



FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI



Universidad Nacional de  
Santiago del Estero  
Facultad de Ciencias  
Exactas y Tecnologías  
Santiago del Estero - República Argentina

## ANÁLISIS DE VARIACIONES DE LAS VELOCIDADES CRÍTICAS DE UN ROTOR PRODUCTO DE CAMBIOS DE RIGIDEZ DE LOS COJINETES

Fernando Palmieri <sup>\*1</sup>, Darío Violante <sup>1</sup> y Andreas Klempnow <sup>2</sup>

<sup>\*1</sup> Facultad Regional San Nicolás. Universidad Tecnológica Nacional  
Colon 332 San Nicolás Buenos Aires Argentina  
correo-e: fpalmieri@frsn.utn.edu.ar

<sup>2</sup> Facultad Regional Delta. Universidad Tecnológica Nacional  
San Martín 1171 Campana Buenos Aires Argentina.

### RESUMEN

Las turbomáquinas modernas logran elevadas potencias de generación con menores dimensiones físicas respecto de sus predecesoras, esto implica que deben funcionar en condiciones donde los rotores se comportan como rotores flexibles y superan dos o más de sus velocidades críticas. Es por ello que el conocimiento de dichas velocidades es fundamental para su diseño, operación y mantenimiento.

Las velocidades críticas se relacionan con la distribución de masas del rotor, con su rigidez, con la rigidez de los cojinetes y pedestales. En este trabajo se analiza, como se comportan las velocidades críticas de un rotor real de una turbina de una central de generación, ante la variación de las propiedades de rigidez de sus cojinetes.

Se utiliza el método de la matriz de transferencia para determinación numérica de formas modales y frecuencias críticas de un rotor. Dicho método es de sencilla aplicación, se basa íntegramente en ecuaciones de la mecánica clásica y permite obtener resultados adecuados, empleando poca capacidad de cálculo y sin la necesidad de tener un modelo sólido del equipo. Además, es un método probado en la bibliografía del tema.

Las características del cojinete se estiman a partir de las dimensiones de los elementos que interactúan, de las propiedades físicas del lubricante y de los elementos mecánicos en contacto, empleando modelos y datos obtenidos de la literatura.

Finalmente, los resultados se utilizan para estudiar cómo, ante pequeñas variaciones de alineación y de temperatura del lubricante, se producen variaciones de las velocidades críticas del equipo real una vez en funcionamiento. A partir de ello se pueden comprender mejor ciertas diferencias que existen en las respuestas dinámicas de un par de equipos idénticos.

**Palabras Claves:** Velocidades críticas, Turbogenerador, Matriz de Transferencia.



## 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de las velocidades críticas es fundamental para las modernas turbo-máquinas. Un correcto diseño debe considerar que la máquina pueda superar, en caso de ser necesario, dichas velocidades sin comenzar a vibrar con amplitudes excesivas. La operación segura de la misma requiere también un conocimiento de estas velocidades por parte de los operarios.

La demanda creciente de equipos de alta potencia, elevado número de vueltas y bajo peso, ocasiona que en muchos casos, estos equipos funcionen por encima de una o varias de sus velocidades críticas. Además, las alteraciones que pueda sufrir el equipo en operación, con el correr de los años, pueden ocasionar que las mismas sufran ligeras variaciones. Algunas de estas variaciones se pueden deber a cambios de la viscosidad del lubricante, desgaste de los cojinetes o a modificaciones intencionales.

Como sugiere la literatura específica [1,2], la forma constructiva de los cojinetes puede alterar las velocidades críticas de un rotor. En líneas generales cuando la rigidez de los cojinetes es muy alta respecto a la del eje, la primera velocidad crítica se asemejará a la correspondiente a la primera forma modal de deformación como eje flexible soportado por cojinetes rígidos. Si, en cambio, la rigidez de los cojinetes es muy baja respecto de la del eje, la primera velocidad crítica se asemejará mas a la de un eje rígido soportado sobre resortes ideales. Finalmente las fuerzas viscosas introducidas por los cojinetes en el sistema pueden atenuar de la respuesta dinámica cuando el rotor gira en las velocidades críticas, pero también pueden producir inestabilidades o vibraciones auto inducidas.

Actualmente, el método de los elementos finitos y el método de la matriz de transferencia son los dos caminos más usuales para analizar el comportamiento de los sistemas rotor-cojinete. La aplicación de modelos de elementos finitos en dinámica de rotores ha sido exitosamente verificada [3]. No obstante, el principal inconveniente de este camino es que emplea una gran capacidad de cálculo, la programación es compleja y, en general, requiere un conocimiento preciso de la geometría.

El método de la matriz de transferencia, en cambio, resuelve el problema dinámico en el dominio de las frecuencias, utilizando un procedimiento de aproximación que consiste en partir de un extremo del rotor, donde las condiciones de contorno son conocidas. Luego usando expresiones lineales simples se va determinando los parámetros del rotor en determinados puntos característicos a lo largo del mismo (cambios de sección, apoyos intermedios, rodetes de alabes, etc.). Se continúa avanzando en forma progresiva hasta llegar al otro extremo. La satisfacción de las condiciones de contorno de este último extremo y en todos los puntos intermedios permite



plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar las velocidades críticas. Luego con esa solución se puede obtener el estado del rotor en esos puntos característicos intermedios a través de las matrices de transferencia.

Este método tiene como principal ventaja que no requiere almacenar o manipular grandes matrices de datos, se puede trabajar con datos concretos, como son los diámetros del rotor y las masas de los componentes y resulta más rápido para obtener resultados cuando la capacidad de cálculo es reducida.

La idea fundamental del método de las matrices de transferencias fue propuesta por Holtzer para sistemas sometidos a vibraciones torsionales, luego Myklestad lo generalizó para sistemas sometidos a la flexión [4]. Desde entonces distintas publicaciones fueron ofreciendo generalizaciones del método para sistemas rotor-cojinete considerando el uso de la variable compleja, el comportamiento en dos direcciones, incluyendo los efectos giroscópicos, de torsión y flexión combinadas, usando distintos modelos para los cojinetes, etc. [3]

Como sugiere Murphy [5] este método en algunos casos puede presentar errores en la determinación de algunas de las velocidades críticas, pero existen técnicas para asegurar la precisión y mejorar los resultados. Este autor, en otro trabajo, sostiene que puede limitarse el error a un máximo del siete por ciento [6] si se tiene cuidado en optimizar correctamente el algoritmo de cálculo.

Lund en su trabajo [7] sugirió incluir la influencia de los soportes del rotor en el modelo incorporando constantes de rigidez y amortiguación de los cojinetes. De esta forma muchos autores han incluido los soportes y cojinetes [1,4] como elementos que se representa mediante un coeficiente o una matriz de coeficientes dentro del método de la matriz de transferencia, algunos de ellos tomaron modelos lineales, otros han considerado en su modelo el ancho del cojinete [8], e incluso se han considerando coeficientes no lineales [9].

Para determinar estos coeficientes existen muchas expresiones que se relacionan con las dimensiones físicas (diámetro, ancho y juego radial), con la viscosidad del lubricante y la velocidad de rotación del equipo [1]. García en su Tesis [10] hace una recopilación de las formas de modelar numéricamente y determinar experimentalmente estos coeficientes y Sánchez en un trabajo reciente [11] analiza la influencia de la viscosidad en los coeficientes dinámicos de los cojinetes.

En este trabajo se analiza las variaciones de las velocidades críticas de un rotor de una turbina de generación ante variaciones en el juego radial en los cojinetes, para ello se emplea el método de la matriz de transferencia en la formulación descrita por Vance [1] que ha sido descrita en un trabajo previo [12] y los coeficientes de los cojinetes se determinan usando el modelo empleado por García [10].



Este análisis se empleo para poder comprobar si variaciones de juego radial podían explicar las diferencias de respuesta durante el arranque de máquinas similares.

## 2. EQUIPO ANALIZADO

El equipo estudiado es una turbina Westinhouse 251 B11, que se muestra esquemáticamente en la figura 1. La turbina es de giro anti-horario y se acopla a un generador de giro horario viendo la máquina desde el escape. El rotor de la turbina de gas tiene una masa de aproximadamente 16000kg, una velocidad nominal de 5420rpm y se acopla al generador por una caja reductora simple. La potencia normal de funcionamiento es de 45MW y el combustible empleado es gas natural.

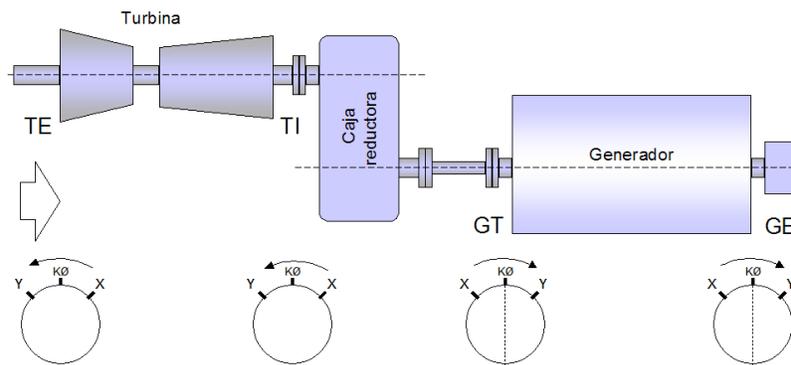


Figura 1: Esquema de la Turbina a gas con los puntos de medición en los cojinetes.

El rotor analizado está formado por dos ejes unidos por un acople mediante tornillos, el eje de la turbina propiamente dicho y el del piñón de la caja reductora. En la Figura 2 se presentan fotos de ambas partes y en el esquema de la Figura 3 se muestra como es el conjunto armado.



Figura 2 Fotos del eje y piñón que forman el rotor

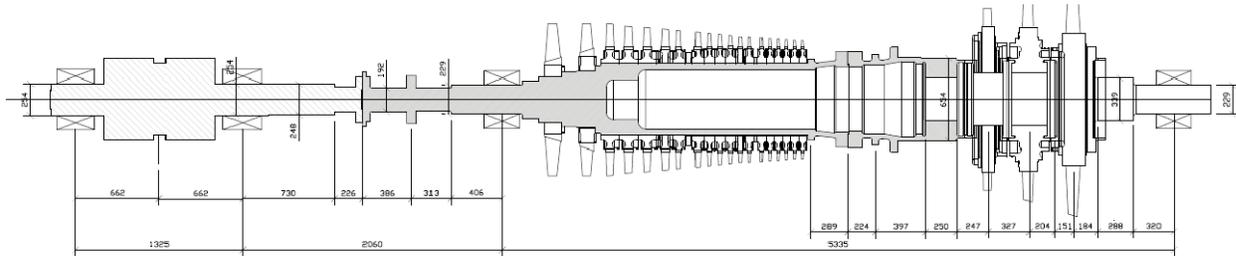


Figura 3 Esquema del conjunto armado

La tabla 1, resume las propiedades de los cuatro cojinetes del rotor cuyas constantes se deben determinar numéricamente. Todos los cojinetes se encuentran lubricados con aceite ISO 46 y la temperatura de operación promedio es de entre 45 y 50°C. La viscosidad del aceite en ese rango de temperaturas se encuentra entre 35 y 39 cSt.

Tabla 1: Dimensiones de los cojinetes

Cojinete	Posición	Carga estática	Diámetro	Ancho
1	Reductor lado libre	14,9kN	254mm	305mm
2	Reductor lado acople	17,2kN	254mm	305mm
3	Turbina lado Acople	61,7kN	230mm	275mm
4	Turbina lado Libre	58,7kN	230mm	275mm

### 3. MODELADO DE LAS CONSTANTES DINÁMICAS DE LOS COJINETES.

Las constantes de rigidez del cojinete dependen de la excentricidad del rotor respecto del cojinete y el ángulo de inclinación de la excentricidad máxima respecto de la vertical. A modo de ejemplo, algunas de las expresiones extraídas de la literatura [1,10] para determinar numéricamente estas constantes de resorte de los cojinetes son las siguientes:

$$K_{xx} = \frac{F}{C} 4 \{ 2\pi^2 + (16 - \pi^2)\epsilon^2 \} Q(\epsilon) \quad (1)$$

$$K_{yy} = \frac{F}{C} 4 \frac{ \{ \pi^2 + (32 + \pi^2)\epsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\epsilon^4 \} }{ (1 - \epsilon^2) } Q(\epsilon) \quad (2)$$

$$Q(\epsilon) = \frac{1}{ \{ \pi^2 + (16 - \pi^2)\epsilon^2 \}^{3/2} } \quad (3)$$

Donde F es la carga del cojinete; C es el juego radial y  $\epsilon$  es la relación entre la excentricidad y el juego radial llamada excentricidad adimensional.



La excentricidad para un cojinete de película completa se relaciona con las dimensiones del cojinete mediante el número de Sommerfeld [1] por la siguiente expresión:

$$S = \frac{(1-\epsilon^2)}{\pi(L/D)^2 \epsilon} \sqrt{\frac{1}{\pi^2 + (16-\pi^2)\epsilon^2}} \quad (4)$$

Donde S es el número de Sommerfeld ( $S = [(\mu NLD)/F][D/(2C)]^2$ ), L es el largo de cojinete, D el diámetro, C el juego radial, N las rpm del rotor, F es la carga del cojinete y C es el juego radial del mismo.

## 4. RESULTADOS.

### 4.1. Constantes de los cojinetes

Las constantes de rigidez se determinaron inicialmente como promedio para el rango de velocidades de trabajo de la turbina. El juego radial se estimó a partir de los diagramas polares obtenidos de los sensores de proximidad montados en el equipo. Para ello se graficó (Figura 4) la posición promedio durante el arranque como se muestra a continuación.

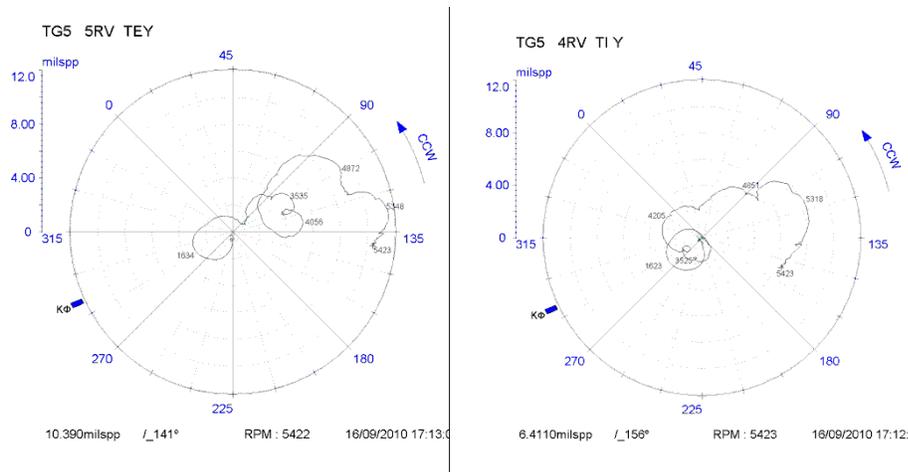


Figura 4 Diagramas polares de arranque

De estos diagramas se deduce que el eje tiene al menos 12mils (300µm) para moverse, entonces ante la imposibilidad de desarmar el equipo para medir este juego se tomó la decisión de resolver el modelo numérico con juegos radiales de entre 200 y 600µm.

Los valores promedio de rigidez vertical obtenidos se resumen en la Tabla 2. La variación teórica de la excentricidad con de la turbina se puede observar en la Figura 5 y la variación de la rigidez vertical del cojinete 1 y 3 con la velocidad angular para un juego radial de 400µm en la Figura 6.



5 al 7 de Octubre de 2016

Tabla 2. Rigidez vertical de los cojinetes

Cojinete	Posición	Carga estática
1	Reductor lado libre	42,2MN/m
2	Reductor lado acople	55,9MN/m
3	Turbina lado Acople	200,1MN/m
4	Turbina lado Libre	190,2 MN/m

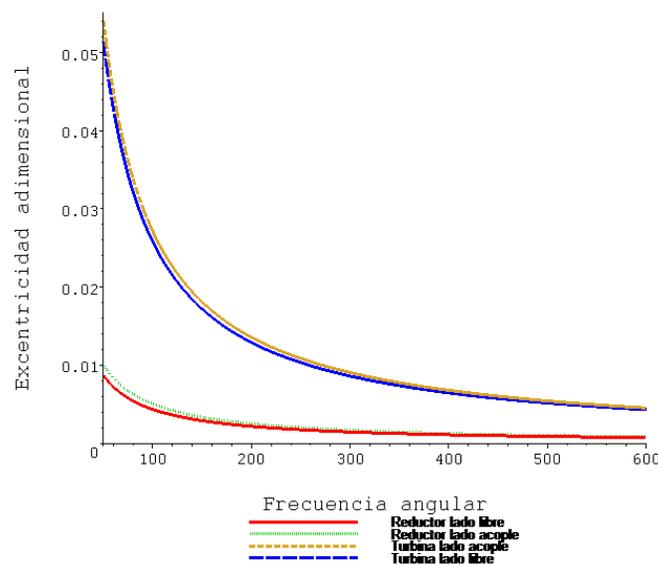


Figura 5: Variación teórica de la excentricidad con la velocidad angular de la turbina

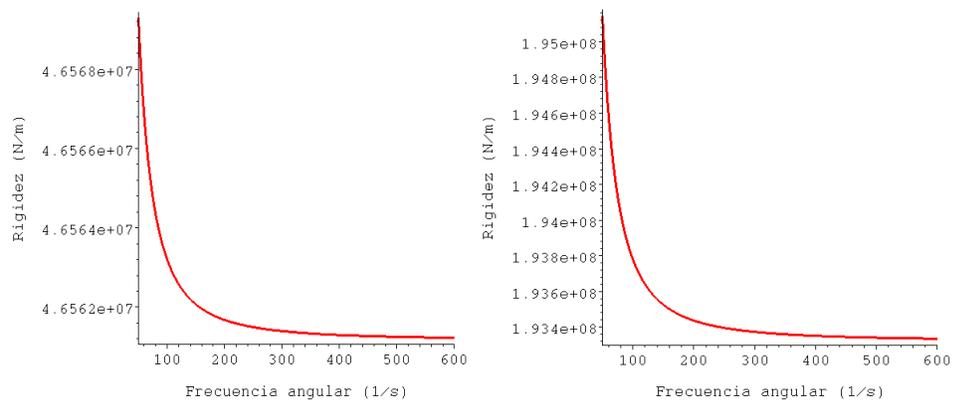


Figura 6: Variación teórica de la rigidez vertical de los cojinetes 1 y 3 con la velocidad angular de la turbina



Una vez obtenidos estos resultados se observó que el número de rpm no alteraba demasiado las constantes de rigidez de los cojinetes y se pasó a analizar como variaban estas últimas con variaciones de excentricidad (Figura 7) y del juego radial de los cojinetes (Figura 8)

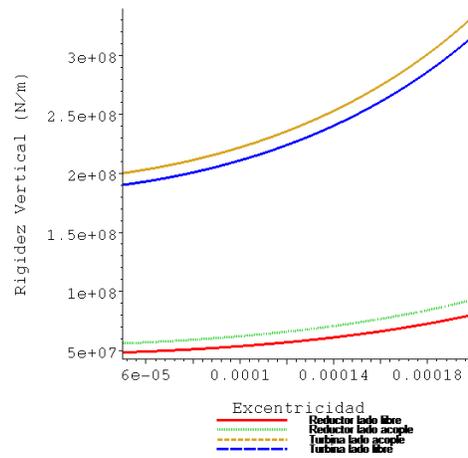


Figura 7: Variación teórica de la rigidez vertical de los cojinetes con la excentricidad del eje

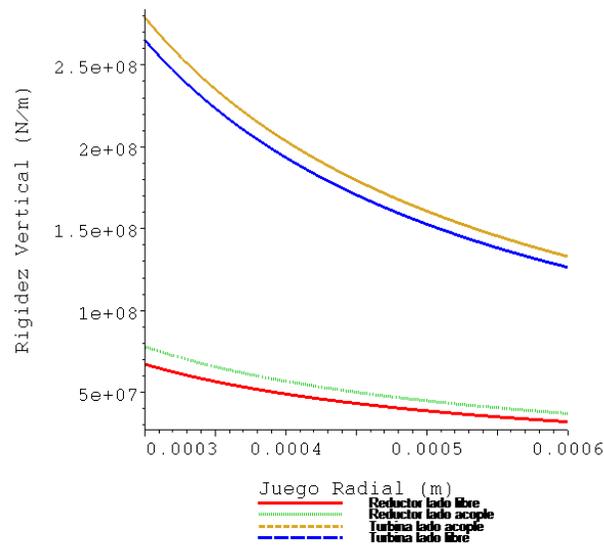


Figura 8: Variación teórica de la rigidez vertical de los cojinetes con el juego radial del eje

A partir de estos resultados se observa que un incremento del juego radial de un 100% disminuye las constantes de los cojinetes en un 40% y además que las variaciones de la excentricidad del rotor durante el funcionamiento afectan más a las constantes de los cojinetes de la turbina que las del eje del piñón.



#### 4.2. Frecuencias naturales del rotor

Una vez determinadas las expresiones numéricas de variación de las constantes de rigidez de los cojinetes, se incluyen estas constantes en el algoritmo de determinación de frecuencias modales y se obtienen las velocidades críticas del rotor real. En un estudio previo [12] estas constantes se habían estimado a partir de la rigidez del propio eje y se habían obtenido las siguientes velocidades críticas.

Tabla 3: velocidades críticas sin considerar rigidez real de los cojinetes

Velocidad crítica	
1	1774rpm
2	2805rpm
3	5524rpm

En la tabla 4 se resumen las velocidades críticas obtenidas por el método de la matriz de transferencia incluyendo las constantes de los cojinetes para distintos valores de juego radial y en la tabla 5 para distintos valores de excentricidad

Tabla 4: velocidades críticas para valores crecientes de juego radial

Velocidad crítica	Juego Radial ( $\mu\text{m}$ )			
	300	400	500	600
1	1638rpm	1637rpm	1640rpm	1642rpm
2	4795rpm	4800rpm	4808rpm	4816rpm
3	6034rpm	6056rpm	6010rpm	5986rpm

Tabla 5: velocidades críticas para valores crecientes de juego radial

Velocidad crítica	Excentricidad ( $\mu\text{m}$ )			
	20	60	120	180
1	1640rpm	1639rpm	1639rpm	1638rpm
2	4793rpm	4785rpm	4801rpm	4759rpm
3	6025rpm	6057rpm	6010rpm	6293rpm



Por último en la figura 9 se muestran las lecturas de vibraciones de los cojinetes de la turbina durante un arranque completo hasta la velocidad de régimen donde se observa claramente que alrededor de las 1700rpm se encuentra la primera de las velocidades críticas. La segunda es más difícil de identificar y la tercera se encuentra un poco por encima de la de operación

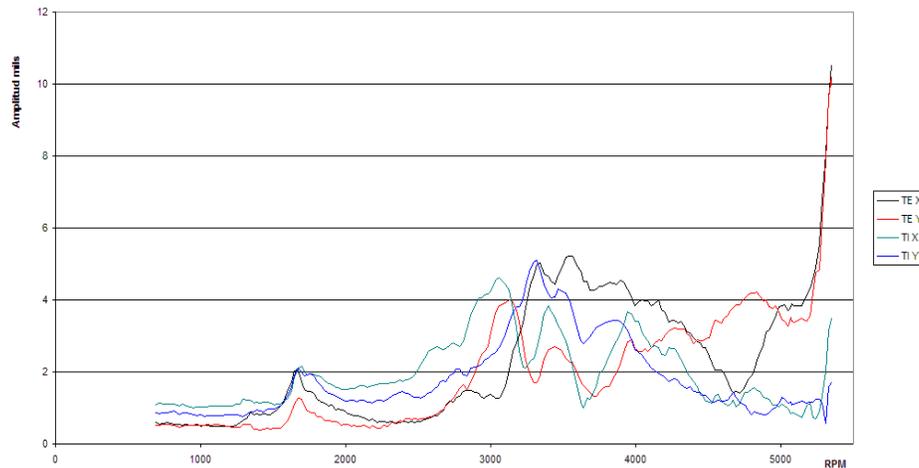


Figura 8: Vibraciones de la turbina durante el arranque

## 5. CONCLUSIONES

Al incluir las constantes del cojinete la segunda velocidad crítica es la que más se modificó respecto del modelo previo.

Las velocidades críticas determinadas por el método de la matriz de transferencia con la inclusión de constantes de rigidez obtenidas a partir de los modelos teóricos sufren variaciones leves si se modifica el juego del cojinete. La primera velocidad crítica sufre las menores variaciones.

En líneas generales al incrementarse el juego radial la segunda crítica se reduce, y lo mismo ocurre, si aumenta la excentricidad de equilibrio del rotor.

Si se comparan las velocidades críticas calculadas considerando este modelo de rigidez de cojinetes con el estudio previo sin incluir la rigidez de los cojinetes y con los resultados del rotor real, se observa que la segunda crítica del rotor real tiene un valor intermedio a ambos modelos.

Las variaciones de juego radial entre equipos no explican en una primera aproximación diferencias significativas en las respuestas dinámicas.

## 6. REFERENCIAS

[1] Vance J. M. *Rotordynamics of Turbomachinery*, Jhon Willey & Sons, New York, 1988.



FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI



Universidad Nacional de  
Santiago del Estero  
Facultad de Ciencias  
Exactas y Tecnologías  
Santiago del Estero - República Argentina

- [2] Muszynska A. *Rotordynamics*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, 2005.
- [3] Sheng-Chung Hsieh, Juhn-Horng Chen, An-Chen Lee. *A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems*. Journal of Sound and Vibration. 289, pp 294-333, 2006.
- [4] Meirovitch L. *Analytical Methods in Vibrations*. Londres. 1ª edición. The Macmillan Company. E.E.U.U. 1967.
- [5] Murphy B.T. ; Vance J. M. *An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turbomachinery*. Transactions of the ASME- Journal of Engineering for Power, vol. 105, pp 591-595, 1983.
- [6] Murphy B.T.; Vance J. M.; Tripp H. A. *Critical Speeds of turbomachinery: computer predictions & experimental Measurements*. Proceedings of the thirteenth turbomachinery symposium, pp 105-130, 1983.
- [7] Lund J.W. *Stability and damped critical speeds of flexible rotor in fluid films bearings*. Journal of engineering for industry, pp 1-9, 1973.
- [8] Ghasemalizadeh O. Mirzaee M. R. Sadeghi H. and Ahmadian M.T. *Rotor bearing system analysis using the transfer matrix method with thickness assumption of disk and bearing*. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering Vol. 2, N° 4, pp 206-213, 2008.
- [9] Lee A.C. Kang Y. and Liu S.L. *Steady-state analysis of a rotor mounted on nonlinear bearings by the transfer matrix method*. International Journal of Mechanical Science, Vol. 35, N°. 6, pp. 479-490, 1993.
- [10] García A. A. *Investigación analítica y numérica de las propiedades dinámicas de chumaceras hidrodinámicas con y sin desalineamiento. Tesis de doctorado presentada y aprobada en el Instituto Politécnico Nacional, México, 2006.*
- [11] Sánchez J. C. Muñoz J. y Melgar A. *Influencia de la viscosidad del lubricante en los coeficientes dinámicos de los cojinetes de fricción principales empleados en motores de combustión interna*. Revista da Associação Portuguesa de Análise Experimental de Tensões, Vol. 13, pp. 35-44, 2006.
- [12] Darío Violante, Fernando Palmieri, Andreas Klempnow, *Aplicación del método de la matriz de transferencia para la determinación de las formas modales y velocidades críticas en rotores flexibles*. Trabajo presentado en el III CAIM, Ciudad de Buenos Aires, Argentina, del 2 al 5 de octubre de 2012.