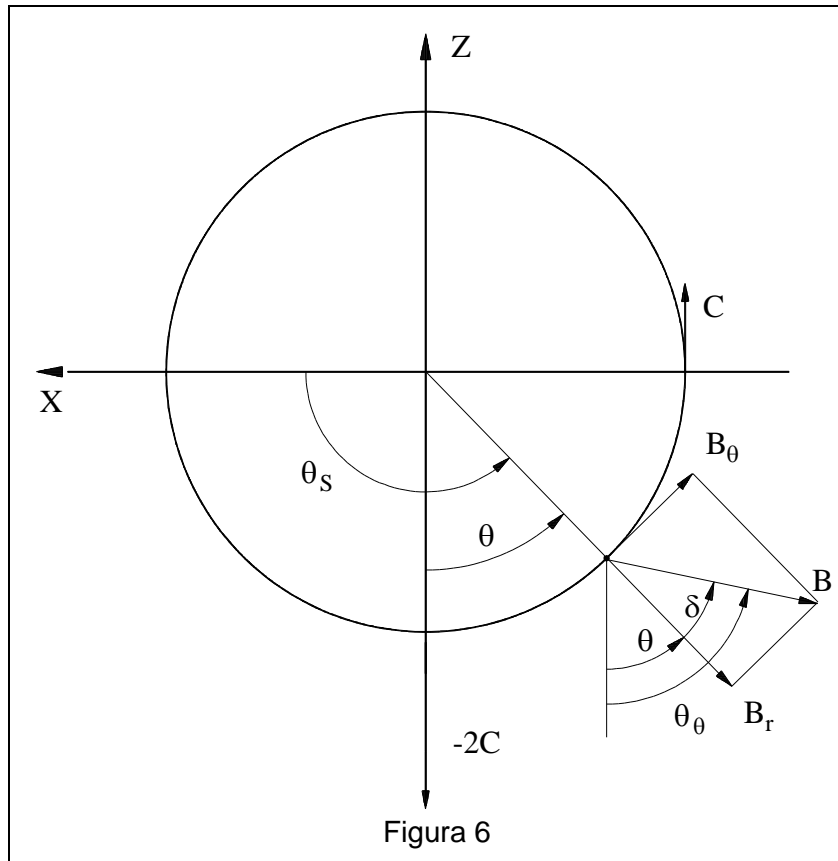
Observando la Figura 4 vemos que, con la convención de ejes adoptada, el valor de la inducción en el Polo Sur es  $-2C$  y totalmente radial, por lo que podemos decir que:

$$B_r = -2C \cos \theta \quad 41$$

Análogamente, el campo tangencial que es nulo en el Polo Sur, pasa a tomar el valor + C en el Ecuador, por lo que:

$$B_{\theta} = C \text{ sen } \theta \quad 42$$

En la figura 6 vemos la disposición de los campos en una posición genérica intermedia.



De la Figura 6 se desprende que:

$$\delta = \text{tg}^{-1} \frac{B_{\theta}}{B_r} = \text{tg}^{-1} \frac{C \text{ sen } \theta}{-2C \text{ cos } \theta} = \text{tg}^{-1} \left( -\frac{\text{tg } \theta}{2} \right) \quad 43$$

y como:

$$\theta_B = \theta + \delta \quad 44$$

resulta:

$$\theta_B = \theta + \text{tg}^{-1} \left( -\frac{\text{tg } \theta}{2} \right) \quad 45$$

A la velocidad angular de la inducción la obtenemos derivando la 45, con lo que:

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta} + \frac{d}{dt} \left[ \text{tg}^{-1} \left( -\frac{\text{tg } \theta}{2} \right) \right] \quad 46$$

Haciendo  $\frac{\text{tg } \theta}{2} = x$ , resulta:

$$\frac{d}{dt} \text{tg}^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+\left(\frac{\text{tg } \theta}{2}\right)^2} \quad 47$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\text{tg } \theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \text{tg } \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 48$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad 49$$

Reemplazando las Ecuaciones 47,48 y 49 en la Ecuación 46 resulta:

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta} - \left[ \frac{1}{1+\left(\frac{\text{tg } \theta}{2}\right)^2} \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \dot{\theta} \right] \quad 50$$

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta + \frac{2 \text{sen}^2 \theta}{2}} = \dot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{4 \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} \quad 51$$

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{4 \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta} \quad 52$$

Quedando por fin la expresión:

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{3 \cos^2 \theta + 1} \quad 53$$

El segundo término de la expresión 53 puede ser interpretado como la velocidad angular relativa de la inducción con respecto al radio vector que une el centro de la tierra con el punto de la órbita en cuestión.

A la expresión 53 podemos referirla al sistema cartesiano XZ haciendo:

$$\left. \begin{aligned} \theta_S &= \theta + 90^\circ \\ \theta &= \theta_S - 90^\circ \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_S \end{aligned} \right\} \quad 54$$

$$\cos \theta = \cos(\theta_S - 90^\circ) = \cos \theta_S \cos 90^\circ + \text{sen } \theta_S \text{sen } 90^\circ = \text{sen } \theta_S$$

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_S + \frac{2\dot{\theta}_S}{3\text{sen}^2 \theta_s + 1} \quad 55$$

Para analizar la velocidad relativa hacemos:

$$\Delta\dot{\theta}_{BS} = \dot{\theta}_B - \dot{\theta}_S = \frac{2\dot{\theta}_S}{3\text{sen}^2 \theta_s + 1} \quad 57$$

Para graficar la función calcularemos algunos valores particulares.

$$\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{\theta}_{BS} = 2\dot{\theta}_S \quad (\text{máximo})$$

$$\theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{\theta}_{BS} = \dot{\theta}_S/2 \quad (\text{mínimo})$$

$$\theta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{\theta}_{BS} = 2\dot{\theta}_S \quad (\text{máximo})$$

$$\theta = 270^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{\theta}_{BS} = \dot{\theta}_S/2 \quad (\text{mínimo})$$

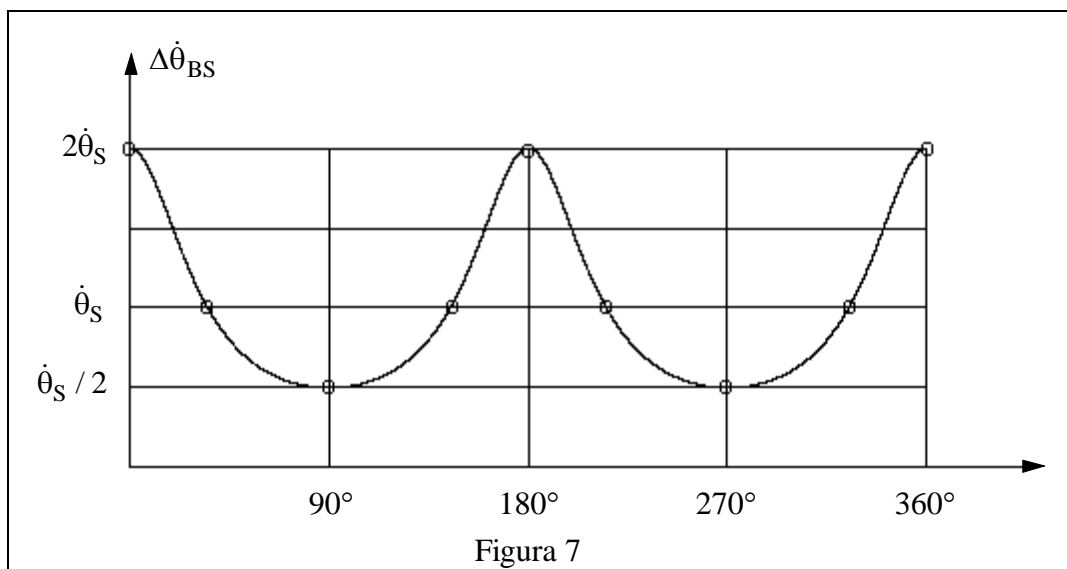
Podemos analizar también que valor de  $\theta_s$  hace que  $\Delta\dot{\theta}_{BS} = \dot{\theta}_S$

$$3\text{sen}^2 \theta_s + 1 = 2$$

$$\text{sen} \theta_s = \sqrt{1/2}$$

$$\theta_s = 35.265^\circ$$

Los valores encontrados quedan manifestados en el gráfico de la Figura 7.



### 3.3. LA SOLUCIÓN EN EL ESPACIO

Conservando el objetivo de la generación de un modelo matemático ideal de la inducción magnética terrestre libre de perturbaciones, analizaremos en este punto el caso más general. Dentro del mismo se considerará:

- La inclinación del dipolo magnético terrestre con respecto al eje geopolar sin tener en cuenta su desplazamiento con respecto al centro de la tierra.
- La inclinación del plano de la órbita la que, además, será supuesta estacionaria.
- La rotación de la Tierra

El estudio de este caso nos obliga a definir una nueva terna inercial ligada a la órbita, la que será obtenida mediante la rotación de la terna inercial referida a la Tierra un ángulo  $\theta$  (que llamaremos de aquí en más **ángulo de órbita**) realizada alrededor de X. Esta nueva terna será designada por:  $X_o, Y_o, Z_o$ .

La figura 8 muestra la disposición del dipolo y sus proyecciones en una posición genérica. En la misma podemos apreciar al dipolo **C** inclinado un ángulo **i** con respecto a Z habiendo girado el plano meridional que lo contiene un ángulo  $\alpha_T$  con respecto al eje X producto de la rotación terrestre alrededor del eje geopolar Z.

Del análisis de la figura surge que las distintas proyecciones del dipolo en la terna inercial terrestre son:

$$C_{XY} = C \text{sen } i \quad : \text{ contenida en el plano ecuatorial}$$

de la que se desprenden:

$$\left. \begin{aligned} C_X &= C_{XY} \cos \alpha_T = -C \text{sen } i \cos \alpha_T \\ C_Y &= C_{XY} \text{sen } \alpha_T = -C \text{sen } i \text{sen } \alpha_T \\ C_Z &= -C \cos i \end{aligned} \right\} \quad 57$$

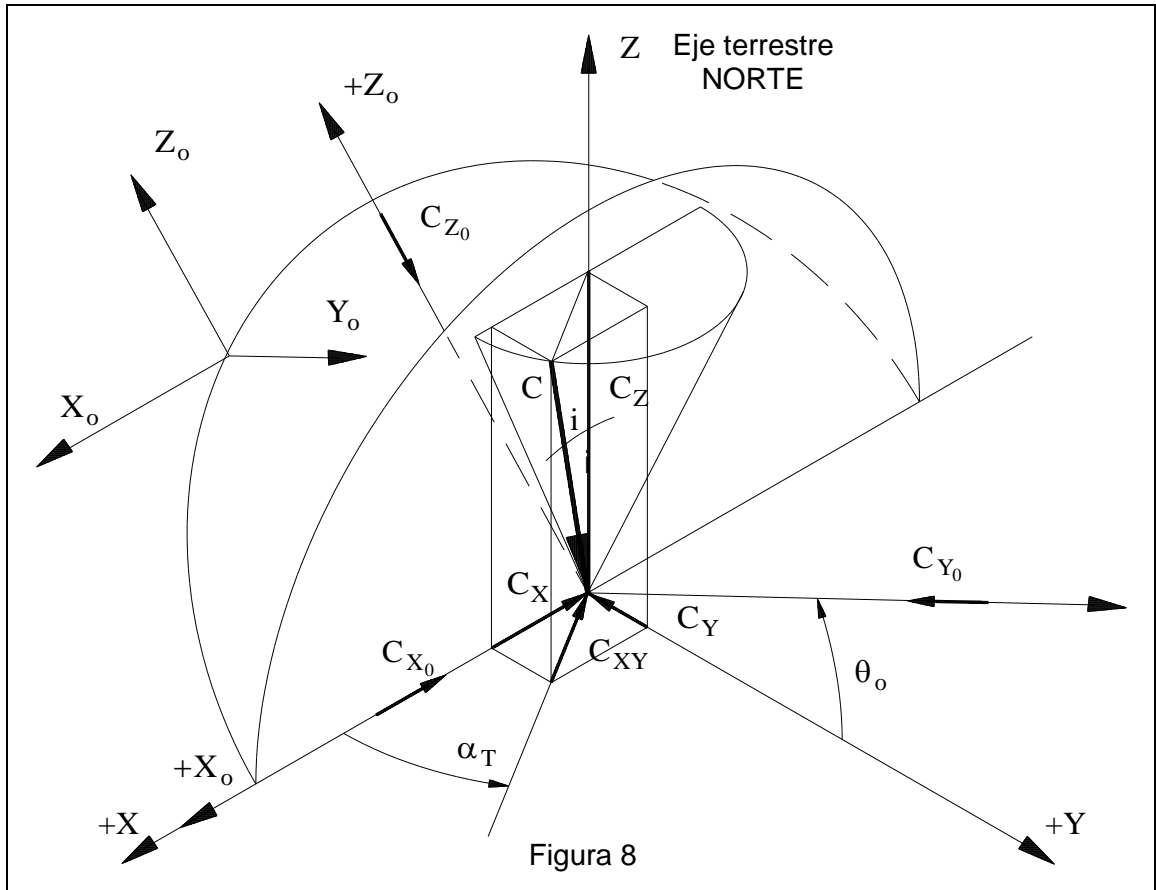


Figura 8

Para referir las proyecciones a la terna inercial orbital es suficiente considerar la rotación  $+\theta_0$  alrededor de  $X = X_0$  con lo que resulta:

$$\left. \begin{aligned} C_{X_0} &= C_X \\ C_{Y_0} &= C_Y \cos \theta_0 + C_Z \operatorname{sen} \theta_0 \\ C_{Z_0} &= C_Z \cos \theta_0 - C_Y \operatorname{sen} \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad 58$$

A partir de aquí usaremos el principio de superposición de los efectos. Esto es, cada uno de los dipolos encontrados mediante la ecuación 58 generará un campo en cada uno de los ejes de la terna inercial orbital.

De este modo definimos las siguientes componentes:

$B_{X_0 C_{X_0}}$  : componente de B en la dirección  $X_0$  producida por  $C_{X_0}$  .

$B_{X_0 C_{Y_0}}$  : componente de B en la dirección  $X_0$  producida por  $C_{Y_0}$  .

$B_{X_0 C_{Z_0}}$  : componente de B en la dirección  $X_0$  producida por  $C_{Z_0}$  .

$B_{Y_0 C_{X_0}}$  : componente de B en la dirección  $Y_0$  producida por  $C_{X_0}$  .

$B_{Y_0 C_{Y_0}}$  : componente de B en la dirección  $Y_0$  producida por  $C_{Y_0}$  .

$B_{Y_0C_{Z_0}}$  : componente de B en la dirección  $Y_0$  producida por  $C_{Z_0}$  .

$B_{Z_0C_{X_0}}$  : componente de B en la dirección  $Z_0$  producida por  $C_{X_0}$  .

$B_{Z_0C_{Y_0}}$  : componente de B en la dirección  $Z_0$  producida por  $C_{Y_0}$  .

$B_{Z_0C_{Z_0}}$  : componente de B en la dirección  $Z_0$  producida por  $C_{Z_0}$  .

Las proyecciones de las densidades de flujo totales en cada uno de los ejes de la terna inercial serán obtenidos como:

$$\left. \begin{aligned} B_{X_0} &= B_{X_0C_{X_0}} + B_{X_0C_{Y_0}} + B_{X_0C_{Z_0}} \\ B_{Y_0} &= B_{Y_0C_{X_0}} + B_{Y_0C_{Y_0}} + B_{Y_0C_{Z_0}} \\ B_{Z_0} &= B_{Z_0C_{X_0}} + B_{Z_0C_{Y_0}} + B_{Z_0C_{Z_0}} \end{aligned} \right\} \quad 59$$

para lo cual se necesita conocer cada una de las 9 componentes mostradas en el sistema de Ecuaciones 59.

La metodología que se usará para el análisis de la influencias de los dipolos  $C_{X_0}$  y  $C_{Z_0}$  será la misma que se utilizó en el caso plano.

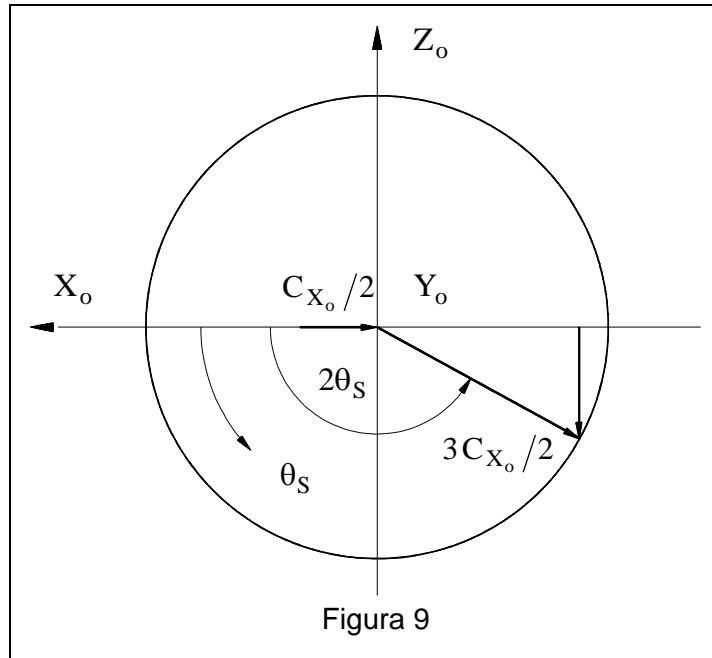
También es conveniente notar que el dipolo en la dirección  $Y_0$ , o sea  $C_{Y_0}$ , no tiene influencia en la generación de densidades según las direcciones  $X_0$  y  $Z_0$ .

Además, los dipolos  $C_{X_0}$  y  $C_{Z_0}$  no tienen influencia en la generación de densidades según  $Y_0$ .

### 3.3.1. Influencia de las componentes del dipolo en cada una de las componentes de la densidad.

#### 3.3.1.1. *Influencia de $C_{X_0}$*

En forma análoga a la Figura 3 podemos confeccionar la Figura 9



Del análisis de dicha Figura se desprende que:

$$\left. \begin{aligned} B_{X_0 C_{X_0}} &= \frac{C_{X_0}}{2} + \frac{3}{2} C_{X_0} \cos 2\theta_S \\ B_{Y_0 C_{X_0}} &= 0 \\ B_{Z_0 C_{X_0}} &= \frac{3}{2} C_{X_0} \sin 2\theta_S \end{aligned} \right\} \quad 60$$

Reemplazando  $C_{X_0}$  por su igual obtenido del sistema de Ecuaciones 58 queda:

$$\begin{aligned} B_{X_0 C_{X_0}} &= -\frac{C}{2} \sin i \cos \alpha_T + \frac{3}{2} C \sin i \cos \alpha_T \cos 2\theta_S \\ B_{X_0 C_{X_0}} &= -\frac{C}{2} \sin i \cos \alpha_T (1 + 3 \cos 2\theta_S) \end{aligned} \quad 61$$

La segunda Ecuación queda:

$$B_{Y_0 C_{X_0}} = 0 \quad 62$$

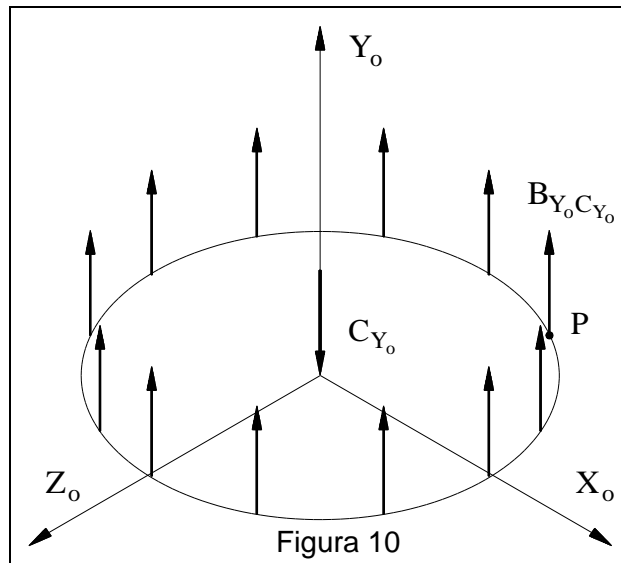
Reemplazando  $C_{X_0}$  por su igual obtenida del sistema de Ecuaciones 58 en la tercera queda:

$$B_{Z_0 C_{X_0}} = -\frac{3}{2} C \sin i \cos \alpha_T \sin 2\theta_S \quad 63$$



### 3.3.1.2. Influencia de $C_{Y_0}$

La proyección del dipolo según  $Y_0$ , o sea  $C_{Y_0}$ , no produce inducción en los ejes  $X_0$  y  $Z_0$  pero genera una inducción constante en un instante dado y siempre perpendicular al plano de la órbita según lo muestra la Figura 10.



Los valores de las proyecciones inducidas son:

$$\left. \begin{aligned} B_{X_0C_{Y_0}} &= 0 \\ B_{Y_0C_{Y_0}} &= -C_{Y_0} \\ B_{Z_0C_{Y_0}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 64$$

Reemplazando  $C_{Y_0}$  por su valor obtenido del sistema de ecuaciones 58, el sistema de Ecuaciones 64 queda:

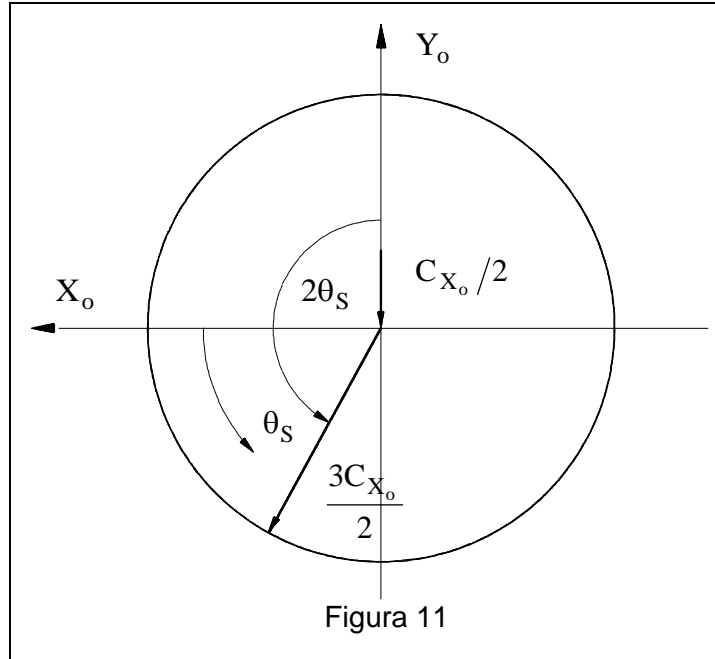
$$B_{X_0C_{Y_0}} = 0 \quad 65$$

$$B_{Y_0C_{Y_0}} = C(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \cos \theta_0 + \cos i \text{ sen } \theta_0) \quad 66$$

$$B_{Z_0C_{Y_0}} = 0 \quad 67$$

### 3.3.1.3. Influencia de $C_{Z_0}$

Haciendo una representación análoga a la de la figura 9, analizaremos la Figura 11.



De dicha representación se desprende que:

$$\left. \begin{aligned} B_{X_o C_{Z_o}} &= \frac{3}{2} C_{Z_o} \operatorname{sen} 2\theta_S \\ B_{Y_o C_{Z_o}} &= 0 \\ B_{Z_o C_{Z_o}} &= \frac{C_{Z_o}}{2} - \frac{3}{2} C_{Z_o} \cos 2\theta_S \end{aligned} \right\} \quad 68$$

Reemplazando  $C_{Z_o}$  por su valor obtenido del sistema de ecuaciones 58, la primera Ecuación queda:

$$\begin{aligned} B_{X_o C_{Z_o}} &= -\frac{3}{2} (-C \cos i \cos \theta_o + C \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \alpha_T \operatorname{sen} \theta_o) \operatorname{sen} 2\theta_S \\ B_{X_o C_{Z_o}} &= -\frac{3}{2} C (\operatorname{sen} i \operatorname{sen} \alpha_T \operatorname{sen} \theta_o - \cos i \cos \theta_o) \operatorname{sen} 2\theta_S \end{aligned} \quad 69$$

La segunda Ecuación queda:

$$B_{Y_o C_{Z_o}} = 0$$

y la tercera:

$$\begin{aligned} B_{Z_o C_{Z_o}} &= \frac{1}{2} (-C_Y \operatorname{sen} \theta_o + C_Z \cos \theta_o) - \frac{3}{2} (-C_Y \operatorname{sen} \theta_o + C_Z \cos \theta_o) \cos 2\theta_S \\ B_{Z_o C_{Z_o}} &= \frac{1}{2} C \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \alpha_T \operatorname{sen} \theta_o - \frac{1}{2} C \cos i \cos \theta_o - \frac{3}{2} C \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \alpha_T \operatorname{sen} \theta_o \cos 2\theta_S + \\ &\quad + \frac{3}{2} C \cos i \cos \theta_o \cos 2\theta_S \end{aligned}$$

$$B_{Z_o C_{Z_o}} = \frac{C}{2}(1 - 3\cos 2\theta_S)\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \frac{C}{2}(1 - 3\cos 2\theta_S)\cos i \cos \theta_o$$

$$B_{Z_o C_{Z_o}} = \frac{C}{2}(1 - 3\cos 2\theta_S)(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \cos i \cos \theta_o) \quad 71$$

### 3.3.2. Cálculo de las componentes de la inducción y su valor absoluto

#### 3.3.2.1. Cálculo de $B_{X_o}$

Con las Ecuaciones 61, 65 y 69 reemplazadas en la primera de las ecuaciones del sistema 59 resulta:

$$B_{X_o} = -\frac{C}{2}(1 + 3\cos 2\theta_S)\text{sen } i \cos \alpha_T + 0 - \frac{3}{2}C(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \cos i \cos \theta_o)\text{sen } 2\theta_S$$

$$B_{X_o} = C\left[-\frac{1}{2}(1 + 3\cos 2\theta_S)\text{sen } i \cos \alpha_T - \frac{3}{2}(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \cos i \cos \theta_o)\text{sen } 2\theta_S\right] \quad 72$$

#### 3.3.2.2. Cálculo de $B_{Y_o}$

Con las ecuaciones 62, 66 y 70 reemplazadas en la segunda de las Ecuaciones del sistema 59 obtenemos:

$$B_{Y_o} = C(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \cos \theta_o + \cos i \text{ sen } \theta_o) \quad 73$$

#### 3.3.2.3. Cálculo de $B_{Z_o}$

Con las ecuaciones 63, 67 y 71 reemplazadas en la tercera de las Ecuaciones del sistema 59 obtenemos:

$$B_{Z_o} = -\frac{3}{2}C\text{sen } i \cos \alpha_T \text{sen } 2\theta_S + \frac{C}{2}(1 - 3\cos 2\theta_S)(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \cos i \cos \theta_o)$$

$$B_{Z_o} = C\left[-\frac{3}{2}\text{sen } i \cos \alpha_T \text{sen } 2\theta_S + \frac{1}{2}(1 - 3\cos 2\theta_S)(\text{sen } i \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } \theta_o - \cos i \cos \theta_o)\right] \quad 74$$

#### 3.3.2.4. Valor absoluto de la inducción

El valor absoluto de la inducción se obtiene como:

$$B = \sqrt{B_{X_o}^2 + B_{Y_o}^2 + B_{Z_o}^2} \quad 75$$

### 3.3.3. Cálculo de las derivadas de las componentes de la inducción

Sabiendo que  $\alpha_T$  y  $\theta_S$  son el ángulo girado por la Tierra y el satélite respectivamente en su órbita resultará:

$$\frac{d\alpha_T}{dt} = \omega_T \quad : \text{Velocidad angular de la Tierra.}$$

$$\frac{d\theta_S}{dt} = \omega_S \quad : \text{Velocidad angular orbital del satélite.}$$

Derivando las Ecuaciones 61, 65 y 69 obtenemos:

$$\frac{dB_{X_o C_{X_o}}}{dt} = \frac{C}{2} \text{sen } i \left[ 6\omega_S \cos \alpha_T \text{sen } 2\theta_S + \omega_T \text{sen } \alpha_T (1 + 3 \cos 2\theta_S) \right] \quad 76$$

$$\frac{dB_{X_o C_{Y_o}}}{dt} = 0 \quad 77$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_{X_o C_{Z_o}}}{dt} = -\frac{3}{2} C \left[ \text{sen } i \text{sen } \theta_o (\omega_T \cos \alpha_T \text{sen } 2\theta_S + 2\omega_S \cos \alpha_T + 2\omega_S \text{sen } \alpha_T \cos 2\theta_S) \right. \\ \left. - 2\omega_S \cos i \cos \theta_o \cos 2\theta_S \right] \quad 78 \end{aligned}$$

Resultando:

$$\dot{B}_{X_o} = \dot{B}_{X_o C_{X_o}} + \dot{B}_{X_o C_{Y_o}} + \dot{B}_{X_o C_{Z_o}} \quad 79$$

la derivada de la componente de la inducción en el eje inercial  $X_o$ .

Derivando las Ecuaciones 62, 66 y 70 obtenemos:

$$\frac{dB_{Y_o C_{X_o}}}{dt} = 0 \quad 80$$

$$\frac{dB_{Y_o C_{Y_o}}}{dt} = C\omega_T \text{sen } i \cos \alpha_T \cos \theta_o \quad 81$$

$$\frac{dB_{Y_o C_{Z_o}}}{dt} = 0 \quad 82$$

Resultando:

$$\dot{B}_{Y_o} = \dot{B}_{Y_o C_{X_o}} + \dot{B}_{Y_o C_{Y_o}} + \dot{B}_{Y_o C_{Z_o}} \quad 83$$

la derivada de la componente de la inducción en el eje inercial  $Y_o$ .

Derivando las Ecuaciones 63, 67 y 71 obtenemos:

$$\frac{dB_{Z_o C_{X_o}}}{dt} = \frac{3}{2} C \text{ sen } i (\omega_T \text{ sen } \alpha_T \text{ sen } 2\theta_S - 2\omega_S \cos 2\theta_S \cos \alpha_T) \quad 84$$

$$\frac{dB_{Z_o C_{Y_o}}}{dt} = 0 \quad 85$$

$$\frac{dB_{Z_o C_{Z_o}}}{dt} = \frac{C}{2} \left[ \omega_T \text{ sen } i \text{ sen } \theta_o \cos \alpha_T (1 + 3 \cos 2\theta_S) + 6\omega_S \text{ sen } 2\theta_S (\text{sen } i \text{ sen } \theta_o \text{ sen } \alpha_T - \cos i \cos \theta_o) \right] \quad 86$$

Resultando:

$$\dot{B}_{Z_o} = \dot{B}_{Z_o C_{X_o}} + \dot{B}_{Z_o C_{Y_o}} + \dot{B}_{Z_o C_{Z_o}} \quad 87$$

la derivada de la componente de la inducción en el eje inercial  $Z_o$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Como es conocido, el campo magnético terrestre está influenciado por un sinnúmero de perturbaciones de distintos tipos que le ocasionan una gran cantidad de distorsiones en su intensidad y direccionalidad. Sin embargo, en el caso particular que nos preocupa, esto es en la producción de cuplas amortiguadoras de un cuerpo en órbita y no en el control de su actitud, consideramos que el estudio y las formulaciones aquí obtenidas son suficientemente válidas para el análisis de la dinámica de un pequeño satélite en órbita.

Por lo antes mencionado, justificamos plenamente el uso del conjunto de ecuaciones para la realización de las siguientes tareas:

- Simulación numérica de la dinámica del cuerpo.
- Simulación física de la dinámica del cuerpo.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

- SPACE SYSTEMS ENGINEERING - F. Riley & J. D. Sailor - Mc Graw Hill - 1962.

- MODERN SPACECRAFT DYNAMICS & CONTROL - M. Kaplan - John Wiley & Sons - 1976.
- SCIENTIFIC USES OF EARTH SATELLITES - J. A. Van Allen - The University of Michigan Press - 1958.
- ELECTROMAGNETIC DEVICES - H. C. Roters - John Wiley & Sons - 1955.
- GUIDANCE AND CONTROL II - Progress in astronautics and aeronautics - Vol. 13 - Academic Press New York - 1964.
- HANDBOOK OF ASTRONAUTICAL ENGINEERING - H. H. Koelle - Mc Graw Hill - 1961.
- SATELLITE ENVIRONMENT HANDBOOK - F. Johnson - Stanford University Press 1965.