33 Cambios de registro en la geometría y el auxilio de simuladores para visualizar conceptos

María Patricia Garrido; Adriana Schilardi; Horacio Day

Resumen: Es conocido, en el contexto de las investigaciones en enseñanza de la matemática, que cuando se enseña geometría, frecuentemente, los temas son abordados desde un punto de vista netamente algebraico. Desatendiendo la comprensión de ideas y conceptos, que pueden orientar al alumno desde otros escenarios matemáticos. Esto no condice, con los objetivos propuestos en Álgebra y Geometría Analítica. Es decir, se establece qué se enseña con el fin de que el alumno desarrolle las capacidades intelectuales necesarias para resolver problemas. Y sin embargo se evade el problema, el contexto, y los registros de expresión, variables didácticas, que el docente emplea para lograr sus objetivos. El propósito de este trabajo es reflexionar sobre la importancia de los diferentes registros de representación, a la hora de la incorporación de un concepto, y sobre la capacidad de la visualización como fundamental para la adquisición de conceptos geométricos. Para lo cual se vale del auxilio de tics, que permiten mejorar el proceso de enseñanza, a través del uso de simuladores empleados en materiales curriculares para educación a distancia. Esta mediación pedagógica incorporada a la educación presencial mejora y potencia el aprendizaje. De esta manera se proponen estrategias didácticas, vinculadas a actividades, que involucran aspectos de la visualización, mediante el uso de simuladores, que reproducen un proceso y permiten visualizar un procedimiento para una mejor apropiación del concepto por parte del alumno.

Palabras claves: geometría, visualización, aprendizaje, simuladores, registros.

1. Introducción

En el aprendizaje de álgebra y geometría analítica, en primer año de las carreras de Ingeniería, el estudiante se encuentra en una etapa cognitiva de transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado.

Cuando se enseña a los alumnos un concepto geométrico, éste adquiere el status de objeto matemático; es decir, se les presenta como un ente abstracto. En matemática, la conceptualización o adquisición conceptual de un objeto matemático (noesis), debe necesariamente pasar por los distintos tipos de registros de representación semiótica.

"*Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación ….. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento." (Duval, 1999, pag 14).*

Para Duval, el análisis de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas conduce a la hipótesis: "*no hay noesis sin semiosis*" (Duval, 1999, pag 16). Considera asimismo, que la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación. Esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Los alumnos deben aprender a realizar como una actividad necesaria, conversiones en distintos registros. La coordinación entre ellos es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Este cambio de registros no se realiza en forma espontánea, pues el pensamiento moviliza un solo registro de representación. Bajo esta perspectiva, una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar a los alumnos con problemas. Así, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros. Además, es necesario aclarar que el rol del docente es guiar a los estudiantes en función de los comportamientos que deseen provocar, proporcionándoles los medios adecuados para ello.

En la enseñanza tradicional del álgebra y geometría, a menudo, el profesor se enfrenta con conceptos problemáticos en sí mismos. Esto hace que adopte una metodología puramente algorítmica en su enseñanza dado que es mucho más fácil de gestionar y evaluar.

La construcción de los conceptos geométricos está, por lo tanto, estrechamente relacionada con la capacidad de representar un objeto matemático en más de un registro, de convertir una representación de un registro en otro (conversión), y de realizar transformaciones en el interior de un mismo registro (tratamiento). La coordinación entre los distintos registros semióticos es fundamental en el proceso de comprensión. Cuando se privilegia algún registro semiótico en particular el aprendizaje permanece como mono-registro (por ejemplo, la algebraica, o la geométrica). Ciertamente, esto no excluye el desarrollo de algún tipo de comprensión en los alumnos la cual puede ser evaluada fácilmente y a corto término ser satisfactoria. Pero esta comprensión mono-registro representa un obstáculo mayor: en el momento en que la mayoría de los alumnos sale del contexto en el cual se realizó el aprendizaje, con frecuencia, se muestran incapaces de movilizar los conocimientos adquiridos y por tanto aquello que ellos "saben". De modo general una comprensión mono-registro es una comprensión que dificulta una transferencia. Una comprensión integrativa, es decir, una comprensión basada en la coordinación de los registros, aumenta notablemente esa posibilidad de transferencia. Entonces, la coordinación de los registros, se revela como necesaria en un aprendizaje específicamente centrado en la conversión de las representaciones; evitando su restricción a una simple actividad de tratamiento, como solemos hacer en todos los niveles

Según Artigue (1995) se ha comprobado que la enseñanza tradicional de la matemática tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica las cuales se evalúan sobre las competencias adquiridas en este dominio. De esta manera, los distintos temas que se desarrollan, dependen de las definiciones matemáticas de los objetos, perdiéndose el valor que tienen las conversiones entre registros para los aprendizajes, debido a que no se exploran de manera consistente las actividades que favorecen su articulación con otros medios de expresión y representación matemática que utilizan el uso simultáneo de varios registros de representación semiótica.

La Doctora Ismenia Guzmán (1998), en una investigación referida a la incidencia del enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica en el aprendizaje comenta: *"Para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. Plantear estos problemas es una tarea creativa para los profesores, pues este tipo de problemas, hasta ahora, son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemáticas. Aunque estos problemas parezcan fáciles a juicio de algunos profesores, la evidencia empírica demuestra otra cosa desde el punto de vista de los alumnos, como lo muestra nuestro estudio y algunos otros".*

Para atender a esta problemática es necesario construir propuestas que posibiliten el mejoramiento del proceso de enseñanza incorporando en ellas distintos registros de representación. Pero esto sólo será posible con el apoyo del docente, como actor principal, para generar el cambio requerido, a partir de la reformulación de su quehacer matemático. Uno de los registros que se manejan en la enseñanza de la geometría es el gráfico, o representación de curvas a través de sus gráficas. Pero ¿la presencia de una gráfica en un texto o explicación de un tema implica saber mirarla? ¿es lo mismo ver que mirar?
Una actividad relacionada con los cambios de registros es la visualización. No debe confundirse ver con visualizar. La actividad de "ver" se refiere a la capacidad fisiológica, mientras que "visualizar" se asocia a un proceso cognitivo inherente al ser humano influenciado por el entorno cultural del sujeto. Esta habilidad se va aprendiendo y construyendo de manera cultural.

Cantoral y colaboradores (2000, p. 146), escriben que: "... se entiende por *visualización* la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico".
La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento", en una consecuencia de esto Vicente Carrión (1999), establece: "*Obsérvese que no se habla de*

visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Visualizar un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas".

En matemática, visualizar requiere de la actividad de conversión, o sea convertir un registro semiótico de representación en otro. Actividad destacada como fundamental en el aprendizaje de las matemáticas para validar los enunciados matemáticos.
Por lo tanto para que se logre una conceptualización significativa, es inevitable la visualización. Esta habilidad debe ser incorporada, promovida y desarrollada en la formación de los estudiantes porque la matemática presenta gran cantidad de contenidos visuales. Se debe prestar atención explícita a las representaciones concretas para revelar las relaciones abstractas que luego se formalizan.

Las NTIC ofrecen interesantes posibilidades al superar las limitaciones del espacio y del tiempo, que suelen ser los eternos enemigos en educación, permitiendo la incorporación de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el estudiante establece un estilo propio que le permite generar estrategias cognitivas de aprendizaje en nuevos espacios: "aulas virtuales".

Es por eso que los simuladores digitales son una herramienta importante para la visualización. Un simulador reproduce un "proceso" y permite visualizar un procedimiento que forma un concepto, lo que difícilmente se obtenga de la sola lectura de un texto. También admite manipular variables que permiten reforzar un concepto. Las simulaciones son estrategias que permiten promover en los estudiantes el desarrollo de modelos mentales sobre situaciones complejas y también realizar un uso activo de estrategias de resolución de problemas. El uso de estos simuladores permite descubrir, comprender, reflexionar sobre conocimientos puestos en juego en una situación problemática. Además apoyan el aprendizaje constructivo, relacionando lo nuevo con conceptos ya adquiridos, permitiendo generar la actividad de plantear hipótesis.

Aún no se desarrollan cambios significativos en el proceso de enseñanza, que apunten a favorecer experiencias de este tipo, donde se guíe al estudiante en la utilización de distintos registros de representación, para una mejor comprensión del concepto que se pretende que él mismo construya. Para lo cual es de vital importancia formar o desarrollar la habilidad de visualizar en los estudiantes, con el fin de atribuir sentido a las representaciones gráficas. Es decir, los alumnos aprenden así cómo y qué mirar de un gráfico; para luego comprender cómo y qué mirar en la transferencia del concepto a un contexto real.

La secuencia didáctica

En esta propuesta se presentan los aspectos fundamentales de una estrategia didáctica que tiene como objetivo utilizar los cambios de registro para formar el concepto de "cónicas". Este proceso tiene como actividad principal la utilización de simuladores programados en Geogebra y soportados a través de un aula virtual.

Actividades

1) Después de dar la definición de elipse, se muestra una ventana con el siguiente enunciado:
"Podemos observar en la siguiente simulación, que siendo C un punto cualquiera de la elipse y a y b las distancias entre C y los focos, la suma de a y b (que hemos denominado d) se mantiene constante al mover el punto C a lo largo de la curva."

En la ventana (fig. 1) está representada la elipse y un punto particular de ella (punto C).También se pueden observar los segmentos que unen este puntos con ambos focos de la elipse (a y b). También aparece en la imagen, en el costado izquierdo, los valores correspondientes a las longitudes de los segmentos a y b.
El punto C se puede mover con el cursor y la simulación muestra como se modifican los valores correspondientes a las longitudes de a y b, pudiendo, el alumno, observar uno de los conceptos

que involucra la definición de “elipse”, que es que la suma entre a y b (nombrada acá como d) se mantiene constante.

El alumno puede desplazar el punto C a lo largo de toda la curva y observar que el concepto involucrado en la definición se mantiene para cualquier posición que ocupe C.
El ambiente dinámico-geométrico permitió acceder a imágenes mentales, una construcción anticipada en la mente, observar cuáles son los elementos estáticos y cuáles las variables. La manipulación del punto C a lo largo de la curva y la variación de la longitud de los segmentos fue de mucho beneficio para el estudiante, pues permitió visualizar el concepto involucrado. Se puede considerar que con esto el alumno se involucra con el concepto desde un punto de vista dinámico. Este dinamismo logrado con la simulación viene a recrear oportunamente el denominado “método del jardinero”, procedimiento utilizado desde hace siglos para formar canteros elípticos, y que suele reproducirse, en las aulas tradicionales, utilizando un lápiz guiado mediante un hilo atado a dos alfileres fijos; buscando despertar la imaginación de los estudiantes, en la formulación del concepto de elipse.

2) Otra de las actividades que se proponen a continuación de la anterior tiene el siguiente enunciado:
“*En la siguiente simulación puede observar una elipse centrada de ecuación :* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Puede visualizar (moviendo los deslizadores de a y b) como se modifica la gráfica según cambian los valores de a y b.”
Luego se muestra ventana correspondiente. En ella se puede observar una elipse y dos deslizadores que permiten cambiar el valor de los parámetros a y b (denominadores de las fracciones de la ecuación de la elipse representada). (fig. 2)

En esta actividad, el estudiante puede cambiar los parámetros a y b de la ecuación de la elipse moviéndolos con el cursor. Al variar estos parámetros podrá visualizar las modificaciones que sufre la elipse representada. Esto le permitirá al alumno darle un significado geométrico preciso a algunos parámetros como las longitudes de los semiejes de la elipse. Como también podrá reflexionar sobre el significado de cada una de las letras que componen la expresión de la ecuación y nociones como cuáles son las condiciones que hacen que una elipse se convierta en circunferencia y es este caso, qué parámetros indican el radio de la misma.

Al poder variar los parámetros de la ecuación interactuando con la gráfica se hace accesible la idea de que una cierta curva cónica da lugar a diversas representaciones algebraicas.
También, el alumno puede experimentar él mismo con la simulación propuesta para después plantearse sus propias dudas y experimentos.

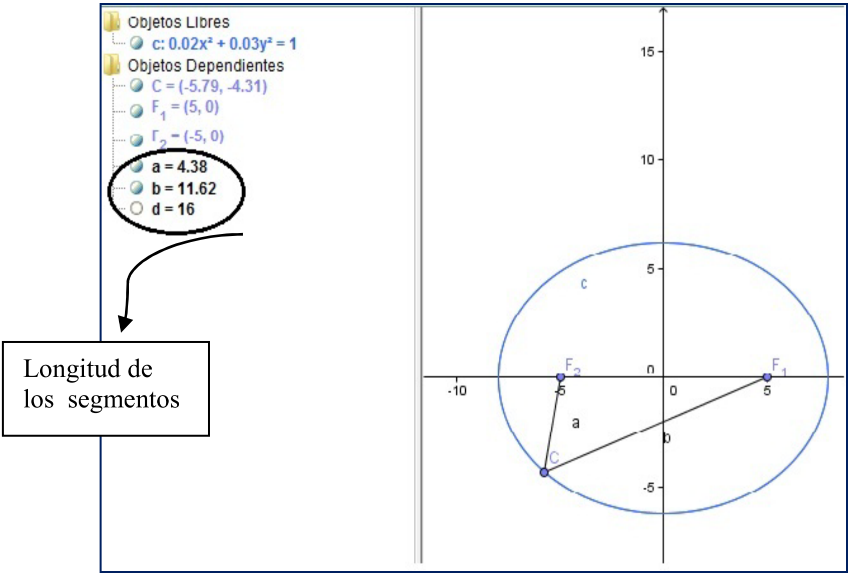

Figura 1. Simulador de la elipse. Fuente: elaboración propia

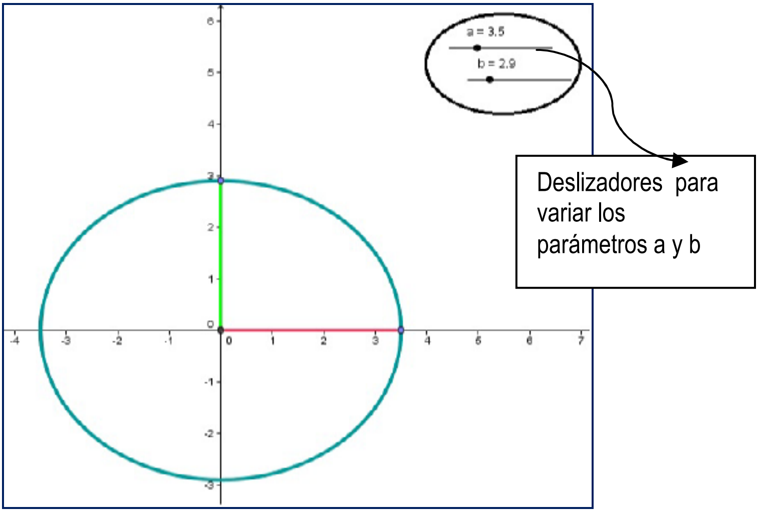

Figura 2. Representación de la ecuación estándar de la elipse. Fuente: elaboración propia

Conclusiones

El empleo de variados registros de representación y el uso de los simuladores, a través de un aula virtual, permiten reorganizar el discurso educativo para lograr una significativa apropiación de conceptos. Esta propuesta se centra en el concepto de elipse, dentro del Álgebra y Geometría Analítica, pero puede extenderse a otros conceptos. La actividad basada en la visualización dinamiza el trabajo personal del alumno y enriquece su razonamiento matemático; llevándolo a descubrir que los distintos registros de expresión se emplean, por ejemplo, en diferentes momentos del análisis de un problema, facilitando su compresión. Y esto allana el camino del docente; al permitir que los estudiantes, dispongan de otros escenarios matemáticos, y a partir de allí refuercen la formalización de conceptos.

No cabe duda que los entornos virtuales, abren nuevos caminos en educación, y más aún en el campo de las matemáticas. El uso de los simuladores favorece la manipulación de la información

matemática, presentada visualmente, de manera más eficiente que el gráfico observado en un texto o apunte. Sin embargo, se requiere del apoyo incondicional, por parte del docente, para lograr la implementación exitosa de la propuesta.
Finalmente, cualquiera sea la modalidad educativa utilizada y, las condiciones en que se desarrolle la actividad, siempre es posible emprender acciones que permitan mejorar los logros y evitar algunos de los riesgos que comprometen los aprendizajes de los alumnos. La clave está pues, en reflexionar, sin disimulo, sobre las dificultades y buscar caminos para superarlas.

Bibliografía

Carrión Miranda, V. (1999). *Algebra de funciones mediante el proceso de visualización.* México: Depto de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Dolores, C. (2007). *Matemática Educativa. algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Mëxico.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Garbin, S. (2005). *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos.* México: Relime. Vol 8.

Grossman, S. (2004). *Algebra Lineal.* México: McGraw-hill. Interamericana de México.

Guzman, I. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes.* Mexico: Relime.

* * *