

Control Activo de Ruido Impulsivo Basado en la Correntropía del Error con Ancho de Kernel Variable

Patricia N. Baldini¹,

¹ Departamento de Ingeniería Electrónica, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad
Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461
8000 Bahía Blanca, Argentina
pnbaldi@frbb.utn.edu.ar

Abstract. Active control is a methodology based on the waves destructive interference that has proven to be effective for attenuating noise in the low frequency audible spectral range. However, the case of impulsive type noise sources, as harmful as frequent in industrial environments, represents a challenge to the convergence of the control algorithm that is still a matter of study. Outliers in the measured signals cause overcorrections in adaptive adjustment of filter weights which can produce instability. This paper presents the results of applying a new robust methodology to attenuate impulsive noise in a single-channel system. The proposed algorithm based on the maximum correntropy criterion with recursively adjusted kernel size, does not require prior statistical information on noise. The convergence properties and the effectiveness of the control indices are verified by simulation in different conditions of noise environments. Impulsive noise is represented by the non-gaussian model proposed in the bibliography.

Keywords: Active noise control, Maximum correntropy algorithm, Adaptive kernel size, Impulsive noise.

1 Introduction

El ruido es uno de los contaminantes ambientales más extendido en la actualidad. El concepto de contaminación acústica hace referencia a los niveles excesivos de ruido y vibraciones provocados por la actividad humana, que se constituyen en causa de una gran variedad de efectos nocivos para las personas y su entorno. Tradicionalmente, la gestión ambiental del ruido se realiza mediante las denominadas técnicas pasivas. Estas técnicas consisten en la introducción de barreras físicas para bloquear la propagación o absorber el ruido directo y el reverberante, sin aporte de energía. Sin embargo, a mayores longitudes de onda de la señal a silenciar, el control pasivo se torna ineficiente con incremento significativo en volumen y costo. En todo caso, resultan sistemas poco flexibles que no contemplan cambios del entorno acústico.

La alternativa para el rango acústico audible de bajas frecuencias es el control activo (CAR) que trata de transformar favorablemente el campo sonoro mediante

dispositivos electroacústicos. El uso de fuentes secundarias permite generar de forma controlada nuevas ondas de sonido (*anti-ruido*), que se superponen al campo ruidoso original de modo de producir interferencia destructiva. Se crea una zona de silencio o, al menos, un campo resultante del menor nivel sonoro posible en regiones del espacio tanto más grandes cuanto mayores sean las longitudes de onda del ruido a cancelar.

Si bien el avance tecnológico de los procesadores digitales de señal sumado al desarrollo de algoritmos de procesamiento adaptativo permitieron la implementación de sistemas de CAR eficaces en distintas aplicaciones, el caso de ruido de impacto o impulsivo representa aún un desafío que sigue siendo motivo de estudio. Este tipo de ruido se caracteriza por un número significativo de perturbaciones de gran amplitud que ocurren al azar con una baja probabilidad y no puede describirse mediante un modelo gaussiano. La presencia de valores atípicos, ya sea en el ruido a cancelar o en la señal de error, compromete la convergencia del algoritmo adaptativo pudiendo causar inestabilidad [1]. Los métodos propuestos inicialmente para atenuarlo pueden clasificarse en tres categorías. La primera incluye a los algoritmos adaptativos que utilizan como información el ruido primario y la señal de error residual recortados a un umbral conveniente para suavizar el efecto de los valores atípicos sobre la actualización del controlador [2]. La segunda categoría incluye a los algoritmos basados en la minimización del momento fraccional de orden p ($p < 2$) del error residual, teniendo en cuenta que no existe el de segundo orden para la descripción estadística del ruido impulsivo, [3]. Una tercera categoría, engloba algoritmos que emplean transformaciones no lineales del error, con crecimiento acotado [4], [5].

Recientemente han adquirido relevancia algoritmos de control que pueden encuadrarse en una nueva categoría asociada al aprendizaje basado en la Teoría de la Información [6]-[14], que no requieren información a priori de las características estadísticas del ruido. En particular la maximización de la correntropía es uno de los criterios de optimización más populares debido a su simplicidad y robustez, que ha sido aplicado con éxito en casos de ruido no Gaussiano e impulsivo [10]-[13]. En estos métodos la selección del ancho del kernel afecta significativamente la eficacia del filtrado. Si bien algunas alternativas han sido propuestas contemplando un ancho de kernel adaptativo [11], [12], [15],[16], éstas no han sido verificadas para los casos de modelos de ambientes ruidosos de fase no mínima con alta impulsividad.

En este trabajo se propone un algoritmo de filtrado adaptativo inspirado en el de máxima correntropía (MCC) con actualización del ancho del kernel, que presenta buenas características de convergencia y error de estado estacionario en las simulaciones para sistemas tanto de fase mínima como no mínima. Los resultados se analizan en base a los índices de comportamiento usuales y el ruido impulsivo se modela mediante una distribución alfa-estable simétrica (S α S) [2]-[4],[9],[12],[16].

1.1 Configuración Básica del Sistema de CAR

El CAR se basa en el principio de interferencia destructiva entre ondas acústicas. Esencialmente, el ruido se cancela en una determinada región del espacio al superponerle otro en contrafase generando en forma controlado. Un sistema de CAR de un solo canal de tipo feedforward (Fig. 1), comprende: un sensor de referencia para

captar el ruido fuente o primario, $x(n)$; un parlante que actúa como transductor electroacústico para propagar la señal de cancelación, $y(n)$, que es generada por el filtro adaptativo con función transferencia $H(z)$, y un micrófono de error para detectar el nivel de ruido residual, $e(n)$, en la zona de silencio predeterminada [1].

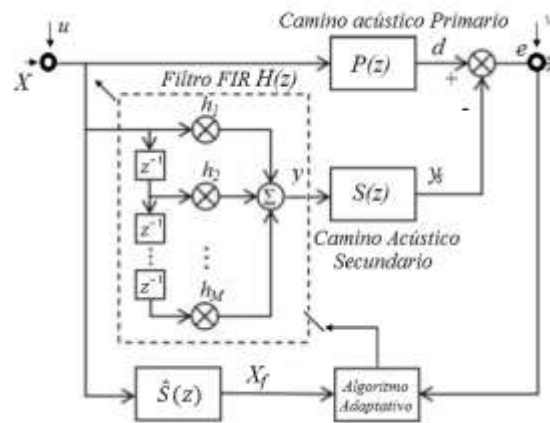


Fig. 1. Esquema del sistema de CAR monocanal de tipo *feedforward*.

El sistema adaptativo depende de cuatro elementos básicos: la estructura del filtro; los parámetros a ajustar que son los coeficientes que definen la función transferencia que modela el filtro; las señales que se procesan, y el algoritmo adaptativo que describe la actualización de los parámetros en cada instante de tiempo, k . Este algoritmo optimiza el control en base a una función de objetivo. El error cuadrático medio ha sido la opción más utilizada bajo la suposición implícita de que el error resultante es una variable aleatoria de tipo gaussiano, justificada por el teorema del límite central.

Para una estructura de filtro con respuesta al impulso finita (FIR) de longitud L , con vector de salida \mathbf{y} , $\mathbf{y}(k) = [y(k) \ y(k-1) \ \dots \ y(k-L+1)]^T$, donde $[\cdot]^T$ denota transposición, el error residual queda definido por

$$\begin{aligned} e(k) &= d(k) - \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k) + v(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}^T(k) \mathbf{x}(k) \quad , \quad d(k) = \mathbf{P}(k)^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

$\hat{\mathbf{S}}$, \mathbf{S} y \mathbf{P} son los vectores de las respuestas al impulso estimada y real del camino acústico secundario, y real del camino acústico primario, modelados por las funciones transferencias $\hat{S}(z)$, $S(z)$ y $P(z)$, respectivamente. Los procesos aleatorios $\mathbf{u}(k)$ y $v(k)$ representan, respectivamente, ruido de medida de la señal de entrada y del error residual y $x_f(k) = \hat{S}^T(k)(\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k))$ es la señal de entrada filtrada por la estimación (fuera de línea) de la respuesta impulsiva del camino secundario.

De todos modos, el ruido de tipo impulsivo representa un desafío a los métodos adaptativos convencionales debido a que la gran amplitud ocasional en las señales

medidas produce una actualización repentina significativa de coeficientes del filtro que puede comprometer la convergencia e inestabilizar al sistema. Si bien se han propuesto distintas estrategias para superar estas limitaciones, el obstáculo común para implementarlas en la práctica es la complejidad computacional asociada y la respuesta insatisfactoria para sistemas de fase no mínima. [2]-[8].

1.2 Algoritmos basados en la Maximización de la Correntropía

La correntropía, que puede pensarse como una correlación generalizada, se emplea como medida no lineal de la similitud entre dos variables aleatorias en una vecindad del espacio conjunto dependiente del ancho del kernel. La robustez frente a *outliers* que se logra reduciendo este parámetro, la convierte en una función objetivo adecuada para sistemas adaptativos frente a ruido impulsivo con distribuciones *heavy-tailed*.

La correntropía se define mediante la expresión (2):

$$V(d, y) = E[\kappa(d - y)] = \int \kappa(d - y) dF_{dy}(d, y) \quad (2)$$

donde κ denota un kernel de Mercer invariante al desplazamiento y F_{dy} es la función de distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias d, y ([14]). El kernel comúnmente adoptado es el Gaussiano con ancho σ (>0),

$$\kappa(d - y) = G_\sigma(d - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(d - y)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3)$$

Como la función distribución conjunta es desconocida, el operador esperanza se reemplaza por el estimador muestral que tiene en cuenta la ventana temporal de N pares de datos disponibles (d_k, y_k) ($k=1, 2, \dots, N$) [9] de modo que

$$V(d, y) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G_\sigma(d_k - y_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(d_k - y_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

Desde el punto de vista de CAR, el vector de coeficientes del filtro FIR adaptativo con longitud L , $\mathbf{H}(k)$, se actualiza maximizando la correntropía entre las señales de salida de los caminos acústicos primario y secundario, $d(k)$, $y_s(k) = \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k)$, mediante el método de máximo descenso del gradiente.

Si $e_k = e(k) = d(k) - \mathbf{S}^T \mathbf{y}(k) + v(k)$ es el error de predicción en la iteración k -ésima, $\mathbf{X}(k)$ el vector de entradas, $x_f(k) = \hat{\mathbf{S}}^T (\mathbf{X}(k) + \mathbf{v}(k))$ y $\mathbf{X}_f = [x_f(k) \dots x_f(k-L_s)]^T$ el vector de entradas filtradas por $\hat{\mathbf{S}}$, la regla de actualización puede escribirse

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \mu \sum_{n=1}^k \exp\left(-\frac{e_n^2}{2\sigma^2}\right) e_n \mathbf{X}_f(n) \rightarrow \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \mu \exp\left(-\frac{e_k^2}{2\sigma^2}\right) e_k \mathbf{X}_f(k)$$

Es evidente que el efecto del error sobre los coeficientes del filtro se hace despreciable a medida que su magnitud crece lo que garantiza la robustez frente a ruido impulsivo. De todos modos, al considerar solo las muestras actuales del error y la entrada, el desajuste estacionario resulta significativo. Por otro lado, las grandes fluctuaciones de la entrada pueden afectar negativamente la velocidad de convergencia [13]. Una alternativa posible es aproximar el vector gradiente considerando el promedio de las últimas N muestras, a expensas de aumentar tanto el costo de almacenamiento como de cómputo.

Otro inconveniente del método es la selección adecuada del ancho fijo del kernel, σ^2 . Un valor grande proporciona buena velocidad de convergencia con un desajuste estacionario importante. De otro modo, si el valor es pequeño, se corrige el valor estacionario pero se pierde rapidez de convergencia. Para superar esta dificultad se propusieron algunas estrategias de variación recursiva del ancho del kernel [11],[12],[15]-[17] aunque no siempre resultan robustas para ruido fuertemente impulsivo o ambientes acústicos caracterizados por modelos de fase no mínima, presentan importante desajuste en estado estacionario o incrementan el costo de almacenamiento. Por ejemplo, la combinación convexa de dos filtros MCC con diferentes anchos de kernel propuesto en [18] duplica la complejidad de cómputo.

2 Algoritmo para CAR Impulsivo Propuesto

En este trabajo se propone usar un filtro adaptativo basado en MCC para ajustar los coeficientes del filtro que pretende mejorar la estabilidad y el comportamiento estacionario en ambientes de ruido desfavorables, sin incrementar costo de almacenamiento. El algoritmo de máxima correntropía recursiva con filtrado-x y actualización adaptativa del ancho de un kernel de tipo Gaussiano, se describe mediante el conjunto de ecuaciones (6) a (8),

$$\mathbf{P}(k+1) = \lambda \mathbf{P}(k) + (1-\lambda) \exp\left(-\frac{e_{k+1}^2}{2\sigma_{k+1}^2}\right) e_{k+1} \mathbf{X}_f(k+1) \quad (6)$$

donde $\mathbf{P}(\cdot)$ es el promedio móvil ponderado exponencial del vector gradiente de MCC con un factor de suavizado λ ($0 \ll \lambda < 1$) que se utiliza para aproximar al vector gradiente de la esperanza de la función objetivo. La operación de promediado tiene el efecto de un filtrado pasabajos que tiende a reducir las oscilaciones en rangos cortos de tiempo, estabilizando el comportamiento de \mathbf{P} [13].

En lo que se refiere al ancho del kernel, se busca que sea grande al inicio de la adaptación para una buena velocidad de convergencia y se reduzca cuando el vector de coeficientes del filtro se acerca su valor óptimo para disminuir el desajuste estacionario. Se opta por promedio móvil ponderado de la magnitud del error,

$$\sigma_{k+1} = \eta \sigma_k + (1-\eta) |e_k| \quad (7)$$

donde $0 < \eta < 1$ es un factor de olvido. Finalmente, la expresión de actualización del vector de coeficientes queda expresado por (8):

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \mu \mathbf{P}(k) \quad (8)$$

donde $\mu > 0$ es el paso de actualización. El método propuesto aumenta la robustez a costa de un incremento leve de multiplicaciones y adiciones en relación al MCC clásico. De todos modos, la complejidad es comparable o menor a la de otras opciones de ancho de kernel variable. En la Tabla 1 se sintetiza el procedimiento, donde se incluye la normalización del vector \mathbf{X}_f para acotar la variación por ruido impulsivo en la entrada.

Table 1. Algoritmo propuesto.

| |
|--|
| Input: $\eta, \lambda, \mu, \hat{S}$ |
| Initialize: $\sigma^2_0, \mathbf{P}(0), \mathbf{H}(0)$ |
| while $\{x(k), e(k) = e_k\}$ available |
| $\mathbf{x}_f(k) = \hat{S}^T \mathbf{X}(k)$ |
| $\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) + \mu \mathbf{P}(k)$ |
| $\sigma_{k+1} = \eta \sigma_k + (1 - \eta) e_k $ |
| $\mathbf{P}(k+1) = \lambda \mathbf{P}(k) + (1 - \lambda) \exp\left(-\frac{e_k^2}{2\sigma_k^2}\right) e_k \frac{\mathbf{X}_{fk}}{(\mathbf{X}_{fk}^T \mathbf{X}_{fk} + \epsilon)}$ |
| end while |
| Output: $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}(k+1)$ |

2.1 Modelo Estadístico de Ruido Impulsivo

El ruido impulsivo se caracteriza por la aparición de muestras de gran valor con baja probabilidad de ocurrencia. En la literatura reciente sobre CAR impulsivo, es una práctica habitual modelar este tipo de ruido no gaussiano usando una distribución alfa-estable simétrica (SaS), [2], [3], [9], [12], [16].

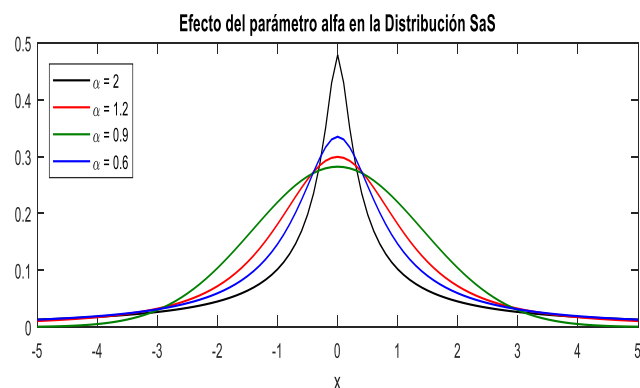


Fig. 2. Función distribución de probabilidad SaS en función de α .

Un proceso aleatorio es S α S, si su función característica se puede expresar como $\varphi(x) = e^{-\gamma|x|^\alpha}$, donde $\gamma (>0)$ es el parámetro de dispersión y $\alpha (1 < \alpha \leq 2)$ es el exponente característico. En particular, se considera que la fuente de ruido se modela mediante una distribución S α S estándar ($\gamma=1$), donde el grado de impulsividad será tanto mayor cuanto menor sea el exponente característico α (Fig. 2). El caso particular de $\alpha=2$ corresponde a la distribución Gaussiana que es la única que admite momento de segundo orden finito. En el resto de los casos de ($\alpha < 2$) solo existen momentos de orden fraccional $p < \alpha$. Como consecuencia de este hecho, el CAR clásico basado en el algoritmo de mínimos cuadrados (FxLMS) resulta inapropiado.

2.2 Experimentos de Simulación

Los resultados de aplicar el algoritmo propuesto fueron analizados, en una primera instancia, mediante simulación computacional utilizando la plataforma Matlab. Se consideraron distintas experiencias variando el grado de impulsividad del ruido primario mediante el parámetro α incluyendo casos de su variación en el tiempo.

El índice de desempeño usado para medir la velocidad de convergencia fue la reducción de ruido promedio, RRP, siguiendo la bibliografía, [2], [3], [9], [12], definida por las ecuaciones (9) y (10) con $\lambda = 0.99$, promediando una serie de 20 conjuntos independientes de datos de entrenamiento generados aleatoriamente.

$$RRP(n) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_e(n)}{A_d(n)} \right) \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} A_e(n) &= \lambda A_e(n-1) + (1-\lambda)|e(n)| \\ A_d(n) &= \lambda A_d(n-1) + (1-\lambda)|d(n)| \end{aligned} \quad (10)$$

La estimación del camino secundario fuera de línea, previa a la aplicación del control y la longitud del filtro FIR de control se fija en $L=16$.

2.1.2 Primer Experimento

En esta experiencia se considera un ruido altamente impulsivo, con $\alpha = 1.2$ y funciones transferencia (FT) de los caminos acústicos primario y secundario de fase mínima (FM) (Fig. 3 y 5 a) y de fase no mínima (FNM) (Fig. 4y 5 b).

En ambos casos, las figuras muestran el ruido primario, la señal acústica de control o cancelación el ruido (anti ruido), el error residual y la evolución de la RRP [dB] con las iteraciones.

La reducción de ruido en el caso de FT de FM es aproximadamente de 60dB mientras que en el caso de FNM, si bien se reduce a 25dB, es un valor altamente satisfactorio teniendo en cuenta que la dificultad implicada.

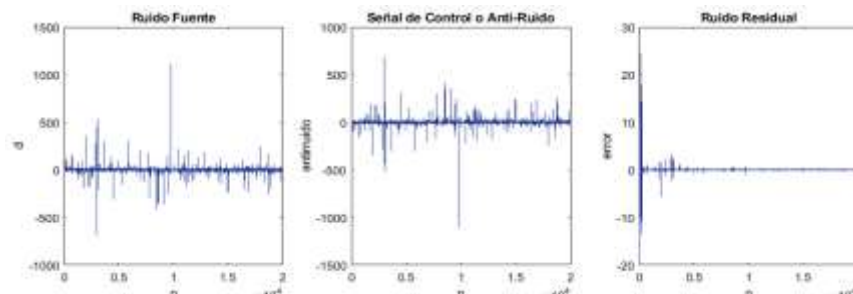


Fig. 3. Señales de salida de ruido camino primario, anti ruido y error residual caso FM

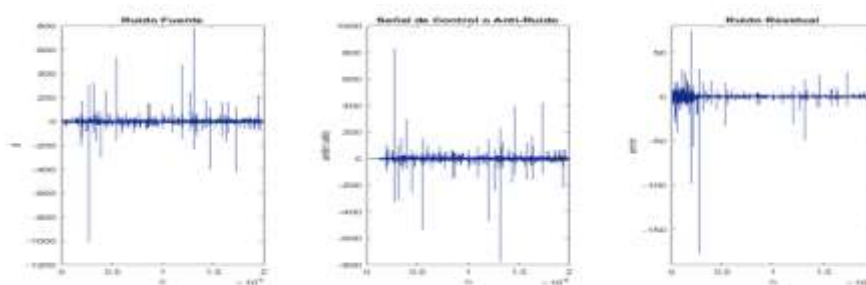


Fig. 4. Señales de salida de ruido camino primario, anti ruido y error residual caso FNM

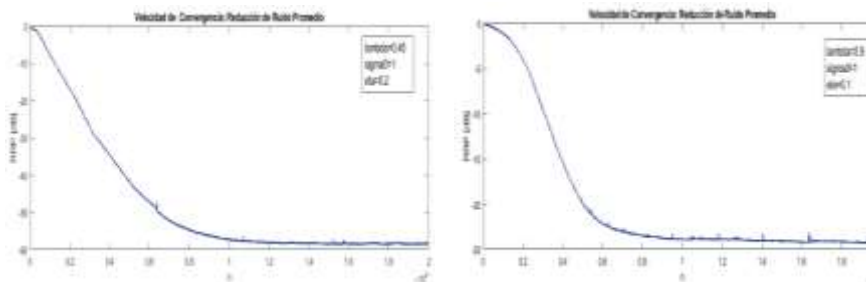


Fig. 5. Evolución del RRP : a) caso FM y b) caso FNM

2.1.3 Segundo Experimento VE:

En esta experiencia se incluye ruido impulsivo con características probabilísticas variables en el tiempo [3]. Se considera un cambio abrupto del grado de impulsividad luego de un cierto tiempo, según se indica en la expresión *a*) de (11), para modelar una modificación de la probabilidad de ocurrencia de *outliers* (VE con FT FM y FNM: Fig. 6 *a*). También se analiza una variación suave de tipo senoidal según la expresión *b*) de (11) (VS con FT FM y FNM: Fig. 6 *b*).

$$a) \begin{cases} \alpha = 1.8 & , 0 \leq n \leq 6000 \\ \alpha = 1.4 & , 6000 < n \leq 13000 \\ \alpha = 1.6 & , 13000 < n \leq 20000 \end{cases} , \quad b) \alpha(n) = 1.6 + 0.3 \text{sen} \left(\frac{2\pi}{5 \times 10^4} n \right) \quad (11)$$

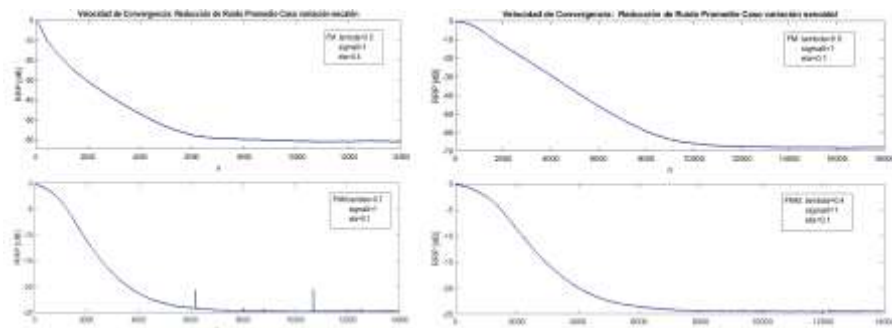


Fig. 6. Evolución del RRP : a) caso VE y b) caso VS.

2.1.3 Tercer Experimento

En este caso se compara mediante la RRP el algoritmo propuesto con el AMCC propuesto en [16] (parámetros $\mu=0.001$, $\sigma_0^2=4$ y $\mu=0.0005$, $\sigma_0^2=4$) para el caso de ruido altamente impulsivo ($\alpha=1.2$) y FT de FM (Fig.7 a) y FNM (Fig. 7 b). En AMCC el ancho del kernel varía según $\sigma^2=\sigma_0^2+c_k^2$. La superioridad de la nueva metodología es notable en ambos casos, especialmente en cuanto al error residual.

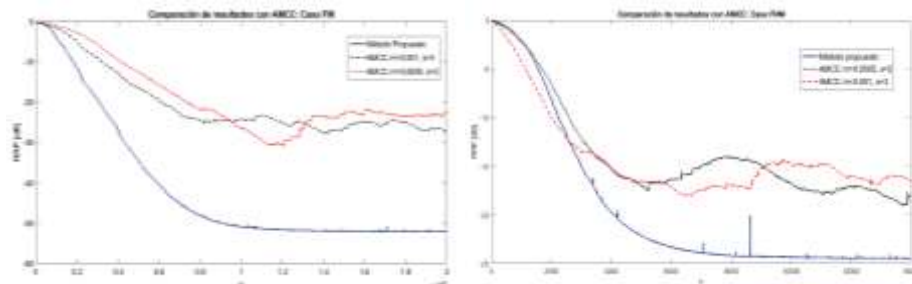


Fig. 7. Comparación del RRP : a) caso FM y b) caso FNM

3 Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo se analiza la performance de una estrategia de control adaptativo para la atenuación de ruido impulsivo unidimensional, inspirada en la optimización de una función objetivo definida como la correntropía del error residual. Se recurre a una aproximación del gradiente de la correntropía, empleando un promedio móvil ponderado no lineal, que mejora la robustez frente a ruido altamente impulsivo en particular en ambientes acústicos modelados con funciones transferencia de fase no mínima. La metodología introducida presenta buena velocidad de convergencia con un bajo desajuste en estado estacionario gracias a la modificación recursiva del ancho del kernel en base a la magnitud del error. Los resultados de las simulaciones muestran una atenuación del ruido de salida mucho mayor que otros métodos existentes (AMCC), sin añadir complejidad computacional considerable. En una siguiente etapa se buscará corroborar los resultados en un prototipo de laboratorio.

Agradecimiento. Se expresa el agradecimiento a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de las Universidad Tecnológica Nacional por la financiación del proyecto de investigación en el marco del cual se desarrolló este trabajo.

References

1. Elliott, S.J.: *Signal Processing for Active Control*. Academic Press, San Diego, USA, 2001.
2. Akhtar, M.T., Mitsuhashi, W.: Improving performance of FxLMS algorithm for active noise control of impulsive noise. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 327, pp. 647-656, (2009).
3. Bergamasco, M., Della Rossa, F., Piroddi, L.: Active noise control with on-line estimation of non-Gaussian noise characteristics. *Jou. Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 27-40 (2012).
4. Akhtar, M.T.: An adaptive algorithm, based on modified tanh non-linearity and fractional processing, for impulsive active noise control systems. *Jou. Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 37, issue 3, pp. 1-14, 2017.
5. Liang, T., Li, Y., Zakharov, Y.V., Xue, W., Qi, J.: Constrained least lncosh adaptive filtering algorithm. *Signal Processing*. 183 (2021) 108044
6. Song, P., Zhao, H., Zhu, Y.: Filtered-s normalized maximum mixture correntropy criterion algorithm for nonlinear active noise control. In: *Proceedings Volume 11719, Twelfth International Conference on Signal Processing Systems*; 1171911 (2021)
7. Qian, G., Ning, X., Wang, S.: Recursive Constrained Maximum Correntropy Criterion Algorithm for Adaptive Filtering. *IEEE Tran. Circuits and Systems-II: Express Briefs*, vol. 67, no. 10, pp. 2229-2233 (2020)
8. Radhika, S., Chandrasekar, A.: Convergence analysis of Maximum Correntropy Criteria based adaptive filtering algorithm based on white input. In: *11th Int. Conference on Advanced Computing (ICoAC)*, 2019, pp. 158-16
9. Kurian, N.C., Patel, K., George, N.V.: Robust active noise control: An information theoretic learning approach. *Applied Acoustics*. 117, pp. 180-184 (2017)
10. Zhu, Y., Zhao, H., Zeng, X., Chen, B.: Robust Generalized Maximum Correntropy Criterion Algorithms for Active Noise Control. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 28, pp. 1282-1292 (2020).
11. Wang, W., Zhao, J., Qu, H., Chen, B.: A correntropy inspired variable step-size sign algorithm against impulsive noises. *Signal Processing*, 141, pp. 168-175 (2017).
12. Lu, L., Zhao, H.: Active impulsive noise control using maximum correntropy with adaptive kernel size. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 87, Part A, pp.180-191(2017)
13. Qu, H., Shi, Y., Zhao, J.: A Smoothed Algorithm with Convergence Analysis under Generalized Maximum Correntropy Criteria in Impulsive Interference. *Entropy* 21, (2019)
14. Principe, J.C.: *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*. Springer, New York (2010)
15. Huang, F., Zhang, J., Zhang, S.: Adaptive Filtering Under a Variable Kernel Width Maximum Correntropy Criterion. *IEEE Tran. Circuits and Systems—II: Express Briefs*, vol. 64, no.10, pp. 1247-1251 (2017)
16. Wang, W., Zhao, J., Qu, H., Chen, B., Principe, J.C.: An adaptive kernel width update method of correntropy for channel estimation. In: *2015 IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, 2015, pp. 916-920. IEEE Press (2015)
17. Shi, Y., Zhao, H., Zakharov, Y.: An Improved Variable Kernel Width for Maximum Correntropy Criterion Algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 67, no. 7, pp. 1339-1343 (2020)
18. Fontes, A.I.R., Linhares, L.L.S., Guimarães, J.P.F., Silveira, L.F.: An adaptive kernel width convex combination method for maximum correntropy criterion. *Journal of the Brazilian Computer Society*, 27:7 (2021).