

Néstor Rotstein

Introducción
a la
Termodinámica
y el
Electromagnetismo

Para estudiantes
de Ingeniería



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

CiN REUN
Red de Editoriales
de Universidades Nacionales
de la Argentina



Rotstein, Néstor

Introducción a la termodinámica y el electromagnetismo : para estudiantes de Ingeniería / Néstor Rotstein ; editado por Fernando Cejas. - 2a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2022.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-4998-83-5

1. Física. 2. Electricidad. 3. Magnetismo. I. Cejas, Fernando, ed. II. Título.
CDD 536.701

Diseño de interior y Tapa: *Fernando Cejas*



**Universidad
Tecnológica
Nacional**

Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina

Rector: Ing. Rubén Soro

Vicerrector: Ing. Haroldo Avetta

Secretario de Cultura Y Extensión Universitaria: Ing. Federico Olivo Aneiros



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires

Decano: Ing. Guillermo Oliveto

Vicedecano: Ing. Andrés Bursztyn



edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional

Dirección General: Mg. Claudio Véliz

Dirección de Cultura y Comunicación: Ing. Pablo Lassave

Coordinador General a cargo: Fernando Cejas

Queda hecho el depósito que marca la Ley nº 11.723

© edUTecNe, 2022

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ)

Buenos Aires, República Argentina

Publicado Argentina – Published in Argentina



ISBN 978-987-4998-83-5



Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

La ignorancia engendra más confianza de la que con frecuencia engendra el conocimiento: son aquellos que saben poco, y no aquellos que saben mucho, los que afirman positivamente que tal o cual problema jamás podrá ser resuelto por las ciencias.

Charles Darwin

No hay medicina que cure lo que no cura la felicidad

Gabriel García Márquez

A Norma, mi esposa

A mi hijos, Yamila y Nahuel

mis antídotos frente a todo mal

Prólogo

El progreso de la especie humana suele asociarse de manera casi exclusiva a la historia de sus realizaciones. Desde un punto de vista reduccionista y práctico, esta idea, que deja de lado de manera sistemática la evolución del pensamiento humano, no parece demasiado mala, sobre todo si lo que pretendemos es vincular la evolución de la especie a las formas y los modos en que el hombre aprovecha y modifica el mundo que lo rodea para su beneficio, cada vez en mayor medida, cada vez más rápido¹.

Si quisiéramos hablar del progreso de las arañas, por nombrar algún otro animal, no podríamos, en parte porque quizás no comprendemos del todo qué significa progreso para una araña, en parte porque las arañas hacen siempre lo mismo, cada especie teje su propia tela siempre idéntica a sí misma, ni la mejoran ni la modifican, no la refuerzan ni parece ser que aprendan de la experiencia, porque de otra forma algunos insectos no escaparían de la tela. No sabemos de la existencia de escuelas de arañas, como tampoco tenemos noticias de escuelas de otros animales que no sea el hombre, aunque creemos entender que algunos otros animales aprenden de la experiencia.

Posiblemente sea por esta tendencia al pensamiento simplista que la especie humana se considera la especie dominante y asegura, sin más, que el hombre es el único animal que adapta el entorno a su criterio en tanto que el resto de las especies, por el contrario, se adaptan al entorno. La verdad es que la humana me parece una especie curiosa, muy curiosa, y hasta donde sabemos es la única que hace ciencia en nuestro planeta, es decir, aprende de la experiencia pero además conceptualiza el conocimiento adquirido, es capaz de aprender de los hechos casuales pero se pregunta por las razones de los fenómenos que observa. Todo esto viene de la mano del reconocimiento de la ignorancia como una manera de apartarse del dogma. Y ese reconocimiento de ignorancia nos lleva a querer saber, moviliza nuestro espíritu crítico, el que nos lleva incluso a cuestionar el conocimiento adquirido, porque de no ser así viviríamos todavía en cuevas, cubiertos con pieles y dominando apenas algo más que la manera de encender un fuego.

Precisamente, es el ciclo del fuego un ejemplo emblemático que viene a cuento. Desde el punto de vista absolutamente práctico, no cabe duda alguna de que el fuego transformó de un modo radical la evolución de la raza humana. Existe sobrada evidencia reunida que permite inferir con un buen grado de certeza que el dominio del ciclo del fuego se remonta al Paleolítico Medio y Superior, esto es, a cerca de 500.000 años atrás.

¹ No estoy seguro de adherir sin reservas a esta visión parcial, no al menos en su primera lectura, porque la especie humana me parece más importante por las preguntas que se formula que por las respuestas que ofrece. Si nos atenemos a la cantidad de problemas acuciantes que en esta época hay que atender, generados exclusivamente por la misma especie que busca resolverlos, no parece desatinada esta especie de discreta desconfianza en las formas en las que el hombre aplica el conocimiento práctico adquirido.

Como hombres modernos tal vez nos sea difícil comprender en su total magnitud y perspectiva el conjunto de cambios que este descubrimiento llevó a las tribus cazadoras recolectoras de aquel entonces, pero no parece difícil imaginar la forma en que debieron modificarse los hábitos alimenticios, el hábitat, la forma de dominio y de defensa, la manera de cazar y hasta las creencias y técnicas artísticas de aquellas tribus primitivas, reflejadas estas últimas en sus incipientes manifestaciones culturales, sus utensilios y sus herramientas.

Es casi seguro que el hombre descubrió el fuego por casualidad, posiblemente por un rayo que incendió un árbol, pero no parece menos cierto que rápidamente aprendió a conservarlo y luego a generarlo, y estos aspectos, convengamos, ya se alejan bastante de la casualidad. En todo caso, utilizar el fuego para preparar aleaciones metálicas no es producto de la suerte, es producto del ingenio.

Ver caer un rayo debe haber provocado terror en las primeras tribus de humanos, pero convengamos que con el tiempo la especie aprendió a “fabricarse” rayos, y aunque posiblemente no abandonó el miedo místico, más adelante le preocupó el origen y la forma de dominarlos. Y si bien durante siglos las descargas eléctricas fueron apenas una curiosidad en las cortes y palacios, para la mitad del siglo XVIII la motivación ya era otra, y con la invención del pararrayos el hombre comenzó a interesarse más en las aplicaciones prácticas de la electricidad que en las furias celestiales.

Este libro trata de ambos, del fuego y del rayo, es decir, del calor y de la electricidad. A lo largo de los capítulos expone las ideas centrales de estos conceptos, buscando profundidad sin abandonar una presentación sencilla y su relación con los aspectos tecnológicos centrales asociados a la Termodinámica y al Electromagnetismo. De manera alguna este libro agota el temario completo, no es este un tratado de cada uno de los temas presentados, pero creemos que ilustra sus aspectos centrales, al menos en lo que tiene que ver con las aplicaciones tecnológicas.

Espero que el lector encuentre en estas páginas una exposición amena, y que le brinde las herramientas necesarias para profundizar estos temas.

Néstor Rotstein

Introducción a la Termodinámica

Conceptos preliminares

Calor y temperatura

Primer principio de la Termodinámica

Segundo principio de la Termodinámica

Fuerzas y campos eléctricos

Campo eléctrico: flujo y simetrías

El potencial electrostático

Capacitores

Dieléctricos

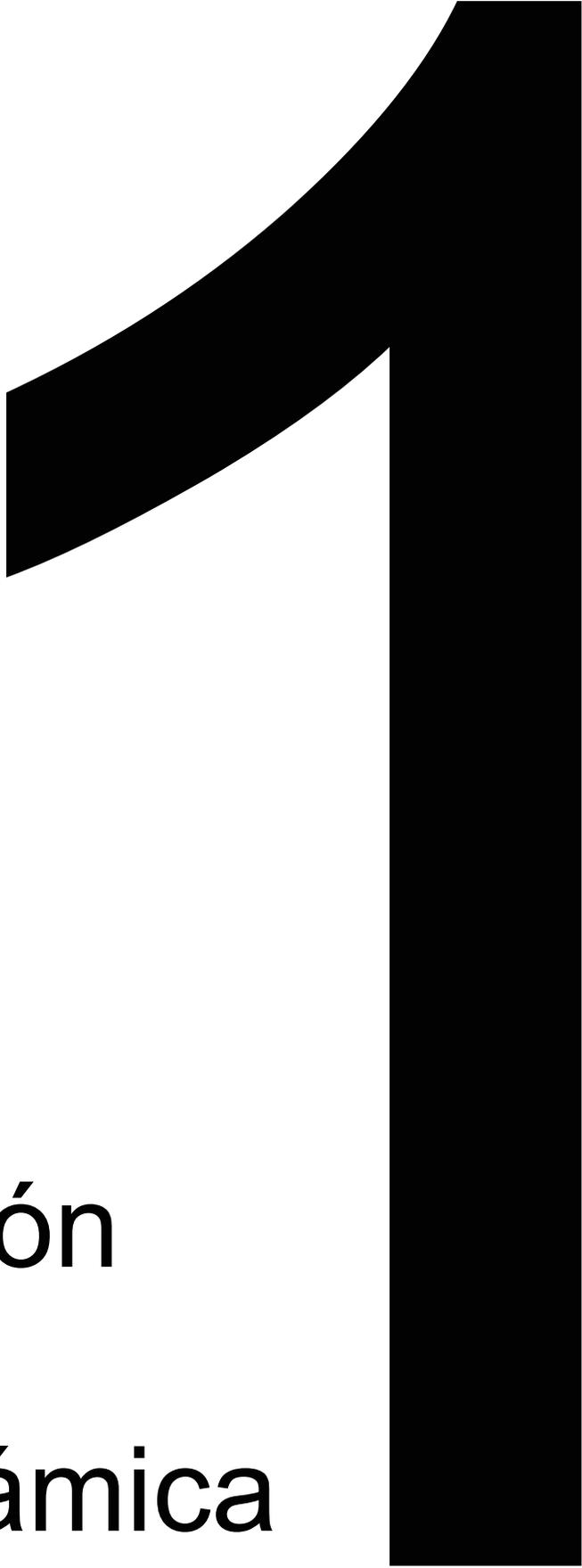
Elementos de corriente continua

Fuerzas y campos magnéticos

Fenómenos de inducción electromagnética

Elementos de corriente alterna

Ondas electromagnéticas



Introducción a la Termodinámica

Parte 1: Conceptos preliminares

1.1 – Introducción

Si usted mira el cielo en una noche despejada seguramente podrá reconocer algunos cuantos objetos celestes, típicamente alguna agrupación de estrellas y algún planeta. Por ejemplo, reconocemos con cierta facilidad las Tres Marías o la Cruz del Sur. Y al amanecer asociamos con cierta seguridad el Lucero del Alba al planeta Venus. Lo curioso es que esos objetos son los mismos que a lo largo de los siglos vieron todos los habitantes de nuestras tierras, incluyendo los primeros, hace alrededor de 12.000 años¹. Una buena razón para que hoy en día, por ejemplo, no tengamos mayores inconvenientes en distinguir las mismas caprichosas formas en que agruparon a las estrellas individuales (lo que llamamos constelaciones).

Por extensión, suele decirse que el universo es estable, por lo menos si, como es habitual, se asocia la idea de estabilidad a la de un proceso en el que no se producen cambios de importancia a lo largo del tiempo. Por ejemplo, es frecuente escuchar frases del tipo “el paciente se mantiene estable luego de la cirugía” o que un empleo ya es estable cuando se lo ha conservado y mantenido durante mucho tiempo (aunque la cantidad *mucho tiempo* ni esté bien definida ni determine absolutamente nada). Otra forma usual de expresar aquella idea es afirmando que el universo está en equilibrio, porque la continuidad en las características de un dado sistema (sea un paciente, un empleado o una estrella) lleva a la unificación de las ideas de estabilidad y equilibrio.

No está del todo mal, aunque en rigor los conceptos no son equivalentes. El vínculo entre estabilidad y equilibrio no es ni tan sencillo ni tan inmediato, y de hecho depende de la manera en que el sistema reacciona a las perturbaciones que se originan en las interacciones con su entorno, de manera tal que la correspondencia depende no sólo del sistema sino también del modo en que se relaciona con sus alrededores.

Por lo pronto, tengamos en cuenta que estamos centrando nuestra discusión en entidades macroscópicas que involucran materia y energía (de nuevo, sea un paciente, un empleado o una estrella). Esto es lo que constituye un sistema termodinámico. En general, y aunque no es un hecho evidente, los sistemas tienden al equilibrio a través del intercambio de masa y de energía. Y es todavía menos evidente que esto se debe a que los únicos entes físicos que los sistemas pueden intercambiar con su entorno, como discutiremos al final de la sección 1.2, son precisamente masa y energía. También en esa sección veremos que la energía puede intercambiarse sólo en dos formas complementarias y no excluyentes (calor y trabajo) de modo tal que, en síntesis, el equilibrio de cualquier región macroscópica del universo involucra tres equilibrios: másico (o de fases, o químico), mecánico y térmico. El último de estos se refiere al intercambio de calor, y ese es precisamente el foco de la

¹ Aunque el valor de esta edad podría parecer puramente especulativo, lo cierto es que el cálculo es científicamente riguroso. Véase Martino, L; Osella, A.; Dorso, C; Lanata, J (2007) "Fisher equation for anisotropic diffusion: Simulating South American human dispersals", *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **76(3)**, 031923.

Termodinámica: el estudio de las relaciones que se establecen entre el calor (una forma de energía) y las otras variedades de energía en estados de equilibrio (termodinámico) a nivel macroscópico.

De esta manera, parece ser que si queremos estudiar el estado termodinámico de cualquier sistema debemos prestar cuidadosa atención a la relación entre equilibrio y estabilidad. Para completar nuestras nociones preliminares, digamos que la riquísima variedad de fenómenos que podemos observar en el cosmos indica que los sistemas evolucionan temporalmente, es decir, cambian sus características físicas en el tiempo. Aun cuando muchas veces estén involucradas escalas de tiempo completamente fuera de nuestra percepción humana, los sistemas no permanecen siempre idénticos a sí mismos sino que evolucionan y cambian, es como que en lugar de una foto el universo entero viviera en una película. Para comprenderlo, basta con mirar a nuestro alrededor: como consecuencia de múltiples y variadas interacciones, nada en nuestro planeta escapa a esta lógica. Y lo que es más, todo parece tender a la degradación (dicho esto en un sentido puramente bioquímico y energético).

No sólo eso, porque si además los procesos que ocurren en alguna parte del Universo no llevan a alguna forma de equilibrio, esa parte del Universo es inviable, es decir, inevitablemente colapsa. Por ejemplo, en una de las etapas evolutivas de los núcleos de estrellas mucho más masivas que el Sol, las transformaciones que ocurren no conducen a una forma de equilibrio estable, y la estrella simplemente explota (lo que se conoce como explosión de supernova) porque le resulta imposible permanecer eternamente en un estado fuera del equilibrio (o para decirlo mejor, en equilibrio inestable).

Aunque de modo alguno resulta obvio y evidente, un estado de equilibrio (estable) es un estado de mínima energía, de manera tal que para llegar a una definición razonablemente completa de un estado de equilibrio tendríamos que definir qué es la energía, y esto siempre y cuando aceptáramos el concepto intuitivo de masa.

Nosotros no vamos a pretender una definición formal de energía, sino que habremos de hacerlo a través de sus propiedades, de manera tal que a lo largo de este capítulo intentaremos introducir las ideas básicas que conduzcan a la comprensión del significado de la energía y las diferentes maneras en que se manifiesta, como así también su relación con los estados de equilibrio. Para ello, partiremos de algunas definiciones mínimas necesarias (como sistema, estado, estabilidad, estacionariedad y algunas otras pocas) que nos permitan avanzar en los conceptos y llegar a establecer las condiciones que deben darse para lograr alguna forma de equilibrio.

Y a propósito, estrictamente hablando, el Universo ni es estable ni está en equilibrio.

1.2 – Conceptos básicos

Si a los efectos de la búsqueda de equilibrio no podemos estudiar el Universo como un todo, lo mejor que podemos hacer, de momento, es concentrarnos en porciones limitadas, de tamaño arbitrario (puede ser un ratón o una galaxia, tanto da). A la porción de Universo bajo estudio lo denominamos *sistema*. Parece evidente que toda vez que

estudiemos un sistema, estaremos dejando afuera al resto del Universo. Este complemento, en un todo o en partes, es lo que denominaremos *entorno* (o *medio externo*). Si usted, por ejemplo, estudia ciertos fenómenos relacionados con un conjunto de alumnos en un aula, puede tomar como complemento las otras aulas del piso, o del edificio, o del barrio, o el conjunto de aulas del país, lo que desee o su necesidad proponga. Pero tenga presente que no todos serán de idéntica significación ni utilidad. Si tomamos como sistema un aula de una escuela rural de una provincia de Burundi, pensar como entorno a los estudiantes de una escuela de Boston parece temerario (además de poco práctico) porque no sabemos qué formas de interacción e intercambio puede existir entre estos sistemas (piense que el entorno es en sí mismo un sistema).

El límite entre un sistema y su entorno no tiene por qué ser una superficie material. Puede serlo, como es el caso de las paredes del recipiente que contiene un gas que intercambia calor con el medio externo, o puede ser una superficie matemática, como en el caso del límite de una región interna de un fluido que encerramos idealmente por esa superficie matemática para estudiarlo. Pero en un caso u otro, las partes internas del sistema intercambian entre sí, y eventualmente con su entorno, materia y energía. Como adelantáramos en la Introducción, esta es la característica fundamental de los sistemas termodinámicos, y volveremos sobre estos conceptos al final de esta sección.

Todo sistema, desde un punto de vista físico, se encuentra en un determinado estado, esto es, adopta una particular configuración que se interpreta por medio de un conjunto de

El *estado* de un sistema queda definido y determinado por los valores de un conjunto de parámetros macroscópicos medibles que son propios del sistema y que se llaman *variables de estado*. Entonces:

- un estado es una particular configuración de un sistema, que queda definido por los valores de sus variables de estado.
- si todas las variables de estado permanecen sin cambios en el tiempo (o sea, si no evolucionan temporalmente) el sistema está en equilibrio.

propiedades medibles. Las propiedades que definen el estado de un sistema se hallan siempre asociadas a estos parámetros cuantificables, que se conocen como *variables de estado*. El número de variables que se necesitan para definir completamente el estado de un sistema dependen siempre del sistema y de su particular estructura.

Por ejemplo, para especificar el estado termodinámico de un gas ideal (cuya definición pospondremos hasta la sección 1.4) se requieren cuatro variables de estado, normalmente la presión, el volumen, la temperatura y la masa del gas. No son estas las únicas variables de estado posibles para un gas ideal, pero sí son suficientes. Para determinar el estado mecánico de una masa puntual que oscila horizontalmente ligada a un resorte ideal no nos alcanza con conocer la deformación del resorte porque, salvo en los extremos de la oscilación (donde el cuerpo que oscila se detiene) a cada posición le corresponden dos velocidades posibles. Luego, la especificación

de un estado del sistema completo en este caso requiere de cinco cantidades, de cinco variables de estado: posición, velocidad (o como es habitual, *cantidad de movimiento lineal*) masa, constante elástica y energía total.

Las variables de estado de un sistema no pueden evolucionar de manera arbitraria unas respecto a otras. Están ligadas por relaciones formales que se denominan *ecuaciones de estado*, que son formas funcionales que vinculan a las diferentes variables de estado que se usan para describir al sistema. En términos absolutamente generales, la ecuación de estado de un sistema físico descrito por N variables de estado (q_1, q_2, \dots, q_N) es de la forma

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0 \quad (1.1)$$

Por ejemplo, en el caso de un oscilador hemos dicho que las variables de estado suficientes son cinco. Si x representa la posición de la masa puntual respecto de la longitud en reposo del resorte, y si las oscilaciones ocurren sin fuerzas disipativas (de manera que la energía del oscilador sea constante) resulta

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2} \quad (1.2)$$

donde $\omega^2 = k/m$ es la pulsación natural de la oscilación y k la constante elástica del resorte.

Obsérvese que no cualquier velocidad es aceptable, pues de hecho está limitada por la ecuación de estado (1.2), de modo tal que si graficamos los valores posibles de velocidad para valores definidos de m , k y energía inicial, obtenemos un gráfico como el de la figura 1.1.

Nótese que cada punto sobre cada una de las trayectorias en el plano $x - v$ es un estado posible del sistema, y de hecho son los únicos posibles para cada valor de energía. El plano en el que se grafican los estados posibles del sistema se denomina *plano de fases*,

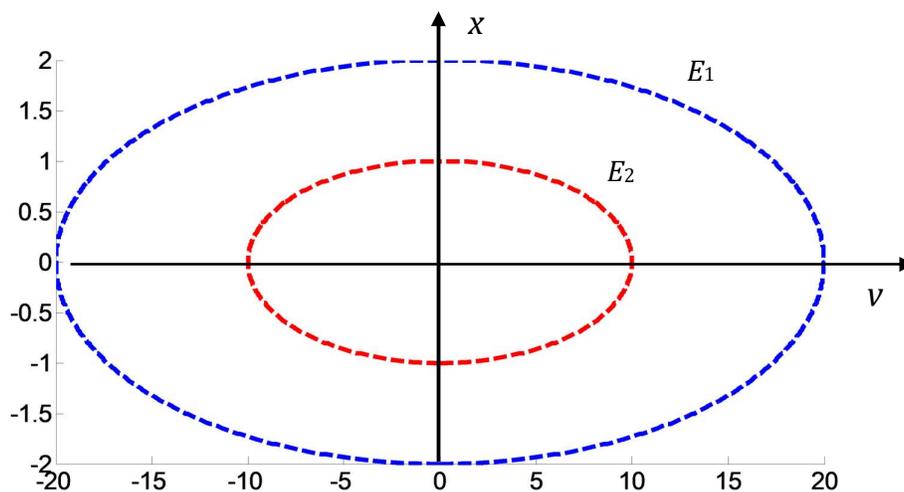


Fig. 1.1: plano de fases de un oscilador armónico horizontal sin fuerzas disipativas. Se ha tomado $m=1\text{kg}$ y $k=10\text{N/m}$. La curva exterior (en color azul) corresponde a una energía $E_1=200\text{J}$ (que corresponde a una elongación inicial de 2m) y la interior corresponde a una energía $E_2=50\text{J}$ (amplitud máxima de 1m).

y a la inversa, cada punto en el plano de fases, compatible con las restricciones del sistema, es un estado posible.

La figura 1.2 muestra el espacio de las fases en el caso de un gas ideal. Para un dado valor de masa (o del número de moles, si se prefiere) cada estado posible queda determinado por la ecuación que vincula las restantes variables de estado (presión, P , volumen, v , y temperatura, T) que habremos de formalizar en la sección 1.7 pero que en este caso es suficiente escribir como

$$Pv = ZT \quad (1.3)$$

donde Z es una constante que depende de la masa del gas.

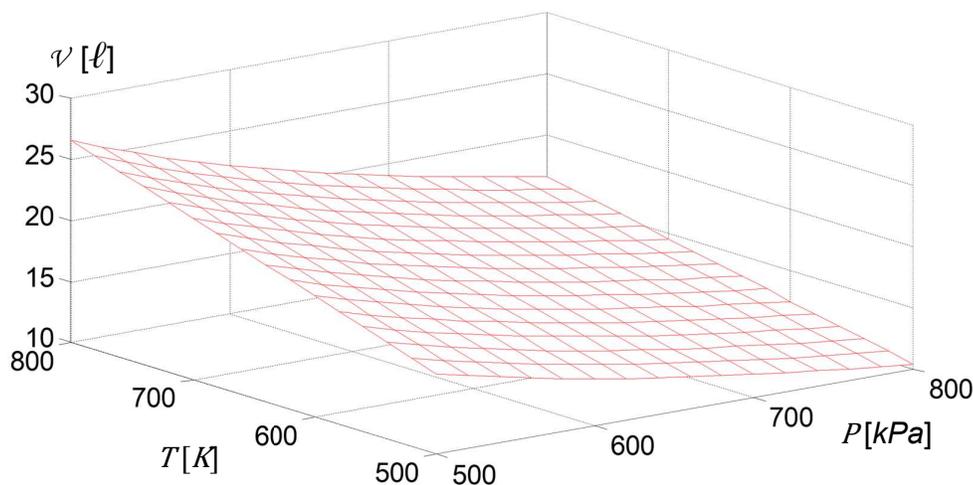


Fig. 1.2: estados posibles para 2 moles de un gas ideal, con presiones entre 500 kPa y 800 kPa, y temperaturas entre 500K y 800K. Cada línea del entramado que va de arriba hacia abajo representa el conjunto de estados posibles a presión constante (isobaras), en tanto que las líneas de izquierda a derecha representan estados de igual temperatura (isotermas).

Las características propias de un sistema pueden variar en el tiempo o en el espacio, y al hacerlo cambian los valores de las variables de estado. Por ejemplo, la densidad del agua de mar no habrá de variar en los tiempos característicos de medición, pero es función de la profundidad. Parece evidente que en tal caso nuestro sistema varía espacialmente o, dicho en otras palabras, que alguna de sus propiedades (en este caso la densidad) es función de la posición. Si calentáramos agua, la guardáramos en un termo y midiéramos su temperatura, no esperaríamos variaciones con la posición aunque sí esperaríamos que la temperatura se modificara con el tiempo. Un sistema que modifica sus características con el tiempo se dice que *evoluciona temporalmente*.

Luego, podemos afirmar que

► *Postulado: un sistema se encuentra en equilibrio cuando sus variables de estado no evolucionan temporalmente.*

Posiblemente haya que tener un poco de cuidado con estos términos y no confundir un *equilibrio estacionario* con un *equilibrio estático*. En ambos casos las variables de estado son invariantes temporales, pero los escenarios son diferentes. Para conceptualizar esta idea, pensemos en un recinto cualquiera al que puede ingresar y del que puede salir una determinada magnitud $G(\vec{r}, t)$. No importa lo que G represente exactamente, en principio sólo pretendemos que es función de la posición y del tiempo. A la cantidad de magnitud G que atraviesa la superficie S del recinto (si se quiere, “lo que sale” menos “lo que entra”) en la unidad de tiempo se lo denomina *flujo* (en este caso, de la magnitud G). Si la magnitud G no se crea ni se destruye en el interior del recinto, y si la cantidad de magnitud G que ingresa al recinto es igual a la cantidad de magnitud G que abandona el recinto, parece evidente que dentro del recinto la magnitud G no habrá de cambiar en el tiempo. En tal caso podemos afirmar que la magnitud G es *estacionaria* pero no tenemos ningún derecho a decir que la situación es *estática*.

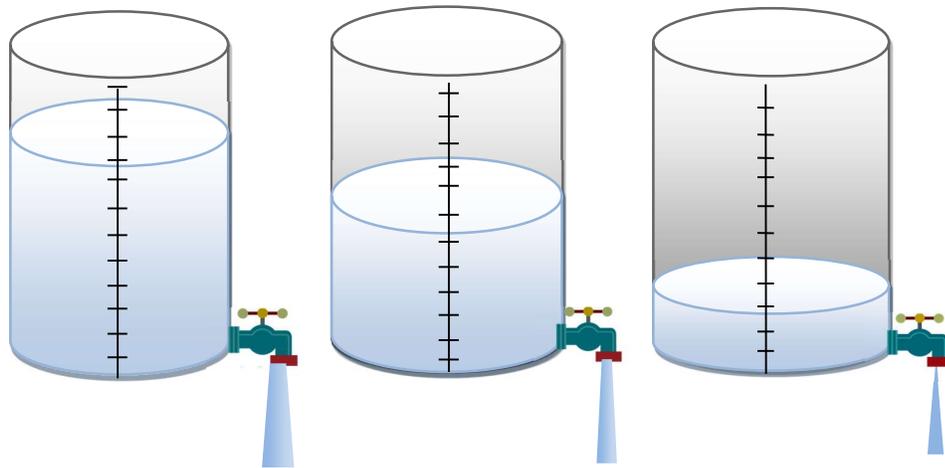


Fig. 1.3. El vaciamiento del recipiente del dibujo no es un proceso estacionario, porque la cantidad de líquido que fluye (indicado por el grosor del chorro) no es constante en el tiempo. Esto significa que en intervalos iguales no salen del recipiente volúmenes iguales de líquido.

Por ejemplo, el número de automóviles que circulan por una autopista no parece ser una magnitud estacionaria porque en tiempos relevantes (digamos algunas horas) el número de automóviles que entran por minuto a la autopista no es el mismo, y ni siquiera es igual al número de automóviles que salen de esa autopista (de otra forma no habría

congestionamientos). Por ejemplo, la cantidad de automóviles que ingresa por minuto a la autopista a las 4 de la mañana seguramente no es igual al número de autos que ingresan por minuto a las 12 del mediodía. Este proceso no es estacionario. Por el contrario, cuando usted riega un jardín el flujo de agua entre la manguera y la tierra es estacionario, porque en tiempos relevantes (digamos, el tiempo que le lleva regar) siempre ingresa a la tierra la misma cantidad de líquido por unidad de tiempo. Todavía más, piense en el volumen de agua dentro de la manguera: siempre es el mismo, pero cuando la canilla está abierta el agua fluye estacionariamente (la cantidad de agua que entra a la manguera es igual a la cantidad de agua que sale de la manguera) en tanto que si la canilla está cerrada se halla en equilibrio estático (el volumen -y el resto de las propiedades- son invariantes temporales pero el flujo es nulo).

Las variables de estado de un sistema algunas veces son parámetros asociados a la extensión del cuerpo en el espacio; otras veces se refieren a una característica inherente e interna del sistema. En el primer caso la variable se denomina *extensiva*, mientras que las que no dependen del tamaño del sistema se denominan *intensivas*.

A modo de ejemplo pensemos en un sistema formado por agua y aceite. El volumen del sistema es una variable extensiva, como lo es la masa, porque si redujéramos cada parte del sistema a la mitad esas variables se reducirían a la mitad. Pero la densidad de cada parte permanecería invariable, de manera tal que la densidad es una variable intensiva. Y como además sabemos que la masa se define como el producto de la densidad por el volumen, parece evidente que el producto de una variable extensiva por otra intensiva resulta en una variable extensiva.

Obsérvese que el sistema de este ejemplo está formado por dos subsistemas bien diferenciados por sus propiedades. Cuando las propiedades físicas y químicas de un sistema son iguales en todos sus puntos se dice que el sistema es *homogéneo*. Un sistema es *heterogéneo* cuando está formado por dos o más subsistemas (o *fases*) homogéneos cada uno de ellos. El sistema de nuestro ejemplo es claramente heterogéneo. Por otro lado, toda evolución se asocia a un conjunto de procesos que se agrupan bajo el nombre de transformación. Por ejemplo, la figura 1.4 muestra un par de transformaciones entre todas las relaciones posibles entre las variables de estado de los dos moles de gas ideal de la figura 1.2. Desde ya que no son las únicas, cualquier par de estados ligados por un

En general, las características químicas que distinguen a una sustancia de otra (como puede ser el punto de fusión, la elasticidad, la solubilidad, etc.) son propiedades intensivas.

- las propiedades intensivas no son aditivas (si por ejemplo unimos dos bloques iguales de hierro el punto de fusión permanece invariante).
- por el contrario, las propiedades extensivas son aditivas (si por ejemplo unimos dos bloques iguales de hierro la masa del conjunto se duplica).
- toda propiedad extensiva se transforma en intensiva si se la divide por la masa del cuerpo. Por ejemplo, el volumen (cantidad extensiva) por unidad de masa define la densidad, una propiedad intensiva.

número finito de caminos posibles sobre ese entramado constituye una transformación (de ese gas ideal).

Cuando al cabo de una serie de transformaciones el sistema bajo estudio regresa al mismo estado inicial, esto es, las variables de estado están en los mismos valores que al inicio de la primera evolución, se dice que la transformación es *cerrada* o que se ha completado un *ciclo*.

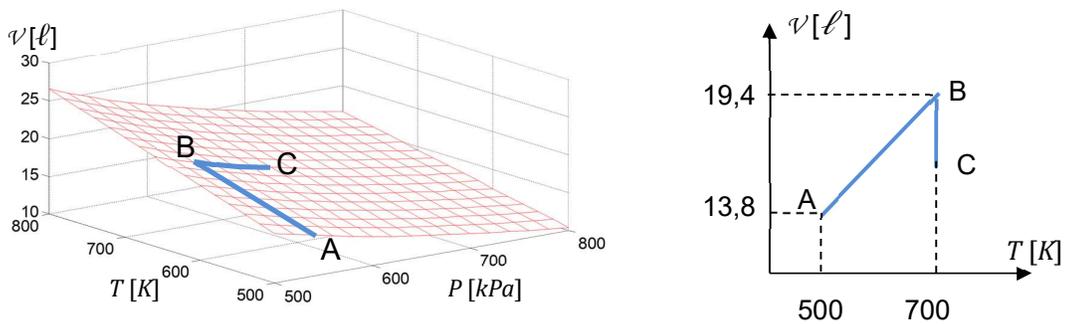


Fig. 1.4: a la izquierda se muestra la transformación ABC en el espacio de las fases de los dos moles de gas ideal de la figura 1.2. Consiste en una isobara (a 600 kPa , transformación AB) y una isoterma (curva BC, a 700 K) que lleva el volumen a 15ℓ . A la derecha se ha llevado esta transformación al plano v - T . Obsérvese que la presión del estado C es $P_C = 776\text{ kPa}$.

Todos los motores, por ejemplo, evolucionan cíclicamente, porque al cabo de un cierto número de particulares transformaciones el sistema regresa al estado inicial para comenzar un nuevo ciclo. A este tipo de sistemas se los denomina *máquinas cíclicas*.

De acuerdo a lo que venimos diciendo, cuando un sistema evoluciona lo hace con cambio en los valores de una o más de sus variables de estado. Para que esto ocurra, a su vez, debe existir alguna interacción con el entorno o transformaciones internas que modifiquen simultáneamente al menos dos de las variables del sistema. Por ejemplo, si usted calienta un globo inflado (al que estudiamos como sistema) resulta inmediatamente evidente la variación de una de las variables de estado del globo, a saber, el volumen. Esta variación (en este caso el volumen aumenta) se debe al intercambio de alguna cantidad física (en este caso calor, que estudiaremos más adelante, véase la sección 1.7 en la parte 2 de este capítulo) con el entorno. Por el contrario, piense ahora en una estrella: la presión de la radiación se obtiene a expensas de transformaciones termonucleares en el núcleo (que son procesos propios e internos, sin interacción con el entorno) de manera tal que se transforma masa (una variable de estado) en calor (que, como estudiaremos en detalle en la sección 1.12, es energía).

En términos absolutamente generales, existen sólo tres tipos de interacciones entre sistemas: másica, mecánica y térmica. Esto significa que los sistemas sólo pueden intercambiar masa, trabajo o calor, sin que el intercambio de uno de estos entes impida el

intercambio de otro. Pero también representa la aceptación de que los sistemas no intercambian otra cosa que no sea masa, trabajo o calor. Por ejemplo, no intercambian tiempo porque éste es una propiedad del espacio-tiempo y no de los sistemas que en él evolucionan. Tampoco pueden intercambiar propiedades medias (como el sabor o la temperatura) porque son promedios macroscópicos sobre el conjunto y no propiedades del sistema en sí mismo. De este modo, toda propiedad o magnitud física que los sistemas intercambian se reduce siempre a una de estas tres formas fundamentales.

Un sistema evoluciona cuando hay cambios en los valores de todas o algunas de las variables que definen sus estados. Pero como las variables están ligadas por una ecuación de estado, la evolución de un sistema ocurre con el cambio de al menos dos de sus variables de estado. Es imposible una evolución que involucre la variación de una única variable de estado.

Calor y trabajo, a su vez, se definen como las dos formas en que se intercambia la energía. Para conceptualizar esta afirmación, pensemos que el cambio de las variables propias del sistema debe ir acompañado de un conjunto de variaciones que sufren los *parámetros externos*, que son cantidades asociadas a propiedades del entorno del sistema y están fijadas por las condiciones de la interacción. Dejando de lado los cambios asociados a intercambios de masa, parece evidente que los parámetros externos tienen sólo dos alternativas: cambian o no. En consecuencia, es posible definir calor como la forma de energía que absorbe un sistema sin cambio en los parámetros externos

extensivos, y *trabajo* como la forma de energía que es entregada a un sistema con cambio de los parámetros externos extensivos. Como no hay más que dos alternativas (de nuevo, en la interacción los parámetros externos cambian o no cambian) de esta forma reducimos a sólo dos las maneras en que puede intercambiarse la energía.

Este intercambio de energía se traduce luego en un cambio de la energía interna del sistema, un concepto formalizaremos en la sección 1.12 pero que por ahora podemos adelantar que se trata de una función de estado. Sin ir más lejos, la expresión (1.2) nos adelantaba que, fijados por ejemplo la energía y la velocidad es posible determinar unívocamente la posición de un determinado oscilador armónico.

Para completar estas ideas preliminares, en el Cuadro 1.1 ordenamos las denominaciones de los sistemas frente al intercambio de materia, calor y trabajo. Un sistema que no intercambia propiedad alguna, es decir, un sistema cerrado, adiabático y rígido se denomina *sistema aislado*. A la luz de nuestra afirmación de que los sistemas en el universo tienden al equilibrio por intercambio de energía y materia, parece innecesario aclarar que en la Naturaleza no existen sistemas aislados (salvo el Universo mismo, véase la sección 1.16) aunque en función de específicos fenómenos particulares algunos pudieran pensarse como tales. En consecuencia, cuando hablemos de sistemas aislados lo haremos, desde ya, en un marco idealizado.

Los sistemas termodinámicos sólo intercambian masa y/o energía (sea en forma de trabajo, de calor, o ambos) y no intercambian propiedades que no le son propias (por ejemplo, tiempo) ni características medias (por ejemplo, textura)

Cuadro 1.1. Clasificación de los sistemas frente a los intercambios de materia y energía

	Materia	Energía	
		Calor	Trabajo
Si intercambia	abierto o permeable	diatérmico	no rígido
Si no intercambia	cerrado o impermeable	adiabático	rígido

1.3 – Estados de agregación y energía

Dado un conjunto cualquiera de objetos, existen variadas formas de clasificarlos y ordenarlos. Cuando se trata de cuerpos y sustancias la clasificación más habitual es la que los encasilla en algún *estado de agregación* a partir de un determinado número de características físico-químicas que resumen las propiedades de esos cuerpos. Viviendo en un planeta como en el que vivimos, estamos habituados a tres estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso. Sin embargo, como discutiremos en este apartado, los estados de agregación no son sólo estos. Y todavía más, por mucho que estemos habituados a ellos, a escala cosmológica constituyen apenas una singularidad, ni son los más abundantes ni son los más frecuentes².

El estado de agregación de un cuerpo depende fuertemente de la presión y de la temperatura a las que se encuentra. De alguna manera los estados de agregación se refieren al orden de las estructuras constitutivas del cuerpo y básicamente se distinguen por las distancias interatómicas (o intermoleculares, pero no por las fuerzas *intramoleculares*, que son de origen diferente y generalmente mucho más intensas) y por las fuerzas de cohesión entre los átomos (o las moléculas). Estas características microscópicas se traducen luego en un conjunto de propiedades macroscópicas tales como dureza, compresibilidad, elasticidad, conductividad, etc. Pero lo que queremos destacar es que las propiedades intrínsecas de la estructura dependen de la presión y de la temperatura, de manera que los valores de estos dos parámetros son centrales a la hora de conceptualizar los cambios de estado de un sistema.

Para decirlo de otro modo, todos nosotros estamos familiarizados con la idea de que entregando calor a un sólido lo transformamos en líquido, y si a éste le entregamos más calor lo transformamos en vapor (gas). Coloquialmente, si calentamos un cubo de hielo, en

² Formalmente, los estados de agregación son al menos siete. En esta sección introduciremos las características salientes de cuatro de ellos, porque la conceptualización de los otros (materia degenerada, condensado de Bose y condensado de Fermi) escapa por completo al enfoque de este libro.

algún momento pasa a agua líquida y luego a vapor de agua. Sin embargo, ni todo el hielo pasa *simultánea e instantáneamente* a agua, ni todo ocurre siempre igual bajo diferentes condiciones. Estos fenómenos están emparentados con la presión y la temperatura a la que realizamos la observación. Por ejemplo, sabemos que en idénticas condiciones hay elementos que no pasan de fase sólida a líquida sino que directamente se evaporan (la naftalina, por ejemplo, o el hielo seco, por decir algo). Todavía más, para calentar agua, por ejemplo, solemos aumentar la temperatura, es lo usual, pero conseguiríamos el mismo efecto disminuyendo la presión externa (todo aquel que haya calentado agua a una altura considerable, en lo alto de una montaña por ejemplo, donde la presión atmosférica es menor, sabe que la temperatura del agua se eleva más rápido que a nivel del mar, o lo que es lo mismo, hierve a temperatura menor que a nivel del mar. Por eso, a esas alturas, es necesario cocinar por más tiempo los alimentos para que alcancen el punto deseado).

Todas las sustancias poseen un valor definido de presión y de temperatura a los cuales coexisten las fases sólida, líquida y gaseosa. Este punto se conoce como *punto triple*, y varía enormemente entre las diferentes sustancias. Por ejemplo, el punto triple del agua se encuentra a $0,01^{\circ}\text{C}$ y a alrededor de 0,006 veces la presión atmosférica a la que estamos habituados.

El estado de agregación en que se encuentra un sistema para determinados valores de presión y temperatura, y la forma en que trasciende de uno a otro, se sintetizan en un gráfico conocido como diagrama de fases. La figura 1.5 muestra un diagrama de fase genérico, y los que corresponden al agua y al hielo seco.

Los estados de agregación se refieren al orden de las estructuras constitutivas del cuerpo.

- dependen de la presión y de la temperatura del entorno.
- se diferencian básicamente por las distancias interatómicas o intermoleculares y por las fuerzas de cohesión entre los átomos y/o las moléculas.
- mayor fuerza de ligadura entre átomos y/o moléculas se traduce en estructuras más ordenadas.

Obsérvese que el punto triple queda definido en un único valor de presión (P_{PT}) y de temperatura (T_{PT}). La forma en que evoluciona la línea de equilibrio sólido – líquido es típica y particular de cada sustancia. Puede verse que además del punto triple existe otro, el punto crítico, en el que finaliza la línea de equilibrio entre las fases líquida y de vapor. A partir de ese par (T_{CR}, P_{CR}) sólo existe una fase fluida, es decir, resulta imposible licuar el gas por medio de compresión.

Volviendo al punto triple, puede verse que para valores de presión por encima de P_{PT} y por debajo de P_{CR} , los aumentos de temperatura del sistema (cuya temperatura inicial supondremos inferior a la del punto triple, T_{PT}) hacen que el sistema evolucione de sólido a líquido (fusión) y luego de

líquido a gas (vaporización), como hemos marcado con una línea de rayas azules. Por debajo de la presión del punto triple, P_{PT} , los incrementos de temperatura de un sistema que tenía una temperatura por debajo de T_{PT} hacen que el sistema evolucione directamente de fase sólida a gaseosa (sublimación), indicado por una línea de guiones verdes.

Para decirlo de otra manera, si un sistema se encuentra a una temperatura menor que la del punto triple y a una presión inferior a la del punto triple, al recibir calor necesariamente evolucionará directamente de la fase sólida a la gaseosa.

Estos fenómenos pueden verse en la parte inferior de la figura 1.5. En el panel inferior izquierdo se muestra el diagrama de fases del agua. Su presión de punto triple está muy por debajo de la presión atmosférica, de manera que a presiones del orden de la atmosférica evoluciona como un sistema por la línea azul. En cambio, el hielo seco (dióxido de carbono) tiene una presión de punto triple 5 veces superior a la atmosférica, de manera tal que a presiones del orden de la habitual evoluciona a lo largo de la línea de puntos verdes, esto es, pasa de fase sólida directamente a fase gaseosa.

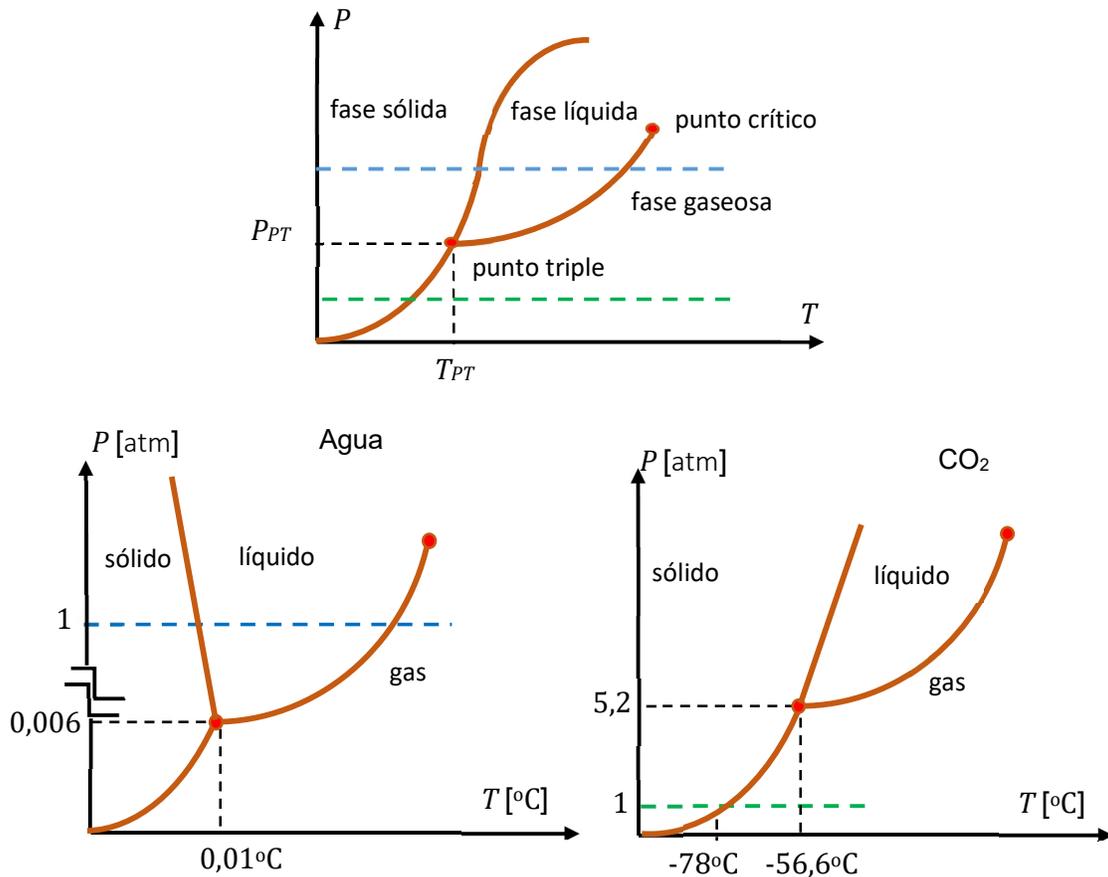


Fig.1.5: el panel superior muestra un diagrama de fases genérico, en el que pueden verse el punto triple y el punto crítico. El panel inferior izquierdo esquematiza el diagrama de fases del agua, en tanto que el derecho esquematiza el del dióxido de carbono (hielo seco).

Regresemos ahora a las características de los sistemas en los diferentes estados de agregación, y pensemos que realizamos el análisis para presiones entre la del punto triple y la crítica, y para temperaturas por encima de la del punto triple. En los sólidos las fuerzas

interatómicas son comparativamente las más intensas, en tanto que las distancias son, en términos relativos, muy cortas. Estas características se reflejan luego en su resistencia a la compresión y a la tracción, rigidez, impenetrabilidad y, en consecuencia, en el hecho de que posean forma y volumen propios. En términos absolutamente generales, los sólidos suelen clasificarse, por su ordenamiento estructural, en *sólidos cristalinos* y *sólidos amorfos*. Los primeros se estructuran en forma de retículos ordenados conocidos como *estructuras cristalinas*. Las estructuras microscópicas de estos cuerpos están conformadas por una unidad denominada *celda unitaria* o *celda elemental*, que al repetirse periódica e idénticamente a sí misma en las tres direcciones espaciales, de alguna manera “construye” todo el cristal.

Los sólidos que no poseen este tipo de estructura ordenada se denominan amorfos, y su más abundante exponente natural son las piedras volcánicas. Los sólidos amorfos de origen industrial son la mayoría de los plásticos (en sus más variadas formas) y el vidrio (de hecho, el vidrio, tan familiar para todos nosotros, no es estrictamente un sólido sino un líquido súper congelado).

En rigor, no es que los sólidos amorfos carezcan de estructura, lo que no tienen es un orden particular de largo alcance, una regularidad que nos permita conocer, como en los sólidos cristalinos, la estructura completa a partir del conocimiento de una parte. Esta falta de ordenamiento les confiere, a cambio, una marcada isotropía, es decir, sus propiedades son independientes de la dirección espacial que se elija. Este no es el caso de los sólidos cristalinos, en los que, en general, las tres direcciones espaciales no son equivalentes. Aun así, aunque las estructuras cristalinas no son todas iguales, existen sólo siete sistemas cristalinos, cada uno de ellos caracterizado por las relaciones de longitud y ángulos de la celda unidad.

Las propiedades físicas de los sólidos dependen por un lado del tipo de estructura que forman, y por el otro del tipo de partículas que se hallen presentes en los nodos de la red cristalina y de la naturaleza de las fuerzas de atracción entre ellas. El estudio detallado de estas estructuras está completamente fuera del alcance de nuestros objetivos, de manera tal que las propiedades que nos interesarán a lo largo de estos capítulos, las propiedades térmicas y las propiedades electromagnéticas (por ejemplo, la capacidad de transporte térmico, la existencia o no de una temperatura de fusión o la facilidad relativa para transportar carga eléctrica), habremos de caracterizarlas a través de un conjunto de coeficientes macroscópicos que se hallan asociadas a cada una de esas propiedades (por ejemplo, la capacidad de transporte térmico se caracteriza por su coeficiente de conductividad térmica, en los casos en que esté definido el punto de fusión se define el calor latente, y así siguiendo).

La manera en que los átomos de un sólido se estructuran y compactan en la red cristalina define las propiedades mecánicas, térmicas y eléctricas de ese sólido. Todas esas propiedades se ven reflejadas en el conjunto de coeficientes macroscópicos que definen al sólido: módulo de elasticidad, punto de fusión, conductividad eléctrica, índice de refracción, constante de dureza, susceptibilidad magnética, etc.

Ahora bien, de nuestra experiencia cotidiana sabemos que para provocar un cambio de estado en un cuerpo debemos *intercambiar* algún tipo de energía (típica pero no exclusivamente calor) con ese cuerpo, y que para transformar un cuerpo del estado sólido al líquido debemos *entregarle* algún tipo de energía al sólido (típicamente calor). Una parte de esta energía quedará en alguna forma dentro del cuerpo (cualquiera sea su estado final, aunque en este caso sólo nos ocupemos de la transición de fase sólida a fase líquida) y otra parte se usará básicamente para dilatar las ligaduras y aumentar la distancia entre moléculas, debilitando notablemente el vínculo entre las partes.

Este fenómeno conduce a que, en líneas generales, las moléculas de un líquido se muevan al azar y las distancias entre ellas sean constantes sólo dentro de un estrecho margen estadístico y no puedan guardar un patrón único de distancia, esto es, no permanecen en una configuración única. La limitación al aumento del movimiento caótico proviene de las fuerzas de atracción internas, que son todavía lo suficientemente intensas como para limitar a las moléculas en su movimiento dentro de un volumen definido. En consecuencia, a pesar de poseer un volumen propio, su libertad de movimiento les permite fluir, lo que lleva a que puedan derramarse y deban adoptar la forma del recipiente que los contiene.

Si seguimos entregando energía al líquido lo llevamos al estado gaseoso, en el cual las fuerzas intermoleculares ya son muy débiles (pero no son nulas, de hecho son atractivas y son las responsables de que el gas no se comporte como ideal) y las moléculas no están ligadas entre sí salvo durante las colisiones que inevitablemente habrán de ocurrir (porque las moléculas perdieron las ligaduras, no la energía cinética). En consecuencia no poseen ni forma ni volumen propios, y, salvo interacciones externas, se expanden libremente y ocupan todo el volumen del recipiente que los contiene. Y estas características le confieren la particular compresibilidad que poseen.

La interacción entre las moléculas en este estado, decimos, es muy débil, y si el gas

está muy diluido (esto es, posee muy baja densidad), las interacciones son, además, esporádicas. En general, si el tiempo entre colisiones es mucho mayor que el tiempo que dura una colisión el gas se aproxima a la definición de gas ideal. Una forma alternativa de definir un gas ideal es diciendo que las colisiones entre las partículas son prácticamente instantáneas y perfectamente elásticas (recuérdese que en una colisión elástica se conservan la cantidad de movimiento del sistema y la energía).

Los gases de la atmósfera terrestre, en un rango bastante amplio de temperaturas y presiones alrededor de los valores normales a los que estamos acostumbrados (lo que se conoce como condiciones normales de presión y temperatura, abreviado como CNPT, y sobre las que volveremos más adelante) se

En un gas básicamente no existe correlación alguna entre las moléculas que lo forman. En consecuencia, las leyes que explican su comportamiento son *leyes estadísticas*. La mayoría de los parámetros asociados a un gas (como por ejemplo presión, densidad, temperatura, número de moles) son medidas macroscópicas y estadísticas que reflejan propiedades microscópicas.

comportan como gases ideales, básicamente porque la atmósfera terrestre es una mezcla comparativamente diluida de gases.

Ahora bien, si entregamos energía a un gas modificamos sus parámetros propios. La forma en que estos parámetros se modifican depende de la manera en que se realiza el proceso. Sin embargo, estadísticamente, lo que aumenta es la movilidad de todas las moléculas del gas, de manera tal que en última instancia la energía que se entrega al sistema es absorbida y repartida entre los átomos y las moléculas del gas. Parte de la energía se traducirá en aumento de la movilidad (de la energía cinética) de las moléculas, y otra parte será absorbida por los electrones. Si se entrega suficiente energía a un gas los electrones más alejados del núcleo adquieren la energía suficiente como para liberarse, esto es, para vencer la atracción que los vincula al núcleo (es decir, los átomos se ionizan) y este fenómeno cambia la escala de acción de la fuerza que liga a los electrones con el núcleo.

Para hacerse una idea de este fenómeno imagine un gas ideal contenido en un cubo de, digamos, un metro de lado. La fuerza que liga a los electrones con su núcleo tiene su origen en la carga eléctrica de electrones y protones, es lo que se conoce como una fuerza eléctrica (por ahora apelamos al concepto intuitivo de fuerza eléctrica) que al cabo se trata de una fuerza de alcance infinito, esto es, dos cuerpos con carga eléctrica interactúan eléctricamente entre sí salvo que se hallen infinitamente alejados uno de otro, de la misma manera en que dos cuerpos con carga másica (masa) interactúan gravitatoriamente entre sí salvo que se hallen infinitamente alejados uno de otro.

Estamos pensando en un gas ideal, de manera tal que los átomos no interactúan entre sí salvo en las colisiones, y ahora surge una suerte de interacción interatómica a partir de las fuerzas eléctricas (sencillamente porque un núcleo no puede distinguir entre los que eran “sus” electrones y los otros). Las fuerzas eléctricas estuvieron siempre presentes, lo que ocurre es que cambió la escala. Antes de la ionización se manifestaban a escala atómico molecular, después de la ionización la escala es la del recinto que contiene al sistema. Estas interacciones se traducen en un movimiento colectivo y coherente, que cambia las propiedades del estado de agregación: el gas se ha transformado en plasma. Podemos pensar entonces un plasma como un gas en el que la mayor parte de sus átomos (si no todos) se encuentran ionizados y en el cual los movimientos colectivos son dominantes, haciendo que el sistema se comporte de manera coherente y colectiva.

Un gas pasa al estado de plasma cuando sus átomos se ionizan. No es que ahora aparezcan fuerzas eléctricas, las fuerzas eléctricas estuvieron siempre, lo que hacen es cambiar de escala.

Este cambio de escala hace que la fuerza eléctrica gobierne los movimientos del conjunto, que pasan a ser colectivos (pero colectividad no significa orden).

Coherencia no es lo mismo que orden. Como hemos visto, cada vez que se entrega energía a un sistema se pierde algo de información acerca del estado del sistema como conjunto. En ese sentido el estado sólido es el más ordenado y el de menor contenido energético, y en el extremo opuesto se hallan los plasmas. Que el estado de plasma sea colectivo significa que las oscilaciones que ocurren

en una parte del sistema se traducen en oscilaciones coherentes de todo el sistema, pero cada región es en sí misma desordenada (en el sentido de orden de un sólido, por ejemplo). Imaginemos por un instante que en el seno de un plasma cuasi neutro (estadísticamente hay tanta carga positiva como negativa) somos capaces de separar los electrones y los apartamos, todos juntos, digamos hacia la izquierda de los núcleos, positivos, a los que suponemos en el origen de un sistema de coordenadas.

Todo el conjunto de cargas negativas será atraído y acelerado hacia la derecha por las cargas positivas, y se frenará por completo a la derecha del origen para ser nuevamente atraído hacia el centro. El grupo de electrones oscilará estadísticamente con la misma frecuencia (conocida precisamente como *frecuencia del plasma*) como si tratara de una masa oscilando unida a un resorte.

Podemos formarnos una imagen ingenua de esta situación pensando en una formación de camiones de transporte; el conjunto se mueve colectivamente (realizan prácticamente las mismas acciones, a la frecuencia del plasma, a fin de conservar la configuración) pero dentro de la caja de cada camión (del tamaño de una esfera cuyo radio se conoce como radio *de Debye*) ese orden colectivo ya no se manifiesta (pero, a cambio, la interacción entre las cargas no se ve apantallada).

Por otro lado, un plasma es un fluido cuasi neutral, esto es, si n_i y n_e representan el número de iones y de electrones en un plasma, y n es el número total de partículas, cuasineutralidad significa $|n_i - n_e| \ll n$. Luego, en un plasma las desviaciones de la neutralidad de carga (una hipótesis implícitamente aceptada en los estados sólido, líquido y gaseoso) son generalmente microscópicas y el comportamiento colectivo se debe a que las partículas se vinculan a través de fuerzas de largo alcance (como la fuerza electromagnética, que discutiremos recién en el capítulo 8) aunque también lo hacen a

La atmósfera externa del Sol se expande de modo persistente y continuo, en lo que se conoce como *viento solar*. Se trata de un flujo de plasma a muy alta velocidad que, cuando impacta en la alta atmósfera terrestre ioniza los gases presentes y forma lo que conocemos como *ionosfera*. Sus manifestaciones más conocidas posiblemente sean las auroras y las tormentas solares.

través de colisiones. Vale la pena recalcar que los plasmas pueden contener una fracción de partículas neutras que no sólo interactúan entre sí sino también con las partículas cargadas, en ambos casos a través de colisiones.

Cuando cae un rayo se libera suficiente energía como para ionizar los gases alrededor y formar una columna de plasma. Claro que rápidamente los iones se recombinan y la atmósfera recobra su estado gaseoso natural, pero la alta atmósfera terrestre, continuamente bombardeada por las partículas de muy alta energía que provienen del Sol se halla permanentemente ionizada, es decir, en estado de

plasma. A esta región planetaria se la conoce como *ionosfera* (aunque posiblemente fuera correcto denominarla *plasmastera*). El fenómeno es absolutamente general, y cualquier atmósfera de cualquier planeta debe tener una ionosfera debido al flujo de partículas proveniente de su estrella central (o de *las* estrellas centrales si fuera el caso).

Por lo demás, a temperaturas típicas de las estrellas (no menos de 10 millones de grados en el núcleo, por encima de los tres mil grados en las regiones externas de las estrellas más “frías”) los gases se encuentran en estado de plasma, de manera tal que las estrellas, necesariamente, se hallan en estado de plasma. Y como el 99% de la masa de cualquier sistema planetario se concentra en la/s estrella/s central/es, no parece arriesgado asegurar que, por mucho, la mayor parte del Universo se encuentra en estado de plasma.

1.4 – Gases ideales

En el apartado anterior hemos indicado reiteradamente que en un gas ideal la interacción entre los átomos o las moléculas ocurre solamente en las colisiones, que es lo mismo que decir que en el estado de gas las moléculas se hallan débilmente correlacionadas. Esto no significa que sus propiedades no puedan medirse o que no existan leyes que describan su comportamiento. Significa más bien que deben definirse parámetros macroscópicos que reflejen estadísticamente los fenómenos microscópicos que se producen en el seno del gas, y en función de estos parámetros formular las leyes.

Así, por ejemplo, cuando hablamos de *la* densidad o de *la* presión de un gas contenido en un recipiente (que supondremos de tamaño adecuado como para considerar que sus variables de estado poseen valores definidos y constantes) no pretendemos implicar que en todas y cada una de las regiones de ese recipiente se miden idealmente los mismos valores de densidad o de presión. Lo que sí podemos asegurar es que, cualquiera sea la región del recipiente, la diferencia entre el valor verdadero y el valor estadístico de esa magnitud es mucho menor que el valor estadístico. Esto es, cualquiera sea la variable G , queremos decir que si G_E representa el valor estadístico y G_V el valor verdadero de la magnitud G , será

Las *variables determinísticas* pueden tomar un valor cualquiera de un conjunto de valores dados, pero ese valor es unívocamente predecible. Por el contrario, los valores de las *variables estocásticas* o *probabilísticas* son aleatorios, quedan definidos en términos de probabilidades. Dada una muestra de datos aleatorios es posible estudiar diferentes correlaciones entre ellos, y ordenarlos *estadísticamente* (valor más probable, valor medio, dispersión, etc).

$$|G_E - G_V| \ll G_E \quad (1.4)$$

Sabemos además que en un gas las moléculas se mueven al azar, es decir, no existe una dirección privilegiada o preferencial del movimiento. Esta configuración presupone que en cualquier instante, cualquiera sea la dirección que se elija, la cantidad de moléculas moviéndose en un sentido es estadísticamente similar a la cantidad de moléculas moviéndose en sentido opuesto. La movilidad de las moléculas depende de todo un conjunto de factores, pero parece evidente que cuanto mayor sea la energía cinética de las moléculas mayor será su movilidad. Y en virtud de que no existe una dirección privilegiada

del movimiento, resulta que la energía debe ser estadísticamente la misma en todo el recipiente.

La medida estadística y macroscópica del estado cinético traslacional de las moléculas se denomina *temperatura*. De nuevo es necesario hacer hincapié en el concepto estadístico de la temperatura. Imaginemos un proceso que nos permite introducir moléculas en un recipiente cerrado, de a una por vez. Supongamos que todas las moléculas son iguales (indistinguibles) y que cada molécula posee un valor no nulo y arbitrario de energía. Cuando introducimos la primera molécula podríamos razonar en términos de la Teoría Cinética de Maxwell y Boltzmann, que postula (y demuestra) que en un gas ideal la energía cinética de una molécula es directamente proporcional a la temperatura. Nuestro sistema de una sola molécula tiene un volumen propio mucho menor que el recipiente que lo contiene, de manera tal que lo asociaríamos a un gas ideal y entonces aseguraríamos que la “temperatura” del “gas” contenido en el recipiente es directamente proporcional a la energía cinética de la molécula. Pero esto sería como hablar de “la temperatura” de un bloque de masa m que se mueve a velocidad v , diciendo que esa “temperatura” es proporcional a su energía cinética. En ambos casos es incorrecto porque esa temperatura no mide nada, y no mide nada porque así planteada no tiene una significación conceptual basada en una formulación estadística.

¿Cuál es entonces el número necesario de moléculas como para hacer estadística?

Un cálculo estadístico requiere de un número mínimo de “muestras”. En el caso de un gas, parece razonable que sea del orden de 10^{19} moléculas, pero nunca 10 o 10.000.

- la temperatura es la medida macroscópica y estadística de la energía cinética media de traslación de las moléculas del gas.
- la presión es la medida macroscópica y estadística del número de colisiones por segundo y unidad de área del recipiente.

No está definido, sólo se pretende que sean “muchas”. Es como realizar una encuesta preguntando por la intención de voto de una población. Una sola encuesta no indica absolutamente nada, salvo, por supuesto, la opinión de una persona, pero ¿a cuántas personas habría que preguntarles para obtener una tendencia de voto significativa? En una ciudad como Buenos Aires normalmente se les pregunta a alrededor de 2000 personas, algo así como a uno de cada 1.200 habitantes. Si, por decir algo, suponemos que habremos de introducir un mol de moléculas, es decir $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ moléculas (N_A es el número de Avogadro) necesitaríamos alrededor de $N_A/1200$ moléculas para hacer estadística, esto es, podemos pensar en alguna estadística después de introducir

5×10^{20} moléculas.

Supongamos entonces que seguimos introduciendo moléculas, a condición de que el volumen total ocupado por esas moléculas sea mucho menor que el volumen del recipiente. Con el número de moléculas en el recipiente aumenta el número de colisiones. Si suponemos que estas colisiones son idealmente elásticas la energía se conserva y, como resultado neto, la energía comienza a distribuirse uniformemente entre las moléculas. Esto no significa que todas las moléculas tengan la misma energía porque no todas habrán de tener idéntica velocidad (recordemos que las masas, sí, son idénticas). Sin embargo,

después de un número considerable de colisiones las velocidades de las moléculas comienzan a ubicarse alrededor de un valor medio estadístico muy marcado. La temperatura es proporcional a la energía correspondiente a esa velocidad estadística media de las moléculas que, de nuevo, tiene sentido luego de muchas colisiones entre muchas moléculas.

Las partículas, recordemos, no colisionan sólo entre ellas sino que también lo hacen contra las paredes del recipiente que las contiene. Cada vez que colisionan intercambian cantidad de movimiento. La medida macroscópica y estadística que representa el número de colisiones por unidad de tiempo y unidad de área contra las paredes se denomina *presión* y, por lo dicho, es una medida de la cantidad de movimiento que las moléculas transfieren a las paredes. Parece evidente que si entregamos energía a nuestro gas habrá de aumentar la movilidad de las moléculas y, con ella, la temperatura y la presión (porque al tener más energía las moléculas transfieren mayor cantidad de movimiento). Si el sistema no es rígido, por ejemplo tiene una parte móvil, podrá también aumentar el volumen del recipiente.

Temperatura, presión y volumen son tres de las variables que describen el estado de un gas. Normalmente, la masa es la cuarta variable (sólo se requieren cuatro para describir por completo el estado de un gas) aunque lo más usual es usar el número de moles (recordemos que se define el mol como la masa de gas dividida por la masa molecular relativa de cada mol de moléculas).

La ecuación de estado más antigua que se conoce, formulada alrededor de 1662 por el inglés Robert Boyle y de manera independiente por el francés Edme Mariotte cerca de 1675, postula que en un amplio rango de presiones vale la relación

$$P\mathcal{V} = k_1(T) \quad (1.5. a)$$

donde P es la presión del gas, \mathcal{V} es el volumen y $k_1(T)^\dagger$ es una constante, diferente para distintos valores de temperatura. Luego, cada aumento de presión P se correlaciona necesariamente con una disminución del volumen, y viceversa.

Alrededor del año 1787, el francés Jaques Charles presentó una serie de resultados referidos al estudio de gases a baja presión, para los que había encontrado la relación entre su volumen y su temperatura en la forma

$$\mathcal{V} = k_2(P)T \quad (1.5. b)$$

donde $k_2(P)$ es una constante, diferente para cada presión. Una relación similar presentó Joseph Gay-Lussac en 1802, pero referida a la presión y la temperatura, en la forma

[†] Es interesante notar que para la época de Boyle y Mariotte las mediciones de temperatura eran bastante pobres. De hecho, sólo unos pocos años antes Fernando II de Médici había desarrollado el primer termómetro de alcohol de tubo cerrado. Sin embargo, Boyle y Mariotte lo único que debían controlar era que la temperatura fuera constante y diferente en cada experimento, sin necesidad de saber el valor efectivo de la misma. Sobre las escalas termométricas volveremos en la sección 1.5.

$$P = k_3(\nu) T \quad (1.5.c)$$

donde $k_3(\nu)$ es la pendiente de la recta PT y, claramente, es diferente para cada volumen elegido. Posiblemente valga la pena aclarar que la escala Celsius (véase la sección 1.5) se conocía en su versión actual desde 1745, de modo tal que Charles y Gay-Lussac podían medir efectivamente los valores de temperatura.

Una manera alternativa de definir un gas ideal es postular que es aquel cuya gráfica es una recta en el plano $P - T$, tal y como se define en la ley de Gay-Lussac. Claro está que esta afirmación habrá de ser válida sólo en un determinado rango de presiones y temperaturas, dentro del cual el gas se comporta como ideal. Fuera de este rango posiblemente sea un disparate siquiera hablar de gases. Lo que también parece evidente es que podríamos definir un gas ideal de una manera mucho más amplia postulando que es aquél en el que simultáneamente se cumplen las leyes de Boyle, de Charles y de Gay Lussac. Si bien sobre este punto regresaremos en la sección de complementos, digamos por ahora que la manera más general de enunciar las propiedades de un gas ideal es a través de la ley general presentada por Paul Emile Clapeyron hacia 1834

$$\frac{P\nu}{T} = R \quad (1.6)$$

donde R es una constante y, como de costumbre, P designa la presión, ν el volumen del gas y T su temperatura. Obsérvese que para cada temperatura constante se recupera la ley (1.5.a), para cada valor constante de presión la ecuación (1.5.b) y para cada valor constante de volumen la expresión (1.5.c). Por lo demás, la constante R , conocida como constante universal de los gases, se define como la relación que existe entre el volumen que ocupa un mol de gas ideal a 273K y presión atmosférica normal, esto es, $P = 1 \text{ atm} \cong 101.325 \text{ Pa}$. Como el volumen de un mol de gas en CNPT es de $22,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, resulta

Existen diversas formas de definir un gas ideal. Tal vez lo más adecuado sea definirlo como aquel sistema en el que simultáneamente valen las ecuaciones de Boyle (o ley de las isotermas), de Charles (o ley de las isobaras) y de Gay-Lussac (o ley de las isocoras) o, si se prefiere, aquel sistema en el que se cumple la ecuación de Clapeyron.

$$R = \frac{22,4 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \right) \times 101.325 \text{ Pa}}{273 \text{ K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (1.7)$$

Recordemos que la expresión (1.7) está escrita para un mol de gas. Teniendo en cuenta que el número de moles se define como $n = m/\mu$, donde m es la masa de gas y μ la masa molecular relativa, su generalización a un número arbitrario de moles es inmediata

ya que una masa $n = m/\mu$ veces mayor ocupa un volumen m/μ veces mayor. De esta forma, resulta

$$P\mathcal{V} = nRT \quad (1.8)$$

Antes de finalizar esta sección vale la pena dedicar un breve párrafo a las unidades de presión y volumen. Ante todo, obsérvese que las unidades de presión son las de una cantidad de movimiento por unidad de tiempo y unidad de área. Si convenimos en anotar entre corchetes cuadrados las unidades de una magnitud resultará

$$[P] = [m] [v]/[t] [A] \quad (1.9)$$

En el sistema internacional de medidas (S.I. o sistema MKSC) la unidad de presión será entonces

$$P = \frac{kg \ m/seg}{m^2 \ seg} = \frac{kg \ m/seg^2}{m^2} = \frac{N}{m^2} \equiv Pa \quad (1.10)$$

unidad que se denomina pascal y que, como se ve de la expresión (1.10), representa una fuerza por unidad de área. Si somos coherentes mediremos el volumen en m^3 , recordando en todo caso que $1 \ m^3$ equivale a 1.000 litros. Luego, el producto $P\mathcal{V}$ de la ecuación (1.5.a) tiene unidades $N \times m^3/m^2 = N \times m = J$, es decir, el producto $P\mathcal{V}$ tiene las unidades de una energía. El problema es que el miembro izquierdo de la ecuación (1.8) representa una energía pero el miembro derecho no parece representar nada porque está escrito en términos de una constante empírica. Volveremos sobre esta cuestión en la sección 1.16.

1.5– Escalas termométricas

Normalmente, para cuantificar la temperatura se usa algún método indirecto que relaciona las modificaciones estructurales que sufre un cuerpo (conductividad, dilatación, etc.) con los cambios de temperatura. El más conocido de estos métodos posiblemente sea el que utiliza la dilatación del mercurio cuando aumenta la temperatura.

Suponiendo a priori que el mercurio dilata linealmente, podemos construir una escala lineal tomando dos puntos fijos de referencia como extremos de la escala y dividiendo esa escala en partes iguales. Por ejemplo, es usual tomar como extremo inferior el punto de fusión del hielo (la temperatura a la que coexisten en equilibrio las fases sólida y líquida del agua, y al que se le asigna arbitrariamente el valor 0) y como extremo superior de la escala el punto de ebullición del agua (la temperatura a la que coexisten en equilibrio las fases líquida y gaseosa del agua, y al que se le asigna arbitrariamente el valor 100). Se divide

luego la escala en 100 partes iguales, cada una de las cuales se denomina grado, y se obtiene así una escala centígrada, originalmente desarrollada por el sueco Anders Celsius a mediados del siglo XVIII. Los valores extremos se anotan entonces como 0°C y 100°C . Queda claro que si se cambia la sustancia termométrica se cambia de escala, y ni siquiera podemos asegurar que vaya a ser lineal. Por ejemplo, unos 30 años antes que Celsius, el físico alemán Gabriel Fahrenheit utilizó alcohol como sustancia termométrica y estableció como extremo inferior de referencia el punto de fusión de una mezcla de hielo y cloruro de amonio (0 grado en la escala Fahrenheit, que se abrevia como 0°F) en tanto que el extremo superior estaba ligado a la temperatura del cuerpo humano (96°F). En la escala Fahrenheit el agua hierve a 212°F , en tanto que el hielo funde a 32°F . Luego, si se divide la escala Fahrenheit en cien partes iguales obtenemos que cada grado Fahrenheit corresponde a $100/(212-32) = 1/1,8$ unidades centígradas. Para decirlo al revés, una variación de 1°C corresponde a $1,8^{\circ}\text{F}$ y la conversión entre escalas es inmediata y resulta

Las unidades de presión son tan diversas como diversas son las ramas en las que se las utilizan. Por ejemplo, en Medicina se usa el Torr (o mm Hg), en algunas ramas de la Ingeniería la atmósfera (atm) o la atmósfera técnica (at). El servicio meteorológico informa la presión atmosférica en kilopascales, y en los medidores de la presión de los neumáticos se usan librafuerza/pulgada² (PSI).

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{[T(^{\circ}\text{F}) - 32]}{1,8} \quad (1.11)$$

Una escala de temperatura alternativa puede generarse aprovechando la expresión (1.5.c). En efecto, a cada cambio ΔT de la temperatura le corresponde un cambio lineal ΔP de presión, como se muestra en la figura 1.6. Como la relación entre presión y temperatura es lineal podemos definir una nueva escala de temperaturas a partir de la relación

$$P(T) = P_0(1 + \alpha T) \quad (1.12)$$

donde de su misma definición surge que P_0 es la presión a $T = 0$ en esta escala.

El problema se reduce ahora a calcular el valor de la constante α . Para eso podemos tomar un recipiente con una dada masa de gas (normalmente se usa hidrógeno), ponerlo en contacto con una mezcla de hielo y agua líquida en equilibrio (0°C) y medir su presión. Luego ponemos el recipiente en contacto con agua en ebullición en equilibrio con su vapor (100°C) y medimos su presión. Obsérvese la expresión (1.12): es la ecuación de una recta de la que conocemos dos puntos, de manera tal que calcular los valores de α y P_0 es inmediato, resultando $\alpha = 1 / 273,16^{\circ}\text{C}^{-1}$.

El valor de P_0 depende de la masa de gas (figura 1.6.a) pero si se grafica P/P_0 en función de la temperatura T resulta que todas las rectas son iguales, independientemente de la masa de gas dentro del recipiente (figura 1.6.b). Y de la expresión (1.12) es evidente que la presión del gas sería nula si la temperatura pudiera llevarse a $-273,16^\circ\text{C}$. Parece evidente entonces que el valor de la constante α debe representar un valor fundamental, pues su inversa representa la temperatura a la cual todos los gases tendrían presión nula.

Dadas dos escalas termométricas cualesquiera, siempre es posible hallar la relación entre los valores de temperatura en esas escalas. Y de hecho, hay valores de temperatura para los cuales dos escalas diferentes coinciden numéricamente. Por ejemplo, de la ecuación (1.7) es fácil ver que la lectura -40°F coincide con -40°C .

Está claro que esta idealización es irrealizable, porque mucho antes el gas se ha transformado en líquido y en sólido (de ahí que hayamos dibujado con línea de puntos la extrapolación de las rectas) pero el valor de la constante no pierde por eso su significado. A esta escala de temperatura, lineal como las otras que hemos visto, se la conoce como escala absoluta o escala Kelvin porque coincide con la escala de temperaturas introducida por William Thomson (o Lord Kelvin) a mediados del siglo XIX, y el cero de la escala (0 K) se conoce como cero absoluto. Obsérvese que 1 K de variación equivale a 1°C de variación, pero, a diferencia del cero absoluto, el cero de la escala centígrada (o de la Fahrenheit o cualquier otra, tanto da) no tiene significado físico alguno. Por ese motivo, y salvo por alguna razón de conveniencia, para medir temperaturas usaremos la escala absoluta.

De igual modo en que escribimos la relación (1.11) para relacionar las escalas de Celsius y de Fahrenheit, podemos escribir una expresión que vincule los valores de temperatura en la escala Kelvin y los valores de temperatura en la escala centígrada. Si convenimos en aproximar el cero de la escala Kelvin en -273°C (en lugar de $-273,16^\circ\text{C}$) resulta inmediatamente una expresión de la forma

$$T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273 \quad (1.13)$$

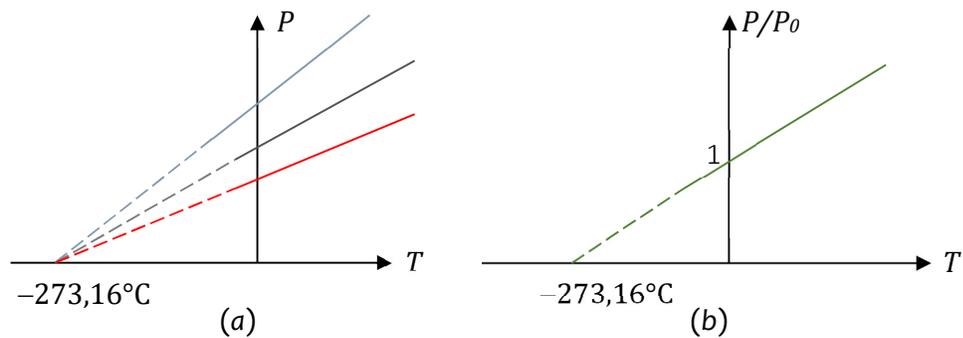
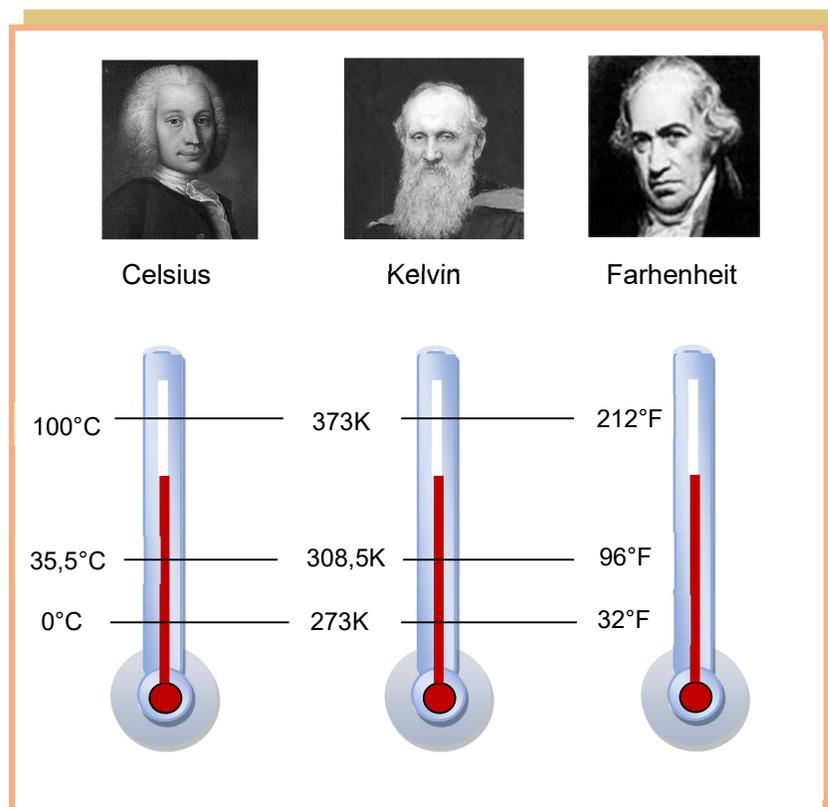


Fig. 1.6: en (a) se muestran las rectas P-T que corresponden a la misma masa de tres gases diferentes o, indistintamente, a tres masas diferentes de un mismo gas (obsérvese que en ningún caso se trata del mismo número de moles). La figura (b) muestra la relación P/P_0 en función de T , ya sea que se trata de igual masa de tres gases diferentes o tres masas diferentes de un mismo gas. En ambas figuras se han extrapolado las rectas; todas cortan al eje de temperatura en $-273,16^{\circ}\text{C}$.



Dos comentarios se hacen necesarios. En primer lugar, una escala termométrica puede construirse a partir de las propiedades de dilatación de cualquier sustancia, pero no tiene por qué ser ni lineal ni centígrada. Por ejemplo, en la figura 1.7.a mostramos las escalas L_1 y L_2 de la longitud de dos sustancias que dilatan linealmente la primera y cuadráticamente la segunda. Obsérvese que a $100^\circ C$ ambas han duplicado su longitud, pero en tanto las divisiones de la primera son iguales, como corresponde a una escala lineal y mostramos en la figura 1.7.b, las divisiones de la segunda no están equiespaciadas. Con todo, ambas escalas son centígradas.

A la inversa, una escala podría ser lineal y no centígrada. Por ejemplo, hacia principios del siglo XVIII, René Reaumur fabricó un termómetro de alcohol en el que al punto de equilibrio del agua sólida con su fase líquida le asignó $0^\circ Re$ y al punto de ebullición del agua le asignó $80^\circ Re$ (porque notó que el alcohol entre esos dos puntos incrementaba su volumen un 8%). La escala, dividida en 80 partes iguales, es lineal, no es centígrada, y desde ya muy poco práctica, razón por la cual ya no se la utiliza.

Finalmente, ya hemos mencionado en la sección 1.4 que la presión de un gas es una medida de la transferencia de la cantidad de movimiento del gas a las paredes del recipiente

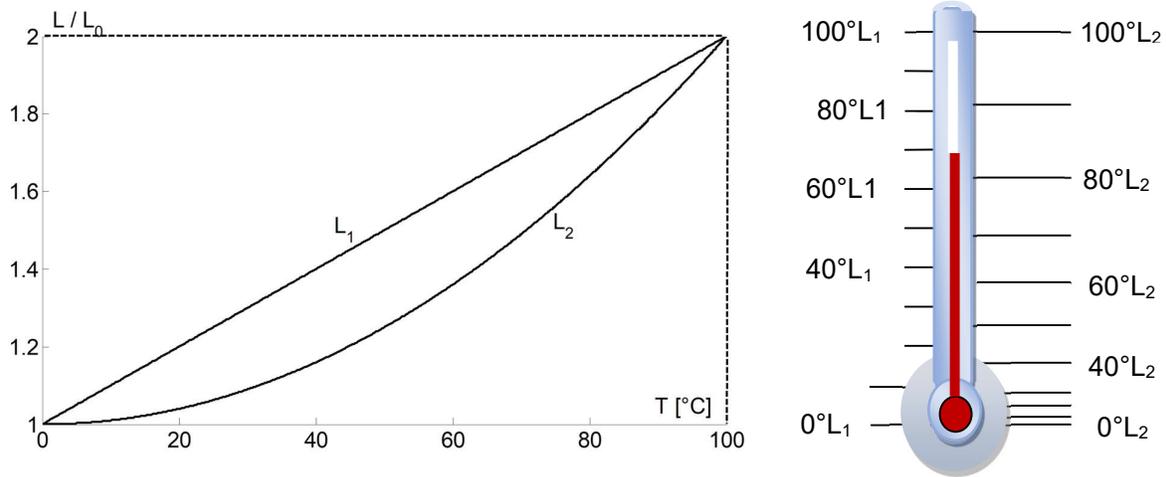


Fig. 1.7. Dos sustancias dilatan de manera diferente con la temperatura, una en forma lineal y la otra cuadráticamente (panel (a)). Trasladas las sustancias a un recipiente de vidrio, las escalas resultan bien diferentes, aunque coinciden los puntos inicial y final y ambas son centígradas.

que lo contiene, esto es, una medida de la fuerza que el gas ejerce sobre la unidad de superficie de la pared. Claramente, a temperatura cero esta presión es nula, de manera tal que en el seno del gas ha cesado todo tipo de movimiento, a toda escala. Tal estado no es pensable, de modo tal que de alguna manera este hecho debe quedar reflejado en algún principio fundamental (y que discutiremos en detalle en la parte 4 de este capítulo, sección 1.16).

Ejemplo 1.1: supongamos que deseamos construir una escala termométrica centígrada que utilice como extremos los puntos de fusión y de vaporización del metano (-182°C y $-161,5^{\circ}\text{C}$, respectivamente). Hallemos la relación entre las temperaturas medidas en esta escala termométrica (digamos en $^{\circ}\text{M}$) y la escala Celsius.

Claramente, al ser centígrada, la nueva escala debe estar dividida en 100 partes. Si al punto de fusión del metano le asignamos 0°M y al punto de vaporización le asignamos 100°M , cada grado en esta escala corresponderá a

$$\frac{-161,5^{\circ}\text{C} - (-182^{\circ}\text{C})}{100} = 0,205^{\circ}\text{C} \quad (1.14)$$

esto es, la variación de 1°M equivale a $0,205^{\circ}\text{C}$. Esto significa que la temperatura en la escala Celsius puede escribirse como

$$T(^{\circ}\text{C}) = 0,205 T(^{\circ}\text{M}) - 182 \quad (1.15)$$

de modo tal de mantener la diferencia de 182°C entre los ceros de ambas escalas. Obsérvese, a modo de corroboración, que si $T(^{\circ}\text{M}) = 100^{\circ}\text{M}$, resulta $T(^{\circ}\text{C}) = -161,5^{\circ}\text{C}$, como debe ser porque así lo hemos definido de entrada. Luego, la relación inversa será

$$T(^{\circ}\text{M}) = \frac{T(^{\circ}\text{C}) + 182}{0,205} \quad (1.16)$$

1.6 – Respecto de las unidades de las ecuaciones

En el apartado 1.4 introdujimos las unidades S.I. para presión y volumen, y demostramos que su producto resulta en una unidad de energía. En la sección 1.5 discutimos la necesidad de expresar las temperaturas en la escala Kelvin porque es la única que tiene significado físico (por esa razón es la única que no tiene valores negativos). En consecuencia, es casi evidente que la constante de los gases calculada en el párrafo anterior deba tener, en el sistema S.I., las unidades que tiene. Sin embargo es bien sabido que existen múltiples unidades de presión y volumen, surgidas de distintas aplicaciones y tradiciones.

Lo más inmediato es escribir las unidades de presión y volumen en el sistema cgs. La unidad de presión, de acuerdo a la identidad (1.10), es una unidad de fuerza dividida por una unidad de superficie. En el sistema cgs será

$$[P] = \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} = \text{baria} \quad (1.17)$$

y como las unidades de volumen y de energía en este sistema son cm^3 y ergio (erg), respectivamente, resulta $baria \times cm^3 = erg$. Dado que $1N = 10^5 dina$ y $1m = 100 cm$ resulta $1J = 10^7 erg$. Luego, en el sistema cgs la constante de los gases vale

$$R = 8,314 \times 10^7 \frac{erg}{mol K} \tag{1.18}$$

No debe confundirse la unidad *baria* con la unidad *bar* (hasta 1982 el Servicio Meteorológico Nacional informaba los valores de presión atmosférica en milibares (mb)). De hecho, $1bar = 10^6 barias$. Ahora bien, hemos hecho reiteradas menciones a las condiciones normales de presión y temperatura (CNPT) que se refieren a $T = 273K$ y $P = 1 atm$ (véase el párrafo antes de la expresión (1.7)) de forma tal que hemos definido la presión atmosférica normal en una unidad novedosa, la *atmósfera física* (atm). Históricamente, el primero en medir la fuerza que la atmósfera ejerce sobre una unidad de área en la superficie terrestre (que al cabo es ese el concepto de presión atmosférica) fue el italiano Evangelista Torricelli, quien en 1643 observó que un tubo semicerrado lleno de mercurio, sumergido por su parte abierta en una cubeta con mercurio, alcanza el equilibrio cuando la columna en el tubo tiene alrededor de 760 mm de altura. De ahí que la primera unidad de presión haya sido el *milímetro de mercurio* (*mmHg*) o *Torr*. Luego, la presión atmosférica normal se toma como 760 mmHg, y resulta inmediata la relación $1 atm = 760 mmHg$.

Algunas equivalencias útiles

1atm = 101.325 Pa
 = 760 mmHg
 = 14,7 PSI
 = 1,033 at
 = 1,013 bar
 = 10,33 mH₂O

1 kPa = 0,009869 atm
 = 0,145 PSI
 = 0,0102 at
 = 7,5 mmHg
 = 0,01 bar

Además de la atmósfera física existe una unidad denominada *atmósfera técnica* (at) que resulta ser la presión que una fuerza de 1 kgf ejerce sobre una superficie de 1 cm², esto es, $1 at = 1 kgf/cm^2$. Pero como $1kgf = 9,81 N$, resulta que 101.325 Pa \equiv 101.325 N/m² equivalen a 1,0328 kgf/cm², es decir, $1 atm \approx 101.300 Pa \approx 1,033 at$.

En general estamos más acostumbrados, Servicio Meteorológico mediante, a la unidad hectopascal (hPa) que se refiere a 100 Pa, razón por la cual suele hallarse la identidad $1atm = 1.013 hPa$. Existen algunas otras maneras cotidianas de nombrar la presión (incluso, en lugar de PSI a veces se utiliza kgf/pulg², observe con atención el manómetro cuando infla los neumáticos de su automóvil) pero por cuestiones prácticas no habremos de prestarles mayor atención.

Por último, tengamos en cuenta que el cálculo de la constante de los gases puede efectuarse combinando cualquier par de unidades de presión y volumen. La combinación más frecuente es la que utiliza la presión en atmósferas y el volumen en litros (de manera tal que la unidad litro-atmósfera es una unidad de energía). A partir de su definición resulta

$$R = \frac{22,4 l \times 1 atm}{1 mol \times 273 K} = 0,082 \frac{l atm}{mol K} \tag{1.19}$$

Parte 2: Calor y temperatura

1.7 – Calor y temperatura. Calor específico. Calor latente.

Ya hemos mencionado que la temperatura es una medida macroscópica y estadística del estado cinético de un sistema, una suerte de promedio estadístico realizado sobre el conjunto de moléculas que conforman el sistema. Por esta razón los sistemas no intercambian temperatura, sencillamente porque los valores promedio no son moneda de cambio. Usted intercambia masa con su entorno pero no sus propiedades medias, pero es

A la hora de trabajar con la ecuación de estado de un gas ideal puede emplearse cualquier sistema de unidades de los que venimos comentando. Pero debe prestarse especial atención al valor de la constante de los gases. Por ejemplo, si la presión está en atmósferas y el volumen en litros, la constante es la de la ecuación (1.19); si la presión está en pascales y el volumen en metros cúbicos, la constante es la de la expresión (1.7).

cierto que el intercambio de masa puede cambiar sus propiedades medias. Por ejemplo, si absorbe mucha más masa que la que cede, engorda. La gordura es a sus propiedades medias lo que la temperatura es a las propiedades medias de un sistema termodinámico: reflejan el resultado de un intercambio.

La diferencia esencial en nuestro ejemplo es que la temperatura no cambia por el intercambio de masa sino por el intercambio de energía. Y ya hemos mencionado en reiteradas oportunidades que la energía se intercambia en forma de calor o en forma de trabajo (véase la discusión que precede a la

tabla 1.1). Dejaremos para la sección 1.11 el análisis de los cambios de temperatura debidos al intercambio de trabajo, y prestaremos atención ahora a los cambios de temperatura que se producen en un sistema termodinámico por intercambio de calor.

Para ello, imaginemos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 a temperaturas T_1 y $T_2 > T_1$, respectivamente, en contacto térmico en un recinto aislado, en vacío. Para que estén en contacto térmico no es necesario que se hallen en contacto físico, aunque bien podrían estarlo. Encerrarlos en un sistema con las características pedidas es por comodidad, pero, como veremos, no perdemos generalidad en nuestro tratamiento. Supongamos que las temperaturas de los cuerpos las medimos con sendos termómetros adosados a cada cuerpo. Al cabo de un tiempo (cuyo valor es irrelevante para nuestro estudio) los termómetros habrán de indicar que las temperaturas son iguales.

La conclusión inmediata es que los cuerpos intercambiaron calor y alcanzaron el equilibrio térmico. Si ninguno de los cuerpos cambia de estado, el equilibrio térmico debe darse a una temperatura T_{eq} tal que $T_1 < T_{eq} < T_2$.

Esto se debe a que el equilibrio térmico sólo puede pensarse si la energía de los dos cuerpos es estadísticamente igual, que es lo mismo que decir que, por algún mecanismo, parte de la energía del cuerpo a temperatura T_2 pasó al de temperatura T_1 . Dado que en las condiciones que presentamos los cuerpos no tienen nada en particular, concluimos que la situación es absolutamente general y enunciamos

► *Principio cero de la Termodinámica: dos cuerpos en contacto térmico intercambian calor, y el calor fluye espontáneamente del cuerpo a mayor temperatura al cuerpo a temperatura menor.*

Posiblemente sea necesario resaltar la condición de espontaneidad en el postulado anterior. Nada impide que podamos extraer calor de un cuerpo de temperatura T_1 y cederlo a otro a temperatura $T_2 > T_1$. Básicamente esa es la función de una heladera, pero no es una transformación espontánea, en el medio hay un sistema (el motor) que realiza trabajo y permite el transporte de calor.

Volviendo a los dos cuerpos de nuestro ejemplo, queda claro que el calor fluye hasta que se llega a la temperatura de equilibrio y que esta temperatura debe depender de alguna propiedad intensiva inherente a cada uno de los cuerpos que están en contacto, fundamentalmente porque la estructura de cada cuerpo de alguna manera gobierna la forma en que habrá de distribuirse la energía entre sus átomos y moléculas. En esta línea de pensamiento, también es razonable suponer que la temperatura de equilibrio debe ser además función de la masa de los cuerpos, porque al cabo mayor masa significa mayor cantidad de moléculas entre las que distribuir la energía. Para decirlo en otras palabras, la cantidad de calor que debe suministrarse a un cuerpo para elevar su temperatura debe ser función de la masa del cuerpo, de la diferencia de temperaturas que se produce y de alguna propiedad intensiva del cuerpo.

Para poner en evidencia estas observaciones, pensemos que entregamos la misma cantidad de calor, que denotaremos como Q , a dos cuerpos idénticos, de igual sustancia e iguales masas m , para elevar sus temperaturas de T a T' . Si después de calentarlos los ponemos en contacto físico no habrán de intercambiar calor porque están a la misma temperatura T' , y el resultado neto es que

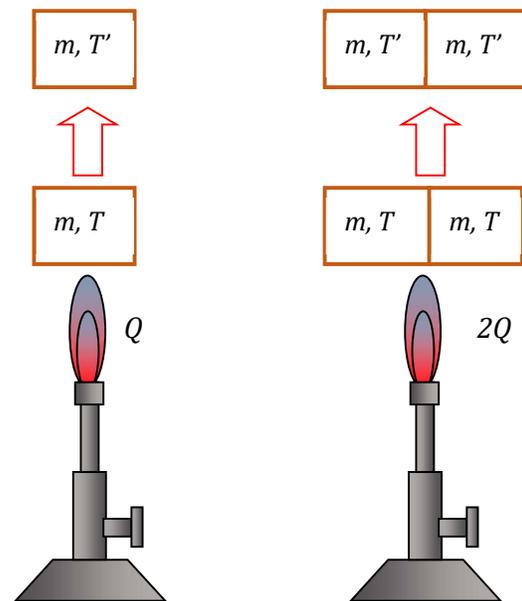


Fig. 1.8. Al entregársele calor Q al bloque de masa m , pasa de la temperatura T a la temperatura (superior) T' . Para que los dos bloques idénticos de la derecha eleven su temperatura de T a T' debe entregárseles una cantidad doble de calor, $2Q$.

tenemos ahora un cuerpo de masa $2m$ a temperatura T' , al que le hemos entregado una cantidad de calor $2Q$ para llevar su temperatura de T a $T' \dagger$.

Parece evidente que, siendo la masa una cantidad extensiva, a un cuerpo de igual sustancia y masa $2m$ a temperatura T habrá que entregarle una cantidad de calor $2Q$ para elevar su temperatura al valor T' , es decir, la cantidad de calor que debe suministrarse a un cuerpo para elevar su temperatura es directamente proporcional a la masa de ese cuerpo, esto es, $Q \propto m$.

Supongamos ahora que un cuerpo de masa m que se halla a temperatura T , al que le entregamos una cantidad de calor Q para elevar su temperatura en un grado, de T a $T + 1$. Si repitiéramos el experimento partiendo de una temperatura superior $T' > T$ no parece evidente que para elevarle un grado su temperatura (suponiendo que no cambia de estado) debamos entregarle la misma cantidad de calor Q , porque la estructura atómico–molecular de la sustancia se encuentra en un estado de energía superior. Lo que sí podemos argumentar es que, en un dado intervalo de temperatura, la cantidad de calor que debemos entregar al cuerpo para provocar un incremento $\Delta T = T' - T$ de su temperatura es función de T y de ΔT , esto es, proponer

$$Q(T) = mc(T)(T' - T) \quad (1.20)$$

donde hemos introducido un factor de proporcionalidad $c(T)$, que se conoce como *calor específico*, cuyas unidades son $J/kg K$ o $cal/g^{\circ}C$, y que naturalmente debe ser una variable intensiva, propia de cada sustancia. En general, la función $c(T)$ suele ser aproximadamente constante en un amplio rango de temperaturas (a condición, claro, de que en ese rango no se produzca un cambio de fase). Esto significa que si desarrollamos la función $c(T)$ en serie de potencias alrededor de una dada temperatura T_0

$$c(T) = c(T_0) + \frac{dc}{dT} (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2c}{dT^2} (T - T_0)^2 + \dots \quad (1.21)$$

podemos aproximar el cálculo considerando nulas las derivadas de todo orden. A modo de ejemplo, en la figura 1.9.a mostramos la función $c(T)$ en el caso del agua en estado líquido. Lo primero que se nota es que no es una recta horizontal, aunque puede verse que la diferencia entre máximo y mínimo es inferior al 1%. De hecho, tomando $c(T) = 1 \text{ cal}/g^{\circ}C$, en la figura 1.9.b mostramos las variaciones de temperatura exacta (en línea azul) y aproximada (en línea roja) en función de la cantidad de calor entregada. Puede verse que la diferencia entre las curvas es menor al 0,5% incluso en la parte superior.

En parte por esta dependencia del calor específico con la temperatura, se define la *caloría^{††}* como la cantidad de calor que debe entregarse a 1 g de agua líquida para elevar un grado su temperatura, no en cualquier intervalo, sino de $14,5^{\circ}C$ a $15,5^{\circ}C$.

† Hay aquí un hecho realmente destacable: el calor, que es energía, es aditivo; la temperatura, que es un promedio estadístico, no.

†† $1 \text{ cal} \approx 4,18 \text{ J}$ (identidad que se conoce como equivalente mecánico del calor).

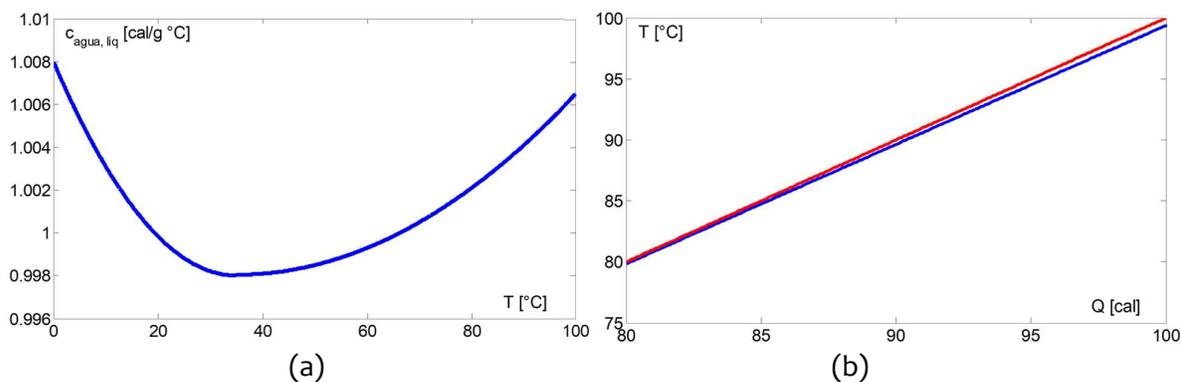


Fig. 1.9: La curva a la izquierda corresponde al calor específico del agua líquida. Obsérvese que la diferencia entre máximo y mínimo es del orden del 1%. Esto hace que las curvas de temperatura del panel (b) (la superior es la que corresponde a calor específico constante) prácticamente coincidan en todo el rango, salvo entre 90°C y 100°C, donde la diferencia es inferior al 0,5%.

El calor específico representa la cantidad de calor que debe entregarse a la unidad de masa para elevar un grado su temperatura 1°C o 1K (pero no 1°F). Las unidades en el sistema internacional (SI) son J/kgK, pero suele emplearse cal/g°C. De la misma definición de caloría, parece evidente que el calor específico del agua (en estado líquido) es $c_{\text{AGUA}} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$.

Pensar el calor específico como constante es una buena aproximación siempre y cuando la sustancia a la que le estamos entregando calor no cambie de estado. Esto significa que esta propiedad intensiva depende no sólo de la sustancia sino además del estado de agregación en el que se halla esa sustancia.

Por otro lado, y dado que se trata de una propiedad intensiva de la sustancia, el calor específico es una cantidad definida positiva, de manera tal que la expresión (1.20) ya nos adelanta que el signo de Q coincide con el signo de ΔT . Luego, un cuerpo aumenta su temperatura si recibe calor, y la disminuye si lo entrega. En síntesis,

- *el calor intercambiado por un cuerpo es positivo si recibe calor de su entorno.*
- *el calor intercambiado por un cuerpo es negativo si cede calor a su entorno.*

Obsérvese que hemos definido el calor específico reclamando que no haya cambio de estado. La razón es muy sencilla: en los cambios de estado deben modificarse las distancias intermoleculares y reestructurar ligaduras. El intercambio de calor no podría entonces emplearse para aumentar la energía cinética de la sustancia, de manera tal que los cambios de estado, en este modelo, ocurren a temperatura constante.

A la cantidad de calor que debe suministrarse a la unidad de masa para que cambie de estado se la denomina *calor latente*, y se lo denota con la letra L (se lo llama de esta forma por razones históricas, en tanto que al calor intercambiado sin cambio de estado se lo llama *calor sensible* porque es el que podemos percibir). Parece evidente que el calor latente en el cambio de fase sólido-líquido no será igual al necesario para cambiar de estado en el límite líquido-gas, simplemente porque las ligaduras son muy diferentes. De hecho, un cambio de estado en el límite líquido-gas requiere de la reestructuración completa de ligaduras: hay que romperlas para pasar de líquido a gas, hay que reconstituirlas para el cambio inverso. En cambio, las transformaciones de estado sólido-líquido ocurren por dilatación de ligaduras, sin ruptura. Luego, no debería resultar extraño que el calor latente de fusión (sólido \Rightarrow líquido) L_f sea menor que el calor latente de vaporización (líquido \Rightarrow gas) L_v . Por ejemplo, para el agua valen $L_f = 80 \text{ cal/g}$ y $L_v = 540 \text{ cal/g}$, en tanto que para el benceno esos valores se reducen a $L_f = 30 \text{ cal/g}$ y $L_v = 95 \text{ cal/g}$.

El calor latente de fusión es igual y opuesto al calor latente de solidificación, porque la cantidad de calor que hay que entregarle a la unidad de masa para pasarla del estado sólido al líquido es el calor que cede el líquido por unidad de masa para solidificarse. De la misma manera, el calor latente de vaporización es igual (y de signo opuesto) al calor latente de condensación.

A partir de las observaciones que hicimos acerca del signo del intercambio de calor, parece evidente que el calor requerido para pasar de estado líquido a sólido o de gas a líquido habrá de ser $-L_f$ y $-L_v$, respectivamente.

En función de lo discutido hasta aquí, expresamos la cantidad de calor necesaria para provocar el cambio de estado de una dada masa de sustancia como

$$Q = m L \quad (1.22)$$

Antes de finalizar, comentemos que en muchas aplicaciones técnicas no se requiere tanto el conocimiento del calor específico de un material sino el producto de la masa por el calor específico, al que se denomina capacidad calorífica, C , esto es

$$C = m c \quad (1.23)$$

y sus unidades son, en el S.I., J/K , aunque es frecuente encontrar esta cantidad expresada también en cal/K . Obsérvese que diferentes materiales pueden tener el mismo valor de capacidad calorífica, esto es, ser térmicamente equivalentes. En la sección 1.9 haremos uso de esta propiedad.

Ejemplo 1.2: el calor específico del agua líquida es, por definición, $c_{AGUA, LIQ} = 1 \text{ cal/g}^\circ C$. El del alcohol es $c_{ALC} = 0,6 \text{ cal/g}^\circ C$. Supongamos que la misma masa de agua y alcohol se hallan a la misma temperatura T y que deseamos elevar su temperatura a un valor T' ,

sin que se produzcan cambios de estado en ninguno de los dos sistemas. La expresión (1.20) nos indica que para provocar la misma elevación de temperatura debemos entregar mayor cantidad de calor a la sustancia con mayor calor específico, esto es, al agua. De hecho, por cada 100 calorías que le entreguemos al agua debemos entregar sólo 60 calorías al alcohol para que la temperatura de los dos sistemas siga siendo la misma.

Supongamos ahora que una vez que alcanzaron la temperatura T' dejamos que los dos sistemas se enfríen en el mismo ambiente. Parece evidente que, independientemente de cuál sea el mecanismo que hace que los cuerpos cedan calor (procesos que discutiremos con algún detalle en la sección 1.10) el agua tardará más tiempo en enfriarse porque debe ceder mayor cantidad de calor. Por ejemplo, supongamos que hemos llevado 100g de agua y 100g de alcohol de 10°C a 20°C . De acuerdo a la ecuación (1.20) hemos entregado 1000 cal al agua y 600 cal al alcohol.

Ahora dejamos que los sistemas se enfríen en contacto con un bloque de hielo de agua a 0°C . Pretendemos que la masa de hielo sea mayor que la masa que habrá de cambiar de estado, como para que el hielo no se funda por completo y la temperatura de equilibrio sea de 0°C (los detalles de la transformación los discutiremos en la sección 1.9). Parece evidente que el agua habrá de derretir más hielo que el alcohol. De hecho, la expresión (1.21) establece que el agua alcanzaría para derretir (fundir) 12,5g de hielo, en tanto que el alcohol fundiría 7,5g (el 60% de la cantidad de hielo que funde el agua).

Ahora bien, el calor específico del granito es del orden $0,2 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$. Esto significa que, en contacto con la misma fuente de calor, tarda menos tiempo que el agua en calentarse, pero también habrá de enfriarse más rápido. Esto hace que las regiones alejadas de las grandes masas de agua presenten oscilaciones térmicas muy pronunciadas en comparación con las regiones cercanas a los océanos, fenómeno que se conoce como *continentalidad*, y que, en el fondo, es producto del efecto moderador climático que tiene el agua debido a su elevado calor específico.

Ejemplo 1.3: La figura 1.10 muestra la curva de calentamiento de una sustancia dada que funde a 600 K . Obsérvese que no sabemos de qué sustancia se trata porque lo más que podemos calcular a partir de esta curva es la capacidad calorífica de la sustancia en cada estado de agregación (en este caso, a partir del dato de que a 600 K funde, sólido y líquido), pero no su calor específico porque nada sabemos de la cantidad de sustancia que se calienta.

Las expresiones (1.20) y (1.23) nos indican que la inversa de la pendiente de cada tramo no horizontal es la medida de la capacidad calorífica. Puntualmente, la capacidad calorífica en estado sólido (la parte izquierda de la curva) vale

$$C_{\text{SOL}} = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{100 \text{ kcal}}{200 \text{ K}} = 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{K}} \quad (1.24. a)$$

en tanto que la capacidad calorífica en estado líquido (parte derecha de la curva) vale

$$C_{LIQ} = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{200 \text{ kcal}}{100 \text{ K}} = 2 \frac{\text{kcal}}{\text{K}} \quad (1.24. b)$$

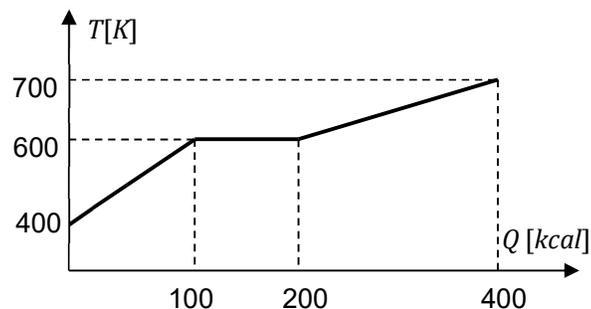


Fig. 1.10: curva de calentamiento de una sustancia. La parte horizontal de la curva corresponde al cambio de estado (en este caso de sólido a líquido)

Obsérvese de paso que la relación entre los valores de las capacidades caloríficas en estado sólido y en estado líquido es la misma que la que existe entre los calores específicos, porque la masa es la misma y al dividir las expresiones (1.24.a) y (1.24.b) entre sí se cancela. Claramente, esta relación es

$$c_{SOL} = \frac{c_{LIQ}}{4} \quad (1.25)$$

Tal vez valga la pena recalcar que el tramo horizontal de la curva es el que corresponde al cambio de estado, porque la temperatura es constante a pesar de la absorción de calor. Naturalmente, los mismos resultados se hubieran obtenido si se mostrara la curva de enfriamiento, esto es, la curva que representa el calor que cede la muestra de sustancia al enfriarse. Coherentemente, tendríamos que decir que a 600 K la sustancia solidifica.

1.8 – Calor específico en gases ideales

Cuando se trata de gases el calor específico no queda unívocamente definido porque la cantidad de calor que debe suministrarse al sistema para elevar su temperatura depende del proceso a través del cual se intercambia calor. La expresión (1.8) nos adelanta que, al menos en los gases ideales, la modificación de la temperatura va acompañada de una modificación en el producto $P\mathcal{V}$.

Para nuestros propósitos imaginemos un gas ideal contenido en un recipiente cerrado por una tapa móvil que puede deslizarse sin rozamiento con las paredes del recipiente.

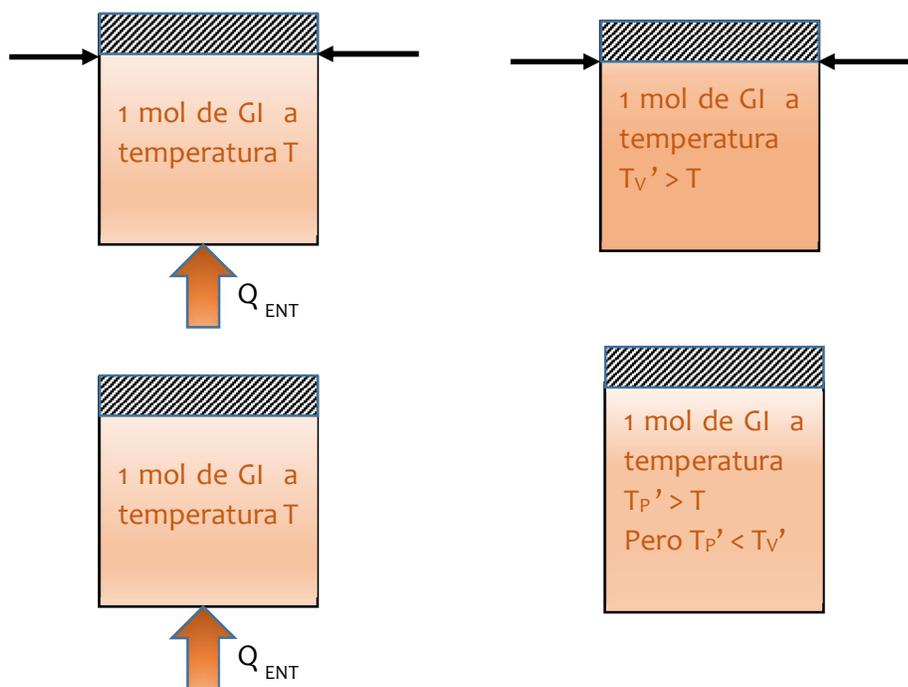


Fig. 1.11: en la parte superior se entrega calor a un gas encerrado en un recipiente cuya tapa está trabada, es decir, el proceso es a volumen constante. T_V' indica la temperatura a la que llega el gas en este proceso. En la parte inferior de la figura se muestra el mismo recipiente, al que se le entrega la misma cantidad de calor, pero sin trabar la tapa. T_P' indica la temperatura a la que llega el gas, pero $T_P' < T_V'$ porque parte de la energía absorbida debe emplearse para elevar la tapa (aumentar su energía potencial).

Supongamos ahora que trabajamos la tapa y entregamos calor al gas, como mostramos en la parte superior de la figura 1.11. Queda claro que estamos entregando calor a través de un proceso que no modifica el volumen del sistema, esto es, a través de un proceso isocórico. Como el gas está recibiendo calor aumenta la energía cinética media de las moléculas y, en consecuencia, aumentan tanto la temperatura como la presión (véase la expresión (1.8): no hay otra alternativa) pero el hecho que deseamos destacar es que todo el calor entregado se utiliza para elevar la temperatura del gas.

Definimos el calor específico molar a volumen constante, c_V , como la cantidad de calor Q_{ENT} que debe entregarse a un mol de gas para elevar en un grado su temperatura sin modificar su volumen, esto es

$$c_V = \left. \frac{Q_{ENT}}{n\Delta T} \right]_{V=cte} \equiv \delta Q]_{V=cte} = nc_V dT \quad (1.26)$$

Supongamos ahora que destrabamos la tapa, como en la parte inferior de la figura 1.11. Si el proceso es cuasiestático (se realiza en forma suficientemente lenta como para permitir que las variables de estado se reacomoden) la presión del gas debe ser en todo momento igual a la suma de la presión externa más la presión (estática) que ejerce la tapa,

esto es, el peso de la tapa dividido su superficie ($P_{TAPA} = m_{TAPA} g/S_{TAPA}$). Pero como ninguna de estas presiones cambia tampoco lo hace la presión del gas, de forma tal que el proceso es a presión constante, o isobárico.

En este caso sólo una parte del calor entregado se transforma en energía cinética de las moléculas porque parte de la energía debe emplearse para realizar trabajo sobre la tapa para que se eleve. Pensémoslo así: algún agente debe existir que sea capaz de elevar el pistón, y este agente no puede ser otro que el choque de las moléculas contra la base del pistón; pero entonces esa energía se utilizó para elevar el pistón y no queda disponible para aumentar la temperatura. Luego, podemos definir el calor específico molar a presión constante, c_p , como la cantidad de calor Q_{ENT} que debe suministrarse a un mol de gas para elevar en un grado su temperatura sin modificar su presión, esto es

$$c_p = \left. \frac{Q_{ENT}}{n\Delta T} \right]_{P=c} \equiv \delta Q]_{P=c} = n c_p dT \quad (1.27)$$

El calor molar a presión constante es mayor que el calor molar a volumen constante porque en el primer caso cada caloría que se entrega se emplea parcialmente para aumentar la temperatura y en parte para modificar el volumen. En cambio, a volumen constante, cada caloría que se entrega se utiliza sólo para aumentar la temperatura del gas. Luego, a presión constante, se requiere más calor para aumentar en un grado la temperatura.

Obsérvense con detenimiento las expresiones (1.26) y (1.27): como la cantidad de calor que debe entregarse a una dada masa de gas ideal para elevar su temperatura en un grado a presión constante es mayor que la cantidad de calor que debe entregarse a esa misma masa de gas para elevar su temperatura en un grado a volumen constante, resulta que el calor específico c_p es mayor que el calor específico c_v . Y la diferencia entre c_p y c_v debe ser el trabajo molar (por unidad de temperatura) requerido para expandir el sistema, esto es

$$c_p = c_v + \frac{W_{EXP}}{n\Delta T} \quad (1.28)$$

donde W_{EXP} se refiere al trabajo (por mol) de expansión del sistema cuando su temperatura se eleva en una unidad en un proceso a presión constante. Supongamos específicamente que un mol de gas ideal se halla confinado en un recipiente regular cuya base tiene área S . Al expandirse el sistema una cantidad Δx el volumen aumenta en una cantidad $\Delta V = \Delta x \times S$ y el trabajo mecánico de expansión vale

$$W_{EXP} = F \times \Delta x = (P \times S) \times \Delta x = P\Delta V \quad (1.29)$$

Por lo demás, si la presión es constante, podemos argumentar que debe cumplirse

$$n \Delta T = \frac{P \Delta V}{R} \quad (1.30)$$

de manera tal que teniendo en cuenta las expresiones (1.29) y (1.30) la relación entre los calores específicos molares resulta

$$c_p = c_v + R \quad (1.31)$$

Para moléculas mono y diatómicas c_p y c_v dependen del número N de átomos que constituyen la molécula del gas, y que se expresan siempre como

$$c_p = \frac{2N + 3}{2} R \quad (1.32)$$

$$c_v = \frac{2N + 1}{2} R \quad (1.33)$$

1.9 – Temperatura de equilibrio. Equivalente en agua

Regresemos por un momento a los dos cuerpos a diferente temperatura encerrados en un sistema aislado que, para fijar ideas, supondremos además que está constituido por paredes que no intercambian calor con los cuerpos. Enseguida habremos de remover esta hipótesis y hacer el cálculo completo, pero por ahora concentrémonos sólo en los dos

La temperatura de equilibrio de un sistema de N cuerpos en contacto térmico no es el promedio de las temperaturas iniciales, sino el promedio de temperaturas ponderado por las capacidades caloríficas, del mismo modo que el centro de masa de un sistema no es el promedio de las posiciones sino el promedio de las posiciones ponderado por las masas.

cuerpos. Dijimos que alcanzan una temperatura de equilibrio a partir de la cual ya no intercambian más calor. Si suponemos que ninguno de los cuerpos cambia de estado (porque en ese caso cambia el calor específico y, en consecuencia, las propiedades del sistema) y queremos calcular el valor de esa temperatura de equilibrio, combinemos la ecuación (1.20) con el principio cero, sabiendo que al estar aislados el calor que un cuerpo recibe es exactamente igual al que el otro entrega. Luego, debe ser

$$Q_1 = -Q_2 \quad (1.34)$$

porque supusimos $T_2 > T_1$, de manera tal que el cuerpo a temperatura T_2 cede calor ($Q_2 < 0$) y el otro recibe ($Q_1 > 0$). Si m_1, c_1 representan la masa y calor específico del cuerpo 1 en tanto que m_2, c_2 representan la masa y calor específico del cuerpo 2, la expresión (1.34) puede escribirse formalmente como

$$m_1 c_1 (T_{eq} - T_1) + m_2 c_2 (T_{eq} - T_2) = 0 \quad (1.35)$$

porque al cabo, como $T_{eq} < T_2$, resulta que el segundo sumando es negativo. El valor de la temperatura de equilibrio se obtiene de manera inmediata como

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad (1.36)$$

Parece evidente que si en lugar de haber 2 cuerpos en el sistema hubiera N cuerpos de masas m_k , calores específicos c_k y temperaturas iniciales T_k , $1 \leq k \leq N$, intercambiando calor, y si ninguno de esos N cuerpos cambia de estado, la expresión (1.36) se extendería casi inmediatamente a la forma general

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 + \dots + m_N c_N T_N}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_N c_N} \quad (1.37)$$

No está de más recordar que la expresión (1.37) es válida sólo si no hay ningún cambio de estado. Si hubiera cambios de estado habría que llevar el cálculo, de a un paso por vez, hasta la configuración en la que ya no los hubiera y entonces sí calcular la temperatura de equilibrio. Por lo demás, obsérvese que uno de los N cuerpos de la expresión (1.37) podría ser el recipiente, a condición de conocer su masa y su calor específico (o su capacidad calorífica). Muchas veces se da esta información en términos de la masa de agua que absorbería la misma cantidad de calor para elevar en un grado su temperatura o, dicho de otra forma, representa la masa de agua cuya capacidad calorífica es igual a la del cuerpo. A esa cantidad se la conoce como equivalente en agua (y se la denota π). En los ejemplos siguientes exponemos en conjunto todas estas ideas.

La temperatura de equilibrio de un sistema de N cuerpos en contacto térmico puede calcularse a partir de la expresión (1.37) sólo si ninguno de ellos cambia de estado mientras se alcanza el equilibrio. Más específicamente, la expresión (1.37) sólo es válida si los calores específicos de todas las sustancias presentes son constantes.

Ejemplo 1.4: en un recipiente de zinc de 60 g ($c_{Zn} = 0,1 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$) en equilibrio térmico con 50g de agua líquida a 35°C ($c_{AGUA} = 1 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$) se introducen 25 g de hielo de agua a -15°C ($c_{HA} = 0,505 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$), y 70g de aluminio a 85°C ($c_{Al} = 0,217 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$). Calculemos: a) el equivalente en agua del recipiente de zinc; b) cuál tendría que ser la masa del recipiente si deseamos cambiarlo por uno de hierro ($c_{Fe} = 0,113 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$) sin que cambien los resultados del experimento; c) el estado final del sistema completo.

Si queremos calcular el equivalente en agua del recipiente de zinc partamos de la definición (1.22) e igualemos a la capacidad calorífica de una masa π de agua. Resultará

$$m_{Zn}c_{Zn} = \pi c_A \quad (1.38)$$

o, lo que es igual,

$$\pi = \frac{c_A}{m_{Zn}c_{Zn}} = 6g \quad (1.39)$$

Obsérvese el resultado (1.39): dice que si en lugar de un recipiente de 60g de zinc a 35°C conteniendo 50g de agua a 35°C tuviéramos un recipiente ideal, incapaz de intercambiar calor con el resto del universo, y 56g de agua a 35°C, el estado final del sistema luego de agregar hielo y aluminio sería exactamente el mismo.

Si queremos cambiar el material del recipiente y dejar invariante el sistema (termodinámicamente hablando) podemos calcular la masa de hierro usando el equivalente a la expresión (1.38) pero calculando algo así como el “equivalente en hierro” en la forma

$$m_{Zn}c_{Zn} = m_{Fe}c_{Fe} \quad (1.40)$$

de donde resulta inmediatamente

$$m_{Fe} = 53,10 g \quad (1.41)$$

Obsérvese el resultado (1.41): dice que, de ser de hierro, el recipiente tendría que tener una masa menor para dejar invariante la situación de equilibrio termodinámico final. La razón es como sigue: dado que el hierro tiene mayor calor específico que el zinc, requiere de menos calor para aumentar su temperatura. Para que absorba la misma cantidad de calor que el zinc (o que 6g de agua, tanto da) debe tener menor masa.

Calculemos ahora el estado final del sistema. Para ello, o bien contamos al recipiente como un cuerpo de masa y calor específico conocidos, o bien lo incluimos a través de su equivalente en agua. Optemos por la segunda alternativa, de manera tal que por ahora nos olvidamos del recipiente pero contamos 56g de agua (y no 50g) a 35°C.

Introduzcamos primero el aluminio (en realidad el orden es irrelevante, lo hacemos sólo por una cuestión de comodidad). El sistema accede a un estado termodinámico de temperatura intermedia entre la del agua y la del aluminio; como esa temperatura está por debajo del punto de ebullición del agua sabemos que no habrá cambios de estado y podemos usar la ecuación (1.37) para calcular directamente la temperatura de equilibrio. Resulta

$$T_{eq} = \frac{m_A c_A T_A + m_{Al} c_{Al} T_{Al}}{m_A c_A + m_{Al} c_{Al}} = \frac{56g \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \times 35^\circ\text{C} + 70g \times 0,217 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \times 85^\circ\text{C}}{56g \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} + 70g \times 0,217 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}} = 45,66^\circ\text{C} \quad (1.42)$$

Introducimos el hielo, entonces, en un sistema formado por 56g de agua y 70g de aluminio en equilibrio a 45,66°C. Claramente, el hielo habrá de absorber calor y ese calor debe ser cedido por la mezcla de agua y aluminio. Parece evidente, sin embargo, que el sistema agua líquida + aluminio se comportará como un cuerpo de capacidad calorífica $C = C_{AGUA} + C_{Al}$, porque las temperaturas inicial y final son las mismas para el agua y para el aluminio. Luego, no tiene sentido preguntarse si el calor cedido proviene del aluminio o del agua porque al cabo habrán de intercambiar calor entre ellos y alcanzarán la temperatura de equilibrio. Lo que sí tiene sentido preguntarse es cuánto calor necesita el hielo a -15°C para llegar a hielo a 0°C. De la expresión (1.20) resulta

$$Q = 25g \times 0,505 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \times (0^\circ\text{C} - (-15^\circ\text{C})) = 189,37 \text{ cal} \quad (1.43)$$

Si el sistema agua líquida + aluminio cede 189,37 cal, alcanza una temperatura T' dada por

$$-189,37 \text{ cal} = \left(56g \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} + 70g \times 0,217 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) \times (T' - 45,66^\circ\text{C}) \quad (1.44)$$

de donde resulta inmediatamente $T' = 43^\circ\text{C}$. Obsérvese que en la expresión anterior el calor es negativo porque se trata de calor cedido. Ahora el hielo a 0°C hará una transición de fase para convertirse (si se le puede suministrar el calor necesario) en agua líquida a 0°C. Para ello requiere de

$$Q = m_H L_f = 25g \times 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 2.000 \text{ cal} \quad (1.45)$$

que, cedidos por el sistema agua líquida + aluminio, hace que la temperatura de la mezcla llegue a una temperatura T'' dada por

$$-2.000 \text{ cal} = \left(56g \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} + 70g \times 0,217 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) \times (T'' - 43^\circ\text{C}) \quad (1.46)$$

que resulta en $T'' = 14,9^\circ\text{C}$. Ahora tenemos un sistema formado por 25g de agua líquida a 0°C, 56g de agua líquida a 14,9°C y 70g de aluminio a 14,9°C. La temperatura de equilibrio puede calcularse por aplicación directa de la expresión (1.37) para obtener $T_{eq} = 11^\circ\text{C}$. Téngase presente que para aplicar esta ecuación hemos tenido en cuenta que entre 14,9°C y 0°C (la temperatura de equilibrio necesariamente se halla dentro de este intervalo) el aluminio no cambia de estado. Por lo demás, obsérvese que la temperatura de equilibrio se halla desplazada hacia el valor de la temperatura del elemento de mayor capacidad calorífica (50g de agua, 60g de zinc y 70g de aluminio). De hecho, la capacidad calorífica de este conjunto vale 71,19 cal/°C y la del agua a 0°C vale 25 cal/°C.

Un breve comentario antes de finalizar. La expresión (1.37) es válida sólo si no hay cambios de estado. El principio cero (o su traducción matemática en la forma (1.34)) vale siempre. Esto significa que pudimos haber hallado la temperatura de equilibrio del sistema en un solo

paso (largo) asumiendo de entrada que el hielo funde y alcanza el equilibrio en estado líquido.

Pensemos así: como la suma de los calores intercambiados debe ser cero (lo que uno cede es lo que el otro recibe) si llamamos $Q_{H \rightarrow 0}$ al calor que absorbe el hielo para aumentar su temperatura de -15°C a 0°C , $Q_{H \rightarrow HA}$ al calor que absorbe el hielo para fundirse, $Q_{HA \rightarrow EQ}$ al calor que absorbe el hielo fundido para llegar al equilibrio, $Q_{A+\pi \rightarrow EQ}$ al calor que cede el agua inicialmente a 35°C (incluyendo el equivalente en agua del recipiente) y $Q_{Al \rightarrow EQ}$ al calor intercambiado por el aluminio, debe cumplirse

$$Q_{H \rightarrow 0} + Q_{H \rightarrow HA} + Q_{HA \rightarrow EQ} + Q_{A \rightarrow EQ} + Q_{Al \rightarrow EQ} = 0 \tag{1.47}$$

esto es

$$m_H c_H (0^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}) + m_H L_f + m_H c_A (T_{eq} - 0^\circ\text{C}) + \\ + m_{A+\pi} c_A (T_{eq} - 35^\circ\text{C}) + m_{Al} c_{Al} (T_{eq} - 85^\circ\text{C}) = 0 \tag{1.48}$$

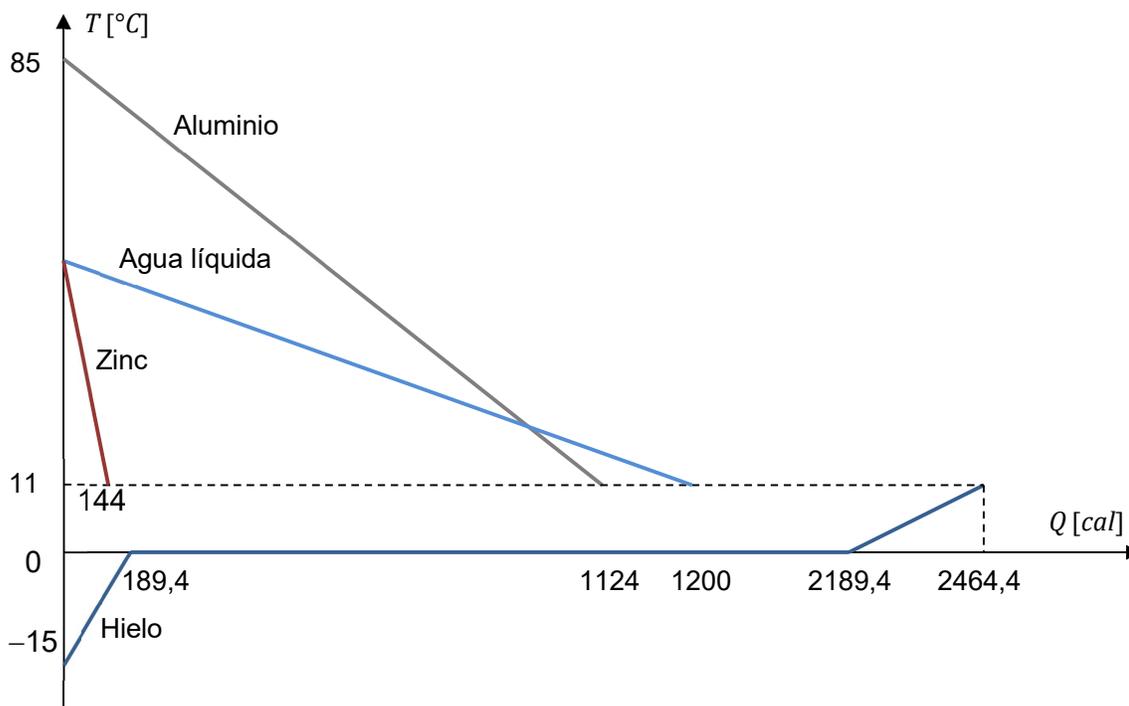


Fig. 1.12: temperatura en función del calor intercambiado por cada uno de los componentes del sistema termodinámico del ejemplo 1.4. Algunos de los cálculos no se han realizado explícitamente, aunque es bastante sencillo corroborar la cantidad de calor cedida en total por el aluminio, el recipiente de zinc y el agua líquida original. La parte plana de la curva del hielo corresponde a la transición de fase, que se realiza a temperatura constante.

Obsérvese que los primeros tres términos son positivos (la temperatura de equilibrio está por encima de 0°C) en tanto que los últimos dos son negativos. Claramente, la única incógnita en la expresión (1.48) es la temperatura de equilibrio.

La figura 1.12 muestra las curvas de temperatura en función del calor intercambiado por cada uno de los componentes originales del sistema, esto es, la curva de calentamiento del hielo y las curvas de enfriamiento del resto de los elementos del sistema. Debe notarse que la región del gráfico que corresponde al cambio de estado del agua, de sólido a líquido, es la recta horizontal, porque, recordemos, el cambio de estado ocurre a temperatura constante. Obsérvese además que el calor absorbido por el hielo en el cambio de estado es de 2.000 cal , no de $2.189,4$, porque $189,4 \text{ cal}$ absorbió para elevar su temperatura de -15°C a 0°C . Por otro lado, tal vez no esté de más reiterar que las $2189,4 \text{ cal}$ representan el calor intercambiado (en este caso absorbido) y no “el calor” del hielo cuando llega a su fase líquida a 0°C .

Ejemplo 1.5: En un recipiente ideal que contiene 500g de agua líquida a 363K se introduce a 500K una muestra de sustancia desconocida, cuya curva de enfriamiento se muestra en la figura 1.13. Calculemos el estado final del sistema.

Lo primero que debemos notar es que la sustancia desconocida cambia de estado a 270K y, eventualmente, por encima de los 800K , de manera tal que, dado que la temperatura de equilibrio en este caso está entre 363K y 500K , no cambiará de estado.

Su capacidad calorífica vale

$$C = \frac{265000 \text{ cal}}{530 \text{ K}} = 500 \text{ cal/K}$$

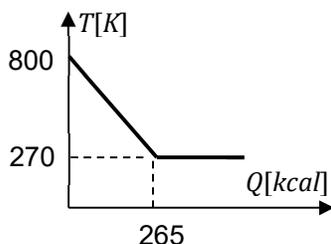


Fig. 1.13: Curva de enfriamiento de la sustancia desconocida del ejemplo 1.5

Por lo demás, habría que notar que en principio no sabemos cuál es el estado de equilibrio. Es posible que el agua se evapore total o parcialmente, o que el equilibrio ocurra por debajo de los 100°C . Una manera de saberlo es calculando la cantidad de calor que puede ceder la sustancia X hasta alcanzar los 100°C y compararla con la que necesita el agua para evaporarse totalmente. Obsérvese que es

$$Q_{A \rightarrow 100} + Q_V = 200\text{g} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \times (100^\circ\text{C} - 90^\circ\text{C}) + 200\text{g} \times 540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 110 \text{ kcal} \quad (1.49)$$

donde el primer sumando se refiere a la cantidad de calor que absorbe el agua para llegar a 100°C (2 kcal) y el segundo se refiere al calor de vaporización. Por lo demás, para llegar a 100°C la sustancia X cede

$$Q_X = 500 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \times (100^\circ\text{C} - 237^\circ\text{C}) = -68,5 \text{ kcal} \quad (1.50)$$

Claramente, el equilibrio ocurrirá con el agua vaporizada parcialmente, y esto sólo puede ocurrir a 100°C . Luego, conocida la temperatura de equilibrio, sólo resta calcular la masa de agua que se evapora. Para ello planteamos

$$Q_{A \rightarrow 100} + Q_V = 200g \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}} \times (100^{\circ}\text{C} - 90^{\circ}\text{C}) + m \times 540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 68,5 \text{ kcal} \quad (1.51)$$

para obtener de inmediato $m = 123,15 \text{ g}$. Luego, el estado final consiste en la muestra de sustancia desconocida, $76,85 \text{ g}$ de agua líquida y $123,15 \text{ g}$ de vapor de agua, en equilibrio a 100°C .

1.10 – Transporte del calor

Hemos mencionado en reiteradas oportunidades que el calor se transmite, es decir, se propaga de un lugar físico a otro, aunque en ningún momento explicitamos cómo lo hace. Todos sabemos que si sostenemos con una mano uno de los extremos de un clavo metálico y el otro extremo lo ponemos en contacto con una fuente de calor (por ejemplo, el fuego de la hornalla) al cabo de un rato nos quemamos. Está claro que se ha transmitido el calor de un extremo al otro del clavo, pero para quemarnos las manos no necesitamos ponerlas en contacto con el clavo ni con el fuego; alcanza con que las pongamos un poco por encima de la llama (sin tocarla) y también nos quemamos.

Parece evidente que los mecanismos de transmisión son diversos, aunque básicamente se los puede reducir a tres formas:

- a) conducción
- b) convección
- c) radiación.

En algunos casos uno de estos mecanismos es exclusivo, en otros se dan simultáneamente y, eventualmente, alguno es dominante.

1.10.1 – Conducción: típico de los sólidos (aunque no exclusivo), es un mecanismo que ocurre por transmisión de energía a través de agitación de los átomos en la red cristalina. Para resaltar las ideas centrales de este mecanismo pensemos en la barra homogénea de la figura 1.14, de longitud L y sección transversal S , en contacto térmico con dos focos caloríficos: uno “frío”, a temperatura T_F , y el otro “caliente”, a temperatura $T_C > T_F$. Lo de frío y caliente es meramente descriptivo, porque las temperaturas son arbitrarias (a condición que sea, por supuesto, $T_C > T_F$). Vale la pena aclarar que por foco calorífico entendemos un sistema que intercambia calor con su entorno sin variar su temperatura. Por

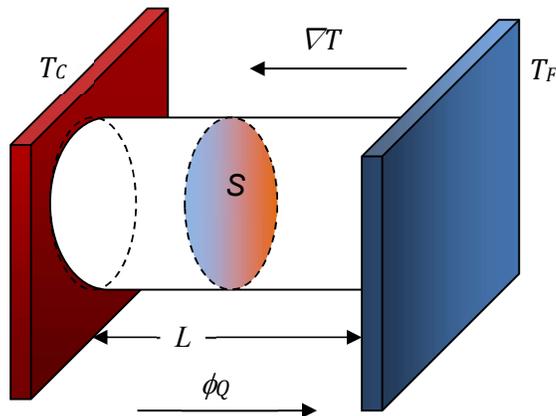


Fig. 1.14: una barra de longitud L y área transversal S entre dos focos caloríficos, uno a temperatura T_F y el otro a temperatura $T_C > T_F$. El gradiente de temperatura va del foco frío al foco caliente, en tanto que el flujo de calor va del foco caliente al foco frío.

ejemplo, independientemente de la cantidad de gente que se bañe simultáneamente en el océano, este no cambia su temperatura, a pesar de estar intercambiando calor con las personas. El océano puede considerarse entonces un foco calorífico.

La diferencia de temperatura entre los focos provocará intercambio de energía (sección 1.7). En la barra esta energía se transforma en energía vibracional de las moléculas de la red cristalina, o en energía térmica de los electrones de la red, energía que se propaga (se va transmitiendo) hacia el extremo más frío, de manera tal que se produce un flujo neto de calor (de izquierda a derecha en la figura

1.13). Es importante destacar que no estamos teniendo en cuenta el flujo de calor hacia los laterales de la barra (que de aquí en más consideraremos aislada térmicamente, salvo en las superficies de contacto con los focos) y que tampoco tendremos en cuenta los fenómenos de *dilatación térmica* (asociados a las deformaciones que sufre un cuerpo por efectos térmicos, discusión esta que realizaremos con algún detalle en la sección de complementos del capítulo).

Volvamos ahora al mecanismo de conducción. La eficiencia del proceso de transporte de calor depende de las propiedades del material. A su vez, una medida de la eficiencia de un proceso puede obtenerse midiendo la rapidez con que ese proceso ocurre, esto es, calculando cuánto varía la cantidad que describe el fenómeno en la unidad de tiempo. A modo de ejemplo considere dos empleados realizando la misma tarea, digamos armando cajas. Saber que uno arma cien cajas y el otro ciento ochenta no le dice gran cosa acerca de la eficiencia, porque usted seguramente querrá saber en cuánto tiempo lo hacen antes de decidir cuál de los dos es más eficiente. Con las cantidades físicas pasa algo similar. Saber que se transmiten tantas calorías de un lado a otro de la barra (digamos a través de la sección transversal S) es información útil, pero queremos conocer, además, en cuánto tiempo lo hacen. Para ello, definamos entonces la magnitud ϕ_Q (que suele llamarse flujo calorífico) como la cantidad de calor que se transporta (a través del área transversal) en la unidad de tiempo, es decir,

Un foco calorífico es un sistema capaz de intercambiar cantidades arbitrarias de calor sin modificar su temperatura. Una estrella, un océano o la atmósfera terrestre son ejemplos típicos de focos caloríficos.

$$\phi_Q = \frac{\delta Q}{dt} \quad (1.52)$$

donde δQ representa una cantidad elemental de calor. Obsérvese que las unidades de ϕ_Q son las de una potencia ($J / seg \equiv W$) razón por la cual a menudo se la nombra como *potencia calorífica*.

Esta potencia que, recordemos, mide la rapidez del transporte de energía, es directamente proporcional al tamaño del área transversal S , porque cuanto mayor sea la superficie transversal más “camino” encuentra la red para transportar la energía; también debe ser directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre los extremos porque cuanto más marcada sea esta diferencia mayor será la cantidad de calor que fluirá intentando equilibrar el sistema. Para pensarlo al revés, si los dos extremos están a igual temperatura no puede existir un flujo neto de calor entre los focos (aunque sí entre los focos y la barra hasta equilibrar las temperaturas).

Por último, es fácil imaginar que si la barra fuera infinitamente larga, la energía inyectada en el extremo caliente jamás alcanzaría el extremo frío, de manera tal que ϕ_Q debe ser inversamente proporcional a la longitud de la barra ¿Puede el flujo calorífico depender de algún otro factor? Seguramente depende de las características propias del material, porque al cabo todos sabemos que si tomamos con las manos dos barras, una cerámica y la otra metálica, y las ponemos en contacto con el mismo foco caliente la mano que nos quemamos primero es la que sostiene la barra metálica. En síntesis podemos escribir

$$d\phi_Q = \kappa dS \frac{T_C - T_F}{L} \quad (1.53)$$

donde hemos relacionado una cantidad infinitesimal de flujo $d\phi_Q$ a través de una superficie infinitesimal dS y κ es una cualidad propia del material (una variable intensiva) cuya unidad es la de una potencia por unidad de longitud y temperatura, y se denomina *coeficiente de conductividad térmica*. Por ejemplo, para la madera es $\kappa \approx 0,15 W/m K$, en tanto que para el cobre es $\kappa \approx 380 W/m K$.

Recordemos por otro lado que por hipótesis nuestra barra es homogénea, de manera tal que podemos integrar sobre toda la superficie transversal sin ningún inconveniente porque el resto de las cantidades de la expresión (1.53) no dependen de las coordenadas de integración. Por lo demás, es fácil ver que definido por la ecuación (1.53) $d\phi_Q$ es una cantidad positiva, que crece en sentido contrario al sentido de crecimiento de la temperatura, que en la 1.14 hemos indicado con el gradiente de temperatura. Si indicamos con $dT/d\ell$ el gradiente de temperatura en la dirección ℓ (implícitamente estamos suponiendo que es la única dirección de intercambio de calor) coherentemente debemos reformular la expresión (1.53) integrada en superficie como

$$d\phi_Q = -\kappa dS \frac{dT}{d\ell} \quad (1.54)$$

En la sección de complementos del capítulo escribiremos la ecuación (1.54) en geometría cilíndrica. Por ahora digamos que la expresión (1.53) es, en definitiva, una forma práctica de la versión (1.54) y de hecho se trata del valor absoluto del flujo en el caso en que la tasa de variación de la temperatura por unidad de longitud sea uniforme, es decir, en el caso $dT/d\ell = \Delta T/\Delta\ell$.

Regresemos por el momento a la expresión (1.53) y escribámosla en la forma

$$\phi_Q = \frac{\kappa S}{L} \Delta T = \frac{S}{\rho_T L} \Delta T \quad (1.55)$$

donde hemos introducido la cantidad ρ_T , la inversa de la conductividad térmica, a la que se denomina *resistividad térmica*. Parece evidente que los materiales que son buenos conductores del calor son aquellos que tienen baja resistividad térmica, y a la inversa también vale. Si definimos ahora la *resistencia térmica* R_T como

$$R_T = \frac{L}{\kappa S} \equiv \frac{\rho_T L}{S} \quad (1.56)$$

la ecuación (1.52) puede expresarse sucintamente como

$$\phi_Q = \frac{\Delta T}{R_T} \quad (1.57)$$

En general es común tener dos medios a diferente temperatura, separados por una combinación de materiales con diferente resistencia térmica, como puede ser por ejemplo una habitación, en la que separamos los ambientes interior y exterior por medio de paredes (ladrillo), puertas (madera) y ventanas (vidrio). La resistencia térmica equivalente del conjunto depende de la manera en que se conectan entre sí las resistencias térmicas y la forma en que se conectan con los focos caloríficos.

Todas las formas de conexión se reducen a dos: serie y paralelo. Dos elementos están en paralelo cuando sus extremos se hallan conectados a las mismas fuentes (como es el caso de la pared, la puerta y las ventanas del ejemplo anterior) en tanto que están en serie cuando un extremo de un elemento se conecta a un extremo de otro y sólo los extremos libres se conectan a las fuentes (como puede ser el caso de una caldera de hierro revestida con una manta cerámica: el hierro está en contacto con un foco - el interior de la caldera - y la manta está en contacto con el otro - el medio externo - en tanto que en la parte intermedia se conectan entre sí).

La figura 1.15 muestra estas dos asociaciones. Una forma alternativa de pensar si están en serie o en paralelo es esta: si al retirar uno de los cuerpos las fuentes siguen

La ecuación (1.53) expresa la relación que existe entre la potencia calorífica y la diferencia (positiva) de temperaturas entre los focos. La expresión (1.54) indica que el calor fluye en sentido opuesto al gradiente de temperaturas (como exige el principio cero).

estando conectadas físicamente entonces los cuerpos están en paralelo; caso contrario están en serie.

Si deseamos calcular la resistencia térmica equivalente en paralelo tengamos en cuenta que ambos cuerpos se hallan a igual diferencia de temperatura ΔT , y que el flujo de calor total será el que atraviesa el cuerpo de resistencia térmica R_{T1} , llamémoslo ϕ_1 , más el que atraviesa el cuerpo de resistencia térmica R_{T2} , al que llamaremos ϕ_2 , o sea,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{T1}} + \frac{\Delta T}{R_{T2}} = \Delta T \left(\frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}} \right) = \frac{\Delta T}{R_{Teq,\parallel}} \quad (1.58)$$

donde hemos denotado la resistencia térmica equivalente paralelo con $R_{Teq,\parallel}$. Comparando las últimas dos igualdades de la ecuación (1.58) parece evidente que debe cumplirse

$$\frac{1}{R_{Teq,\parallel}} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}} \equiv R_{Teq,\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}}} \quad (1.59)$$

y es casi evidente que la extensión a N resistencias térmicas $R_{T1}, R_{T2}, \dots, R_{TN}$ en paralelo resulta en una resistencia térmica equivalente

$$R_{Teq,\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}} + \dots + \frac{1}{R_{TN}}} \quad (1.60)$$

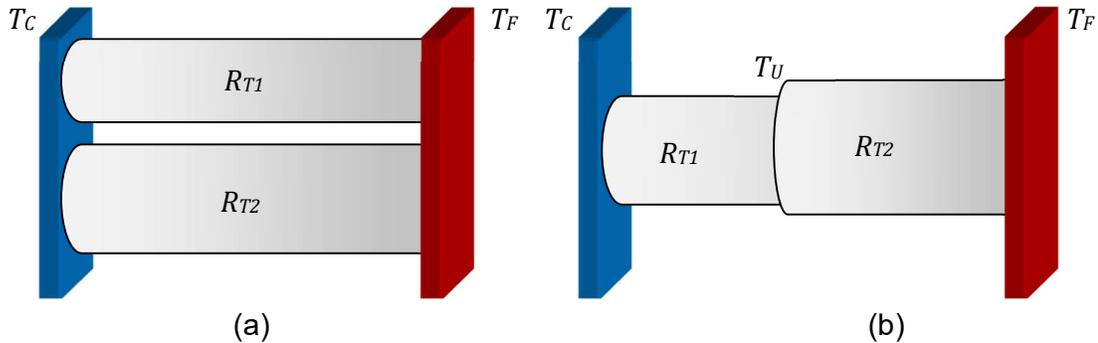


Fig. 1.15: resistencias térmicas (a) en paralelo; (b) en serie. Obsérvese que en el caso (a) ambos cuerpos están en contacto con las dos fuentes, mientras que en el caso (b) sólo están en contacto con una a lo sumo.

Si deseamos calcular la resistencia térmica equivalente en serie, notemos que la cantidad de calor que atraviesa la resistencia térmica R_{T1} en la unidad de tiempo es la misma cantidad de calor que atraviesa al cuerpo de resistencia térmica R_{T2} , es decir, se

cumple la igualdad $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. En cambio, en general la diferencia de temperatura sobre los cuerpos habrá de ser diferente. Si como en la figura 1.14.b llamamos T_U a la temperatura del punto de unión de los dos cuerpos, parece evidente que vale

$$\Delta T = T_C - T_F = (T_C - T_U) + (T_U - T_F) = \Delta T_1 + \Delta T_2 \quad (1.61)$$

Luego, es casi inmediato que resulta

$$\Delta T = \phi_1 R_{T1} + \phi_2 R_{T2} = \phi (R_{T1} + R_{T2}) = \phi R_{T_{eq,s}} \quad (1.62)$$

Comparando las últimas dos identidades se ve que la resistencia térmica equivalente serie $R_{T_{eq,s}}$ resulta

$$R_{T_{eq,s}} = R_{T1} + R_{T2} \quad (1.63)$$

y por extensión, dadas N resistencias térmicas $R_{T1}, R_{T2}, \dots, R_{TN}$ en serie resulta una resistencia térmica equivalente

$$R_{T_{eq,s}} = R_{T1} + R_{T2} + \dots + R_{TN} \quad (1.64)$$

Ejemplo 1.6: regresemos a la pared que separa una habitación del exterior, suponiendo que tiene una puerta y una ventana. Supongamos que la pared es de ladrillo macizo ($\kappa_L = 0,81 \text{ W/m K}$) con una superficie neta de 26 m^2 y 15 cm de espesor, una puerta de madera de $1,60 \text{ m}^2$ de superficie ($\kappa_M = 0,17 \text{ W/m K}$) y 7 cm de espesor y una ventana de $2,40 \text{ m}^2$ de superficie, con un vidrio de coeficiente $\kappa_V = 0,9 \text{ W/m K}$ y $0,5 \text{ cm}$ de espesor. Observe que en total la división es de 30 m^2 , pero no del mismo material, aunque puede reducirse a un sistema de tres resistencias térmicas en paralelo. La aplicación directa de la expresión (1.56) permite calcular las resistencias térmicas y resultan

$$R_{TL} = 7,12 \times 10^{-3} \text{ K/W} \quad R_{TM} = 0,26 \text{ K/W} \quad R_{TV} = 2,31 \times 10^{-3} \text{ K/W}$$

Aplicando la identidad (1.60) la resistencia equivalente del sistema resulta

$$R_{T_{eq \parallel}} = 1,73 \times 10^{-3} \text{ K/W}$$

Si la temperatura externa es de 10°C y dentro de la habitación deseamos una temperatura de 20°C , es decir, $\Delta T = 10^\circ\text{C} \equiv 10 \text{ K}$, el flujo de calor es de $5.7772,41 \text{ W}$ o, equivalentemente, alrededor de 1381 cal/seg . Si pensamos en cuatro paredes idénticas y un techo equivalente (tenga en cuenta que el coeficiente de conductividad de una teja es similar al del ladrillo, en tanto que el del hormigón es el doble) el valor de las pérdidas debe multiplicarse por un factor cinco. Aun manteniendo todo cerrado, se necesita una estufa

que compense las pérdidas, esto es, que suministre alrededor de 7.000 cal/seg para calefaccionar el ambiente.

Por otro lado, piense que cuando hace frío usted se tapa con una frazada, y si hace

De la figura 1.14 (b), y usando la expresión (1.62), parece evidente que la temperatura de la unión entre las dos resistencias, T_U , es de la forma

$$T_U = T_C - \phi_Q R_{T1}$$

Pero también puede pensarse que de alguna manera debe hallarse emparentada a la temperatura de equilibrio (1.36), pues de hecho es una temperatura que sólo tiene sentido en equilibrio. Es fácil demostrar que si R_F es la resistencia en contacto con el foco frío y R_C la que se halla en contacto con el foco caliente, su valor es

$$T_U = \frac{R_F T_C + R_C T_F}{R_F + R_C}$$

mucho frío lo hace con dos. La razón (que no hace falta interpretarla desde un punto de vista físico para saber cómo abrigarse) es que lo que hace es poner dos frazadas en serie. En última instancia, la frazada se fabrica con materiales que son muy malos conductores del calor, es decir, tiene muy alta resistividad térmica, lo que impide que el calor fluya (o que en todo caso lo haga muy lentamente) entre el exterior y el interior del sistema (que es la persona que está tapada). La segunda frazada, como dijimos, está en serie con la primera y eso no hace más que incrementar el valor de la resistencia térmica equivalente, haciendo que el calor fluya todavía más lentamente (recuerde que el sistema interior se halla a temperatura más o menos constante porque la persona que está en el "interior" del sistema es una fuente de calor).

Tal vez esta discusión le permita hacerse una idea de por qué dentro de un iglú se mantiene una temperatura soportable. Piense que el coeficiente de conductividad térmica del hielo, a

temperaturas cercanas a -20°C , es del orden de $2,3 \text{ W/m K}$, de manera tal que no se trata de un buen conductor del calor y la temperatura interior (fijada por la persona que se halla dentro) se mantiene razonablemente constante, bastante por encima de la temperatura externa.

1.10.2 – Convección: es el mecanismo dominante en la transmisión de calor en líquidos y gases, que básicamente ocurre por transporte de energía a través de movimientos a nivel macroscópico (a diferencia de la transmisión por conducción, en la que el transporte se da a nivel microscópico de átomos y/o moléculas). Para discutir las ideas centrales, imaginemos un recipiente conteniendo un fluido, sobre una fuente de calor, como se muestra en la figura 1.16. En lo que sigue supondremos que la temperatura del foco inferior es mayor que la temperatura ambiente.

El calor se transmite por conducción a través de la base del recipiente y aumenta la energía cinética de las moléculas del fluido más próximos a la base (obsérvese que es irrelevante que se trate de un líquido o de un gas). Como consecuencia, estas moléculas

incrementan la distancia entre ellas, lo que se percibe como una disminución (local) de la densidad del fluido. Si el fluido se encuentra en un campo gravitatorio, su porción menos

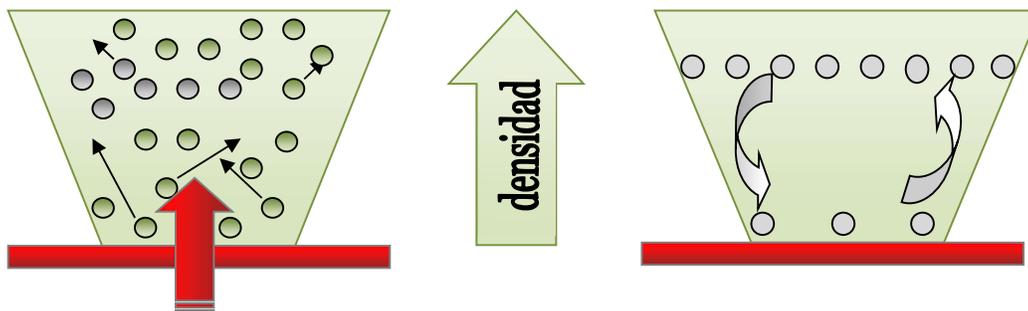


Fig. 1.16: la plancha inferior representa una fuente, que entrega una cantidad Q de calor. En (a) se muestran algunas moléculas del líquido contenido en el recipiente, como así también algunos vectores velocidad significativos. En (b) se esquematiza la densidad del fluido, mostrándose que es mayor en la parte superior que en la inferior. Como consecuencia, el fluido menos denso tiende a ascender, desplazando al fluido más denso hacia la parte inferior.

densa tiende a ascender, ocupando los lugares donde pueda equilibrarse flotando sobre la parte más densa del fluido. Este movimiento arrastra consigo a las partículas con alta energía, la que van intercambiando por colisiones a medida que ascienden, y desplaza hacia la parte inferior a las partículas con baja energía, que al entrar en contacto con el foco calorífico reinician el proceso. En síntesis, la circulación continua que se genera hace que la energía se transporte desde el foco caliente al frío en un movimiento de circulación que se conoce como *movimiento convectivo*. La circulación del fluido va formando estructuras cerradas en formas de lazo, llamadas *celdas convectivas*, cuyo tamaño depende, entre otros factores, del tamaño del sistema, de la diferencia de temperatura y de la densidad del fluido.

Por ejemplo, cuando se calienta una habitación por medio de una estufa, el tamaño de las celdas convectivas que se generan es del orden de la altura del recinto. A propósito, y a la luz de la discusión precedente, hemos encontrado una buena razón para instalar las estufas en la parte baja de la habitación y los equipos de aire acondicionado en la parte alta. La estufa es el foco calorífico de la figura 1.15, el recipiente es la habitación y el fluido es aire. La celda convectiva es del tamaño de la habitación y provoca la rápida circulación del aire para “calentarse”. En cuanto al aire acondicionado, podemos tomarlo como un foco frío que lo que hace es quitar energía a las moléculas del fluido, disminuyendo su distancia relativa, esto es, aumentando su densidad, y obligándolo a circular hacia las partes más densas de fluido (que en este caso se encuentra en el piso) provocando de esta manera el descenso de las masas de aire frío y la elevación hacia la fuente de la parte menos densa, es decir, las porciones de aire a mayor temperatura. Nada impide que coloquemos estos artefactos al revés, pero la estufa próxima al techo provocaría una celda del tamaño del

espacio que queda entre la estufa y el cielorraso, disminuyendo notablemente la eficiencia del proceso. Algo similar ocurriría con el equipo de aire acondicionado cerca del piso.

En el interior de nuestro planeta también existe un fluido (que consiste en rocas parcialmente fundidas y que se denomina *magma*) encerrado entre dos focos a diferente temperatura. En la figura 1.17 se muestra un esquema sobresimplificado del interior planetario, cuya estructura puede explicarse en términos de lo que ha sido su formación, alrededor de 4.800 millones de años atrás.

La parte exterior del planeta, y sobre la que se desarrollan todas las formas de vida conocida, se denomina *corteza*. Incluye todas las tierras emergidas y el lecho oceánico. Por debajo de la corteza se extiende el manto, que es una región de alrededor de 2.900 km de espesor y que se halla a temperatura suficientemente elevada como para mantener a las rocas parcialmente fundidas y transformarlas en magma (cuando el magma aflora en la superficie se lo conoce como *lava*). Por razones prácticas, se divide al conjunto manto-corteza en dos subregiones: la *litosfera*, que comprende la parte más externa del manto y la corteza, tiene alrededor de 100 km de profundidad y, lejos de ser una superficie continua, se halla resquebrajada y formada por alrededor de una docena de *placas*. La parte inferior del manto, que se extiende hasta el límite con el núcleo unos 2.800 km más abajo, se denomina astenosfera. En el límite con la corteza la temperatura del manto es del orden de los 500K, en tanto que en límite con el núcleo la temperatura es siete veces superior.

Esta diferencia de temperatura explica la existencia de corrientes convectivas que dan lugar a la formación de celdas de dos escalas características; las que nos interesan son del tamaño mismo de la astenosfera, y son las que arrastran lateralmente a las placas de la litosfera que se hallan por encima. En la figura 1.17 esquematizamos esta situación.

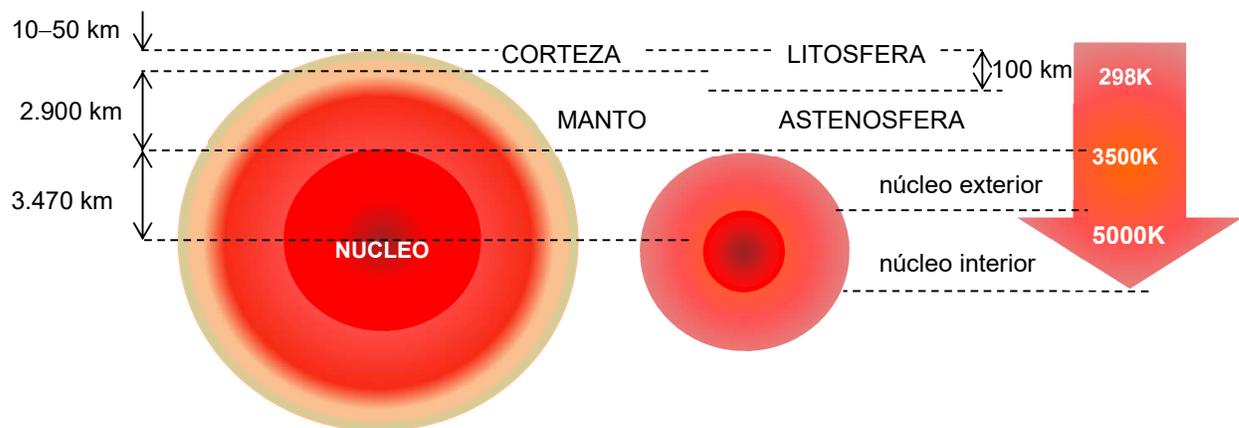


Fig. 1.17: esquema simplificado del interior de nuestro planeta. La corteza y la parte superior del manto conforman la litosfera, que tiene una profundidad aproximada de 100km, en tanto que la parte inferior del manto, a temperatura mayor que la litosfera, se denomina astenosfera y está formada por piedra fundida.

En líneas generales lo que ocurre es que las corrientes convectivas a escala astenosférica empujan a las placas de la litosfera en un movimiento de deriva. A nivel popular el efecto más dramático de este fenómeno es la *deriva continental*, que consiste en el desplazamiento relativo de los continentes entre sí (lo que deriva no son los continentes sino las placas sobre las que están montados). La actividad sísmica y volcánica del planeta se halla directamente relacionada a la *tectónica de placas*, que engloba al conjunto de procesos a través de los cuales se generan, movilizan, interactúan y destruyen las placas litosféricas.

En ninguno de los ejemplos mencionados hemos apelado a una descripción cuantitativa de los fenómenos. La razón es que matemáticamente escapa a los lineamientos generales de esta presentación, y esto porque en general el transporte por convección depende de una gran variedad de parámetros, cada uno de ellos característico de cada movimiento particular, por ejemplo, la temperatura del fluido, su densidad, su viscosidad, tipo de flujo (laminar o turbulento), propiedades de la superficie en contacto con el fluido, etcétera. Depende también del tipo de convección, natural o forzada. En la convección natural el fluido se mueve por efecto de la dilatación (cambios de densidad) asociada a la variación espacial de la temperatura en su seno, en presencia de un campo gravitacional, como en el ejemplo del aire en contacto con la estufa o la figura 1.16. Por el contrario, en la convección forzada el fluido es obligado a circular por medios externos al fluido (por ejemplo, abriendo la habitación y permitiendo la circulación de corrientes externas de aire, o por medio de un ventilador).

Para formarnos una idea del fenómeno de transporte convectivo pensemos en un fluido viscoso moviéndose con una de sus partes en contacto con una superficie, puede ser un fluido dentro de un caño o en contacto con una pared plana. Como el fluido es viscoso (todos los fluidos lo son en mayor o menor medida) el perfil de velocidades no es uniforme, disminuye hacia la superficie fija, y en la zona de contacto se anula. La figura 1.18 ilustra esta situación en los casos de contacto con una pared plana y en el interior de un caño de perfil circular (el perfil de velocidades parabólico es sólo ilustrativo, pues de hecho depende del tipo de fluido).

El transporte de calor por convección también se llama de *conducción superficial*, ya que el flujo de calor está gobernado por la conducción a través de una fina capa del fluido que se encuentra en contacto con la superficie fija (capa límite).

Es de destacar que en ambos casos los perfiles de distribución de temperatura son análogos, y de hecho hemos tomado la temperatura de la superficie sólida (T_s) mayor que la del fluido “lejos” de la superficie (T_∞). El calor en la interfase sólido – fluido se transfiere por conducción, porque las moléculas del sólido próximas a la interfase transmiten calor por colisiones a las moléculas del fluido cercanas a esa región, y esto se debe básicamente a que la velocidad de la capa de fluido en contacto con la pared (fija) es nula. En la porción de flujo fuera de la superficie de contacto la velocidad va incrementándose, y a esta región se la conoce como *capa límite hidrodinámica*. Su espesor δ_{CLH} se define como la distancia que existe entre la placa y la línea de corriente en la que la velocidad alcanza el 99% del valor de flujo libre.

Ahora bien, de la misma manera en que los fenómenos viscosos provocan la aparición de una capa límite hidrodinámica, el transporte de energía provoca el desarrollo de una capa de variación de temperatura, a la que se refiere como *capa límite térmica*. Su significado es análogo al de la capa hidrodinámica.

Consideremos que el fluido antes de llegar a la plancha horizontal del panel 1.18(a) tiene una temperatura uniforme T , y que la superficie sólida se mantiene a temperatura constante T_s . Cuando entren en contacto con esta superficie, las partículas adyacentes alcanzarán el equilibrio térmico a esta temperatura, e intercambiarán energía con las partículas más cercanas en un régimen que evolucionará de estático (en contacto con la superficie) a dinámico (alejado de esta superficie). En estas condiciones se desarrollará un perfil de temperaturas en el flujo, que hemos ejemplificado en el panel 1.18 (b) (en este caso suponiendo que la temperatura de la plancha fija es mayor que la inicial del fluido). La región del flujo donde la variación de la temperatura en dirección normal a la superficie toma valores significativos es precisamente la capa límite térmica, y su espesor δ_{CLT} (en términos aproximados) se define como la distancia que existe entre la placa fija y la región en la que el fluido alcanza el 99% del valor de temperatura del flujo libre.

El proceso de transferencia de una forma de energía (mecánica) a otra (térmica) resulta muy complicado y excede el objetivo de estas líneas. Podemos sin embargo pensar el problema desde una perspectiva general. Como la velocidad del fluido en contacto con la superficie fija es cero, el calor en la interfase debe transportarse por conducción, de manera tal que debe valer la expresión (1.54), que en este caso escribiremos como

$$\phi_Q = -\kappa S \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\delta_{CL}} \quad (1.65)$$

donde r designa la coordenada de variación de la temperatura. Ahora bien, decir que el proceso es similar al de conducción sobre la extensión de la capa límite no alcanza porque no hemos definido a qué capa límite nos referimos. Nuestra manera de describir el proceso de transferencia de calor sugiere que el gradiente de temperaturas debe estar determinado por la estructura térmica, pero la interrelación entre los transportes de momento y energía térmica hacen que ese gradiente quede determinado por la velocidad a que puede ser transportada la energía por el fluido en la región de flujo libre, de manera tal que el gradiente de temperaturas en la superficie del sólido depende del campo de flujo (otra forma de decirlo es que cuanto mayor sea la velocidad del flujo más rápida será la transferencia de calor).

Sin embargo, las variables hidrodinámicas propias, que son las que definen el perfil de velocidades (y la extensión de la capa límite hidrodinámica) son la tensión tangencial sobre la placa, el gradiente de velocidad y la viscosidad (que es precisamente el parámetro que da origen a la capa límite hidrodinámica) de manera tal que los gradientes de velocidad sobre la capa límite hidrodinámica se relacionan con los esfuerzos de corte.

En cambio, la capa límite térmica está por completo caracterizada por el calor transmitido, y en consecuencia por la conductividad térmica y el gradiente de temperaturas, de manera tal que la expresión (1.65) se escribe sobre la capa límite térmica.

Por lo demás, obsérvense los paneles (b) y (d) de la figura 1.18: la temperatura se incrementa hacia la superficie fija, de modo que el calor fluye hacia el interior del fluido. Pero ese flujo es básicamente el mismo que en la superficie, sólo que ahora el mecanismo de transporte es por diferencia de densidades, esto es, convección. Luego, podemos escribir

$$\phi_Q = -\kappa S \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\delta_{CLT}} \sim \kappa S \frac{(T_S - T_\infty)}{\delta_{CLT}} = h S (T_S - T_\infty) \quad (1.66)$$

que se conoce como ecuación de enfriamiento de Newton. T_S es la temperatura de la superficie en contacto con el fluido, T_∞ es la temperatura del fluido fuera de la capa límite, S es el área de la superficie a temperatura T_S . El coeficiente h se conoce como *coeficiente de transferencia de calor por convección* o *coeficiente de película* (porque se relaciona con las propiedades de la capa límite).

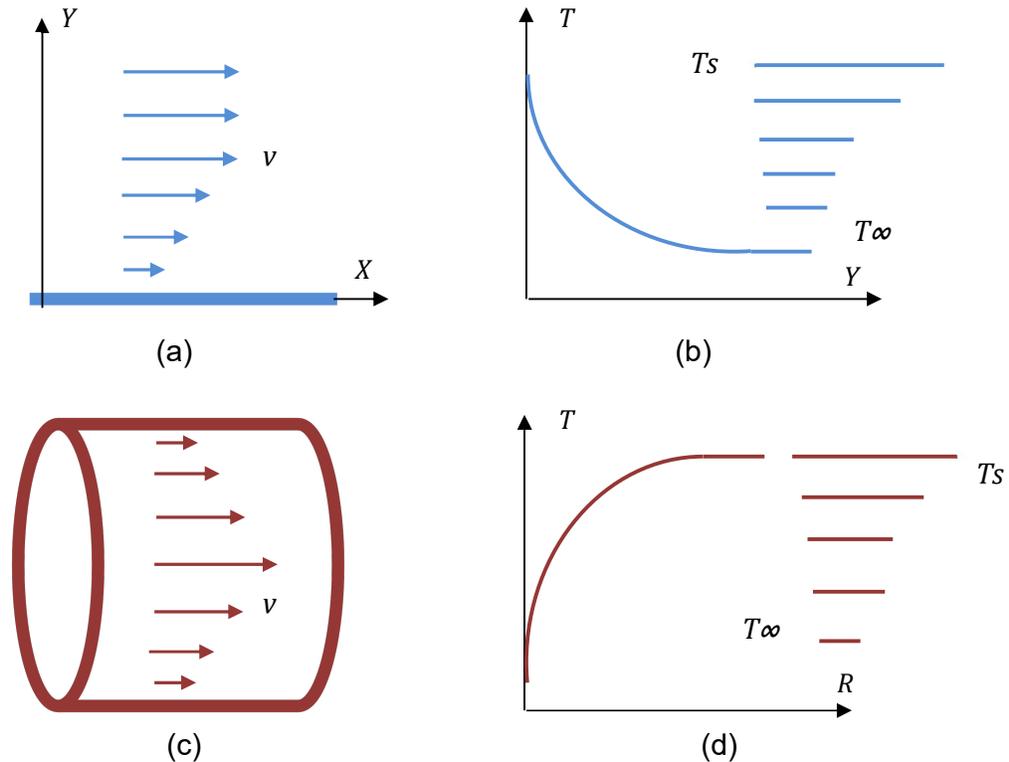


Fig. 1.18: perfiles de velocidad y temperatura (sólo ilustrativos) de un fluido viscoso en contacto con una pared horizontal (panel superior) y dentro de un caño cilíndrico calentado externamente, por ejemplo por irradiación solar (figura inferior). Obsérvense que en ambos casos la condición de contorno se reduce a que la velocidad en contacto con la superficie sea nula. En ambos casos hemos considerado que la temperatura T_S de la superficie sólida es mayor que la temperatura del fluido (T_∞). El diagrama de barras a la derecha es indicativo de la marcha de temperatura: en el caso de la lámina decrece hacia afuera, en el caso del caño decrece hacia adentro.

El problema central consiste precisamente en la determinación del coeficiente h , que depende de las propiedades del fluido (densidad, viscosidad), de las características propias del flujo (velocidad, carácter de la circulación) y de sus propiedades térmicas (fundamentalmente conductividad térmica y calor específico).

1.10.3 – Radiación: a diferencia de los procesos de conducción y convección, la radiación es un mecanismo que no requiere de un medio material para transportar energía. Por consiguiente, es la única vía de transmisión de calor en el vacío. En general el término radiación se aplica a todo fenómeno que involucra la generación, transporte y absorción de ondas electromagnéticas. Sin entrar en los detalles de la generación de este tipo de ondas, digamos que todos los procesos radiativos se hallan asociados a las oscilaciones de los electrones y los núcleos en los átomos. La emisión de radiación está vinculada a la energía interna del cuerpo que, como ya hemos discutido, se relaciona con su temperatura. Por consiguiente *todos* los cuerpos del universo emiten alguna forma de radiación porque la única manera de no hacerlo es que se hallen en el cero absoluto.

Los seres vivos del planeta (como en general todo los cuerpos con temperaturas por debajo de 600K) emiten radiación infrarroja, a la que nuestros ojos no son sensibles y para poder detectarla se requiere de aparatos especiales (visores infrarrojos) que detectan el halo de calor del cuerpo. La radiación que provoca en nuestros ojos la sensación subjetiva de la visión se denomina *luz visible*.

Este tipo de radiación, a la que también se la llama luz blanca, es una mezcla de radiaciones que nuestros ojos detectan como diferentes colores.

La energía emitida por un cuerpo no tiene por qué provocar algún tipo de estímulo en nuestros órganos de visión. Si usted vio la película *Terminator* tal vez recuerde que este cazador extraterrestre no “veía” a sus víctimas sino que las detectaba de manera difusa, precisamente como se detecta en infrarrojo. Nuestros órganos de visión (los ojos) sólo son sensibles a una limitada porción del espectro electromagnético, que se denomina luz visible.

Ahora bien, si los cuerpos emiten continuamente radiación en algún momento deberían enfriarse y alcanzar el cero absoluto. Esto no sucede porque de alguna manera están recibiendo energía del medio circundante, una parte de la cual la absorben, otra parte la reflejan y si son transparentes una parte la transmiten. Concéntrese en los objetos que lo rodean: los ve porque reflejan la luz visible que incide sobre ellos. Por ejemplo, si usted tiene una prenda azul es porque está teñida con un colorante que absorbe todas las radiaciones y refleja en una sola banda, a saber, el azul. Si mira esa prenda con un visor infrarrojo podrá ver difusamente su forma pero le sería imposible distinguir su color, aunque el hecho relevante es que la prenda está emitiendo radiación infrarroja.

La condición de equilibrio térmico impone que todos los cuerpos que lo rodean se encuentren a la misma temperatura salvo que sean fuentes de energía o se les suministre energía externamente. Por ejemplo, una lámpara encendida en la habitación se encuentra

a temperatura mayor que el resto de los objetos, pero esto se debe a que se le suministra energía (de origen eléctrico) permanentemente. Una vez que se apaga la lámpara alcanza rápidamente el equilibrio térmico con el entorno.

En principio, podemos escribir la condición de equilibrio de una manera casi obvia pero elegante. Si llamamos E_{INC} a la energía que incide sobre un cuerpo y E_{REF} , E_{ABS} , E_{TRA} a las partes de la energía que ese cuerpo refleja, absorbe y transmite, respectivamente, será

$$E_{INC} = E_{REF} + E_{ABS} + E_{TRA} \quad (1.67)$$

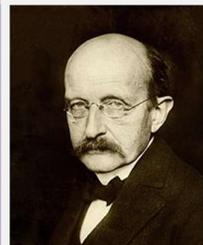
o, similarmente, si definimos los coeficientes de reflexión, de absorción y de transmisión (que técnicamente se denominan reflectancia, r , absorbitancia, a , y transmitancia, t) como las fracciones de la energía incidente que se refleja, absorbe y transmite, respectivamente, podemos escribir

$$1 = r + a + t \quad (1.68)$$

Todos los cuerpos opacos tienen coeficiente de transmisión nulo. Luego, dado un conjunto de N cuerpos opacos en equilibrio térmico, para todos y cada uno de ellos debe cumplirse

$$\begin{aligned} 1 &= r_1 + a_1 \\ 1 &= r_2 + a_2 \\ &\vdots \\ 1 &= r_N + a_N \end{aligned} \quad (1.69)$$

Obsérvese que la expresión (1.69) asegura que los cuerpos opacos reflejan parte de la energía que les incide y parte la absorben pero de ninguna manera dice que los coeficientes sean los mismos. De hecho, de nuestra experiencia cotidiana sabemos que los cuerpos oscuros absorben la mayor parte de la radiación que les incide (por eso nos abrigamos con ropas oscuras) en tanto que los cuerpos blancos reflejan prácticamente toda la energía radiante que les llega, de manera tal que en los objetos oscuros el coeficiente de absorción a es mucho mayor que en los claros, y a la inversa ocurre con el coeficiente de reflexión r . Parece razonable definir entonces un cuerpo idealmente blanco como aquel para el cual es $a = 0, r = 1$, y un



Max Karl Ernest Ludwig Planck (1858-1947) resolvió el problema de la radiación de cuerpo negro postulando la teoría según la cual el intercambio de energía entre los sistemas no es continua sino que se realiza en forma de paquetes o “cuantos”, dando así nacimiento a uno de los más formidables desarrollos teóricos de la Física moderna: la mecánica cuántica.

cuerpo idealmente negro (o simplemente *cuerpo negro*) como aquel para el que se cumple la relación inversa, esto es, $a = 1, r = 0$.

Si un cuerpo ha de estar en equilibrio térmico debe radiar la misma cantidad de energía que absorbe, porque la que refleja no entra en el balance que nos proponemos. Para ir un poco más en detalle, imaginemos dos cuerpos en un recinto cerrado, uno de ellos negro. Llamemos ε a la cantidad de energía que el cuerpo emite por unidad de tiempo y por unidad de área, de manera tal que la energía total emitida por el cuerpo que no es negro (y que indicamos con el subíndice 1) sea $\varepsilon_1 A_1 \Delta t$, y la energía total emitida por el cuerpo negro sea $\varepsilon_N A_N \Delta t$, siendo A_1 y A_N las áreas de las superficies de cada uno de los cuerpos. Como sobre cada cuerpo incide la misma energía E_{INC} deben cumplirse las relaciones

$$\varepsilon_1 A_1 \Delta t = \varepsilon_{INC} A_1 \Delta t a_1 = \varepsilon_{ABS,1} A_1 \Delta t \quad (1.70.a)$$

$$\varepsilon_N A_N \Delta t = \varepsilon_{INC} A_N \Delta t = \varepsilon_{ABS,N} A_N \Delta t \quad (1.70.b)$$

Obsérvese que hemos usado el hecho de que $a_N = 1$. Dividiendo las expresiones (1.70.a) por (1.70.b) resulta la identidad

$$\varepsilon_1 = a_1 \varepsilon_N \quad (1.71)$$

que indica que los cuerpos reales irradian menor cantidad de energía que los cuerpos negros. De hecho, la expresión de la cantidad de energía ε que irradia un cuerpo negro por

La *emisividad* de una superficie se refiere a su capacidad para irradiar energía. Cuanto más opaca es la superficie mayor es su emisividad. Por ejemplo, la emisividad del cobre pulido es del orden de 0,02, en tanto que la del cobre oxidado es de 0,7. No es de extrañar, entonces, que la emisividad del acero sea mucho menor, por ejemplo, que la de la madera.

unidad de tiempo y unidad de área fue hallada empíricamente en 1879 por Josef Stefan y justificada cinco años después por Ludwig Boltzmann (de ahí que se la conozca como ley de Stefan–Boltzmann) y postula que es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura, esto es

$$\varepsilon_N = \sigma T^4 \quad (1.72)$$

donde la constante de proporcionalidad σ se conoce como constante de Stefan–Boltzmann y vale $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Entre las expresiones (1.71) y (1.72) es inmediato obtener la potencia de radiación que irradia un cuerpo de área A y coeficiente de emisividad ε (la emisividad de un cuerpo negro vale 1) en la forma

$$\phi_Q = \varepsilon A \sigma T^4 \quad (1.73)$$

donde hemos usado para la potencia irradiada la misma notación que introdujimos en la expresión (1.52) porque al cabo designan cantidades similares.

Ejemplos cotidianos de transmisión de calor por radiación hay muchos. Sin ir más lejos, piense que un ser vivo se acurruca cuando tiene frío y se expande lo más que puede cuando tiene calor. Lo único que procura de esa manera es modificar el área de radiación, porque la temperatura corporal es constante. Al acurrucarse reduce significativamente la superficie del área expuesta (área A de la expresión (1.73)) y de esa manera irradia menor cantidad de calor. A la luz de esta interpretación, parece que vale la pena preguntarse si los días de mucho calor conviene dormir de espalda o de costado. Todavía más, hasta podríamos preguntarnos qué rol juega el ventilador, porque en definitiva se trata de un motor (que disipa calor) que mueve unas paletas que agitan el aire, de manera tal que lo que hace es aumentar la energía cinética de las moléculas del entorno del objeto al que se supone debe “enfriar”. Lo que hace el ventilador es remover la capa de calor que rodea al cuerpo (emisión infrarroja) provocando de esa manera una sensación de alivio.

En realidad la ecuación (1.73) es válida para un cuerpo aislado. El balance energético completo debe contemplar la temperatura del entorno. Por ejemplo, el balance de energía de los seres vivos tiene en cuenta la presencia de la atmósfera a temperatura T_{ATM} , que intercambia calor con el ser vivo, de manera tal que la expresión (1.73) debe modificarse coherentemente como

$$\phi_Q = \epsilon A \sigma (T^4 - T_{ATM}^4) \quad (1.74)$$

Las estrellas irradian de manera muy parecida a un cuerpo negro, y la expresión (1.73) es válida porque puede considerárselas como objetos aislados. Aun cuando no habremos de profundizar en el tema digamos que la energía que irradian los cuerpos negros depende de la temperatura a la que se encuentran, y además no es la misma para todo tipo de radiación. Por ejemplo, un cuerpo negro no irradia la misma cantidad de energía en el infrarrojo que en el visible o el ultravioleta, y esto da lugar a que las curvas de cantidad de energía emitida por un cuerpo negro se modifiquen con la temperatura a la que se halla ese cuerpo negro. Cuando afirmamos que las estrellas emiten como un cuerpo negro queremos decir que la curva de emisión de energía de una estrella es similar a la de un cuerpo negro que estuviera a una temperatura T_{eff} , a la que se denomina *temperatura efectiva*.

El flujo superficial de una estrella define la cantidad de energía que emite por unidad de tiempo y de área. Se halla directamente relacionado al brillo, que es la cantidad de energía que por segundo llega a cada unidad de superficie de la Tierra. Conocido el brillo y medido el semidiámetro angular de la estrella, puede calcularse la densidad de flujo, que en este caso se asocia a la temperatura efectiva, esto es, la temperatura de un cuerpo negro que radiara la misma cantidad de energía que la estrella.

Por ejemplo, la temperatura efectiva del Sol es $T_{eff} = 5.770K$, de manera tal que la potencia radiativa como cuerpo negro, a la que se denomina *luminosidad solar*, L_{\odot} (en

astrofísica el símbolo \odot se utiliza para designar las magnitudes propias del Sol) se calcula a partir de la ecuación (1.59) como

$$L_{\odot} = 4\pi \sigma R_{\odot}^2 T_{eff}^2 \quad (1.75)$$

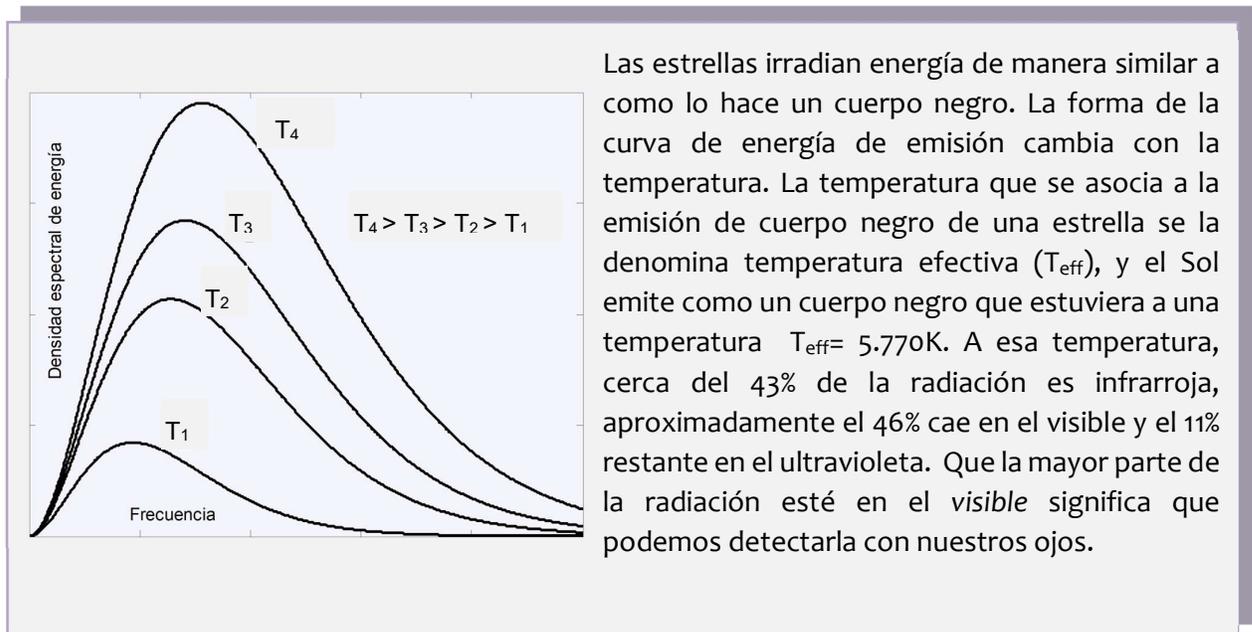
donde la cantidad $4\pi R_{\odot}^2$ es la medida de la superficie del Sol. Teniendo en cuenta el valor de la constante de Stefan-Boltzmann y que el radio solar es de $6,96 \times 10^8 m$ resulta

$$L_{\odot} = 3,826 \times 10^{26} W$$

Esta cantidad indica que cada segundo el Sol libera $3,826 \times 10^{26} J$ al espacio interplanetario. Sobre cada metro cuadrado de la superficie de una esfera de radio $R_{TS} = 1,496 \times 10^{11} m$ (la distancia media Tierra–Sol) incide entonces una potencia

$$S = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{TS}^2} = 1.360 \frac{W}{m^2} \quad (1.76)$$

cantidad que se conoce como *constante solar*, que designa la intensidad del flujo de radiación que incide perpendicular al plano de la parte superior de la atmósfera terrestre y que, curiosamente, no es constante sino que depende de la dinámica de la atmósfera solar. Su valor, apresurémonos a decirlo, registra a lo largo de los años leves variaciones entre $1.355 W/m^2$ y $1.370 W/m^2$.

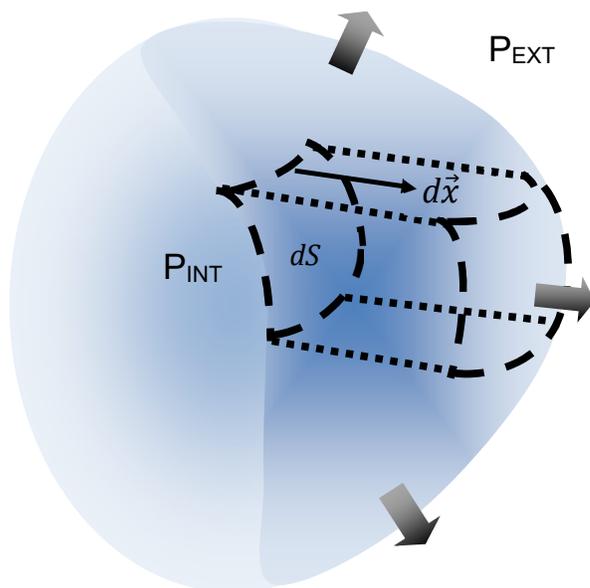


Parte 3: Primer principio de la Termodinámica

1.11– Trabajo mecánico de un sistema

Supongamos un sistema no rígido, es decir, que puede intercambiar trabajo con su entorno. Ya hemos adelantado que podemos pensar el trabajo mecánico como la forma de energía que es entregada a un sistema con cambio de los parámetros externos extensivos, (que conlleva implícitamente una modificación de la forma del sistema). En principio podría existir cambio de forma sin que aparentemente exista cambio de volumen (por ejemplo si se aplasta ligeramente un globo inflado) o, a la inversa, que cambie el volumen de un sistema sin cambio aparente en su presión (por ejemplo si retiramos un poco de aire de un globo inflado) pero en ambos casos los cambios no son nulos sino que, en todo caso, son infinitesimales. En la figura 1.19 ilustramos la situación mostrando un sistema físico arbitrario que, en este caso particular, se expande. Por definición, el trabajo infinitesimal que realiza el sistema viene dado por la cantidad dW

$$dW = \vec{F}(x) \cdot d\vec{x} \quad (1.77)$$



donde con $\vec{F}(x)$ denotamos la fuerza neta que ejerce el sistema contra el medio externo, y que en principio puede ser función de la posición.

En la discusión que acompaña a la expresión (1.6) vimos que la presión es una fuerza por unidad de superficie, de manera tal que si denotamos con P_{INT} a la presión interna del sistema podemos reemplazar en la expresión (1.77) y escribir

$$dW = P_{INT} d\vec{S} \cdot d\vec{x} \quad (1.78)$$

Fig. 1.19: se muestra un sistema físico en expansión contra la presión que ejerce el medio externo. Cada vez que el sistema se expande una cantidad dx el volumen aumenta en una cantidad $V = \int dx \cdot dS$ (la parte en color más oscuro).

Ahora bien, la expansión $d\vec{x}$ ocurre en un sentido paralelo a la normal al elemento de superficie $d\vec{S}$, de manera tal que el producto escalar que figura en la ecuación (1.78) resulta en un elemento diferencial de volumen

$$dV = d\vec{S} \cdot d\vec{x} \quad (1.79)$$

y la expresión (1.77) se reduce a la forma

$$dW = P_{INT} d\mathcal{V} \quad (1.80)$$

Si la transformación es suficientemente lenta como para permitir al sistema equilibrar su presión con la del entorno[†], el subíndice es irrelevante porque la presión interna queda siempre bien definida. Si de aquí en adelante convenimos en trabajar con este tipo de transformaciones, que consisten en una cadena de evoluciones que dejan al sistema en sucesivos estados de equilibrio en los que las variables de estado quedan siempre definidas, y a las que se denomina *transformaciones reversibles*, concluimos que el trabajo realizado por el sistema entre un estado con volumen \mathcal{V}_A y otro estado con volumen \mathcal{V}_B vale

$$W_{AB} = \int_{\mathcal{V}_A}^{\mathcal{V}_B} P(\mathcal{V}) d\mathcal{V} \quad (1.81)$$

donde hemos indicado explícitamente que la presión puede ser función del volumen. Un ejemplo inmediato de sistemas en los que la presión es función del volumen son los gases ideales (ecuación (1.6)).

Obsérvese un detalle de importancia central: si el sistema se expande contra las fuerzas que ejerce el medio externo el diferencial de volumen es positivo y, dado que la presión es una cantidad definida positiva, el diferencial de trabajo también será positivo. En consecuencia, el trabajo de un sistema es positivo cuando el sistema se expande, esto es, cuando entrega trabajo al entorno. Similarmente a como hicimos en la sección 1.7 podemos sintetizar esta conclusión como sigue

- *el trabajo intercambiado por un sistema es positivo cuando el sistema se expande, es decir, cuando entrega trabajo a su entorno.*
- *el trabajo intercambiado por un sistema es negativo cuando el sistema se comprime, es decir, cuando recibe trabajo de su entorno.*

Por lo demás, la expresión (1.81) es absolutamente general y aplicada a los gases ideales es particularmente sencilla porque la ecuación de estado de un gas ideal lo es. A modo de ejemplo habremos a analizar algunos casos particulares de transformaciones

[†] La presión del entorno no es necesariamente la presión externa. En un globo inflado, por ejemplo, se trata de la presión externa más la presión que ejerce la membrana de goma (el globo).

reversibles en gases ideales. Tengamos presente que en las transformaciones reversibles el estado del sistema está siempre bien definido porque las variables tienen valores bien definidos (son puntos en el espacio de fases, véase la sección 1.2), de manera tal que las transformaciones reversibles siempre pueden graficarse. Más aún, si se conoce el gráfico de una transformación cualquiera de un sistema cualquiera es porque esa transformación es reversible.

Para pensarlo al revés, imaginemos que dentro de un recipiente cerrado en una de sus caras con un pistón móvil se encuentra un fluido. Movemos violentamente el pistón (o hacemos explotar una bomba dentro del recipiente, tanto da) y, al cabo de un tiempo, el sistema regresa a algún estado de equilibrio. Observe bien, el sistema parte de un estado de equilibrio y arriba a un estado de equilibrio, posiblemente distinto del primero, pero en el medio, durante el intercambio violento de energía y en los instantes posteriores, no tenemos información acerca de la forma en que evolucionó el sistema porque es imposible medir con precisión sus variables de estado. Esta es una *transformación irreversible*.

En general, los procesos irreversibles son los que se producen en un determinado sentido de manera *espontánea*. En este tipo de procesos, naturalmente, el sistema no está en equilibrio con el entorno y tiende a evolucionar de manera espontánea buscando un estado de equilibrio compatible.

Que una transformación sea irreversible no es ni malo ni bueno, es sólo una característica. Por ejemplo, los procesos naturales que permiten la evolución de un ser vivo son procesos irreversibles, por eso, aunque nos empeñemos en lo contrario, cada día que pasa envejecemos. Cuando usted viaja en auto, por decir algo, el motor lleva a cabo una serie de transformaciones de gases en los cilindros. Para que esos procesos fueran reversibles deberían realizarse tan lentamente que un viaje de algunas pocas cuadras podría llevarle años. Aun a costa de una pérdida de eficiencia, es preferible permitir que esos procesos sean irreversibles y, ya que envejecer es irremediable, no hacerlo esperando que el auto se mueva.

1.11.1 – Trabajo en una transformación a temperatura constante (transformación isotérmica) de un gas ideal

Los procesos reversibles son aquellos en los que el sistema permanece constantemente en equilibrio con el entorno. El camino del estado A al B se produce de forma infinitamente lenta, precisamente para permitir el acomodamiento de las variables de estado al nuevo estado de equilibrio. Modificando ligeramente las condiciones es posible revertir el proceso y regresar por el mismo camino de B al A. Dado que son todos puntos de equilibrio, siempre es posible ubicarlos en un gráfico de configuración. Luego, si un proceso es reversible es posible graficarlo, y si está graficado es reversible.

En la figura 1.20 graficamos dos transformaciones isotérmicas (o isothermas), correspondientes a dos temperaturas T_1 y $T_2 > T_1$. La expresión de la primera isoterma es $P = nRT_1 / \mathcal{V}$ en tanto que la de la segunda es $P = nRT_2 / \mathcal{V}$. Es muy fácil ver que las

dos curvas tienen igual valor de presión para diferentes valores de volumen, de manera tal que, independientemente de los valores de T_1 y T_2 , las isothermas nunca se cortan.

Teniendo en cuenta que en una transformación isotérmica la temperatura T es constante, si denotamos por $W_{ISOT,AB}$ el trabajo entre dos estados A y B (o de volúmenes V_A y V_B , respectivamente) conectados por una isoterma, podemos escribir la expresión general (1.81) como

$$W_{ISOT,AB} = \int_{V_A}^{V_B} P(V) dV = \int_{V_A}^{V_B} nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \quad (1.82)$$

Obsérvese la expresión (1.82): si el volumen V_B es mayor que el volumen V_A (esto es, si el sistema se expande) el trabajo realizado por el sistema es positivo porque el logaritmo de un número mayor que 1 es positivo, en un todo de acuerdo con nuestra aseveración debajo de la ecuación (1.81). En caso contrario, para $V_B < V_A$, el cociente de la expresión (1.82) es menor que 1 y, en consecuencia, dado que el logaritmo de un número menor que la unidad es negativo, resulta trabajo negativo, es decir, el sistema se comprime recibiendo trabajo del medio externo.

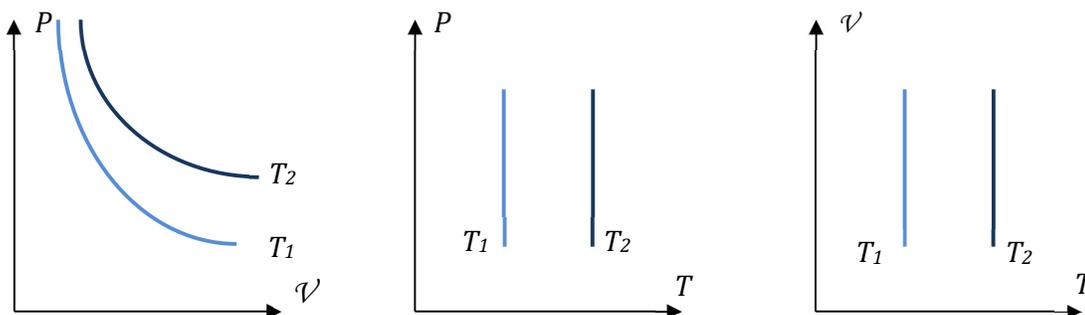


Fig. 1.20: gráficas de isothermas en los planos que definen las tres variables de estado de un gas ideal, para $T_2 > T_1$. Obsérvese que las gráficas en el plano PV son hipérbolas que nunca se intersecan.

1.11.2 – Trabajo en una transformación a presión constante (transformación isobárica) de un gas ideal

En la figura 1.21 graficamos dos transformaciones isobáricas (o isobaras), correspondientes a dos presiones P_1 y $P_2 > P_1$. La expresión de la primera isobara es $V = (nR / P_1) T$ en tanto que la de la segunda es $V = (nR / P_2) T$. Como se ve, en el plano VT se trata de dos rectas, de mayor pendiente la de menor presión, que se cortan en el origen (a $T = 0$, pero en la escala Kelvin).

Si la presión es constante, el trabajo $W_{ISOB,AB}$ entre dos estados A y B conectados por una isobara es inmediato a partir de la expresión (1.81)

$$W_{ISOB,AB} = \int_{\mathcal{V}_A}^{\mathcal{V}_B} P(\mathcal{V}) d\mathcal{V} = P \int_{\mathcal{V}_A}^{\mathcal{V}_B} d\mathcal{V} = P (V_B - \mathcal{V}_A) \quad (1.83)$$

Como antes, nótese que el trabajo será positivo en una expansión ($\mathcal{V}_B > \mathcal{V}_A$) y negativo en una compresión ($\mathcal{V}_B < \mathcal{V}_A$).

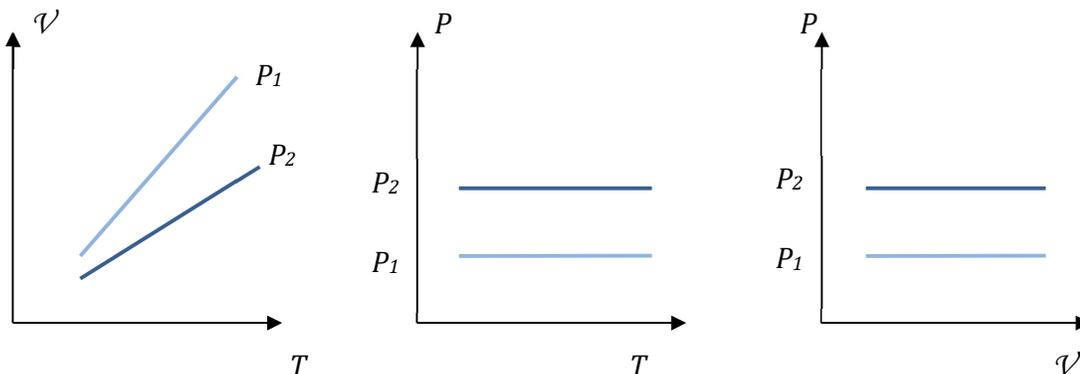


Fig. 1.21: gráficas de isobaras en los planos que definen las tres variables de estado de un gas ideal, para $P_2 > P_1$. Obsérvese que las gráficas en el plano $\mathcal{V}T$ son rectas que se intersecan en el origen.

1.11.3 – Trabajo en una transformación a volumen constante (transformación isocórica) de un gas ideal

De manera casi inmediata se desprende de la expresión (1.81) que en este tipo de transformaciones el gas no intercambia trabajo porque no hay variación de volumen, esto es, $W_{ISOC,AB} = 0$. En la figura 1.22 hemos graficado dos transformaciones isocóricas (o isocoras), correspondientes a dos volúmenes \mathcal{V}_1 y $\mathcal{V}_2 > \mathcal{V}_1$. La expresión de la primera isocora es $P = (n R / \mathcal{V}_1) T$ en tanto que la de la segunda es $P = (n R / \mathcal{V}_2) T$. Como se ve, en el plano PT se trata de dos rectas, de mayor pendiente la de menor volumen que, como en el caso de las isobaras, se cortan en el origen.

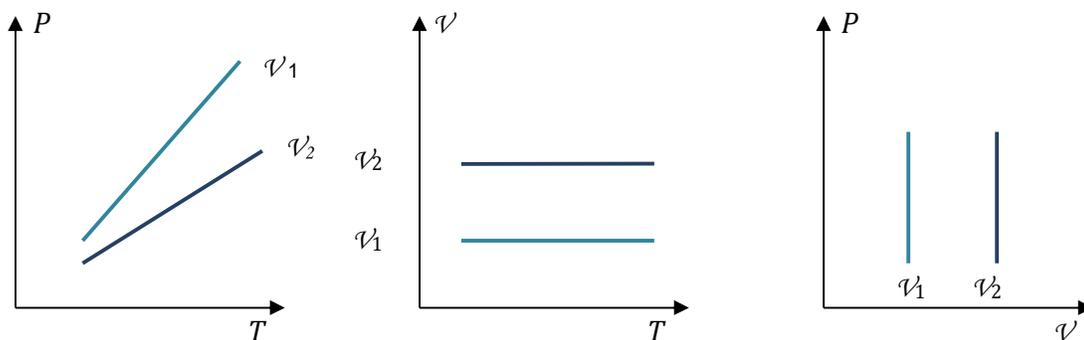


Fig. 1.22: gráficas de isocoras en los planos que definen las tres variables de estado de un gas ideal, para $\mathcal{V}_2 > \mathcal{V}_1$. Obsérvese que las gráficas en el plano PT son rectas que se intersecan en el origen.

1.12 – Primer principio de la Termodinámica

En busca de un estado de equilibrio todo sistema intercambia masa y/o energía con el medio ambiente. Producto de ese intercambio podría haber cambios en el estado energético del sistema, esto es, podría modificarse su energía interna (pensada como la suma de las energías de todas sus moléculas, antes y después de un eventual intercambio de masa). Como ya hemos mencionado en reiteradas oportunidades, la energía podrá intercambiarse como calor o como trabajo, de manera tal que, en principio, podemos asegurar que la energía interna de un sistema se modifica como producto de intercambios de calor y trabajo con el medio externo.

En esta línea de pensamiento, el balance energético es muy sencillo porque se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \text{variación de energía interna} &= \\ &= \text{cantidad de calor intercambiado} \vee \text{cantidad de trabajo intercambiado} \end{aligned}$$

donde el símbolo \vee indica que la variación de energía de un sistema en un proceso cualquiera se debe a ambos, al calor y al trabajo intercambiados. Y que sea positiva, negativa o nula depende, entonces, de los signos de calor y trabajo intercambiados, es decir, si se trata de calor y trabajo recibido o entregado, vistos desde el sistema desde el cual se analiza el intercambio. La matematización de esta forma es inmediata si tenemos en cuenta los signos de calor y trabajo discutidos en las secciones 1.6 y 1.11, respectivamente. Si denotamos por U la energía interna del sistema y pensamos en una transformación entre dos estados cualesquiera A y B , accesibles al sistema, una forma posible del balance es escribir

$$U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \quad (1.84)$$

donde $U_{AB} = U_B - U_A$ representa la diferencia de energía entre los estados final (B) e inicial (A), en tanto que Q_{AB} y W_{AB} representan el calor intercambiado por el sistema y el trabajo intercambiado por el sistema en la transformación AB (ambos definidos por un observador en el interior del sistema).

Esta forma de escribir el primer principio tiene que ver con el hecho de que una máquina térmica recibe calor para realizar trabajo, por eso el signo negativo queda bien definido, porque en el sistema de referencia de la máquina el calor recibido y el trabajo entregado tienen ambos signo positivo. Luego, si recibe más calor que el trabajo que entrega, la diferencia quedará como energía interna del sistema. Y parece evidente que si el sistema regresa al mismo estado del que partió, es decir, si $U_B = U_A$ (recuerde que la energía es una función de estado) la cantidad de calor intercambiado (incluyendo las eventuales pérdidas del sistema) debe ser igual al trabajo intercambiado.

Por lo demás, la notación AB indica cuál es el estado inicial y cuál el final (y que habremos de mantener en el resto de los capítulos). Finalmente, insistimos en que es incorrecto escribir formas como $Q_{AB} = Q_B - Q_A$ o $W_{AB} = W_B - W_A$ porque ni el calor ni el trabajo intercambiados son funciones de estado, no podemos decir que tal o cual valor de calor (o de trabajo) corresponden a un dado estado del sistema, lo más que podemos calcular es cuánto calor o cuánto trabajo intercambia el sistema al evolucionar de un estado a otro. Es decir, dado un estado cualquiera de un sistema cualquiera podemos decir cuánto vale la energía de ese estado pero es un error conceptual serio pretender que tal estado contiene tanto calor o tanto trabajo.

Esta formulación sencilla de las formas de intercambio energético en toda interacción de un sistema es más que un simple balance, es un principio general que define la energía a través de las maneras en que se manifiesta y que se conoce como primer principio de la Termodinámica.

Debe prestarse especial atención a que en ningún momento estamos postulando que el sistema *siempre* recibe calor y *siempre* entrega trabajo. Estamos diciendo que si en la transformación AB el sistema recibe más calor que el trabajo que entrega, la energía restante queda en forma de energía interna. Si por el contrario el sistema recibe menos calor que el trabajo que entrega, ese trabajo sólo puede realizarlo a expensas de su energía interna que, por supuesto, decrece. Es fácil ver que todas las combinaciones posibles quedan incluidas en la expresión (1.84), que por un lado define y por el otro resume las formas y propiedades de la energía frente a intercambios con el entorno.

Es muy importante reiterar también que los signos de trabajo y calor están definidos por un observador dentro del sistema, esto es, si pensamos en una máquina térmica nuestro observador usa como sistema de referencia el interior de la máquina. De esta manera, los signos asignados son los que corresponden al sistema y no al entorno. Pero debe tenerse en cuenta que un observador en el entorno y otro en el sistema asignarían iguales signos a las formas intercambiadas. Por ejemplo, si una máquina absorbe calor es porque el entorno lo cede. Esto significa que para los dos observadores el calor intercambiado es positivo en el sistema de referencia de la máquina, y es negativo en el sistema de referencia del entorno.

En los ejemplos que siguen ponemos de manifiesto estos conceptos.

Los signos del calor y del trabajo intercambiados dependen del sistema desde el cual se observe el intercambio. Pero si por ejemplo un dado sistema A realiza trabajo sobre otro sistema B, para sendos observadores en cada uno de los sistemas, el trabajo en el sistema A será positivo (porque se expande) y en el sistema B será negativo (porque se comprime).

Ejemplo 1.7: Pensemos en la transformación reversible $ABCD$ de la figura 1.23, que realizan dos moles de un gas ideal monoatómico. Calculemos el trabajo realizado, el calor intercambiado y la variación de energía en cada una de las etapas, que consiste en las isobaras AB y CD , respectivamente, y la isocora BC .

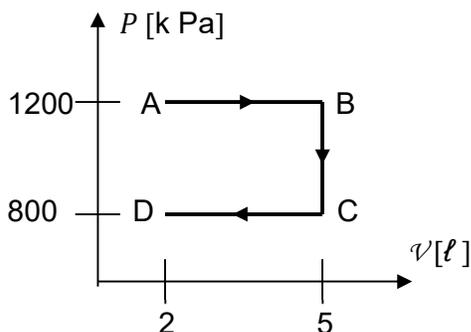


Fig. 1.23: transformación reversible $ABCD$ del gas ideal del ejemplo 1.7.

Ante todo, notemos que la transformación tiene un sentido, es decir, la evolución del sistema entre los diferentes estados es una en particular. Para resaltarlo hemos indicado el sentido de la evolución con flechas. El gas evoluciona del estado A al estado B , luego al C y finalmente al D , no lo hace de otra manera, por ejemplo al revés (que sería la transformación $DCBA$) ni por otro camino (por ejemplo el AD).

En este caso es muy sencillo calcular las temperaturas de los estados A , B , C y D a partir de la expresión (1.16) para obtener

$$T_A = 144,3 \text{ K} \quad T_B = 360,8 \text{ K} \quad T_C = 240,5 \text{ K} \quad T_D = 96,2 \text{ K}$$

A partir de la expresión (1.83), el trabajo que el gas realiza en la dilatación AB vale

$$W_{AB} = P_A(v_B - v_A) = 1.200 \text{ kPa} \times 3 \text{ l} = 3.600 \text{ J} \tag{1.85}$$

que es positivo en virtud de tratarse de una expansión. Por su parte, el calor en la isobara AB puede calcularse a partir de la definición (1.27) teniendo en cuenta (1.32); como para un gas ideal monoatómico es $c_p = 5R/2$ resulta

$$Q_{AB} = n \frac{5R}{2} (T_B - T_A) = 9.000 \text{ J} \tag{1.86}$$

que es positivo porque $T_B > T_A$ (o sea que el gas recibe calor para poder expandirse). Luego, en la transformación isocórica BC la variación de energía interna del gas vale

$$U_{AB} = 9.000 \text{ J} - 3.600 \text{ J} = 5.400 \text{ J} \tag{1.87}$$

Obsérvese que en la transformación AB la energía interna del gas ha aumentado, sencillamente porque recibió más energía (en forma de calor) que la que empleó para comprimir el medio externo (entregando trabajo).

En la transformación BC (transformación isocórica) sabemos que el gas no intercambia trabajo (porque no hay variación de volumen, véase la sección 1.11.3) en tanto que a partir de la expresión (1.32) es fácil ver que, siendo $c_v = 3R/2$ para un gas ideal monoatómico, resulta

$$Q_{BC} = n \frac{3R}{2} (T_C - T_B) = -3.000,5 J \quad (1.88)$$

y la ecuación (1.84), con $W_{BC} = 0$, nos conduce de inmediato a

$$U_{BC} = Q_{BC} = -3.000,5 J \quad (1.89)$$

Obsérvese que la energía interna del gas ha decrecido. Esto se debe a que el sistema cedió calor para bajar su temperatura, de manera tal que la energía cinética de las moléculas también habrá de ser menor. Debemos apresurarnos a decir que no necesariamente la temperatura de un sistema decrece sólo cediendo calor. En las transformaciones adiabáticas (que discutiremos en el apartado 1.14) hay cambios de temperatura sin intercambio de calor.

La transformación isobárica CD es similar a la transformación AB , pero por un lado es inversa (se trata de una compresión) y por el otro los extremos son diferentes (y de hecho se encuentran a diferentes temperaturas). Por lo tanto, no es correcto esperar que los valores W_{CD} , Q_{CD} y U_{CD} sean iguales y contrarios a los calculados en las expresiones (1.85) – (1.89). De hecho, resultan

$$W_{CD} = P_C(\mathcal{V}_D - \mathcal{V}_C) = 800 \text{ kPa} \times (-3l) = -2.400 J \quad (1.90)$$

$$Q_{CD} = n \frac{5R}{2} (T_D - T_C) = -5.998,55 J \quad (1.91)$$

$$U_{CD} = -5.998,55 J - (-2.400 J) = -3.598,55 J \quad (1.92)$$

El signo negativo de la expresión (1.90) indica que el sistema está recibiendo trabajo del medio externo, en tanto que en las expresiones siguientes indican que el sistema cede calor y pierde energía interna (siempre vistos por un observador dentro del sistema). Obsérvese que la suma de los trabajos W_{AB} , W_{BC} y W_{CD} resulta en el trabajo total del sistema en la transformación completa $ABCD$; luego, sumando resulta

$$W_{ABCD} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = 1.200 J \quad (1.93)$$

Una observación que no por reiterada deja de ser importante: hemos anotado por ejemplo $U_{AB} = U_B - U_A$ como la diferencia de energía entre dos estados, y de hecho no habría dificultad alguna en definir uno de esos estados como referencia. Pero no podemos hacer lo mismo con el calor o con el trabajo porque ni el calor ni el trabajo son funciones de estado, y en consecuencia no tiene sentido definir valores de referencia.

Similarmente, operando los valores hallados para el calor intercambiado por el sistema se obtiene

$$Q_{ABCD} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = 0,85J \quad (1.94)$$

y, finalmente, la variación de la energía resulta

$$U_{ABCD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = -1.199,15J \quad (1.95)$$

Otra observación muy importante: el cambio de energía interna U_{ABCD} es equivalente al cambio $U_{AD} = U_D - U_A$ porque la energía es función de estado y, en consecuencia, es independiente del camino. A riesgo de ser excesivamente reiterativos, es importante recalcar que las otras dos cantidades involucradas en el primer principio, calor y trabajo, no tienen esta propiedad, su valor no es independiente del camino seguido. Para verlo, alcanza con notar que el trabajo entre A y D por la isocora, $W_{ISOC,AD}$ es nulo, en tanto que el trabajo para evolucionar entre los estados A y D por la secuencia $ABCD$ está dado por la expresión (1.93). En el próximo ejemplo ponemos de manifiesto estas ideas.

Ejemplo 1.8: En referencia al ejemplo anterior, calculemos los valores de trabajo, calor y energía interna intercambiados en la transformación AD , que supondremos reversible e isocórica, y luego en un ciclo $ABCD A$ cerrado con la isocora DA .

Sabemos que el trabajo intercambiado a través de una transformación isocórica entre los estados A y D es nulo. Luego, es $U_{AD} = Q_{AD}$ y a partir de los valores obtenidos en el ejemplo 7 resulta de manera inmediata

$$Q_{AD} = n \frac{3R}{2} (T_D - T_A) = -1.999,15 J \quad (1.96)$$

y, en consecuencia, ese es el valor de energía interna (en este caso perdida) por el sistema. Si comparamos con el valor (1.95) vemos que el valor de la variación de energía resulta idéntico que en el ejemplo anterior, de manera tal que parece evidente que la variación de energía interna de un sistema es independiente del camino que se elija para modificar su estado a condición que los estados inicial y final sean los mismos. Para decirlo de otra forma, la variación de la energía interna de un sistema es independiente de la forma en que evoluciona.

Todavía más, si en lugar de la transformación AD pensamos en la transformación DA lo único que debemos hacer es cambiar es el signo del calor intercambiado (porque en este caso se trata de los mismos estados extremos pero ligados a través de un proceso inverso). En tal caso, la variación de energía interna en el ciclo $ABCD A$ (obsérvese el cuidado que se pone en indicar que el proceso completo arranca y finaliza en el estado A) es nula.

Pero es muy importante notar que el calor intercambiado en el ciclo no es nulo y que tampoco son iguales las cantidades de calor intercambiadas entre los estados A y D según se elija la evolución $ABCD$ o la evolución AD . Lo mismo ocurre, por lógica, con la cantidad de trabajo intercambiado: ni es nulo en el ciclo completo ni es independiente de la evolución. De hecho, es fácil ver en este ejemplo que la cantidad de trabajo total intercambiado en el ciclo $ABCD$ es igual al área del ciclo en el plano $P\mathcal{V}$.

El trabajo en un ciclo es igual al área del ciclo en el plano $P\mathcal{V}$ (y sólo en ese plano).

- Si el ciclo se recorre en sentido horario el trabajo en el ciclo es positivo.
- Si el ciclo se recorre en sentido antihorario el trabajo total es negativo.

La cantidad (1.93) expresa el trabajo total en el ciclo porque el trabajo en la transformación DA es nulo, es decir, $W_{ABCD} = 1.200 J$, que coincide con el área del rectángulo que se forma en la figura 1.22 cerrando el ciclo con una isocora DA . Obsérvese de paso que de haber sido un ciclo inverso, es decir, el ciclo $ADCBA$, el trabajo hubiera sido negativo, de forma tal que, en general, podemos afirmar que en un ciclo el trabajo del sistema es igual al área del ciclo en el plano $P\mathcal{V}$, y que es positivo si se recorre en sentido horario y negativo si se recorre en sentido antihorario. Estas consideraciones, por su misma definición, sólo son válidas para el trabajo en un ciclo y no valen para el calor intercambiado en ese ciclo. Desde ya, la variación de energía interna en todo el ciclo sigue siendo nula, independientemente del plano en que se grafique la evolución o del sentido en que se recorra. En el siguiente párrafo formalizaremos estos conceptos.



Fig. 1.24: el gas del recipiente se calienta isobáricamente hasta duplicar su volumen.

Ejemplo 1.9: Un pistón móvil, de masa $M = 2kg$ y superficie $S = 0,08 m^2$, cierra un cilindro que contiene 4ℓ de un gas ideal monoatómico a $300K$ en equilibrio con el entorno. Sea $P_0 = 101.300 Pa$ la presión externa. Se calienta el gas hasta duplicar su volumen. Calculemos la cantidad de calor que se le ha suministrado al gas.

Antes de suministrarle calor, el gas se hallaba en equilibrio con el entorno. Esto significa que su presión debe igualar a la presión ambiente más la que ejerce el peso del pistón, esto es,

$$P = P_0 + \frac{Mg}{S} = \left(101.300 + \frac{20}{0,08}\right) Pa = 101.550 Pa \quad (1.97)$$

Al cabo del proceso la presión del gas no pudo haber cambiado porque no lo hicieron las condiciones externas, de manera tal que la presión debe ser la misma que al principio del proceso. Claramente se trata de una transformación isobárica, pero en este caso nadie garantiza que sea reversible. De hecho, la única manera en que podemos evaluar el trabajo realizado por el gas es computando el trabajo del medio externo. En efecto, obsérvese que el trabajo que realiza el gas no sólo comprime al entorno sino que además incrementa la energía potencial gravitatoria del pistón, esto es,

Las cantidades de trabajo y de calor intercambiados en un ciclo cerrado de área no nula en plano PV nunca pueden ser nulas, pero lo que sí es cierto es que la cantidad de calor intercambiado es idéntica, en valor y signo, al trabajo intercambiado en ese ciclo.

$$W = P\Delta\mathcal{V} + Mg\Delta y = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\Delta\mathcal{V} + Mg\Delta y \quad (1.98)$$

Por lo demás, parece inmediato que si el volumen se duplica, debe ser

$$\Delta\mathcal{V} = 4 \times 10^{-3} \text{m}^3 = S \Delta y = 0,08 \text{m}^2 \Delta y \rightarrow \Delta y = 5 \text{cm} \quad (1.99)$$

Reemplazando en la expresión (1.97) obtenemos $W = 407,2 \text{J}$. Ahora bien, que el sistema se expanda isobáricamente hasta duplicar su volumen es lo mismo que decir que duplica su temperatura, es decir, resulta $\Delta T = 300 \text{K}$.

El número de moles podemos evaluarlo a partir de las condiciones iniciales (recuérdese que la presión interna está dada por la ecuación (1.97)) como

$$n = \frac{P\mathcal{V}}{RT} = 0,16 \text{mol} \quad (1.100)$$

y dado que

$$U = nc_V\Delta T$$

resulta $U = 598,6 \text{J}$. Luego, de acuerdo al primer principio, la cantidad de calor que se le entregó al gas vale

$$Q = U + W = 1.005,8 \text{J} \quad (1.101)$$

1.13 – Algunos aspectos formales del primer principio

1.13.1 – El primer principio en forma diferencial

En el ejemplo 1.7 hemos adelantado que la variación de energía interna de un sistema es independiente del proceso que se elija para ir entre dos estados y que sólo depende de los estados inicial y final. Este resultado es absolutamente similar al que se encuentra cuando se estudian sistemas mecánicos en general: la variación de energía mecánica de un sistema, que es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas, sólo depende de los estados final e inicial pero no del camino recorrido. El trabajo de las fuerzas no conservativas, por el contrario, depende del camino. Hay, sí, una diferencia esencial: la energía mecánica de un sistema mecánico (energía cinética y energía potencial) son cantidades macroscópicas, la energía cinética de un bloque de mármol que se desplaza por una superficie horizontal rugosa es una cantidad macroscópica, a diferencia de la energía interna, que se halla asociada a cantidades microscópicas. El roce contra la superficie rugosa provoca cambios de energía cinética que se evalúan a partir del trabajo de la fuerza de rozamiento, la variación de energía interna tiene que ver con el calor que absorbe el cuerpo como producto del rozamiento.

En nuestro caso los que dependen del camino de evolución son el trabajo y el calor intercambiados entre el sistema y su entorno. Y de la misma manera que las fuerzas no conservativas realizan trabajo no nulo en un camino cerrado, también es no nulo el valor del calor y el trabajo intercambiados en un ciclo (el equivalente a un camino cerrado). Pero así como al regresar al estado inicial *la suma* de todos los trabajos de fuerzas no conservativas es nula, de la misma manera es nula la suma del calor y el trabajo intercambiados cuando el sistema retorna al estado inicial. Físicamente se dice que la energía interna es una función de estado y matemáticamente estas propiedades características de la energía interna, el calor y el trabajo se resumen diciendo que la primera cantidad es un diferencial exacto, en tanto que las últimas dos cantidades no lo son. Luego, el primer principio lo escribiremos como

La variación de energía interna U_{AB} entre dos estados A y B es independiente de la transformación y sólo depende de los estados final e inicial. Por el contrario, las cantidades de calor y trabajo intercambiados siempre dependen de la transformación y no son iguales para dos caminos diferentes entre los mismos estados inicial y final.

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (1.102)$$

para indicar explícitamente que $\oint dU = 0$, $\oint \delta Q \neq 0$, $\oint \delta W \neq 0$.[†] Aunque sin efectuar mayores comentarios, en las ecuaciones (1.26) y (1.27) ya habíamos usado esta notación para indicar cantidades infinitesimales de calor.

[†] Desde ya que no estamos pensando en un camino cerrado que involucre una misma transformación reversible recorrida en un dado sentido y en el inverso.

1.13.2 – Una forma general del primer principio

La expresión (1.102) es general en el sentido de que el trabajo W no está explicitado. En realidad, sabemos que hemos considerado sólo trabajo de origen mecánico, aunque la variación de energía interna podría deberse a otros factores tales como cambios en el número de partículas (que modifican la energía potencial) o trabajo de origen electromagnético (aspectos que discutiremos en la segunda parte del texto). Si designamos el trabajo mecánico a través de la expresión (1.77) podemos escribir en forma general

$$dU = \delta Q - P d\mathcal{V} + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \tag{1.103}$$

donde μ representa el potencial químico, N el número de partículas y $\vec{X} \cdot d\vec{L}$ se refiere al trabajo electromagnético (típicamente trabajo de polarización o de magnetización, aspectos que estudiaremos con algún detalle en los capítulos 6 y 8, respectivamente).

1.13.3 – Energía interna de un gas ideal

En la sección 1.3 introdujimos el concepto de gas ideal postulando que en este estado las colisiones entre moléculas son idealmente elásticas. Una colisión idealmente elástica conserva la energía, de manera tal que la energía interna de un gas ideal no puede cambiar durante las colisiones. Por lo demás, aseguramos que un gas ideal es un gas en el cual las colisiones son infrecuentes y que las moléculas interactúan entre sí sólo durante las colisiones, una manera elegante de decir que se trata de un gas muy diluido en el que no vale la pena considerar energía potencial alguna. Luego, parece evidente que la energía interna de un gas ideal se reduce a su energía cinética, y esta es función sólo de la temperatura. Formalicemos este argumento a través de la siguiente proposición

► **Proposición 1.1:** La energía interna específica $u = U/n$ (energía por cada mol) de un gas ideal es sólo función de su temperatura.

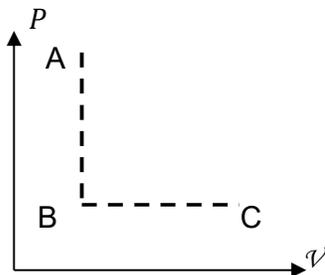


Fig. 1.25: los estados A y C se conectan por una isocora AB y una isobara BC

DEMOSTRACIÓN: Sean dos estados cualesquiera A y C. Como la variación de energía interna es independiente del camino ligamos los estados A y C por una isocora AB y una isobara BC. La variación de energía interna resulta

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} \tag{1.104}$$

Obsérvese que en la isocora AB la temperatura disminuye, de manera tal que $U_{AB} = n c_V (T_B - T_A)$ es negativa; la ecuación (1.88) se escribe como

$$\begin{aligned}
 U_{AC} &= n c_V (T_B - T_A) + [n c_P (T_C - T_B) - P_B dV] = \\
 &= n c_V (T_B - T_A) + [n c_P (T_C - T_B) - n R (T_C - T_B)] \quad (1.105)
 \end{aligned}$$

Reacomodando términos escribimos

$$U_{AC} = -n c_V T_A + n c_V T_B + n T_C (c_P - R) \quad (1.106)$$

La variación de la energía interna de un gas ideal en cualquier proceso entre dos estados A y B siempre se escribe como

$$U_{AB} = n c_V (T_B - T_A)$$

sin importar cuál sea el proceso.

La expresión (1.31), que relaciona los calores específicos molares a presión y volumen constantes con la constante R , asegura que el término entre paréntesis que multiplica al factor nT_B es nulo y que el paréntesis que multiplica al factor nT_C se reduce a c_V , de manera tal que, en síntesis, escribimos

$$U_{AC} = n c_V (T_C - T_A) = n c_V \Delta T \quad (1.107.a)$$

o, equivalentemente

$$u_{AC} = \frac{U_{AC}}{n} = c_V (T_C - T_A) = c_V \Delta T \quad (1.107.b)$$

con lo que resulta demostrada la proposición.

► **Corolario 1.1:** La variación de energía interna en todo gas ideal se expresa siempre por la ecuación (1.107), independientemente de cuál sea la evolución.

DEMOSTRACIÓN: dado que la variación de energía es independiente del camino de la evolución y los estados A, B y C son absolutamente generales, resulta la proposición y, para una evolución infinitesimal resulta

$$dU_{AC} = n c_V dT \quad (1.108)$$

Otra forma de pensar en este resultado es que siempre es posible ligar dos estados cualesquiera por una isobara y una isocora, de manera tal que el corolario se sostiene.

► **Corolario 1.2:** En toda transformación isotérmica la variación de energía interna es nula.

DEMOSTRACIÓN: se sigue de manera inmediata de la expresión (1.92), pero es importante notar que en una isoterma la variación de temperatura es nula pero no es nulo el calor intercambiado. De hecho, a partir del primer principio es inmediato que en todo proceso isotérmico reversible AB el calor resulta igual al trabajo intercambiado, esto es,

$$Q_{ISOT, AB} = W_{ISOT, AB} \quad (1.109)$$

1.14 – Procesos adiabáticos

Como ya se dijo, sobre una isoterma la variación de energía interna es nula (porque la temperatura es constante) pero no es nula la cantidad de calor que se intercambia en esa evolución. Que no haya variación de temperatura no implica que no haya intercambio de calor, todo lo contrario, pues de hecho debe haberlo para, precisamente, mantener la temperatura constante. También vale una aseveración inversa, en el sentido de que un proceso en el que no se intercambia calor no implica temperatura constante. En los procesos adiabáticos (esto es, sin intercambio de calor) la ley de Clapeyron (1.6) se modifica de una manera particular, que presentamos en la siguiente proposición

En un proceso adiabático no se intercambia calor, pero no debe confundirse con un proceso isotérmico. Precisamente, para mantener constante la temperatura, un gas debe intercambiar calor, de manera tal que no existe un proceso a la vez adiabático e isotérmico.

► **Proposición 1.2:** En todo proceso adiabático el producto $P\mathcal{V}^\gamma$ es constante, donde $\gamma = c_p/c_v$ se denomina índice *adiabático*.

DEMOSTRACIÓN: obsérvese ante todo que el índice adiabático es mayor que la unidad porque siempre es $c_p > c_v$. Por lo demás, para un gas ideal vale la forma diferencial

$$P d\mathcal{V} + \mathcal{V}dP = n R dT \quad (1.110)$$

que proviene de diferenciar ambos miembros de la ecuación de estado de un gas ideal. Ahora reescribamos la expresión (1.108) teniendo en cuenta que en un proceso adiabático es $dU_{ADIAB} = -\delta W_{ADIAB}$

$$dT = \frac{dU}{nc_v} = \frac{-\delta W_{ADIAB}}{nc_v} = \frac{-P d\mathcal{V}}{nc_v} \quad (1.111)$$

Reemplacemos ahora la expresión (1.111) en (1.110) para escribir

$$P d\mathcal{V} + \mathcal{V} dP = -nR \frac{P d\mathcal{V}}{nc_V} \quad (1.112)$$

Simplificando el miembro derecho y reagrupando términos resulta

$$P d\mathcal{V} \left(1 + \frac{R}{c_V}\right) + \mathcal{V} dP = 0 \quad (1.113)$$

Obsérvese el factor entre corchetes en el miembro izquierdo: es fácil ver que se trata del índice adiabático pues

$$1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = \frac{c_V + c_P - c_V}{c_V} = \frac{c_P}{c_V} = \gamma \quad (1.114)$$

Con la identidad (1.114) en mente es inmediato reducir la expresión (1.113) a una ecuación diferencial simple de la forma

$$\gamma \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = -\frac{dP}{P} \quad (1.115)$$

que se resuelve de manera sencilla integrando ambos miembros, con lo que se obtiene

$$\ln \mathcal{V}^\gamma = -\ln P + A_1 \quad (1.116)$$

donde A_1 es una constante de integración. Luego

$$\ln \mathcal{V}^\gamma + \ln P = \ln (P \mathcal{V}^\gamma) = A_1 \quad (1.117)$$

y, en consecuencia, dado que el logaritmo del producto $P\mathcal{V}^\gamma$ es constante, el producto mismo debe serlo, es decir, debe cumplirse

$$P \mathcal{V}^\gamma = \text{constante} \quad (1.118)$$

con lo que queda demostrada la proposición.

Obsérvese de paso que a partir de la ecuación de estado de un gas ideal es inmediata la forma que relaciona la temperatura y el volumen sobre una adiabática. En efecto, dado que $P\mathcal{V} = \lambda \times T$, donde λ es una constante, resulta de inmediato que en toda evolución adiabática se cumple la relación

$$T\mathcal{V}^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (1.119)$$

Para calcular el trabajo intercambiado por un gas ideal en un proceso adiabático alcanza con seguir el procedimiento general de la sección 1.11, integrando la expresión (1.81) entre dos estados arbitrarios A y B teniendo en cuenta la ecuación (1.118). Por lo

pronto, el producto (1.118) vale lo mismo en el estado A y en cualquier estado genérico conectado por la adiabática, esto es, vale la identidad general

$$P_A \mathcal{V}_A^\gamma = P \mathcal{V}^\gamma \quad (1.120)$$

de manera tal que la presión a lo largo de una adiabática se escribe como

$$P = \frac{P_A \mathcal{V}_A^\gamma}{\mathcal{V}^\gamma} \quad (1.121)$$

Luego, resulta

$$W_{ADIAB, AB} = \int_{\mathcal{V}_A}^{\mathcal{V}_B} \frac{P_A \mathcal{V}_A^\gamma}{\mathcal{V}^\gamma} d\mathcal{V} = P_A \mathcal{V}_A^\gamma \left[\frac{1}{1-\gamma} \mathcal{V}^{1-\gamma} \right]_{\mathcal{V}_A}^{\mathcal{V}_B} \quad (1.122)$$

Reordenando los factores que aparecen en el miembro derecho, se obtiene finalmente

$$W_{ADIAB, AB} = \frac{P_A \mathcal{V}_A}{1-\gamma} \left[\left(\frac{\mathcal{V}_B}{\mathcal{V}_A} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \quad (1.123)$$

Por supuesto, el primer principio nos asegura que siempre es posible, y en muchos casos puede resultar más sencillo, calcular la variación de energía interna entre los estados conectados por la adiabática e igualar luego a $-W_{ADIAB}$. En los siguientes ejemplos expondremos estas ideas.

Ejemplo 1.10: Un mol de gas ideal monoatómico ($c_p = 5R/2$, $c_v = 3R/2$, $\gamma = 5/3$) realiza la transformación $ABGDA$ de la figura 1.26, que consiste en la isoterma AB seguida por la transformación adiabática BG , la transformación isotérmica GD y finalmente la transformación adiabática DA . Supongamos que la temperatura de la transformación AB es $T = 800K$ y que en el estado A el gas ocupa un volumen de 30ℓ , en el estado B el gas ocupa un volumen de 60ℓ , en el estado G el gas ocupa un volumen de 100ℓ y en el estado D el gas ocupa un volumen de 50ℓ . Calculemos el calor y el trabajo intercambiados en todo el ciclo.

Observemos ante todo que la presión en el estado B queda inmediatamente establecida a partir de la ecuación de estado de un gas ideal. En efecto, reemplazando los valores conocidos en la expresión (1.6) obtenemos $P_B = 110.853,33 Pa$. El estado A está ligado al estado B a través de una isoterma, de manera tal que, dado que el volumen \mathcal{V}_A es la mitad del volumen \mathcal{V}_B la presión en el estado A debe ser el doble que la del estado B , esto es, debe ser $P_A = 221.706,67 Pa$.

El estado G se relaciona con el estado B a través de una adiabática, de manera tal que por directa aplicación de la ecuación (1.118) resulta

$$P_C = \frac{P_B \mathcal{V}_B^\gamma}{\mathcal{V}_C^\gamma} = 47.314,41 \text{ Pa} \quad (1.124)$$

La temperatura del estado G se calcula rápidamente, sea a través de la ecuación de estado de un gas ideal, sea a través de la aplicación de la expresión (1.119). Por cualquiera de los dos métodos de cálculo se obtiene $T_G = 569,09K$. La presión del estado D , cuyo volumen es $\mathcal{V}_D = 50\ell$, también se calcula de manera inmediata a través de la ecuación de estado (1.6) para obtener $P_D = 94.628,82 \text{ Pa}$.

Ahora bien, como en la transformación isoterma no hay variación de energía interna, el calor intercambiado es igual al trabajo realizado. Luego, a partir de la expresión (1.82) resulta

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_B \ln\left(\frac{\mathcal{V}_B}{\mathcal{V}_A}\right) = 4.610,26 \text{ J} \quad (1.125)$$

Obsérvese que, como ya hemos discutido, para mantener la temperatura constante es necesario intercambiar calor, es decir, el calor intercambiado en una transformación isotérmica no puede ser nulo. Lo que también es cierto es que el calor intercambiado en la transformación adiabática BG es nulo, eso por definición.

Toda la argumentación se repite tanto para la transformación isotérmica GD como para la adiabática DA . Es fácil corroborar que se obtiene

$$Q_{GD} = W_{GD} = nRT_G \ln\left(\frac{\mathcal{V}_D}{\mathcal{V}_G}\right) = -3.279,58 \text{ J} \quad (1.126)$$

Luego, el calor intercambiado en el ciclo vale

$$Q_{ABGDA} = Q_{AB} + Q_{BG} + Q_{GD} + Q_{DA} = 1.330,68 \text{ J} \quad (1.127)$$

¿Tendría que sorprendernos que el calor total intercambiado en el ciclo sea positivo? No, porque es un ciclo positivo (en sentido horario) en el plano $P\mathcal{V}$, de manera tal que el sistema realiza trabajo sobre el medio externo (entrega trabajo). Y como la variación de energía interna en el ciclo completo es nulo (recordemos que la energía interna es una función de estado) ese trabajo sólo puede hacerlo recibiendo calor, por eso el calor intercambiado es positivo.

A partir del primer principio parece evidente que el trabajo total realizado por el sistema en el ciclo vale exactamente $1.330,68 \text{ J}$. Con todo, sea a partir de la expresión (1.117) o teniendo en cuenta que en una transformación adiabática es $-W_{ADIAB} = U = nC_V\Delta T$, es fácil corroborar que el trabajo entregado por el sistema en la transformación BG es de $2.879,65 \text{ J}$, de manera tal que el trabajo de expansión resulta ser

$$W_{EXP} = W_{ABG} = W_{AB} + W_{BG} = 4.610,26 \text{ J} + 2.879,65 \text{ J} = 7.489,91 \text{ J} \quad (1.128)$$

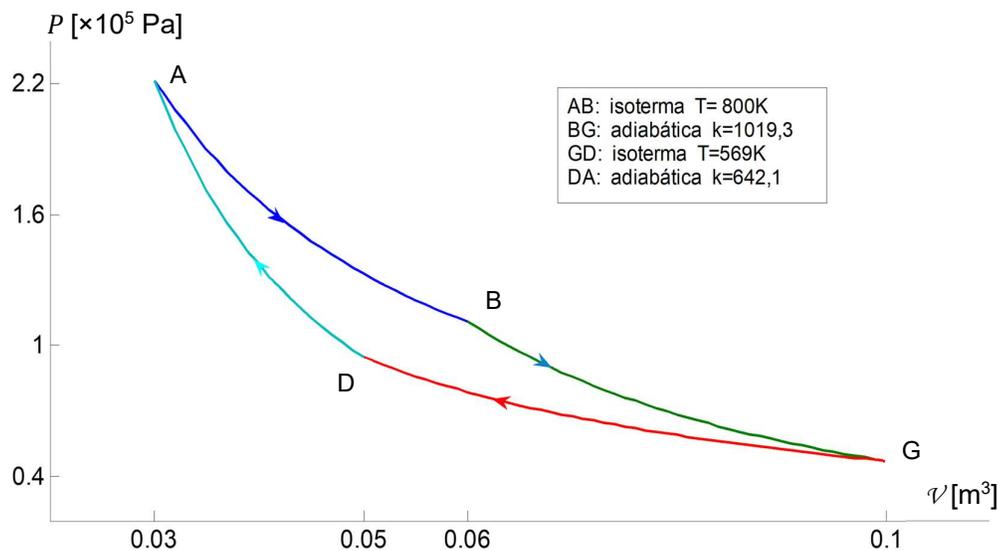


Fig. 1.26: ciclo ABGDA del ejemplo 1.9. En el estado A el gas ocupa un volumen de 30ℓ ($0,03 \text{ m}^3$) de manera tal que, al estar a igual temperatura que en el estado B, su presión es el doble que la del estado B.

En la compresión adiabática DA el trabajo del medio externo sobre el sistema se calcula de manera idéntica a como se calculó para la expansión BG . Sin embargo no es necesario hacer cálculo alguno, porque las temperaturas extremas son las mismas, de manera tal que la variación de energía interna es la misma y de signo contrario y, luego, debe resultar $W_{DA} = -W_{BG}$.

Por otro lado, obsérvese de nuevo que el calor intercambiado por el sistema entre dos estados no es independiente de las transformaciones realizadas. De hecho, es inmediato a partir de las expresiones (1.125) – (1.127) que el calor Q_{ABG} no es igual al calor Q_{ADG} . Sin embargo, y a modo de curiosidad, obsérvese que si bien estas cantidades no son iguales sí lo son las cantidades Q_{ABG}/T_{AB} y $|Q_{GDA}|/T_{GD}$ donde hemos denotado con T_{AB} la temperatura de la isoterma AB y con T_{GD} la temperatura de la transformación isotérmica GD . Podemos preguntarnos si esta situación es simplemente una curiosidad o si se trata de una característica general, en cuyo caso estaríamos frente a una nueva variable de estado porque su suma en un ciclo cerrado sería nula. En las próximas secciones profundizaremos estas ideas.

Parte 4: Segundo principio de la Termodinámica

En el final de la sección anterior hemos resaltado el hecho de que en el ciclo reversible de la figura 1.26 las cantidades Q_{ABG} / T_{AB} y $|Q_{GDA}| / T_{GD}$ son iguales. Y de hecho la suma $Q_{ABG} / T_{AB} + Q_{GDA} / T_{GD}$ es nula. En principio, debería ser esta una propiedad de todo ciclo reversible porque, aparte de sus características propias, nada hay en ese ciclo que lo distinga de los demás, de manera tal que sería esperable que esta propiedad se repitiera en todos y cada uno de los ciclos reversibles imaginables. Posiblemente la suma no sería tan sencilla, sobre todo teniendo en cuenta que el ciclo de la figura 1.26 opera entre sólo dos fuentes térmicas (toma calor de una única fuente - a temperatura T_{AB} - y se expande, cede calor a una única fuente - a temperatura T_{GD} - y se comprime). Pero si estamos en lo cierto, deberíamos poder demostrar que si bien las cantidades de calor intercambiadas en los procesos involucrados en cualquier transformación dependen de los procesos en sí mismos (porque el calor no es función de estado) la suma de las cantidades Q/T a lo largo de todo un ciclo deben ser independientes de las transformaciones.

Para profundizar en esta propiedad, bien podríamos comenzar analizando fenomenológicamente procesos cíclicos (como el de la figura 1.26) o bien podríamos partir de la suma $Q_{ABG} / T_{AB} + Q_{GDA} / T_{GD}$ y extenderla analíticamente a todo tipo de situación general. Desde ya que deberíamos llegar a las mismas conclusiones. Y todavía más, como partimos de lugares diferentes es razonable inferir que debemos encontrar algún principio de equivalencia que unifique los dos razonamientos.

Prestemos atención al ciclo de la figura 1.26: el resultado neto es la obtención de trabajo después de haber recibido calor (y de haber cedido una parte de ese calor a una fuente a menor temperatura). Claramente la cantidad de trabajo total en el ciclo es igual a la cantidad de calor total en el ciclo, pero el trabajo neto que el sistema realiza sobre el entorno (aproximadamente $1.331 J$) no es igual a la cantidad de calor que recibe del entorno (aproximadamente $4.610 J$). Este resultado es típico de las máquinas térmicas, que son sistemas de funcionamiento periódico que transforman calor en trabajo. Analicemos un poco más en detalle estos resultados.

1.15 – Máquinas cíclicas y segundo principio de la Termodinámica

Una máquina térmica simple es básicamente un dispositivo que a partir de las modificaciones de un fluido intercambia energía entre dos focos a diferente temperatura, a las que se denomina fuente caliente a la de mayor temperatura, y fuente fría a la de temperatura menor. Son sistemas cíclicos, como los motores eléctricos por ejemplo, pero en tanto estos últimos transforman el trabajo que se les entrega (de origen eléctrico) en otro tipo de trabajo (mecánico), las máquinas térmicas transforman en trabajo mecánico el calor que reciben (máquina térmica), o bien reciben trabajo para extraer calor (máquina frigorífica). Los esquemas simbólicos de estas máquinas cíclicas elementales se muestran en la figura 1.27.

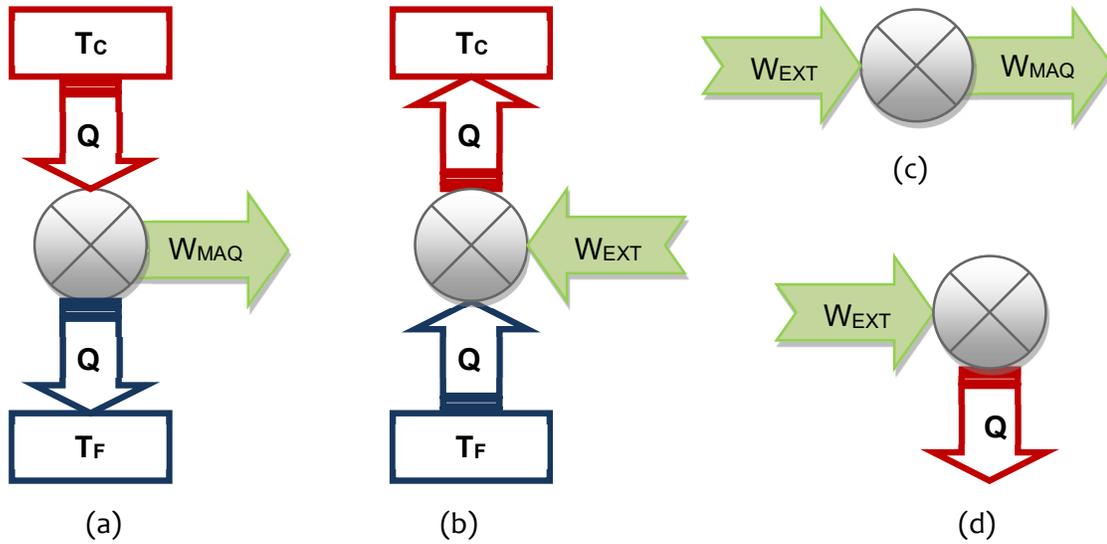


Fig. 1.27: en la parte (a) se muestra una máquina cíclica calorífica, de la que se extrae trabajo tomando calor de un foco caliente. En (b) se muestra una máquina frigorífica, que toma trabajo del medio externo para pasar calor de un foco frío (el refrigerador) a un foco caliente (el medio externo). El panel (c) corresponde a un motor eléctrico ideal, en tanto que la figura (d) representa una estufa eléctrica. Todos estos sistemas funcionan en base al intercambio de calor y trabajo con el entorno.

Desde un punto de vista absolutamente práctico, se define el rendimiento como el cociente entre lo que se obtiene sobre lo que se invierte. Por ejemplo, en el caso del motor ideal de la figura 1.26 (c), o de la estufa 1.25 (d), el rendimiento es del 100% porque todo el trabajo invertido se reobtiene transformado en otro tipo de energía a la salida. En el caso de una máquina calorífica la inversión está representada por el calor tomado del foco

Una máquina térmica, básicamente, es un dispositivo que transforma en trabajo el aporte calorífico de una fuente. Una máquina frigorífica es aquella que extrae calor de un foco a partir del aporte mecánico de un motor externo.

caliente y la ganancia por el trabajo que es capaz de entregar la máquina; el cociente entre estas dos cantidades se define como *rendimiento*, η . En una máquina frigorífica, en cambio, parece razonable definir la inversión como el trabajo que se entrega a la máquina y como ganancia el calor extraído del foco frío; al cociente entre estas cantidades se lo define como *eficiencia*, e .

En términos de los esquemas de la figura 1.27, si llamamos Q_c al calor intercambiado por la fuente caliente, Q_f al calor intercambiado por la fuente fría, y denotamos por W_{SIST} y W_{EXT} el trabajo entregado por el sistema y el entregado por el medio exterior, respectivamente, nuestras definiciones se transforman en las expresiones

$$\eta = \frac{W_{SIST, CICLO}}{Q_c} \tag{1.129}$$

$$e = \frac{Q_F}{W_{EXT, CICLO}} \quad (1.130)$$

Las expresiones (1.129) y (1.130) son absolutamente formales, y en realidad no pasan de una definición con fuerte impronta comercial. Si usted invierte en un negocio establece la ganancia (el rendimiento) de la misma forma: cuánto gana medido respecto de lo que ha invertido. Puede ganar un 10%, un 150% o un 1.000%, tanto da. La Naturaleza, en cambio, no realiza inversiones. O en todo caso las hace mal. De hecho, a partir del primer principio resulta que el rendimiento máximo de una máquina calorífica, por ejemplo, es menor que la unidad, esto es, se saca menos que lo que se invierte.

En efecto, al cabo de un ciclo resulta $U_{CICLO} = 0$ y, en consecuencia,

$$Q_C + Q_F - W_{SIST} = 0 \equiv Q_C - |Q_F| - W_{SIST} = 0$$

$$\Rightarrow W_{SIST} \leq Q_C \quad (1.131)$$

y

$$W_{SIST} = Q_C \Leftrightarrow Q_F = 0 \quad (1.132)$$

de manera tal que el rendimiento de una máquina calorífica a lo sumo es uno (o del 100%) y eso siempre y cuando no ceda calor a la fuente fría.

Esto significa que una tal máquina sería capaz de transformar todo el calor absorbido en trabajo mecánico. Sin embargo, parece imposible cerrar un ciclo térmico sin una transformación en la que se ceda calor. O sea, parece imposible concebir una máquina térmica que transforme todo el calor que absorbe en trabajo (aunque la máquina de la figura 1.27 (d) nos dice que no parece haber problemas en transformar todo el trabajo en calor).

Ahora bien, si obtener un rendimiento del 100% no es posible ¿cuál es el límite, el valor máximo? ¿Depende de la Física involucrada en los procesos o es una limitación mecánica? Volvamos a nuestra máquina calorífica de la figura 1.26, que es una máquina que trabaja entre sólo dos fuentes, y que se conoce como máquina de Carnot (porque desarrolla un ciclo conocido, precisamente, como ciclo de Carnot). Para poner la notación en términos de la nomenclatura que hemos introducido a propósito de las máquinas cíclicas, llamemos T_C a la temperatura de la isoterma AB y T_F a la temperatura de la isoterma GD de ese ejemplo.

Si queremos evaluar su rendimiento (al que denominaremos η_C) debemos calcular el trabajo neto realizado por el sistema en el ciclo completo, que se simplifica porque al ser $U_{CICLO} = 0$ resulta $W_{CICLO} = Q_{CICLO}$, esto es,

La manera de definir la eficiencia y el rendimiento de las máquinas térmicas en términos más bien economicistas no tendría que sorprendernos. El desarrollo de la máquina de vapor generó, y de hecho impulsó, la primera Revolución Industrial, que transformó la economía basada en el trabajo manual en otra sustentada en la manufactura en serie. Para esa época se discutían las implicaciones mercantilistas de la reciente teoría económica de Adam Smith, que ilustra acerca de los procesos de acumulación y de riqueza, de trabajo y de ganancia, de manera tal que todo el ambiente tecnológico-industrial se tiñó de esas ideas y, en consecuencia, de su lenguaje específico.

$$W_{CICLO} = Q_{AB} + Q_{GD} = nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_G}\right) \quad (1.133)$$

La expresión (1.133) puede simplificarse notablemente notando que los estados B y G y los estados D y A están ligados por transformaciones adiabáticas, de manera tal que sobre ellos vale el corolario (1.119) $T\mathcal{V}^{\gamma-1} = cte$, de manera tal que debe ser

$$T_C \mathcal{V}_B^{\gamma-1} = T_F \mathcal{V}_G^{\gamma-1} \quad (1.134)$$

$$T_C \mathcal{V}_A^{\gamma-1} = T_F \mathcal{V}_D^{\gamma-1} \quad (1.135)$$

Dividiendo las ecuaciones (1.134) y (1.135) entre sí obtenemos de inmediato la relación

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_G}{V_D} \quad (1.136)$$

que transforma automáticamente la igualdad (1.133) en

$$W_{CICLO} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) (T_C - T_F) \quad (1.137)$$

Ahora bien, el sistema toma calor Q_{AB} de la fuente caliente en la etapa expansiva, de manera tal que el rendimiento resulta de inmediato

$$\eta_C = \frac{W_{CICLO}}{Q_{AB}} = \frac{T_C - T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (1.138)$$

y en vista de nuestra aseveración (1.132) podemos postular la siguiente proposición general

► **Proposición 1.3:** Toda máquina cíclica que opere entre dos, y sólo dos, fuentes caloríficas tiene rendimiento $\eta \leq 1$, y es $\eta = 1$ si, y sólo si, el foco frío se encuentra en el cero absoluto.

La máquina de Carnot trabaja entre sólo dos fuentes térmicas. De hecho, es la única máquina térmica simple con esta característica.

Es importante notar que la proposición 1.3 impone un importantísimo vínculo a todo cálculo que podamos efectuar referido a máquinas térmicas. De hecho, la máquina de Carnot es por hipótesis reversible (de otra manera el ciclo no podría graficarse) mientras que toda máquina real necesita ser irreversible, porque la reversibilidad de un ciclo implica dar tiempo a las

diferentes variables de estado para recomodarse y alcanzar el nuevo equilibrio que se impone después de provocar una ligerísima perturbación en el sistema. En un ciclo completo esos tiempos podrían llegar a ser tan grandes que transformarían a la máquina perfecta en un objeto inútil. Para decirlo en términos más concretos, ninguna máquina ideal puede funcionar en el mundo real, de manera tal que desde ya podemos enunciar la siguiente proposición

► *Proposición 1.4:* Toda máquina cíclica que opere entre dos y sólo dos fuentes caloríficas tiene rendimiento menor que la máquina de Carnot ideal.

COROLARIO: En toda máquina que opere entre dos y sólo dos fuentes de calor, la relación entre las temperaturas de las fuentes fría T_F y caliente $T_C > T_F$ es menor o igual a la relación entre los calores cedido Q_F y absorbido Q_C .

DEMOSTRACIÓN: el resultado es inmediato a partir de las expresiones (1.131) y (1.132). Obsérvese que a partir del primer principio siempre puede escribirse

$$\eta = \frac{W_{SIST}}{Q_C} = \frac{Q_C - |Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} \quad (1.139)$$

y como el rendimiento de la máquina real es menor que el de la ideal, comparando las expresiones (1.138) y (1.139) resulta

$$1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C} \equiv \frac{|Q_F|}{Q_C} \geq \frac{T_F}{T_C} \equiv \frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{Q_C}{T_C} \geq 0 \quad (1.140)$$

y la igualdad se verifica si, y sólo si, la máquina es ideal (esto es, reversible, como en el caso de la máquina de Carnot de la figura 1.25). Por lo pronto, aparece un resultado novedoso, y es que la suma Q/T sobre todos los procesos de un ciclo irreversible no es cero sino que *debe* ser mayor que cero, no es una elección, de manera tal que el rendimiento menor a la unidad de una máquina calorífica no es un problema de la mecánica del sistema sino que se trata de una limitación natural.

Posiblemente los siguientes ejemplos arrojen algo más de luz sobre esta discusión.

Ejemplo 1.11: Sean las máquinas cíclicas de la figura 1.28. Analicemos si son posibles.

Hemos anotado los valores de las cantidades de calor intercambiadas con las fuentes y el trabajo que se extrae de cada máquina. La máquina (a) claramente viola el primer principio, pues no conserva la energía desde el momento que $W_{SIST} > Q_C - |Q_F|$.

La máquina (b) tampoco es posible, porque aunque no viola el primer principio (obsérvese que se cumple $W_{SIST} = Q_C - |Q_F|$) tiene un rendimiento mayor que una máquina de Carnot

reversible operando entre esas dos fuentes. En efecto, si denotamos con η_{CAR} el rendimiento de una máquina ideal de Carnot resulta

$$\eta_b = \frac{W_{SIST}}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} = 0,66 > \eta_{CAR} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,43 \quad (1.141)$$

La máquina (c) es realizable porque no sólo no viola el primer principio sino que además tiene rendimiento menor que una máquina de Carnot operando entre los dos mismos focos caloríficos. Es fácil ver que resultan $\eta_{CAR} = 0,6$ en tanto que el rendimiento η de la máquina (c) vale 0,25. Por lo demás, la máquina (c) es irreversible, porque su rendimiento es menor que el de una máquina reversible.

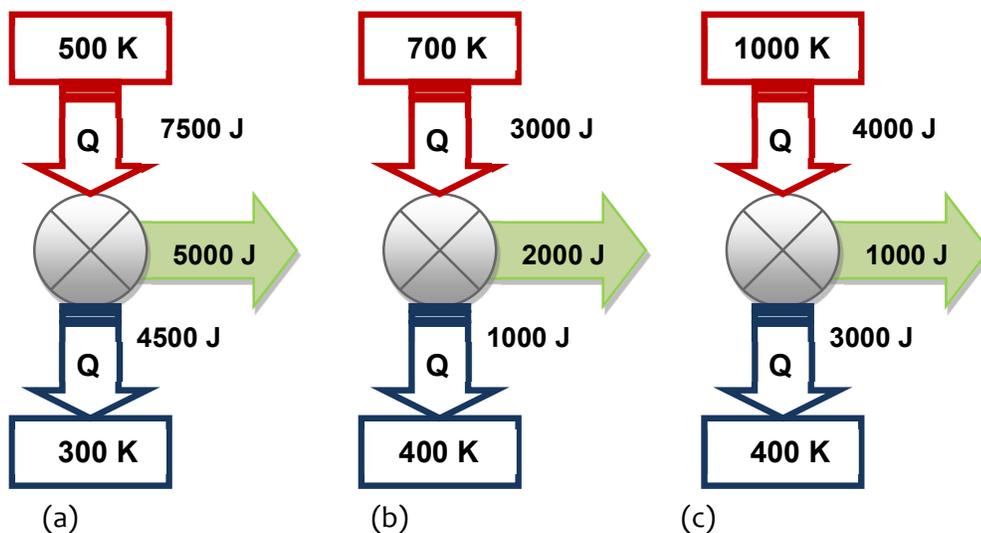


Fig. 1.28: tres máquinas caloríficas, de las cuales las dos primeras son irrealizables la máquina (a) viola el primer principio y la máquina (b) tiene rendimiento mayor que una máquina ideal. La máquina (c) es real e irreversible.

Ejemplo 1.12: Supongamos que un mol de gas ideal monoatómico ($c_p = 5R/2$, $c_v = 3R/2$, $\gamma = 5/3$) realiza la transformación $ABGDA$ de la figura 1.29, que consiste en la isoterma AB seguida por la adiabática BG , la isobara GD y finalmente la isocora DA . Supongamos que en el estado B el gas ocupa un volumen de 30ℓ a presión atmosférica. Calculemos el rendimiento de este ciclo.

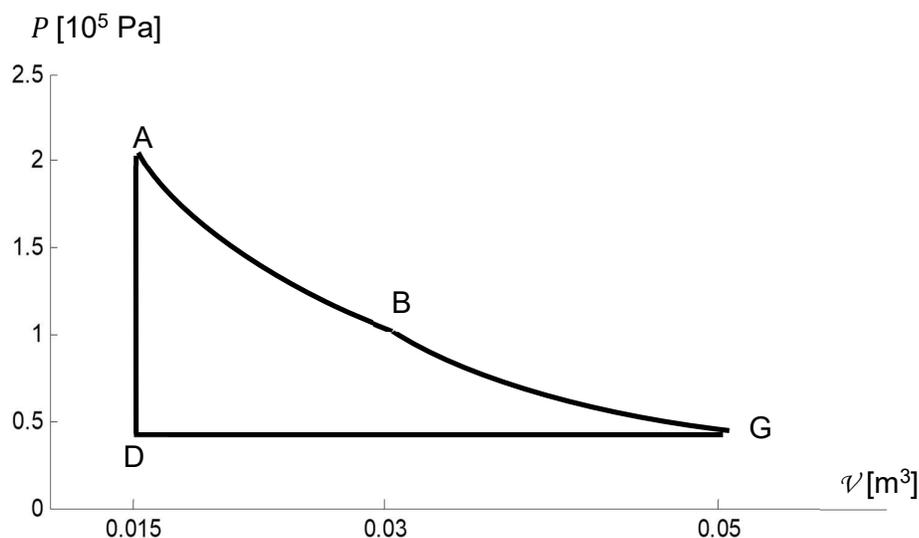


Fig. 1.29: ciclo ABGDA del ejemplo 1.11. En el estado B el gas está a una presión de 1 atm (101.325 Pa) y ocupa un volumen de 30 l (0,03 m³).

Es casi evidente que la temperatura en el estado *B* queda inmediatamente establecida a partir de la ecuación de estado de un gas ideal. En nuestro caso, para un mol a 1 atm (101.325 Pa) ocupando un volumen de 0,03 m³ resulta $T_B = 365,62 K$. El estado *A* está ligado al estado *B* a través de una isoterma, de manera tal que, dado que el volumen v_A es la mitad del volumen v_B la presión en el estado *A* debe ser el doble que la del estado *B*, esto es, debe ser $P_A = 2 atm = 202.650 Pa$.

El estado *G* se relaciona con el estado *B* a través de una adiabática, de manera tal que por directa aplicación de la ecuación (1.134) resulta

$$P_G = \frac{P_B v_B^\gamma}{v_G^\gamma} = 43.248,2 Pa = 0,43 atm \quad (1.142)$$

La temperatura del estado *G* se calcula rápidamente, sea a través de la ecuación de estado de un gas ideal, sea a través de la aplicación de la expresión (1.119). Por cualquiera de los dos métodos de cálculo se obtiene $T_G = 260,1K$. Por lo demás, la temperatura del estado *D* se calcula a partir de la ecuación de estado de un gas ideal pues de ese estado se conocen tanto el volumen como la presión. De manera casi inmediata resulta $T_D = 78 K$. Sabemos que la variación de energía interna en la transformación isoterma es nula, de manera tal que el calor intercambiado en la transformación *AB* es igual al trabajo realizado. Luego, a partir de la expresión (1.109) resulta

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 2.107 J \quad (1.143)$$

Sabemos también que, por definición, el calor intercambiado en la transformación adiabática BG es nulo. Ahora bien, en la transformación isobárica GD el calor intercambiado con el medio externo, a partir de la ecuación (1.27) se calcula como

$$Q_{GD} = nc_p (T_D - T_G) = -3.784,94 J \quad (1.144)$$

en tanto que a partir de la expresión (1.26) podemos calcular el calor intercambiado por el sistema en la transformación isocórica DA como

$$Q_{DA} = nc_v (T_A - T_D) = 3.586,91 J \quad (1.145)$$

Obsérvese que por un lado resulta más que evidente que el calor Q_{ABG} no es igual al calor $|Q_{GDA}| = |Q_{GD} + Q_{DA}| = Q_{ADG}$. Por el otro, el sistema absorbe calor en las etapas expansivas salvo, claro está, en la expansión adiabática, de manera tal que resulta

$$Q_{ABSORBIDO} = Q_{AB} + Q_{DA} = 2.107 J + 3.586,91 J = 5.693,91 J \quad (1.146)$$

El trabajo neto que realiza el gas en el ciclo, al que llamaremos W_{SIST} , de acuerdo al primer principio será directamente igual al calor intercambiado en el ciclo, esto es

$$W_{SIST} = Q_{AB} + Q_{GD} + Q_{DA} = 1.908,96 J \quad (1.147)$$

Luego, el rendimiento de este ciclo es fácilmente calculable a partir de la definición (1.129) y resulta

$$\eta = \frac{W_{SIST}}{Q_{ABSORBIDO}} = 0,335 \quad (1.148)$$

Si calculamos el rendimiento de un ciclo de Carnot utilizando la expresión (1.138) asumiendo que la fuente caliente se encuentra a la temperatura más alta del ciclo, a saber, $T_A = 365,62K$ y que la fuente fría se halla a la temperatura más baja, $T_D = 78K$, obtenemos un valor $\eta_{CAR} = 0,786$.

Este resultado parece asombroso, porque si el ciclo fuera irreversible no tendríamos objeción alguna de que nuestra máquina irreversible tuviera rendimiento menor que la de Carnot, pero estamos trabajando un ciclo reversible y esperaríamos que los rendimientos resultaran iguales. El error es que estamos calculando el rendimiento η como si se tratara de un ciclo trabajando entre sólo dos fuentes, lo que no es cierto en este caso porque en

las etapas *GD* y *DA* el sistema pasa por un continuo de fuentes a temperaturas apenas infinitesimalmente distintas. Por eso es menester recalcar que calcular el rendimiento de una máquina a partir de la expresión (1.128) sólo es posible si se trata de un ciclo de Carnot.

Parece que podemos ir dando respuesta a las preguntas que nos habíamos formulado líneas arriba. En primer lugar es imposible mejorar el rendimiento de una máquina calorífica rediseñando sus partes, porque existe un límite impuesto no por la estructura de la máquina sino por su naturaleza. Ninguna máquina calorífica operando entre dos fuentes puede tener rendimiento mayor que la máquina de Carnot operando entre esas mismas fuentes, y ese rendimiento está limitado por las temperaturas de las fuentes.

Y todavía más, el rendimiento teórico máximo se alcanza si la fuente fría está en el cero absoluto. Podemos sintetizar la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto en un principio general, que se conoce como segundo principio de la Termodinámica, y que podemos enunciar así

Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único resultado al cabo de un ciclo sea transformar calor en trabajo.

Ya hemos visto que de ser posible trabajar con una fuente fría a cero grados kelvin el rendimiento sería 100% y eso significa que la máquina transforma todo el calor que recibe en trabajo. Hay muchas otras formas en que puede enunciarse el segundo principio; si por ejemplo pensamos en la máquina frigorífica y en el principio cero de la Termodinámica podemos enunciar

El calor no puede fluir espontáneamente de una fuente fría a una fuente caliente, esto es, resulta imposible un proceso cuyo único resultado sea transferir calor de una fuente fría a una fuente a mayor temperatura.

Debe notarse que las dos formas que hemos elegido para enunciar el segundo principio tienen sus particularidades. En primer lugar, de acuerdo a la primera versión lo que no puede construirse es una máquina cíclica que transforme todo el calor en trabajo. Si la máquina no es cíclica no hay inconvenientes. En segundo lugar, transferir calor de una fuente fría a una fuente caliente siempre es posible, pero el fenómeno no puede ocurrir de manera *espontánea*. Para decirlo de otra manera, siempre puede transferirse calor de un foco frío a uno más caliente, pero para eso hay que transformar algo de trabajo en calor.

La espontaneidad del proceso es central, porque habla de la manera en que se desarrollan los procesos naturales. Por ejemplo, podemos armar y mantener un sistema que consista en agua hirviendo sobre un bloque de hielo, pero no parece razonable esperar que *espontáneamente* el agua en un vaso se congele en su parte inferior haciendo hervir la parte superior del sistema. Obsérvese que en ningún momento se viola el primer principio, porque el calor liberado en la fusión del agua podría emplearse para llegar a la temperatura de ebullición en la parte superior, pero de nuevo, la clave radica en la espontaneidad.

Con frecuencia hemos encontrado a lo largo de nuestra discusión procesos o fenómenos que pueden ocurrir o no de manera espontánea. Por ejemplo, el aire que ocupa el volumen de un globo inflado se expande espontáneamente (escapa) si el globo está abierto, pero el proceso inverso, en el que el globo está abierto a la atmósfera y se infla solo, es altamente improbable (por no decir imposible).

Siempre es posible transferir calor de un foco frío a uno caliente. De hecho, podríamos pensar una máquina frigorífica como aquella que realiza este proceso. Lo que es inviable es el proceso *espontáneo* de transferencia de calor de un foco frío a un foco caliente

Van apareciendo así dos conceptos que parecen bastante ligados: espontaneidad y reversibilidad. En términos generales, un proceso es espontáneo cuando no requiere de trabajo externo para realizarse. Por ejemplo, el hidrógeno y el oxígeno se combinan espontáneamente para formar agua, pero la reacción inversa, la que tiene que ver con la descomposición del agua en sus elementos, no es espontánea. El calor fluye espontáneamente de un cuerpo caliente a uno frío, pero el proceso opuesto no es espontáneo. Y

parece evidente que el flujo de calor de los cuerpos calientes a los fríos es irreversible.

Ahora bien, algunos procesos espontáneos ocurren con liberación de calor (procesos *exotérmicos*) y otros con absorción de calor (procesos *endotérmicos*). Por ejemplo, una reacción de combustión, el proceso de solidificación de un líquido o la fusión de hidrógeno en el núcleo de una estrella son procesos exotérmicos. Cuando un bloque de agua sólida pasa a estado líquido absorbiendo calor del entorno estamos hablando de un proceso endotérmico. Todos estos son procesos espontáneos, de manera tal que el signo del calor intercambiado no es suficiente para indicar, por sí mismo, la dirección en la que habrá de ocurrir un cambio espontáneo.

Parece entonces que vale la pena analizar la posibilidad de definir, a partir de estas consideraciones, un parámetro indicador de la reversibilidad de un proceso, lo que haremos a continuación. Y que seguramente estará ligado a la expresión (1.140)

1.16 – Irreversibilidad y entropía

Posiblemente sea ilustrativo insistir con el concepto de irreversibilidad de un proceso y su asociación con la espontaneidad. Para eso, imaginemos una rueda que gira sobre cojinetes con rozamiento no nulo. El rozamiento disipa calor y nos preguntamos si de alguna manera sería posible el proceso inverso, es decir, si calentando el eje podemos mover la

rueda. Respuesta: no. Parte de la energía entregada para realizar trabajo se pierde irremediadamente, y más importante aún, irreversiblemente. Precisamente, esa es la idea de un proceso irreversible. Si usted aplaude se le calientan las manos (transforma trabajo en calor disipado) pero no por calentarse las manos se van a escuchar aplausos.

Esto no significa que usted no pueda volver a aplaudir o que no pueda poner a girar la rueda. Lo que significa es que es exageradamente improbable que el calor que puedan recibir sus manos o el eje se ordenen para transformarse en movimiento.

Aun cuando incluso desde un plano meramente intuitivo los planteamientos que estamos realizando pueden sonar absurdos, es

notable que no estén prohibidos por el primer principio, sencillamente porque ninguna de las situaciones planteadas lo viola. Y es razonable que así sea porque el primer principio, desde esta perspectiva, opera sólo como manifestación de un principio de conservación de la energía, y en las situaciones que proponemos la energía se conservaría.

Pensemos en procesos que puedan ocurrir en un sistema termodinámico aislado. Recordemos que si está aislado, el sistema no intercambia ni materia ni energía. El universo mismo, en consecuencia, es un sistema aislado, porque sin importar “qué existe más allá del universo”, si el universo intercambiara masa y/o energía con su entorno (esa hipotética región “más allá del universo”) se trataría de una región en las que valdrían idénticamente las mismas leyes de la Física, esto es, sería parte del universo. Luego, el universo no intercambia con nada que no sea el universo, o dicho de otro modo, el universo es un sistema termodinámicamente aislado.

Ahora bien, por lo que venimos discutiendo parece ser que en los sistemas aislados los procesos espontáneos son irreversibles, de manera tal que podríamos afirmar que todos los procesos naturales lo son. Es necesario recalcar que no estamos diciendo que todos los procesos en un sistema aislado son irreversibles, estamos planteando que los procesos espontáneos lo son. Y esta característica viene a cuento de una observación que hicimos en la introducción del capítulo: toda la naturaleza tiende a degradarse. Y esto se debe a que en los procesos espontáneos hay una cierta cantidad de energía puesta en juego que, al ser un proceso espontáneo (y en consecuencia, insistimos, irreversible) no puede volver a utilizarse. Suele decirse entonces que la energía se ha degradado, porque ya no es posible utilizarla para realizar trabajo.

Ahora bien, a la hora de representar la medida de irreversibilidad de un proceso podemos apelar a la desigualdad (1.140) que hemos obtenido a propósito de máquinas cíclicas pero que debería tener validez absolutamente general, independientemente de los procesos involucrados. Por comodidad repetimos aquí la desigualdad, que asegura que la relación entre los calores intercambiados entre dos fuentes y las temperaturas de esas dos fuentes cumple con la condición

Todos los procesos en la Naturaleza son irreversibles, aun cuando siendo espontáneos demanden poco o mucho tiempo para realizarse. Los procesos reversibles son ideales, y son aquellos en los que la energía involucrada en las transformaciones se conserva inalterada y puede recuperarse en el proceso inverso.

$$\frac{|Q_F|}{Q_C} \geq \frac{T_F}{T_C} \equiv \frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{Q_C}{T_C} \geq 0$$

y la igualdad sólo vale si el proceso es reversible.

Si estamos en lo cierto, si la desigualdad (1.140) se cumple siempre, independientemente de las transformaciones, de los ciclos y de la reversibilidad de los procesos, deberíamos poder demostrar que si bien las cantidades de calor intercambiadas en los procesos involucrados en cualquier transformación dependen de los procesos en sí mismos, la suma de las cantidades Q/T deben ser independientes de las transformaciones. En tal sentido, podríamos pensar en cantidades infinitesimales de calor intercambiadas en procesos infinitesimales, de manera tal que lo que deberíamos probar es que para cualquier ciclo reversible debe cumplirse la igualdad

$$\oint_{REV} \frac{\delta Q}{T} = 0 \tag{1.149}$$

En el caso de un ciclo reversible “rectangular” en el plano $P\mathcal{V}$, como el de la figura 1.30, el cálculo es muy sencillo porque se trata de dos isobaras y dos isocoras. De hecho, escribimos

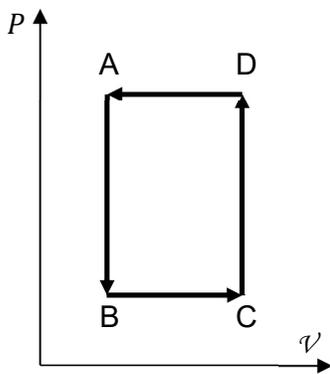


Fig. 1.30: Un ciclo cerrado con dos isobaras y dos isocoras

$$\begin{aligned} \oint \frac{\delta Q}{T} &= \int_A^B \frac{nc_V dT}{T} + \int_B^C \frac{nc_P dT}{T} + \int_C^D \frac{nc_V dT}{T} + \int_D^A \frac{nc_P dT}{T} = \\ &= nc_V \left[\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + \ln\left(\frac{T_D}{T_C}\right) \right] + nc_P \left[\ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right) \right] = \\ &= n(c_V - c_P) \left[\ln\left(\frac{T_C}{T_B} \frac{T_A}{T_D}\right) \right] = \\ &= n(c_V - c_P) \left[\ln\left(\frac{P_C \mathcal{V}_C}{P_B \mathcal{V}_B} \frac{P_A \mathcal{V}_A}{P_D \mathcal{V}_D}\right) \right] = \\ &= n(c_V - c_P) [\ln(1)] = 0 \end{aligned} \tag{1.150}$$

La extensión a cualquier ciclo es inmediata. Sea por ejemplo el ciclo de la figura 1.31 (tal vez valga la pena recordar que si es posible graficado es porque es reversible). Siempre será posible cubrirlo con un conjunto de ciclos “rectangulares” infinitesimales, para todos los cuales vale la identidad (1.150), de manera tal que su suma es nula. Postulamos entonces

Para todo ciclo reversible se verifica la identidad

$$\oint_{REV} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Podemos ahora definir una nueva función que de manera absolutamente general represente la cantidad involucrada en la expresión (1.149), a la que llamaremos *entropía* y denotaremos con S , cuya variación infinitesimal se exprese como

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (1.151)$$

Obsérvese que hemos escrito dS , implicando de antemano que es un diferencial exacto. Y esto se debe a que en realidad cualquier ciclo reversible puede ser cubierto por un conjunto infinito de ciclos “rectangulares” compuestos por isobaras e isocoras, de manera tal que siempre se cumple la identidad (1.150), sin importar ni sus transformaciones ni sus características. Dicho de otra manera, la variación de entropía en un ciclo reversible debe ser nula[†]. Por lo demás, basta con demostrar que la variación de entropía

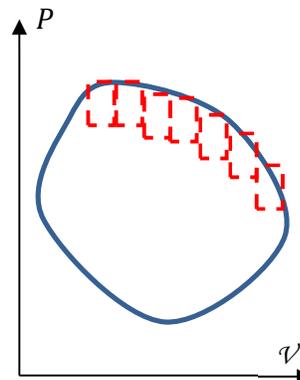


Fig. 1.31: el ciclo cerrado puede ser cubierto por una serie de subciclos conformados por isobaras e isocoras, de manera tal que será $\oint \delta Q/T = 0$.

$$S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q_{REV}}{T} \quad (1.152)$$

es independiente del camino[‡]. Para corroborar tal aseveración, tomemos dos estados arbitrarios A y C , y conectémoslos por los dos caminos diferentes ABC y ADC de la figura 1.32 y luego comparemos los resultados.

A lo largo del camino ABC la expresión (1.152) se escribe como

$$\begin{aligned} \int_A^C \frac{\delta Q}{T} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{nc_P}{T} dT + \int_B^C \frac{nc_V}{T} dT = \\ &= nc_P \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nc_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \end{aligned} \quad (1.153)$$

[†] Básicamente este es el teorema de Clausius, en este caso referido a un proceso reversible.

[‡] Hemos anotado δQ_{REV} porque la única manera de calcular la integral es por caminos reversibles.

Es casi evidente que la integración en el camino ADC es absolutamente similar a la realizada por el camino ABC , de manera tal que resulta

$$\int_A^C \frac{\delta Q}{T} = \int_A^D \frac{nc_V}{T} dT + \int_D^C \frac{nc_P}{T} dT = nc_V \ln\left(\frac{T_D}{T_A}\right) + nc_P \ln\left(\frac{T_C}{T_D}\right) \quad (1.154)$$

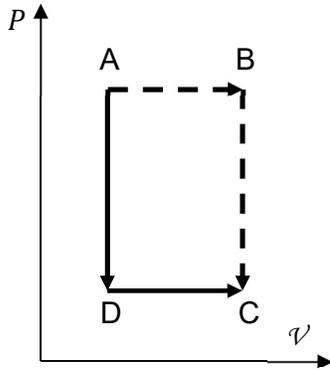


Fig. 1.32: caminos ABC y ADC ligados por isobaras e isocoras.

Ahora bien, por tratarse de un gas ideal sobre la isocora AD resulta $T_D/T_A = P_D/P_A$ en tanto que sobre la isobara AC resulta $T_C/T_D = v_C/v_D$. Similarmente, sobre la isobara AB resulta $T_B/T_D = v_B/v_A$ y sobre la isocora BC resulta $T_C/T_B = P_C/P_B$. Luego, las expresiones (1.153) y (1.134) pueden escribirse como

$$\int_A^C \frac{\delta Q_{ABC}}{T} = nc_P \ln\left(\frac{v_B}{v_A}\right) + nc_V \ln\left(\frac{P_C}{P_B}\right) \quad (1.155)$$

$$\int_A^C \frac{\delta Q_{ADC}}{T} = nc_P \ln\left(\frac{v_C}{v_D}\right) + nc_V \ln\left(\frac{P_D}{P_A}\right) \quad (1.156)$$

y dado que $P_C = P_D$, $P_A = P_B$, $v_B = v_C$, $v_A = v_D$, resulta que la diferencia entre las expresiones (1.155) y (1.156) es nula o, lo que es igual, que las integrales son iguales. Luego, dado que dos estados arbitrarios siempre pueden unirse por una isobara y una isocora, resulta que la integral (1.152) es independiente del camino y, en consecuencia, la entropía resulta ser una función de estado.

Algunos comentarios se hacen necesarios. En primer lugar, notemos que la unidad de entropía es J/K o cal/K . Claramente

$$1 \frac{cal}{K} = 4,18 \frac{J}{K}$$

Por otro lado, hay que tener en cuenta que la entropía se define sólo para estados de equilibrio y que solamente pueden calcularse variaciones de entropía. Para decirlo en otras palabras, no tiene sentido alguno decir que un sistema tiene mucha o poca entropía sencillamente porque no existe un estado de referencia absoluto. También es cierto que en diversas aplicaciones, relacionadas en general al diseño de máquinas de vapor, suele definirse un estado de referencia de entropía nula, que corresponde al agua líquida a $0^\circ C$ y presión de una atmósfera. Por ejemplo, las tablas de vapor se construyen desde este estado de referencia.

Ahora bien ¿qué mide exactamente la variación de entropía? La entropía de un sistema termodinámico es, por origen y significado físico, un concepto estadístico que se relaciona con el número de microestados de ese sistema, es decir, con la especificación detallada de su configuración microscópica en el espacio de las fases (relacionado con las posiciones y las velocidades de los átomos y las moléculas que constituyen el sistema termodinámico). La probabilidad de que el sistema se encuentre en un determinado estado macroscópico (un *macroestado*, definido por variables de estado macroscópicas, como por ejemplo lo son la temperatura o la presión en un gas ideal) depende del número de maneras en que el sistema puede alcanzar esa particular configuración. Pensémoslo de esta manera: hemos dicho que la temperatura de un sistema se halla asociada a la energía del sistema. Para especificar la energía del sistema necesitamos conocer la posición y la velocidad de todas y cada una de las partículas que conforman ese sistema, es decir, si se trata de un sistema de N partículas, desde un punto de vista clásico necesitamos $6N$ valores para especificar la energía del sistema (nos movemos en un espacio de fases de $6N$ coordenadas). Cuando medimos la temperatura aseguramos que el sistema se halla en equilibrio, pues de otra manera no podríamos realizar la medición. Pero durante el tiempo que dura la medición es impensable que las moléculas del sistema hayan permanecido “congeladas”, invariantes sus vectores posición y velocidad, de manera tal que resulta plausible pensar que un dado estado macroscópico se halla asociado a un gran número de microestados accesibles, y que todos ellos fueron alcanzados por el sistema durante la medición.

La entropía se relaciona con el número de microestados accesibles a un sistema termodinámico, asociados a un dado estado macroscópico de ese sistema. Los estados en los que todas las moléculas muestran un cierto orden estadístico son altamente improbables. Suele decirse, y de manera algo apresurada, que la entropía es entonces una medida del desorden. Pero si usted calienta un cuerpo rígido en forma de barra, por decir algo, aumenta la entropía pero la barra sigue siendo barra, no se desordena. Y por el contrario, si usted ordena el cajón de los cubiertos, no disminuye ninguna entropía. A lo sumo, encontrará más rápido los tenedores.

Tratemos de consolidar esta idea. Pensemos en un sistema aislado en contacto con un foco calorífico. En estas condiciones la suma de todas las energías de todas las partículas debe ser constante, y esta restricción es físicamente inevitable porque el sistema está aislado. Por lo demás, supongamos que disponemos de un conjunto de experimentos que hacen que las partículas sean distinguibles (a pesar de las restricciones cuánticas), de manera tal que podamos pensar en un conjunto de N partículas distinguibles, distribuidas en Z niveles de energía $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_Z$, con energía constante U . La distribución de partículas habrá de ser aleatoria, de forma tal que habrá N_1 partículas con energía ε_1 , N_2 partículas con energía $\varepsilon_2, \dots, N_Z$ partículas con energía ε_Z , pero sujetas a la restricción de que su suma debe ser U .

Ahora bien, el postulado de *igualdad a priori de las probabilidades* de la Mecánica Estadística sostiene que todo sistema macroscópico aislado en equilibrio se encuentra en cualquiera de sus estados accesibles con igual probabilidad.

Si todos los estados accesibles son igualmente probables entonces es razonable pensar que durante el tiempo de medición el sistema pasará por cada uno de ellos y, en consecuencia, por todos los modos de repartir la energía U entre el cuerpo y la fuente térmica con la que está en contacto. Desde un punto de vista puramente estadístico habrá distribuciones más probables que otras, esto es, combinaciones aleatorias de partículas en diferentes niveles que son estadísticamente más frecuentes, de manera tal que concluimos en que la distribución más probable es aquella en la que las partículas se reparten entre niveles dentro de un número máximo de formas estadísticamente independientes. En otras palabras, el macroestado que tenga el máximo número de microestados es el macroestado más probable.

Para hacernos una idea del problema que estamos planteando, pensemos en un sistema de 4 partículas que pueden estar en cualesquiera de 7 estados, cada uno de ellos energía $\varepsilon_k = k\varepsilon$ ($k \geq 1$) (ε es alguna unidad de energía, irrelevante para nuestra discusión). Así, por ejemplo, el estado que arbitrariamente denominamos 5 tiene energía $\varepsilon_5 = 5\varepsilon$. Supongamos ahora macroestados con energía 10ε , como todos los que hemos representado en la figura 1.33.

Observemos la distribución (a): la energía es 10ε , y hay cuatro maneras diferentes de conseguir esta distribución, porque hay cuatro maneras diferentes de elegir la partícula para el nivel superior (recordemos que son distinguibles) pero una vez elegida esta partícula las otras tres no tienen más remedio que estar en el nivel inferior, y cualquier permutación entre estas tres partículas no cambia el microestado.

Pensemos ahora en la distribución (c). Hay 4 maneras de elegir la partícula para el quinto nivel, 3 maneras de elegirla para el tercer nivel, y 2 maneras de elegir las para el primer nivel, aunque debemos dividir por 2 porque la permutación de las dos partículas en el estado inferior no cambia el microestado. De este modo, resultan en total $(4 \times 3 \times 2)/2 = 12$ maneras diferentes de acomodarlas. Claramente, de acuerdo a nuestra discusión previa, el estado (c) debe ser más frecuente que el estado (a).

Si exploramos un poco los estados accesibles, veremos que la distribución más probable es la (f), porque en ella hay 4 maneras de elegir la partícula para el cuarto nivel, 3 maneras de elegirla para el tercer nivel, 2 maneras de elegir las para el segundo nivel y sólo una de elegirla para el primer nivel, pero ahora el número de formas de combinar las partículas resulta ser $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Todos estos resultados están asociados a las ligaduras del sistema, esto es, el número de partículas es N y la energía es total es U . Por ejemplo, las 4 partículas de la figura 1.33 pueden distribuirse entre los 7 niveles de energía de $7^4 = 2401$ formas diferentes, pero sólo 9 de ellas son compatibles con la restricción de que la energía total sea 10ε . Si permitimos que sea 10ε o 6ε , por decir algo, el número de casos aumenta a 11 (pruebe de distribuir las 4 partículas en los 7 niveles de energía de manera tal que la suma de las energías sea 6ε , verá que sólo dos formas son posibles). Lo importante del

caso es que el número de macroestados posibles crece cada vez que se quita una restricción.

Pensemos ahora en el número de microestados posibles (al que denotaremos Ω) de un sistema aislado. Por estar aislado, el número de partículas, la energía y el volumen deben ser constantes (el sistema es rígido y no intercambia ni calor ni masa con su entorno), de manera tal que el número de microestados accesibles es función sólo de N, U y V , es decir, debemos escribir $\Omega(N, U, V)$. Si pensamos en el sistema como la unión de dos subsistemas (o dos sistemas aislados conjuntamente del resto del universo, tanto da) que interactúan muy débilmente entre sí (o, mejor aún, no lo hacen) el número total de microestados será el producto

$$\Omega(N_1, U_1, V_1, N_2, U_2, V_2) = \Omega_1(N_1, U_1, V_1) \times \Omega_2(N_2, U_2, V_2) \quad (1.157)$$

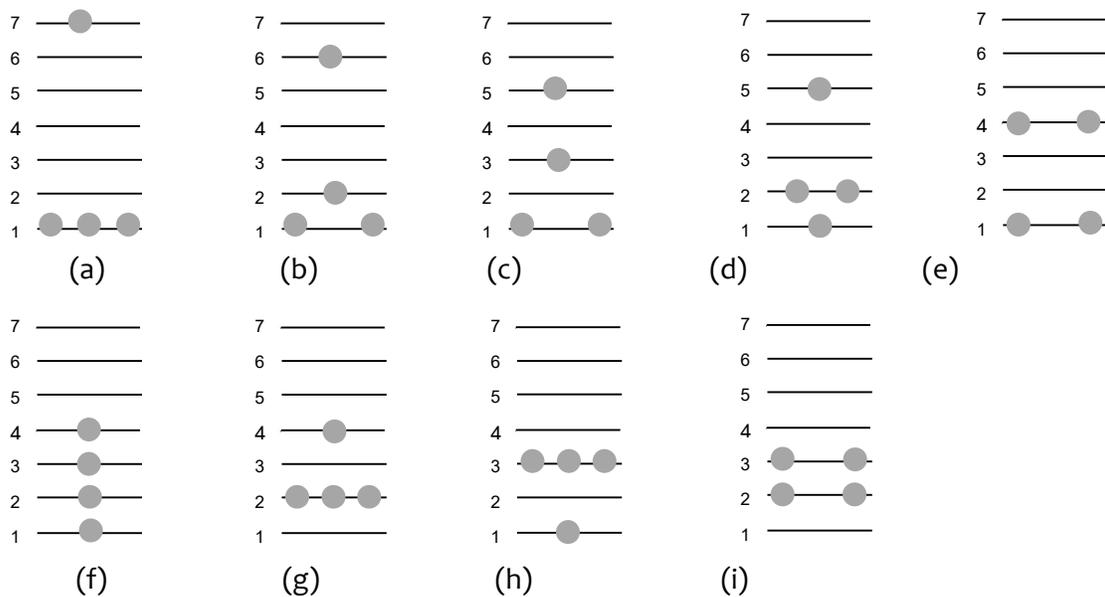


Fig. 1.33: modos de repartir 4 partículas distinguibles en 7 niveles, sujetas al vínculo de que la suma del producto del número de partículas en el nivel por el valor del nivel debe ser 10. Por ser distinguibles, las maneras diferentes de hacerlo no son iguales.

Para pensar en este resultado, basta imaginar que debemos ir desde una ciudad A hasta una ciudad C, pasando por la ciudad B. Supongamos que para ir de la ciudad A hacia la ciudad B hay tres caminos posibles, y que para viajar de la ciudad B a la ciudad C disponemos de 6 carreteras. El número de maneras de viajar de A a C (pasando por B) es entonces $3 \times 6 = 18$.

Ahora bien, la Mecánica Estadística postula que el número total de microestados $\Omega(N_1, U_1, V_1, N_2, U_2, V_2)$ posibles entre dos sistemas en equilibrio termodinámico entre sí pero aislados del resto del universo es máximo respecto de todas sus variables. Matemáticamente podemos establecer la relación entre este postulado y la entropía

utilizando las expresiones (1.103) (sin el trabajo electromagnético) y (1.151) para combinarlas en la forma

$$dU = T dS - P dV + \mu dN \quad (1.158)$$

Si los sistemas están en equilibrio termodinámico sus temperaturas deben ser iguales, es decir, debe ser

$$\frac{1}{T_1} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right)_{N_1, V_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2} \right)_{N_2, V_2} = \frac{1}{T_2} \quad (1.159)$$

Impongamos ahora la restricción de que el sistema completo tenga energía total dada por $U = U_1 + U_2$ de manera tal que el número de microestados del sistema completo se escriba como

$$\Omega(N_1, U_1, V_1, N_2, U - U_1, V_2) = \Omega_1(N_1, U_1, V_1) \times \Omega_2(N_2, U - U_1, V_2) \quad (1.160)$$

Dado que el número de microestados es máximo respecto de cualquiera de sus variables debe verificarse la igualdad

$$\frac{\partial \Omega}{\partial U_1} = \Omega_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial U_1} + \Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial (U - U_2)} = 0 \quad (1.161)$$

o, lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial U_1} - \Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial U_2} = 0 &\equiv \frac{1}{\Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial U_1} - \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial U_2} = 0 \equiv \\ &\equiv \frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial U_1} - \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial U_2} = 0 \end{aligned} \quad (1.162)$$

Obsérvese que el valor de U es constante, pero no tienen por qué serlo los valores de U_1 y U_2 , sólo están sujetos a la restricción de que su suma sea invariante. Ahora, comparando las expresiones (1.159) y (1.162) podemos pensar la entropía en términos del número de microestados accesibles a un sistema (recordemos, microestados compatibles con las ligaduras y las restricciones del sistema), esto es

$$S \propto \ln \Omega \quad (1.163)$$

La constante de proporcionalidad debe tener unidades de entropía, es decir, energía por unidad de temperatura. En principio este factor de proporcionalidad podría ser cualquiera (a condición que tenga las unidades adecuadas) porque al cabo a este nivel pretendemos una cantidad que sea proporcional al número de microestados del sistema pero nada decimos del tipo de proporcionalidad que pretendemos involucrar.

Sin embargo, si prestamos atención a la ecuación de estado de un gas ideal (1.8), notamos de inmediato que el miembro izquierdo representa una energía, mientras que el miembro derecho no parece representar nada porque está escrito en términos de una constante empírica, a saber, R , y de una temperatura (que de una forma u otra siempre se mide en unidades arbitrarias). O sea, esta ecuación debe involucrar inherentemente un factor que identifique las medidas de energía con las de temperatura, es decir, una constante que formalice la (incompleta) manera de comparar energías con temperaturas.

En tal sentido, notemos que la ecuación (1.8) hace referencia a la cantidad de moles del gas, no a la cantidad total de partículas. Pero como la temperatura está asociada a la energía de todas las partículas del gas, en lugar del número de moles deberíamos pensar en el número total de partículas, a saber, Nn , donde N es el número de Avogadro. Luego, podemos escribir

$$P\mathcal{V} = Nn \frac{R}{N} T = Nn k_B T \quad (1.164)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y su valor, como es inmediato a partir de los valores de las constantes que lo definen, es aproximadamente $1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. Luego, a partir de su significado, parece razonable usar esta constante como factor de proporcionalidad, en términos de la cual resulta

$$S = k_B \ln \Omega \quad (1.165)$$

¿Qué es lo que ocurre cuando un sistema evoluciona irreversiblemente? Posiblemente el ejemplo emblemático de un proceso irreversible tenga que ver con el que nos llevó a la formulación del principio cero de la Termodinámica: dos bloques a diferente temperatura en un sistema aislado intercambian calor (y ahora agregamos, de manera irreversible) hasta alcanzar la temperatura de equilibrio. Observemos ante todo que siendo la temperatura una medida del estado cinético del sistema (un concepto que hemos discutido en la sección 1.4) el cuerpo a mayor temperatura tiene muchos más estados a los que ha accedido porque la energía cinética media es mayor y, luego, tiene más puntos que le son accesibles en el espacio de las fases. Es cierto que los dos cuerpos alcanzarán una temperatura de equilibrio y que la cantidad de calor que libera un cuerpo es igual a la cantidad de calor que absorbe el otro, pero es mucho mayor el número de nuevos microestados que le son accesibles al cuerpo frío que la cantidad de microestados a los que ya no puede acceder el cuerpo caliente. Y esto es lo que precisamente a nivel macroscópico mide la expresión (1.152), la relación de los cocientes del calor intercambiado por cada unidad de temperatura, es decir, representa una medida del crecimiento del número de microestados accesibles al sistema dado por la expresión (1.165). Y dado que la entropía es proporcional al logaritmo de microestados accesibles, cuando el número Ω de la ecuación (1.160) aumenta, lo hace la suma de las entropías del sistema completo, y por definición este número es positivo. Es decir, en virtud de nuestra discusión, debe cumplirse

$$\frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{Q_C}{T_C} \geq 0 \quad (1.166)$$

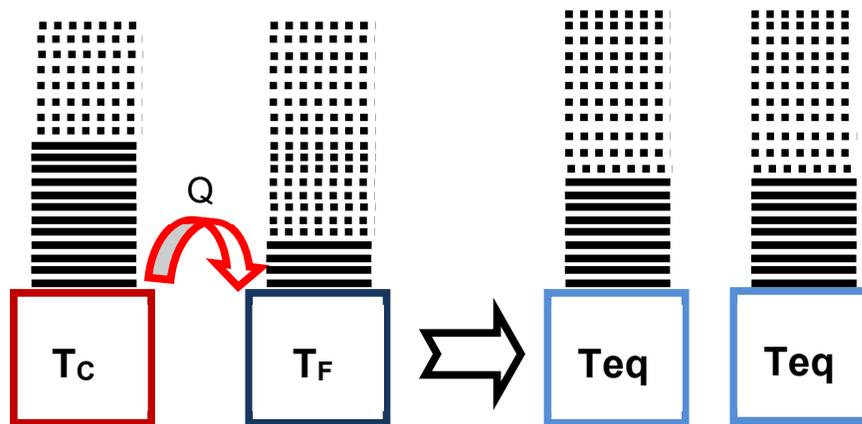


Fig. 1.33: esquematización del aumento de entropía en el sistema de dos cuerpos aislados. El número de estados accesibles del cuerpo frío (por absorción de calor y elevación de su temperatura) aumenta mucho más que lo que disminuye el número de estados accesibles al cuerpo caliente (por ceder calor y disminuir su energía cinética interna media). En consecuencia, el número de estados accesibles en equilibrio ha aumentado, y con ellos la entropía.

Ejemplo 1.13: Imaginemos que los cuerpos de la figura 1.33 están a $400K$ y $600K$ respectivamente. Para aligerar los cálculos supondremos que ambos cuerpos tiene igual capacidad calorífica (observe que nada decimos de su masa ni de su calor específico) y que esta vale $C = 200 J/K$. Queda claro que en estas condiciones la temperatura de equilibrio es de $500K$ y la variación de entropía del sistema será en consecuencia

$$\begin{aligned} \Delta S_{SIST} &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \\ &= \int_{600}^{500} \frac{C dT}{T} + \int_{400}^{500} \frac{C dT}{T} = C \left[\ln\left(\frac{500}{600}\right) + \ln\left(\frac{500}{400}\right) \right] = 8 \frac{J}{K} \end{aligned} \quad (1.167)$$

Observemos que el valor absoluto del calor cedido por el cuerpo caliente (igual al absorbido por el cuerpo frío vale) vale

$$|Q| = C \Delta T = 200 J$$

pero no podemos argumentar que la variación de entropía del sistema haya sido

$$\Delta S_{SIST} = \frac{-200J}{600 K} + \frac{200J}{400 K} = 0,17 \frac{J}{K}$$

porque la temperatura de cada bloque no ha sido constante. El resultado correcto es el expresado por la identidad (1.167).

Ejemplo 1.14: un bloque de 100g de hielo de agua a $-15^{\circ}C$ se deja en una habitación a $20^{\circ}C$. Calculemos la variación de entropía del sistema hielo-habitación.

Lo primero que podemos decir es que la habitación, a los efectos prácticos, se comporta como un foco calorífico, pues de hecho no habrá de cambiar su temperatura por la presencia de 100g de hielo. Por lo pronto, cede una cantidad de calor Q dada por

$$|Q| = 100g \times \left[0,505 \frac{cal}{g^{\circ}C} (0^{\circ}C - (-15)^{\circ}C) + 80 \frac{cal}{g} + 1 \frac{cal}{g^{\circ}C} (20^{\circ}C - 0^{\circ}C) \right]$$

$$|Q| = 10.757,5 cal \quad (1.168)$$

donde reconocemos el primer término como el calor absorbido por el hielo para llegar a $0^{\circ}C$, el segundo término representa el calor de fusión del hielo y el tercer sumando representa el calor absorbido por el hielo para llegar a $20^{\circ}C$. Ahora podemos calcular la variación de entropía del sistema, pero debemos tomar mínimos recaudos. En primer lugar, la variación de entropía del hielo requiere del cálculo de cada evolución por separado porque no intercambia calor a temperatura constante. En segundo lugar, y como queda evidente en la transición de fase, las temperaturas involucradas deben escribirse en K , no pueden expresarse en $^{\circ}C$. Con estos cuidados en mente escribimos

$$S_{HIELO (-15 \rightarrow 0)} = \int_{258}^{273} m_H c_H \frac{dT}{T} = 100g \times 0,505 \frac{cal}{gK} \times \ln\left(\frac{273}{258}\right) = 2,85 \frac{cal}{K} \quad (1.169)$$

$$S_{FUSION} = \frac{m_H L}{T} = \frac{100 g \times 80 cal/K}{273K} = 29,3 \frac{cal}{K} \quad (1.170)$$

$$S_{AGUA (0 \rightarrow 20)} = \int_{273}^{293} m_A c_A \frac{dT}{T} = 100g \times 1 \frac{cal}{gK} \times \ln\left(\frac{293}{273}\right) = 7,07 \frac{cal}{K} \quad (1.171)$$

En total, la variación total de entropía del hielo es de $39,22 \text{ cal/K}$. Por su lado, la variación de entropía de la habitación, teniendo en cuenta que cede el calor calculado en la expresión (1.163) a temperatura constante, vale

$$\Delta S_{HABIT} = \frac{-Q}{T} = \frac{-10.757,5 \text{ cal}}{293 \text{ K}} = -36,7 \frac{\text{cal}}{\text{K}} \quad (1.172)$$

y en total la variación de entropía del sistema hielo habitación resulta ser $\Delta S = 2,505 \text{ cal/K}$, un valor positivo, como esperábamos, porque el proceso es claramente irreversible.

Ejemplo 1.15: Imaginemos ahora que la habitación está a -15°C y que colocamos en ella 100 g de agua a 20°C . Sabemos que la habitación habrá de absorber calor sin cambiar su temperatura y que el agua habrá de congelarse a -15°C . Bien visto, parece evidente que se trata del problema anterior pero al revés, de manera tal que resulta tentador tomar el valor ΔS_{SIST} y simplemente cambiarle el signo, un disparate porque la variación de entropía del sistema debe ser positiva porque el proceso es irreversible. Lo que sí es cierto es que la variación de entropía del agua vale $\Delta S_{AGUA} = -39,22 \text{ cal/K}$. En cuanto a la habitación, que sigue intercambiando $10.757,5 \text{ cal}$ (en este caso absorbiendo) su variación de entropía vale

$$\Delta S_{HABIT} = \frac{Q}{T} = \frac{10.757,5 \text{ cal}}{258 \text{ K}} = 41,69 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

y de nuevo la variación de entropía del sistema es positiva, en este caso $\Delta S_{SIST} = 2,47 \text{ cal/K}$. Obsérvese que el valor obtenido es diferente respecto del ejemplo anterior, precisamente porque las temperaturas de las fuentes (la habitación) no son iguales

1.17 – La entropía y el segundo principio de la Termodinámica

Regresemos por un momento a los bloques que aislamos en un recinto y que nos condujeron a la expresión (1.166). Si reconocemos que cada término del miembro izquierdo es una medida de la variación de entropía de cada bloque podemos enunciar

► **Proposición 1.5:** Sean dos cuerpos a temperaturas T_1 y $T_2 > T_1$, respectivamente, en un recinto aislado. Si ΔS_{SIST} representa la variación de entropía del sistema, debe cumplirse

$$\Delta S_{SIST} \geq 0$$

independientemente del valor de temperatura de equilibrio, y $\Delta S_{SIST} = 0$ si, y sólo si, el proceso es reversible.

DEMOSTRACIÓN: supongamos que cada cuerpo está caracterizado por su capacidad calorífica $C_k = m_k c_k$ ($k = 1; 2$). La cantidad elemental de calor cedida por el cuerpo a temperatura T_2 , digamos $\delta Q = C_2 dT_2$, es por hipótesis igual a la cantidad de calor absorbida por el cuerpo a temperatura T_1 , esto es, $\delta Q = C_1 dT_1$. Téngase en cuenta que dT_2 es negativo porque la temperatura del cuerpo 2 decrece. Las variaciones de entropía de cada cuerpo serán entonces

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_{eq}} \frac{C_1 dT_1}{T_1} = C_1 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_1} \right) \quad (1.173)$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_{eq}} \frac{C_2 dT}{T} = C_2 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_2} \right) \quad (1.174)$$

Obsérvese que al ser $T_1 < T_{eq} < T_2$ la expresión (1.173) es positiva y la (1.174) es negativa. Como la variación total de entropía del sistema es

$$\Delta S_{SIST} = \left[C_1 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_1} \right) + C_2 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_2} \right) \right] \quad (1.175)$$

nuestra proposición quedará demostrada si demostramos que $\Delta S_1 > |\Delta S_2|$ esto es, que el aumento de entropía ΔS_1 es mayor que la disminución de entropía ΔS_2 . Que es lo mismo que demostrar la validez general de la desigualdad

$$C_1 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_1} \right) \geq \left| C_2 \ln \left(\frac{T_{eq}}{T_2} \right) \right| \quad (1.176)$$

Hemos escrito el módulo del logaritmo para evitar confusiones. Ahora bien, la expresión (1.36) asegura que si no hay cambio de fase la temperatura de equilibrio vale

$$T_{eq} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \quad (1.177)$$

de manera tal que en términos de la variable $\beta = T_2/T_1$ la desigualdad (1.176) se escribe como

$$C_1 \ln \left(\frac{C_1 + \beta C_2}{C_1 + C_2} \right) \geq \left| C_2 \ln \left(\frac{\frac{C_1}{\beta} + C_2}{C_1 + C_2} \right) \right| \quad (1.178)$$

o, equivalentemente, introduciendo $\alpha = C_1/C_2$

$$\alpha \ln\left(\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha}\right) \geq \left| \ln\left(\frac{1 + \frac{\alpha}{\beta}}{1 + \alpha}\right) \right| \quad (1.179)$$

Obsérvese que por hipótesis es $\beta > 1$ (y en consecuencia el cociente del miembro derecho siempre es menor que uno) y $0 < \alpha < \infty$. Luego, si $\alpha \rightarrow 0$ la igualdad se verifica idénticamente (porque $\ln 1 = 0$) en tanto que en el extremo $\alpha \rightarrow \infty$ resultan

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \ln\left(\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha}\right) = \beta - 1 \quad (1.180)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left| \ln\left(\frac{1 + \frac{\alpha}{\beta}}{1 + \alpha}\right) \right| = \left| \ln \frac{1}{\beta} \right| \quad (1.181)$$

y dado que el límite (1.180) es siempre mayor que el límite (1.181) queda demostrada la tesis. En la figura 1.35 hemos graficado las funciones de la desigualdad (1.178) para $0 < \alpha < 25$ y $\beta = 3$, suponiendo en todo momento que los cuerpos no cambian de estado.

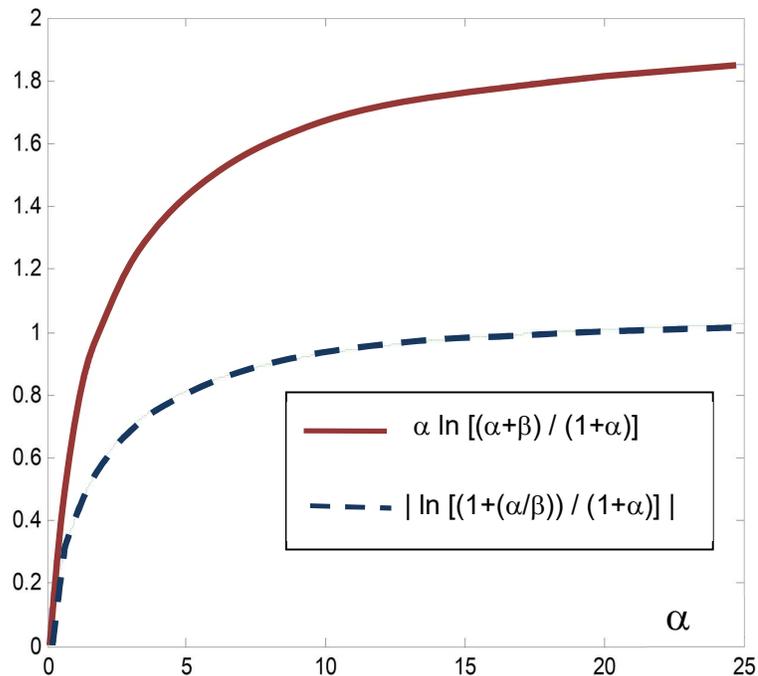


Fig. 1.35: gráficos en función de α de las funciones $|\ln [(1+(\alpha/\beta)) / (1+\alpha)]|$ (en línea de puntos) y $\alpha \ln [(\alpha+\beta) / (1+\alpha)]$ (en línea llena) de la proposición 1.5, para $\beta=3$. Obsérvese que el límite de la función superior es 2, en tanto que la inferior tiende al valor 1,1.

Notemos ahora que a partir de las expresiones (1.152) y (1.173) es posible una forma diferente para expresar el segundo principio. Lo hacemos así

Es imposible una transformación que haga decrecer la entropía de un sistema aislado. Si la transformación es reversible, la variación de la entropía es nula; si la transformación es irreversible, la entropía del sistema aumenta.

Debe prestarse especial atención a lo que esta forma del segundo principio dice y a lo que no dice. En primer lugar asegura que lo que aumenta en una transformación irreversible es la entropía del sistema, no la de todas y cada una de sus partes; bien podría ocurrir que alguna parte aumente su entropía y otra la disminuya, como de hecho ocurre en el ejemplo 1.15 que hemos presentado líneas arriba, en el que en un sistema aislado dos cuerpos a diferente temperatura se hallan en contacto térmico. El hecho es que la entropía total aumenta si el proceso es irreversible.

En segundo lugar, obsérvese que el postulado vale sólo para sistemas aislados. Un ser vivo, por ejemplo, lleva adelante procesos netamente irreversibles y desde el punto de vista de la entropía no significa nada, sencillamente porque un ser vivo no está aislado. Envejecer es irreversible, pero de ahí a decir que envejecer nos aumenta la entropía es arriesgado, sobre todo porque esa aseveración no tiene significado alguno. Claro que siempre es posible encontrar un sistema que, en conjunto, esté aislado. Típicamente, el Universo.

Desde un punto de vista puramente conceptual, podemos definir el Universo como el conjunto de regiones en las que valen los principios y las leyes de la Física. Desde esta perspectiva carece de sentido preguntarnos “qué hay más allá”, simplemente porque serían regiones que no podemos describir con nuestras leyes y principios físicos. Si el Universo se expande lo hace conservando sus leyes, esto es, sin intercambiar regiones con su posible entorno. Luego, si no intercambia ni masa ni energía, está aislado. Y si se trata de un sistema aislado, todo proceso irreversible que ocurra en cualquiera de sus regiones aumenta su entropía. Podemos entonces enunciar

Todo proceso natural incrementa la entropía del universo, esto es, la entropía del universo aumenta cada vez que se desarrolla algún proceso espontáneo.

Por esa razón todo proceso irreversible en un sistema no aislado aumenta la entropía del Universo, aunque no quede claro qué significa. Sin embargo, ahora toma sentido la frase que asegura que así como la energía no puede crearse ni destruirse, la entropía puede crearse pero no destruirse.

Cada vez que usted estornuda, por ejemplo, aumenta la entropía del universo, aunque eso no lo transforma a usted en un ser especial. Coloquialmente, decir que tenemos mucha energía tiene un significado preciso, pero decir que nos hemos levantado de la cama con mucha entropía carece de sentido. Conceptualmente, sin embargo, la variación de

entropía informa acerca de la reversibilidad de un proceso. Analicemos los siguientes ejemplos para aclarar estas ideas.

Ejemplo 1.16: Un cuerpo de capacidad calorífica C constante, y a temperatura T_1 , se pone en contacto con una fuente a una temperatura $T_2 > T_1$. Calculemos el cambio de entropía del universo.

Suele ser algo confusa la definición de sistema, entorno y universo. En principio, se



Fig. 1.36: esquema simplificado del concepto de sistema, entorno y universo

denomina universo al sistema por fuera de un sistema. Por eso en la sección 1.2 insistíamos en la necesidad de definir correctamente un sistema y su entorno. En la figura 1.36 pretendemos esquematizar esta situación. El entorno es parte del universo (el sistema también es parte del universo, pero es precisamente la parte que hemos recortado para poner bajo estudio) pero a veces se lo identifica puntualmente. Por ejemplo, si el sistema son tres bloques a diferente temperatura en un recipiente rígido y adiabático, parece claro que sistema son los tres bloques, entorno el recipiente adiabático, y que el sistema que denominamos universo jamás habrá de enterarse de los cambios que se producen y los equilibrios que se alcanzan en el sistema y su entorno, porque el conjunto sistema + entorno está aislado. En particular, en tal situación la

variación de entropía del universo debida a los intercambios de calor entre los bloques y el entorno será nula, porque el universo no intercambia calor con ese conjunto.

Distinto es el caso que aquí planteamos, porque el sistema está abierto, de manera tal que la variación de entropía del universo debe ser igual a la variación de entropía del sistema (en este ejemplo el bloque) + la variación de entropía de su entorno (en este caso la fuente). Calculemos entonces por separado cada variación de entropía.

Calor intercambiado

$$|\delta Q| = CdT \rightarrow |Q| = C (T_2 - T_1) \quad (1.182)$$

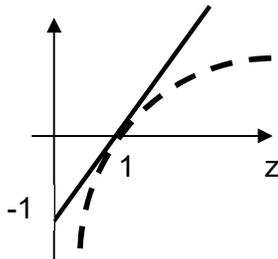
Sistema

$$\Delta S_{SIST} = \int_{T_1}^{T_2} C \frac{dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad (1.183)$$

Fuente

$$\Delta S_{FUENTE} = -C \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} \tag{1.184}$$

Luego, la variación de entropía del universo será



$$\Delta S_{UNIV} = C \left[\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} \right] \tag{1.185}$$

Fig. 1.37: funciones $z-1$ (línea llena) y $\ln z$ (línea punteada). Como puede verse, la función $z-1$ es mayor que $\ln z$ en toda la región $z > 1$.

Sabemos que $\Delta S_{UNIV} > 0$ porque el proceso es irreversible. Para corroborarlo, definamos la cantidad $z = T_1/T_2$ (obsérvese que es $z < 1$). Luego, la identidad (1.185) es positiva si y sólo si

$$-\ln z - (1 - z) > 0 \equiv z - 1 > \ln z \tag{1.186}$$

En la figura 1.37 graficamos las dos funciones de la desigualdad (1.186). Obsérvese que, salvo en el punto $z = 1$, la recta $z - 1$ es en todo punto mayor que $\ln z$, de manera tal que la proposición queda demostrada, es decir, la entropía del universo ha aumentado. Y el punto $z = 1$ corresponde a la situación $T_1 = T_2$ en cuyo caso no hay intercambio de calor y la variación de entropía es nula.

Ejemplo 1.17: Supongamos que 1 kg de agua líquida a $0^\circ C$ se pone en contacto térmico con una fuente calorífica a $100^\circ C$. Calculemos la variación de entropía del agua, la de la fuente y la del universo cuando el sistema alcanza el equilibrio.

Los cálculos son absolutamente similares a los que ya hicieramos en referencia al ejemplo 1.14. En este caso, parece evidente que la temperatura de equilibrio será la del foco calorífico. Si aceptamos que el calor específico del agua es invariante en estado líquido, la cantidad de calor que habrá absorbido hasta llegar al estado final es de 100.000 cal . A la hora de evaluar la entropía no podemos hacer uso de este valor porque la temperatura a la que absorbe calor no es constante. Luego, debemos plantear

$$\delta Q_{agua} = m c dT \tag{1.187}$$

y

$$\Delta S_{agua} = \int_{273}^{373} \frac{m c dT}{T} = mc \ln T \Big|_{273}^{373} = 312,1 \frac{\text{cal}}{K} = 1304,6 \frac{J}{K} \tag{1.188}$$

La variación de entropía de la fuente es sencilla de evaluar porque cedió 100.000 *cal* a temperatura constante (a saber, 373 *K*) de modo tal que

$$\Delta S_{fuente} = \frac{-100000 \text{ cal}}{373 \text{ K}} = -268,1 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -1120,6 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.189)$$

La variación de entropía del universo no es más que la suma de las variaciones de entropía de la muestra de agua y de la fuente, esto es

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{agua} + \Delta S_{fuente} = 184 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.190)$$

Obsérvese que la variación de entropía del universo (un sistema aislado) es positiva, de manera tal que el proceso es irreversible.

Ejemplo 1.18: Llevemos la masa de agua del ejemplo anterior de 0°C a 100 °C pero ahora poniéndola en contacto con cuatro fuentes, cada una de las cuales le eleva 25°C la temperatura, esto es, fuentes a 25°C, 50°C, 75°C y 100°C respectivamente. En este escenario, calculemos la variación de entropía del agua, de las fuentes y la del universo.

Es casi evidente que en el proceso de calentamiento el agua habrá de aumentar su entropía en la misma cantidad, porque la entropía es una función de estado y en consecuencia es independiente del proceso. También es cierto que absorbe 100.000 *cal*, como lo es que cada fuente cede la cuarta parte de la cantidad total de calor para calentar el agua. Pero lo que no es cierto, entonces, es que las variaciones de entropía de las fuentes sean iguales (porque ceden igual cantidad de calor a temperaturas diferentes). De hecho, dado que

$$\Delta S_{fuente} = \frac{-25000 \text{ cal}}{T_{fuente}} \quad (1.191)$$

resultan

$$\Delta S_{fuente1} = \frac{-25000 \text{ cal}}{298 \text{ K}} = -83,9 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -350,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.192. a)$$

$$\Delta S_{fuente2} = \frac{-25000 \text{ cal}}{323 \text{ K}} = -77,4 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -323,5 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.192. b)$$

$$\Delta S_{fuente3} = \frac{-25000 \text{ cal}}{348 \text{ K}} = -71,8 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -300,3 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.192. c)$$

$$\Delta S_{fuente4} = \frac{-25000 \text{ cal}}{373 \text{ K}} = -67,0 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -280,1 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.192. d)$$

Luego

$$\Delta S_{fuentes} = \sum_{k=1}^4 \Delta S_{fuente k} = -300,1 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = -1254,4 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.193)$$

y la variación de entropía del universo será

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{agua} + \sum \Delta S_{fuentes} = 50,2 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (1.194)$$

Es inmediato que la variación de entropía del universo en esta situación es menor que en la anterior, en la que la muestra de agua elevaba su temperatura en contacto con una única fuente. Podríamos preguntarnos qué ocurriría si calentáramos el agua poniéndola sucesivamente en contacto con fuentes que difirieran infinitesimalmente en sus respectivas temperaturas. Lo hacemos en el próximo ejemplo.

Ejemplo 1.19: Elevemos la temperatura de la masa de agua del ejemplo anterior de 0°C a 100°C pero ahora poniéndola en contacto con una sucesión de focos caloríficos cuyas temperaturas sucesivas difieren en una cantidad infinitesimal. En tal caso, reelaboremos los cálculos de variación de entropía de las fuentes y la del universo.

En este caso podemos pensar así: si N es el número de fuentes, la cantidad de calor que cede cada fuente es Q/N (recordemos que la muestra de agua, de 1 kg , recibe en total 100.000 cal) de manera tal que la variación de temperatura entre dos fuentes contiguas será

$$\Delta T = \frac{100}{N} \quad (1.195)$$

y la temperatura de la m -ésima fuente, con $T_0 = 273\text{K}$, vale

$$T_m = T_0 + \frac{100}{N} m \quad (0 \leq m \leq N) \quad (1.196)$$

En el paso al límite, la variación de entropía de las fuentes en un intervalo de n fuentes valdrá

$$\Delta S = \frac{-Q}{N} \int \frac{dn}{T_0 + \frac{100}{N} n} = \frac{-Q}{N} \int \frac{N}{100} \frac{d(T_0 + \frac{100}{N} n)}{T_0 + \frac{100}{N} n} \quad (1.197)$$

y en total

$$\Delta S_{fuentes} = -\frac{Q}{100} \ln \left[T_0 + \frac{100}{N} n \right]_{n=1}^N = -\frac{Q}{100} \ln \left(\frac{T_0 + 100}{T_0 + \frac{100}{N}} \right) \quad (1.198)$$

Supongamos que hemos dividido el intervalo de 100K en 100.000 partes de modo que cada fuente entrega 1 cal. La última expresión nos dice que $\Delta S_{fuentes}$ vale

$$\Delta S_{fuentes} = -1000 \times \ln \left(\frac{373}{273,001} \right) = -312,1 \frac{cal}{K} \quad (1.199)$$

es decir, la variación de entropía de las fuentes coincide en valor absoluto con la del agua y, en consecuencia, la variación de entropía del universo (de nuevo, el sistema aislado) es nula, es decir, el proceso es reversible.

Ejemplo 1.20: Pensemos en un cilindro de volumen \mathcal{V} , cerrado por un pistón móvil, que contiene un gas ideal en equilibrio con el entorno, como el que muestra la figura 1.38. El pistón está equilibrado por un resorte de constante elástica k que en el extremo opuesto está fijo a una pared, como se ve en el dibujo. Este resorte, en un ambiente a presión atmosférica P_0 y temperatura T_0 , está inicialmente comprimido una cantidad x respecto de su longitud natural ℓ_0 . El cilindro (incluido el pistón) está recubierto por una capa de material adiabático. Un dispositivo externo, ubicado en el entorno del cilindro, suministra al gas una cantidad de calor Q .

Calculemos las variaciones de entropía del gas, de su entorno y del universo. Para comenzar, imaginemos una manera de transferir calor al gas. Pensemos que el recipiente tiene una parte en la que puede quitarse la cubierta adiabática, una especie de parche que puede colocarse y quitarse a voluntad. Una fuente térmica a temperatura T_0 (naturalmente, mayor que la temperatura del gas, y que por simplicidad adoptamos como la temperatura ambiente) se conecta al gas a través de este sector descubierto (como alternativa, puede pensarse en una varilla metálica muy delgada que empuja una válvula adiabática que se halla en la superficie del cilindro, de manera tal que cuando se la retira – una vez transferida la cantidad de calor deseada – el recipiente recupera su forma y su aislación). Parece evidente que el proceso es irreversible, porque es impensable que el gas se enfríe transfiriendo calor al foco, aún si quitásemos la cubierta adiabática. De manera tal que el

proceso no es reversible, como no es adiabático, ni isotérmico, ni isobárico y, menos que menos, isocórico. Sin embargo, hay leyes que deben seguir valiendo.

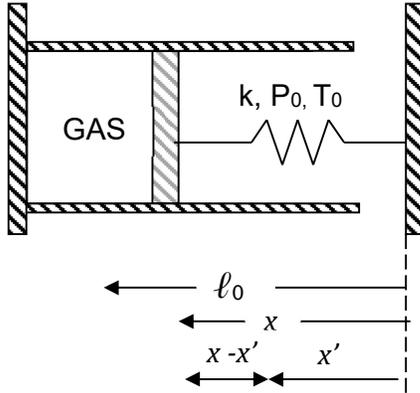


Fig. 1.37: esquema del sistema del ejemplo 1.20. Hemos marcado el sistema de referencia en el que anotamos las posiciones del pistón

Por ejemplo, el equilibrio se logra cuando la presión interna del gas iguala a la externa P_0 sumada a la presión que ejerce el resorte (la fuerza elástica por unidad de superficie, una situación análoga a la que planteamos en el ejemplo 1.9). Sean P, T, \mathcal{V} los valores de presión, temperatura y volumen con el gas en equilibrio antes de entregarle calor, y P', T', \mathcal{V}' los nuevos valores de equilibrio. Será

$$\begin{aligned} P' &= P + \frac{k(x-x')}{S} \\ &= \left[P_0 + \frac{k(\ell_0 - x)}{S} \right] + \frac{k(x-x')}{S} \\ &= P_0 + \frac{k(\ell_0 - x')}{S} \end{aligned} \quad (1.200)$$

donde hemos llamado S a la superficie del pistón.

Similarmente, el nuevo volumen \mathcal{V}' será de la forma

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} + S \Delta x \quad (1.201)$$

Por otro lado, debe valer el primer principio, de manera tal que la variación de energía interna del gas será

$$\Delta U' = Q - W = Q - \left[P_0(\mathcal{V}' - \mathcal{V}) + \frac{k \Delta x^2}{2} \right] = n c_V (T' - T) \quad (1.202)$$

de donde, usando la expresión (1.201), se implica inmediatamente

$$T' = \left(\frac{Q}{n c_V} + T \right) - \frac{P_0 S}{n c_V} \Delta x - \frac{k}{2 n c_V} \Delta x^2 \quad (1.203)$$

Por otro lado,

$$T' = \frac{P' \mathcal{V}'}{nR} = \frac{1}{nR} \left[P_0 + \frac{k \Delta x}{S} \right] [\mathcal{V} + S \Delta x] \quad (1.204)$$

de manera tal que resulta

$$\left[\frac{k}{n} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2 c_V} \right) \right] \Delta x^2 + \left[\frac{P_0 S}{nR} + \frac{k \mathcal{V}}{nRS} + \frac{P_0 S}{n c_V} \right] \Delta x - \left[\frac{Q}{n c_V} + T - \frac{P_0 \mathcal{V}}{nR} \right] = 0 \quad (1.205)$$

Obsérvense dos detalles de central importancia. En primer lugar, el tercer corchete del miembro izquierdo de la ecuación (1.205) es positivo porque en el estado de equilibrio inicial es

$$T = \frac{\left(P_0 + \frac{k(\ell_0 - x)}{S}\right) \mathcal{V}}{nR} \quad (1.206)$$

de manera tal que

$$T > \frac{P_0 \mathcal{V}}{nR}$$

Luego, la ecuación (1.205) representa una parábola con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa. Por la particular manera en que elegimos las coordenadas, estamos buscando la solución positiva porque $\Delta x = x - x' > 0$. Lo que aquí queremos destacar es que esa solución existe. En segundo lugar, debe notarse que en la ecuación (1.205) estamos permitiendo intercambiar cantidades arbitrarias de calor (a través del término Q que aparece en el tercer corchete) aún a sabiendas que eso no es posible porque en todo caso (y esto debido a la particular manera que hemos elegido para transferir calor de la fuente al gas) la temperatura máxima a la que puede llegar el gas es, precisamente, T_0 .

Sólo para fijar ideas, supongamos específicamente que se trata de 3 moles de un gas ideal monoatómico ($c_V = 3R/2$), que la presión externa P_0 es de 100.000 Pa , que el resorte de constante $k = 10.000 \text{ N/m}$ está inicialmente comprimido $2,5 \text{ cm}$, que el volumen inicial es $\mathcal{V} = 60 \text{ l}$ y que la superficie del pistón es $S = 0,01 \text{ m}^2$. Agreguemos ahora una cantidad de calor $Q = 400 \text{ J}$ (implícitamente suponemos que esta cantidad de calor es menor a la cantidad máxima que puede suministrarse al gas desde el foco calorífico. De nuevo, piénsese que si el foco estuviera a igual temperatura que el gas, la transferencia de calor sería imposible). Obsérvese que la temperatura inicial, de acuerdo a la identidad (1.206), será de 300 K (lo que no significa que la temperatura del entorno, T_0 , sea de 300 K porque esa temperatura es independiente del gas y de hecho la hemos supuesto mayor). Luego, la expresión (1.205) resulta en una compresión extra de algo menos de 3 cm .

Calculemos ahora las variaciones de entropía. La de la fuente es muy sencilla porque entrega una cantidad $-|Q|$ de calor a temperatura constante, esto es

$$\Delta S_{\text{foco}} = \frac{-|Q|}{T_0} \quad (1.207)$$

Evaluaremos la variación de entropía del gas apelando a la definición (1.152): sin importar qué tipo de evolución realiza el sistema podemos construirnos una serie de transformaciones reversibles a lo largo de las cuales podamos evaluar el calor intercambiado, es decir, el camino reversible que construyamos para calcular la variación

de la entropía del gas es irrelevante porque se trata de una función de estado y, en consecuencia, es independiente del camino por el que evoluciona el sistema. Por lo pronto, lo haremos siguiendo el camino que graficamos en la figura 1.39.

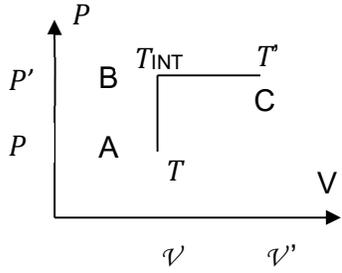


Fig. 1.39: evolución reversible propuesta para calcular la variación de entropía del gas del ejemplo 1.17.

La transformación AB es una isocora que lleva al sistema desde su estado inicial A (a presión P , temperatura T y volumen \mathcal{V}) al estado intermedio B en el que la presión es P' (la del estado final, dada por la ecuación (1.200)) el volumen es \mathcal{V} (el inicial, que a modo de ejemplo fijamos en 60 litros) y la temperatura es T_{INT} , un valor intermedio dado por la expresión

$$T_{INT} = \frac{\mathcal{V}}{nR} \left[P_0 + \frac{k \Delta x}{S} \right] = \frac{P' \mathcal{V}}{nR} \tag{1.208}$$

La transformación BC es una isobara en la que la presión vale P' , la temperatura final es T' (dada por la expresión (1.203)) y el volumen final es \mathcal{V}' (el que se obtiene a través de la ecuación (1.201)). Obsérvese que los valores de estas variables por el momento no vienen al caso porque estamos más interesados en el método de cálculo que en el cálculo mismo. Por lo pronto, será

$$\Delta S_{gas} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = n c_p \ln \left(\frac{T_{INT}}{T} \right) + n c_v \ln \left(\frac{T'}{T_{INT}} \right) \tag{1.209}$$

y parece evidente que la máxima variación de entropía ocurrirá si se transfiere al gas el calor suficiente como para que alcance la temperatura del entorno, esto es, $T' = T_0$. Más aún, sabemos que por ser una transformación irreversible, la variación de entropía del universo, esto es, la suma de las expresiones (1.207) y (1.209), debe ser positiva, de manera tal que podríamos usar esta propiedad para calcular (en términos de la compresión del resorte) la máxima transferencia posible de calor de la fuente al gas.

Resumen del capítulo

Hemos introducido en este capítulo uno de las entidades más importantes en el estudio de las interacciones en el Universo: la energía. Lo hicimos a través del primer principio de la Termodinámica, que no tendría que ser visto como una expresión de balance o simplemente de conservación sino más bien como la misma definición de energía. Recuérdese que en ningún momento hemos pretendido *definir* la energía, sino, en todo caso y a lo sumo, a través de sus propiedades.

De esta forma, el primer principio no sólo define la energía sino que además establece las formas y las propiedades que posee cuando es intercambiada por diferentes sistemas que interactúan en busca de equilibrio. En este sentido el concepto es amplio y autocontenido, pero incompleto. En efecto, hemos discutido algunos cuantos ejemplos (que de ninguna manera agotan la lista, casi que apenas la inician) de situaciones ni remotamente probables en las que, sin embargo, no se viola el principio de conservación de la energía: bloques que *espontáneamente* remontan el plano inclinado por el que han descendido, bolas de pool que *espontáneamente* salen de las troneras y se rearmen en triángulo, seres que nacen viejos y mueren como un espermatozoide abandonando un óvulo, son sólo algunos pocos ejemplos más que agregamos a aquella lista. Es notable que esta forma de pasar los procesos “al revés”, como si se tratara de una película, conserva la energía.

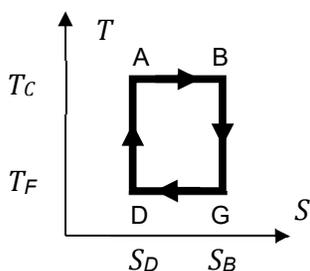
Si asentamos la Termodinámica sobre sus principios (de la misma manera que la Mecánica se fundamenta sobre los principios de Galileo-Newton) parece evidente que debe haber otro principio, general y de validez universal, que complementa al primero y con el que necesariamente tendremos que chocarnos si seguimos discutiendo *cualquier* aspecto formal de la Termodinámica. Nosotros nos hemos topado con otro principio básico (el segundo, aunque si vamos a ser estrictos en el conteo debemos tener en cuenta que hemos establecido el principio cero) analizando las máquinas térmicas. El segundo principio establece un conjunto mínimo de preceptos lógicos, postula lo que se puede y lo que no se puede esperar en los procesos termodinámicos y formaliza el vínculo entre irreversibilidad y espontaneidad. Y de la misma manera que en las primeras secciones de este capítulo presentamos las cantidades fundamentales que dan origen al primer principio tendríamos que decir que concluimos con lo que sería la introducción al estudio sistemático y profundo de la riquísima variedad de temas que abarca la Termodinámica Estadística.

Complementos del capítulo

Ciclo de Carnot y ciclo generalizado de Carnot en el plano TS

Un ciclo puede siempre graficarse en cualquier plano. El ciclo de Carnot del ejemplo 1.10 está graficado en el plano $P\mathcal{V}$, pero tratándose de dos isotermas y dos adiabáticas (o, como también podemos llamarlas ahora, *isentrópicas*) parece razonable graficarlo en un plano TS .

En este plano particular el ciclo adopta la geometría de un rectángulo, como se muestra en la figura 1.40, cuya área representa el calor intercambiado en el ciclo. En efecto, a partir de la proposición 1.5 y la expresión (1.151) sabemos que siempre vale



$$\delta Q \leq T dS \tag{1.210}$$

En el caso de un proceso reversible como el que estamos tratando vale la igualdad, y en tal caso resulta

$$Q_{CICLO} = \oint T dS = T_C(S_B - S_A) + T_F(S_D - S_G) \tag{1.211}$$

Fig. 1.40: ciclo de Carnot en el plano TS

y dado que $S_B=S_G$ y $S_D=S_A$, concluimos en que

$$Q_{CICLO} = (T_C - T_F)(S_B - S_A) \tag{1.212}$$

Obsérvese que el área del gráfico de cualquier transformación en el plano TS representa el calor intercambiado en el ciclo, de la misma manera que el área de cualquier transformación en el plano $P\mathcal{V}$ representa el trabajo intercambiado en esa transformación. Y, todavía más, de la misma manera en que un ciclo recorrido en sentido de la circulación horaria en el plano $P\mathcal{V}$ representa un trabajo neto positivo, es decir, trabajo *entregado* por el sistema *al* medio externo, un ciclo recorrido en sentido de la circulación horaria en el plano TS representa calor neto positivo, esto es, calor *absorbido* por el sistema *del* medio exterior.

El calor en un ciclo es igual al área del ciclo en el plano TS (y sólo en ese plano).

- Si el ciclo se recorre en sentido horario el calor intercambiado en el ciclo es positivo.
- Si el ciclo se recorre en sentido antihorario el calor intercambiado es negativo.

Parece evidente, entonces, que todo ciclo que opere entre dos fuentes extremas T_C y T_F , y en el plano TS tenga área igual al ciclo de Carnot trabajando entre las mismas fuentes habrá de tener igual rendimiento que el ciclo de Carnot, porque en ese caso la expresión (1.140)

se verifica idénticamente. A todo ciclo con estas características se lo denomina ciclo generalizado de Carnot.

A modo de ejemplo citaremos, por su extrema sencillez, el ciclo Ericsson, que en el plano $P\mathcal{V}$ consiste en un par de isothermas conectadas por dos isobaras, como se muestra en el gráfico 1.41(a). Dado que de la misma definición de entropía en una transformación cualquiera a presión constante entre dos estados a temperaturas T_0 el inicial y T el final resulta

$$S(T) = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{n c_P}{T} dT = S_0 + n c_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \quad (1.213)$$

parece evidente que la relación inversa $T = T(S)$ será una curva exponencial a condición de que el calor específico a presión constante no varíe con la temperatura. Si esta condición (que no es exageradamente limitativa) se cumple, resulta también evidente que las curvas que conectan las isothermas en el plano TS tendrán la misma forma, porque las temperaturas extremas son las mismas, de manera que las áreas de los sectores curvos de la figura 1.41(b) son iguales y, en consecuencia, el área total del ciclo es igual al de Carnot entre esas dos fuentes. En conclusión, el rendimiento del ciclo Ericsson es igual al de Carnot y está fijado sólo por las temperaturas T_F y T_C .

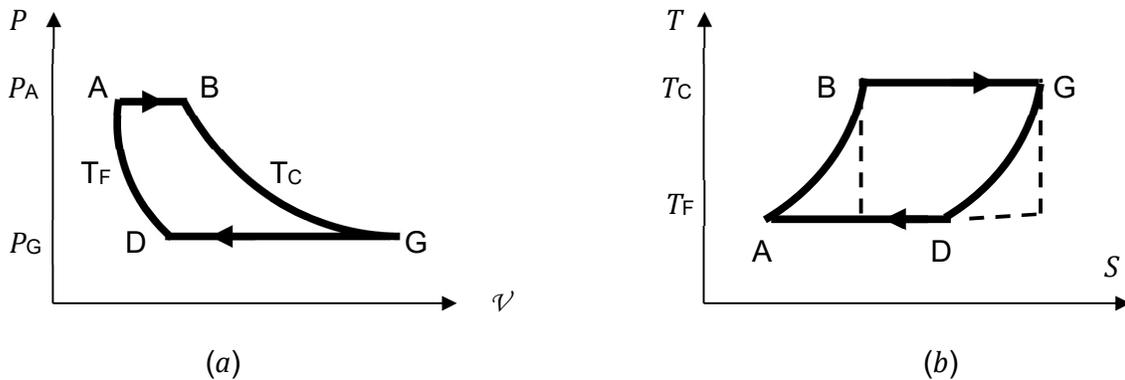


Fig. 1.41: (a) ciclo Ericsson en el plano $P\mathcal{V}$. Hemos designado con T_C y T_F las temperaturas de las isothermas porque representan las temperaturas de las fuentes caliente y fría, respectivamente. En (b) se muestra el mismo ciclo, pero en el plano TS . En líneas de puntos se muestra el ciclo Carnot operando entre las mismas fuentes.

Primer principio en términos de la entropía. Potenciales termodinámicos.

Podemos escribir el primer principio (1.103) en términos de la entropía de manera muy sencilla. Teniendo en cuenta la desigualdad (1.210) resulta de inmediato

$$dU \leq T dS - P d\mathcal{V} + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.214)$$

porque recordemos que en general tenemos que trabajar con la desigualdad (1.210) y que la igualdad sólo se verifica en un proceso reversible. Es notable que la variación de energía se exprese en términos de productos de variables intensivas por la variación de una variable extensiva[†]. Visto de otra manera, la energía vincula a un grupo de variables intensivas (T, P, μ, X) con otro grupo de variables (S, \mathcal{V}, N, L) que son extensivas y operan como variables independientes. Sin embargo no parece práctico conservar este tipo de andamiaje porque muchas veces debemos trabajar con otras variables y medir, por ejemplo, la temperatura y no la entropía, de manera tal que sería conveniente reescribir la función (1.214) en términos de las variables que nos sean más convenientes.

La función de Helmholtz o función trabajo, A , representa el máximo trabajo que un sistema puede realizar sobre su entorno en un proceso isotérmico

$$dW_{\text{sist}} \leq dA$$

El procedimiento es sencillo y resulta en un conjunto de funciones de estado que se agrupan bajo la denominación general de *potenciales termodinámicos*. Los potenciales termodinámicos generalmente se definen en términos de sólo un par de variables, que son las que se toman como independientes. Por ejemplo, dado que $T dS = d(TS) - S dT$, reescribamos la expresión (1.214) como

$$d(U - TS) \leq -S dT - P dV + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.215)$$

para definir la *energía de Helmholtz* (o *función trabajo*), A , como

$$A = U - TS \quad (1.216)$$

de manera tal que el primer principio puede escribirse en términos de la temperatura, el volumen, el número de partículas y el vector \vec{L} como

$$dA \leq -S dT - P dV + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.217)$$

Obsérvese que la función A es una función de estado porque está escrita en términos de funciones de estado y, en consecuencia, está definida para todo estado de equilibrio. Ni

[†] Vale la pena mencionar que el último término del miembro derecho de la ecuación (1.214) también involucra el producto (en este caso escalar) entre una variable intensiva y la variación de una variable extensiva; jamás lo hemos mencionado, pero podemos adelantar que \vec{L} denota ya sea al vector polarización o al vector magnetización (que dependen de la “cantidad” de dipolos o de dominios magnéticos, en cada caso), en tanto que la variable general que hemos denotado con \vec{X} se refiere al vector campo eléctrico o al vector intensidad de campo magnético. En cualquier caso, el término se refiere o bien al trabajo de polarización de un dieléctrico o al de magnetización de un medio magnetizable.

falta hacer mención, pues resulta evidente de su definición, sus unidades son las de energía. Vale la pena mencionar también que en todo proceso a temperatura constante (en el que además no haya intercambio de masa, $dN = 0$, ni campos electromagnéticos, $X = 0$) resulta

$$dA]_{T=cte} \leq -P d\mathcal{V} = -dW \quad (1.218)$$

Ahora parece evidente por qué al potencial A se lo denomina *función trabajo*. En todo proceso isotérmico de un sistema cerrado libre de campos electromagnéticos resulta $dA \leq -dW_{SIST} = dW_{ENTORNO}$. En síntesis, el trabajo que puede hacer el sistema sobre el entorno es menor (a lo sumo igual) que la variación de la función A , y será máximo cuando el proceso sea reversible. Más aún, si además de la temperatura el volumen del sistema también fuera constante, resultaría $dA \leq 0$, lo que significa que las variaciones diferenciales de la función son negativas, o sea, que la función disminuye hasta alcanzar su valor de equilibrio. En consecuencia enunciamos

En todo proceso espontáneo en un sistema cerrado a temperatura y volumen constantes la función de Helmholtz decrece hasta su valor (mínimo) de equilibrio.

Si elegimos como variables independientes la entropía y la presión (además de las otras dos variables extensivas) y tenemos en cuenta que $d(P\mathcal{V}) = P d\mathcal{V} + \mathcal{V}dP$ podemos escribir

$$d(U + P\mathcal{V}) \leq T dS + \mathcal{V}dP + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.219)$$

y definir ahora la *entalpía*, H , como

$$H = U + P\mathcal{V} \quad (1.220)$$

de manera tal que resulte

$$dH \leq T dS + \mathcal{V}dP + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.221)$$

Al igual que la función A , la entalpía es una función de estado porque está escrita en términos de funciones de estado y también está definida para todo estado de equilibrio. Sus unidades son también las de energía. Por lo demás, es fácil ver que en todo proceso a presión constante (en el que además no haya intercambio de masa, $dN = 0$, ni campos electromagnéticos, $X = 0$) resulta

$$dH]_{P=cte} \leq T dS = \delta Q \quad (1.222)$$

El calor intercambiado durante una reacción química depende del proceso, porque el calor no es una función de estado. Sin embargo, lo más frecuente es que las reacciones ocurran a presión constante, de manera tal que el calor intercambiado puede ser medido por la *entalpía de reacción*. En un proceso exotérmico será $\Delta H < 0$ (el sistema cede calor) en tanto que en un proceso endotérmico será $\Delta H > 0$ (el sistema absorbe calor)

Notemos que la entalpía cumple en los procesos a presión constante un rol análogo al que juega la energía interna en los procesos a volumen constante, y como la mayoría de los procesos químicos ocurren a presión constante se entiende por qué está tan difundido su uso. Obsérvese que en tales procesos la entalpía representa la cantidad de calor (absorbido o cedido). En un cambio de fase, por ejemplo, el cambio de entalpía del sistema es el calor latente, y en general, la variación de entalpía (por grado Kelvin) representa la capacidad calorífica del sistema a presión constante.

No es necesario definir o armar potenciales en base a sólo dos variables. En función de tres variables se define, por ejemplo, la *energía libre de Gibbs*, G , tomando

$$G = U - TS + P\mathcal{V} \quad (1.223)$$

de manera tal que el primer principio se escribe en términos de la temperatura y la presión (y de las dos variables extensivas N y L) como

$$dG \leq -S dT + \mathcal{V} dP + \mu dN + \vec{X} \cdot d\vec{L} \quad (1.224)$$

Como antes, G es una función de estado porque está escrita en términos de funciones de estado y también está definida para todo estado de equilibrio. Sus unidades son también las de energía, y siguiendo la cadena de razonamiento anterior, es fácil ver que en todo proceso a presión y temperaturas constantes (en el que además no haya intercambio de masa, $dN = 0$, ni campos electromagnéticos, $X = 0$) resulta $dG \leq 0$, lo que significa que las variaciones diferenciales de la función son negativas, o sea, que la función disminuye hasta alcanzar su valor de equilibrio. En consecuencia, enunciamos

En todo proceso espontáneo en un sistema cerrado a temperatura y presión constantes la función de Gibbs decrece hasta su valor (mínimo) de equilibrio.

Hemos encontrado hasta aquí que todos los potenciales tienen unidades de energía y que siempre se escriben en términos de al menos una variable intensiva y una variable extensiva (de hecho, existe un postulado, conocido como teorema de Gibbs – Duhem, que demuestra que es imposible construir potenciales termodinámicos en función sólo de

variables intensivas) y que los estados de equilibrio están representados por valores mínimos de los potenciales termodinámicos.

Para conceptualizar esta idea pensemos así: parece evidente que un sistema que se halla en equilibrio termodinámico con su entorno es incapaz de evolucionar *espontáneamente* a otro estado, que a la luz de la expresión (1.214) para la energía interna se reduce a su vez a la condición de que no varíe ninguna de las variables extensivas del sistema. Ahora bien, si fijamos los valores de las variables extensivas (y en consecuencia hacemos $dS = dV = dN = dL = 0$) resulta que la tendencia al equilibrio espontáneo sólo puede producirse si el sistema puede acceder a un estado de menor energía (porque en ese caso es $dU \leq 0$). La energía no puede llegar a valer $-\infty$, de manera tal que deja de decrecer en algún valor a partir del cual no puede seguir disminuyendo. Ese es precisamente el valor de equilibrio, y claramente el estado de equilibrio corresponde a un mínimo de la energía.

Las expresiones (1.217), (1.221) y (1.223) muestran que el mismo criterio puede aplicarse a los otros potenciales termodinámicos. Y que todo proceso espontáneo está caracterizado por una desigualdad de la forma

$$\Delta \begin{Bmatrix} H \\ G \\ A \end{Bmatrix} < 0 \quad (1.225)$$

V y U constantes (sistema aislado) $\Delta S > 0 \rightarrow$ proceso espontáneo $\Delta S = 0 \rightarrow$ sistema en equilibrio $\Delta S < 0 \rightarrow$ proceso no espontáneo	V y T constantes $\Delta A < 0 \rightarrow$ proceso espontáneo $\Delta A = 0 \rightarrow$ sistema en equilibrio $\Delta A > 0 \rightarrow$ proceso no espontáneo
T y P constantes $\Delta G < 0 \rightarrow$ proceso espontáneo $\Delta G = 0 \rightarrow$ sistema en equilibrio $\Delta G > 0 \rightarrow$ proceso no espontáneo	P y S constantes $\Delta H < 0 \rightarrow$ proceso espontáneo $\Delta H = 0 \rightarrow$ sistema en equilibrio $\Delta H > 0 \rightarrow$ proceso no espontáneo
V y S constantes $\Delta U < 0 \rightarrow$ proceso espontáneo $\Delta U = 0 \rightarrow$ sistema en equilibrio $\Delta U > 0 \rightarrow$ proceso no espontáneo	

Obsérvese que la única función de estado que es positiva en un proceso espontáneo es la entropía, y que el criterio además se aplica solamente en sistemas aislados. Si se prefiere, la expresión (1.214) implica que un proceso es espontáneo si la entropía crece a volumen constante (no se intercambia trabajo), a energía constante (tampoco se

intercambia calor) y a masa constante ($dN = 0$), o sea, el criterio es aplicable sólo en un sistema aislado.

Ejemplo 1.21: Sea un gas ideal que realiza una expansión isotérmica. Calculemos las variaciones de las funciones de Helmholtz y de Gibbs, ΔA y ΔG .

En la expansión isotérmica es $\Delta U = 0$, y siendo $T = \text{constante}$, la variación de entropía la calculamos como

$$\Delta S = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\delta Q_{ISOT}}{T} = nR \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (1.226)$$

Obsérvese que siendo $P_2 < P_1$ (el gas se expande) la ecuación anterior es definida negativa y resulta

$$\Delta A = -T \Delta S = -nRT \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (1.227)$$

Para calcular ΔG tengamos en cuenta que a partir de su definición (1.197) también puede escribirse como

$$G = A + P\mathcal{V} \quad (1.228)$$

de manera tal que será

$$\Delta G = \Delta A + \Delta(P\mathcal{V}) \quad (1.229)$$

Pero en una isoterma el producto $P\mathcal{V}$ es constante, de manera tal que su variación es nula y, en consecuencia, resulta $\Delta G = \Delta A$.

Ejemplo 1.22: Sea ahora un gas cuya ecuación de estado pretende modelizar el volumen propio \mathcal{V}_0 que ocupan las moléculas del gas, de manera tal que la escribimos como

$$P(\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) = nRT \quad (1.230)$$

Supongamos que este gas también realiza una expansión isotérmica, y calculemos como antes las variaciones de las funciones de Helmholtz y de Gibbs, ΔA y ΔG .

Observemos ante todo que de su misma definición se desprende que la energía de Helmholtz no habrá de cambiar, sencillamente porque la función trabajo depende sólo de

la energía y de la entropía. En cambio, la función de Gibbs sí habrá de modificarse porque ahora resulta

$$\Delta G = \Delta A + \Delta(P(\mathcal{V} - \mathcal{V}_0)) = \Delta A + \Delta(P\mathcal{V}) - \mathcal{V}_0\Delta P \quad (1.231)$$

y en consecuencia será

$$\Delta G = nR \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - \mathcal{V}_0(P_2 - P_1) \quad (1.232)$$

Dilatación térmica

En la sección 1.3 habíamos mencionado que los estados de agregación se relacionan, entre otros parámetros, a las distancias interatómicas o intermoleculares y a las fuerzas de cohesión entre átomos o moléculas. Sabemos que al entregar energía a un cuerpo las distancias interatómicas se agrandan, provocando de alguna manera la dilatación de las uniones atómicas y/o moleculares. En la sección 1.4 introdujimos la idea de temperatura como medida macroscópica y estadística del estado cinético de un sistema, una suerte de valor medio de la energía cinética interna de sus átomos y moléculas. En conjunto, parece evidente que la variación de temperatura de un cuerpo debe relacionarse con la modificación de sus propiedades estructurales (dureza, maleabilidad, etcétera) aun sin necesidad de que ocurra un cambio de estado, y que por lo demás debe modificar sus dimensiones propias porque ahora los estados de equilibrio habrán de ocurrir con la estructura atómica dilatada (en caso de que se le entregue calor) o contraída (en caso de que el cuerpo ceda calor). Al conjunto de modificaciones de las dimensiones de un cuerpo por efectos de variación de la temperatura se lo denomina *dilatación térmica*.

En el caso específico de los cuerpos sólidos debemos considerar que la energía del cuerpo es básicamente la energía de las oscilaciones de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio. En la red cristalina los átomos y moléculas ocupan una determinada posición de equilibrio y las traslaciones, en un sentido estricto, son prácticamente inobservables. De manera tal que por un lado esta idea nos habilita a esperar variaciones de tamaño mucho menores que el tamaño del cuerpo mismo, es decir, $\Delta L \ll L$, y por el otro nos permite considerar que en un sólido la modificación de la longitud con la temperatura es un fenómeno lineal, es decir, si para un dado valor ΔT de variación de la temperatura el cuerpo modifica en ΔL su longitud, para un valor $2\Delta T$ lo modificará en $2\Delta L$. Dicho de otra manera, la relación entre la longitud L y la temperatura T puede expresarse como

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T \quad (1.233)$$

donde α es un coeficiente de proporcionalidad llamado coeficiente *de dilatación lineal*. Sus unidades, de manera casi evidente son las de una inversa de temperatura, y debemos apresurarnos a decir que su valor es del orden de $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Pero pequeños valores del coeficiente de dilatación no implican problemas menores de dilatación. Por ejemplo, el coeficiente de dilatación del hierro es $\alpha_{Fe} = 1,2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Imaginemos un puente de hierro de 50 m de longitud en una región de clima extremo, en el que la variación de temperatura entre el día y la noche sea de, digamos, 30°C . En tal caso tendríamos que esperar una variación del orden $\Delta L \sim 2\text{cm}$ y, en consecuencia, montar los extremos del puente sobre sistemas deslizantes para poder mantener entera la estructura.

Parece evidente que la modificación de un cuerpo no ocurre en una única dirección, de manera tal que la expresión (1.224) parece adecuada sólo para sólidos “unidimensionales” (con esto queremos decir sólidos cuyo espesor es mucho menor que su longitud). En dos y tres dimensiones parece razonable definir las modificaciones de la superficie y el volumen del cuerpo sólido como

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \beta \Delta T \quad (1.234)$$

$$\frac{\Delta \mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} = \gamma \Delta T \quad (1.235)$$

donde β y γ son los coeficientes de dilatación superficial y dilatación volumétrica, respectivamente. En rigor, los coeficientes definidos en las expresiones (1.233) – (1.235) deben redefinirse indicando explícitamente que la presión se mantiene constante, es decir, debemos escribir

$$\alpha = \left. \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \right]_{P=cte} \quad (1.236)$$

$$\beta = \left. \frac{1}{S} \frac{dS}{dT} \right]_{P=cte} \quad (1.237)$$

$$\gamma = \left. \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{dT} \right]_{P=cte} \quad (1.238)$$

Es cierto que la presión en un cuerpo rígido no es variable, pero las definiciones anteriores son generales y pueden aplicarse a cuerpos que pueden ser fluidos. A propósito, en virtud del valor comparativamente pequeño del coeficiente lineal podemos escribir el

coeficiente β en función de α . Para ello, pensemos que el cambio de superficie por dilatación puede escribirse como

$$\begin{aligned}\Delta S &= S' - S_0 = L'_1 L'_2 - L_1 L_2 = L_1 L_2 [(1 + \alpha \Delta T)^2 - 1] \approx \\ &\approx L_1 L_2 [(1 + 2\alpha \Delta T) - 1] = (2\alpha) S_0 \Delta T\end{aligned}\quad (1.239)$$

donde hemos usado la aproximación

$$(1 + \varepsilon)^q \approx 1 + q\varepsilon \quad \text{para } \varepsilon \ll 1 \quad (1.240)$$

Comparando las ecuaciones (1.234) y (1.239) parece evidente que resulta $\beta = 2\alpha$. Del mismo modo, usando argumentos absolutamente similares, puede aproximarse el coeficiente de dilatación cúbica como $\gamma = 3\alpha$.

Las aplicaciones prácticas de los fenómenos de dilatación son numerosas. Sin ir más lejos, todo aquel que haya recorrido una carretera o haya estado en una superficie embaldosada a la intemperie habrá notado que el conjunto se divide en bloques separados por líneas que se denominan *juntas de dilatación*. El objeto de estas juntas (que en los ejemplos precedentes se rellenan con asfalto) es compensar la diferencia de tamaño de las superficies que se produce por insolación. Otro ejemplo directo lo constituyen los termostatos elementales, habituales en los electrodomésticos como los equipos de aire acondicionado, en los que un par de varillas de metales diferentes (y en consecuencia diferente coeficiente de dilatación) se sueldan a un soporte común (véase la figura 1.42).



Fig. 1.42: a temperatura ambiente las varillas del par bimetalico tienen la misma longitud (figura (a)). Al aumentar la temperatura una de las varillas se dilata más que la otra, obliga al conjunto a arquearse y el circuito eléctrico se abre (figura (b))

El principio de funcionamiento es muy sencillo. Cuando el par de varillas (*par bimetalico*) se calienta, una de las varillas se dilata más que la otra, de manera tal que el equilibrio del sistema se logra cuando el conjunto se arquea, provocando de esta manera que el circuito eléctrico se interrumpa. Ni falta hace decirlo, el conjunto de aplicaciones industriales y cotidianas de este fenómeno no se agota en estos pocos ejemplos.

Ejemplo 1.23: Un bloque de de hierro cuya masa es $m = 2 \text{ kg}$ se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 25°C a 60°C . Sabiendo que el coeficiente de dilatación lineal del hierro vale $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, que su densidad es $\delta = 7874 \text{ kg/m}^3$ y su calor específico $c = 440 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, calculemos la cantidad de trabajo que se le entrega para dilatarlo y la energía que intercambia en forma de calor.

Queda claro que al calentarse el bloque se dilata cúbicamente, esto es, podemos asociar el trabajo requerido para deformarlo al coeficiente de dilatación cúbica en la forma

$$W = -P\Delta\psi = -P(3\alpha v_0\Delta T) = -3P\alpha \left(\frac{m}{\delta}\right)\Delta T = -0,00324 \text{ J} \quad (1.241)$$

donde hemos aproximado el coeficiente de dilatación cúbica $\gamma \approx 3\alpha$. Obsérvese que el trabajo es negativo porque estamos calculando el que se le entrega para dilatarse. Por lo demás, parece evidente que la cantidad de calor que debemos entregar al bloque de hierro para elevarle 35°C su temperatura vale

$$Q = m c \Delta T = 30.800 \text{ J} \quad (1.242)$$

Es instructivo comparar los valores de trabajo y calor dados por las ecuaciones (1.232) y (1.242). Puede verse que el calor que se entrega se transforma prácticamente todo en energía interna.

La ley de Fourier en coordenadas ortogonales

En la sección 1.10.1 discutimos el mecanismo de transporte del calor por conducción. La expresión central, conocida como ley de Fourier, es la ecuación (1.54), que aquí reproducimos

$$d\phi_Q = -\kappa dS \frac{dT}{d\ell}$$

Parece evidente que esta ecuación está expresada en coordenadas rectangulares porque estamos tomando las variaciones de la temperatura en la dirección del eje de una varilla rectangular. Sin embargo, en sinnúmero de aplicaciones los conductores son cilíndricos, de manera tal que vale la pena prestar un poco de atención a tal posibilidad. Para ello, notemos que cuando el calor fluye en la dirección radial, y esto debido a que la

fuente de alguna manera se halla a lo largo de todo el tubo (típicamente, un caño que transporta agua caliente) la expresión (1.54) puede escribirse en la forma

$$d\phi_Q = -\kappa 2\pi R dL \frac{dT}{dR} \quad (1.243)$$

porque ahora la dirección del flujo es la dirección radial. En el ejercicio 4 se propone la integración de esta ecuación en un caso específico. Es interesante notar que las ecuaciones (1.54) o (1.243) están bien escritas, no hay duda, pero no parecen estar completas, porque el flujo de calor no tiene por qué ocurrir en una única dirección. Para decirlo de otra forma, en el problema de la barra rectangular de la figura 1.13 podría haber una fuente lateral, o bien podríamos remover la hipótesis implícita de que no existe flujo más que en una única dirección (hipótesis que, por lo demás, la experiencia cotidiana parece negarse a aceptar).

Lo que debemos hacer es pensar el flujo de calor no en términos de la variación unidireccional de la temperatura sino en términos de la dirección de *máxima variación* de la temperatura, y luego, sí, proyectarla en tres direcciones, por conveniencia y comodidad mutuamente perpendiculares. Precisamente esa es la operación que sobre un campo escalar realiza el gradiente, de manera tal que debemos escribir la ecuación (1.54) en la forma

$$d\phi_Q = -\kappa dS \nabla T \quad (1.244)$$

Ahora sí, la ecuación (1.244) parece completa, y podemos expresarla en las coordenadas que mejor se adapten a la geometría del problema que debemos manejar. Por completitud escribiremos la expresión (1.244) en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, no sin antes mencionar que el conjunto de coordenadas curvilíneas ortogonales no se agota en estas tres.

Sea entonces un campo escalar $G(x_1, x_2, x_3)$ donde (x_1, x_2, x_3) denota las tres direcciones mutuamente perpendiculares elegidas, es decir, representan la terna (x, y, z) en coordenadas cartesianas, la terna (R, ϕ, z) en coordenadas cilíndricas y la terna (r, θ, ϕ) en coordenadas esféricas. Luego, si denotamos por \hat{e}_{x_n} el versor en la dirección x_n , el gradiente de la función G (∇G o *grad G*) en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas respectivamente se escribe como

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial G}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial G}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1.245)$$

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial G}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1.246)$$

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (1.247)$$

Por ejemplo, para arribar a la expresión (1.54), sin mencionarlo hemos usado la identidad (1.245) pensando que el calor fluye en una única dirección, digamos, x , hemos adoptado $G \equiv T$ y $\partial T / \partial y = \partial T / \partial z = 0$.

Ejemplo 1.24: Imaginemos una pequeña barra cuadrada de lado $a = 0,4\text{cm}$ y longitud $L = 5\text{cm}$ que conecta dos fuentes caloríficas a 300K y 380K respectivamente. La barra está forrada adiabáticamente salvo, por supuesto, en los contactos con las fuentes. Calculemos el valor de la potencia calorífica que se transporta suponiendo que el coeficiente de conductividad térmica de la barra vale $\kappa = 120\text{ W/mK}$ y que su coeficiente de dilatación lineal vale $\alpha = 2 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$

Podemos aplicar simultáneamente las expresiones (1.54) y (1.236) para escribir

$$|\phi_Q| = \kappa S \frac{\Delta T}{L_0(1 + \alpha \Delta T)} \quad (1.248)$$

porque en este caso las dimensiones de la barra y la envoltura adiabática nos permiten pensar el flujo en una única dirección. Obsérvese que el cálculo lleva inmediatamente al valor $\phi_Q = 306,71\text{ W}$. Si no consideráramos la dilatación de la barra el valor calculado sería $307,20\text{ W}$, y parece evidente que la diferencia es apenas del orden del 0,2%.

Ejemplo 1.25: Una bolilla metálica de muy pequeñas dimensiones se calienta hasta alcanzar una temperatura T_{INT} . Se la rodea entonces con un casquete esférico de radio interior r_{INT} y radio exterior r_{EXT} de manera tal que la bolilla queda en el centro de la configuración. Si la conductividad del casquete es κ , calculemos el valor de la potencia calorífica que se transporta hacia el medio externo, que se halla a $T_{EXT} \neq T_{INT}$, en los primeros instantes.

La necesidad de cálculo *en los primeros instantes* es central porque la bolilla irá enfriándose. Mientras tanto, el flujo puede considerarse constante. Por lo pronto, no estamos teniendo en cuenta el transporte por radiación a través del espacio que media entre la bolilla y el casquete, aunque no parece de interés a los efectos prácticos. Por lo demás, de acuerdo a las expresiones (1.54) y (1.237), teniendo en cuenta la simetría angular de la configuración, lo que hace que el flujo no dependa ni de θ ni de ϕ , parece evidente que resulta

$$|d\phi_Q| = \kappa 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \quad (1.249)$$

cuya integración es inmediata por la hipótesis de flujo constante y resulta

$$|\phi_Q| = \frac{4\pi\kappa (T_{INT} - T_{EXT})}{\left(\frac{1}{r_{INT}} - \frac{1}{r_{EXT}}\right)} \quad (1.250)$$

Una aproximación a los gases reales

Hemos intentado definir un gas ideal diciendo que se trata de un gas “muy diluido”, o de muy baja densidad, pretendiendo de alguna forma que las colisiones son infrecuentes (y elásticas, esto es, que conservan la energía). Luego, la hipótesis de gas ideal requiere de moléculas puntuales en las que la energía de interacción sea despreciable.

Por esta razón los gases reales no responden exactamente a la ecuación de estado (1.8) salvo en un limitado rango de presiones, de hecho a bajas presiones. Si la presión del gas aumenta (o si la temperatura disminuye) lo suficiente, las hipótesis que nos llevaron a la ecuación de Clapeyron dejan de tener sentido y la teoría debe reformularse consistentemente teniendo en cuenta el tamaño mismo de las moléculas y las fuerzas que las moléculas se ejercen al estar próximas entre sí.

En principio podemos aceptar que las variables de estado siguen siendo las mismas, aunque para tener en cuenta el volumen propio del gas es conveniente trabajar en términos del *volumen molar*, esto es, el volumen real ocupado por n moles del gas, definido como $v = V/n$.

Si ahora sometemos un gas a diferentes presiones manteniéndolo a temperatura constante obtenemos las curvas isotermas de ese gas real. En el caso de un gas ideal sabemos que el producto Pv debe mantenerse constante; por ejemplo, si la presión se duplica el volumen debe reducirse a la mitad, es decir, si graficamos el producto Pv en función de la presión P debemos obtener una recta horizontal. Sin embargo, las isotermas empíricas tienen la forma cualitativa que se muestra en la figura 1.43, lo que implica que el volumen molar decrece más rápido que el aumento de presión, al menos hasta un cierto valor de presión a partir del cual esta tendencia ya no se observa.

Algunas conclusiones pueden sacarse a partir de este comportamiento. En primer lugar, la razón por la que existe un mínimo en las curvas de la figura 1.43 sólo puede deberse a la manera en que las moléculas interactúan entre sí, que hace que las fuerzas cambien de atractivas a repulsivas en función de la distancia de separación. A presiones muy bajas las moléculas ocupan un volumen propio mucho menor que el volumen del

recipiente que los contiene, de modo tal que las colisiones son esporádicas y el gas se comporta como ideal.

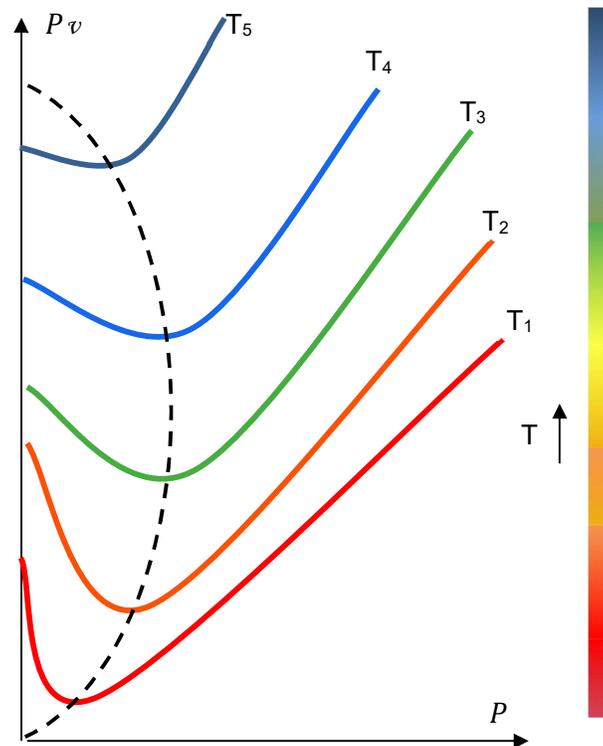


Fig. 1.43: descripción cualitativa de las isoterma en el plano $Pv - P$. El hecho de que exista un mínimo indica que las fuerzas intermoleculares cambian su carácter, en tanto que el desplazamiento continuo de los mínimos (marcado con una línea de puntos) indica que a muy bajas presiones los gases reales se comportan de manera similar a los gases reales, porque ese mínimo desaparece.

Cuando la presión aumenta la distancia intermolecular disminuye, pero mientras que a presiones intermedias la fuerza resulta atractiva, a presiones elevadas se torna repulsiva. La razón puede verse en la figura 1.44, en la que hemos graficado cualitativamente la energía potencial en términos de la distancia intermolecular. La fuerza se define en términos del gradiente de la energía potencial intermolecular, y en este caso alcanza con expresarla como $F = -dE/dr$. Cuando el gradiente es negativo las fuerzas resultan repulsivas, en tanto que para gradientes positivos las fuerzas son atractivas. En consecuencia, a presiones intermedias, para las cuales las moléculas se encuentran en promedio separadas por distancias de unos pocos diámetros moleculares (por encima de un valor crítico r_0) las fuerzas de atracción son predominantes. Por debajo del valor crítico r_0 el gradiente de potencial cambia de signo y la fuerza se torna repulsiva.

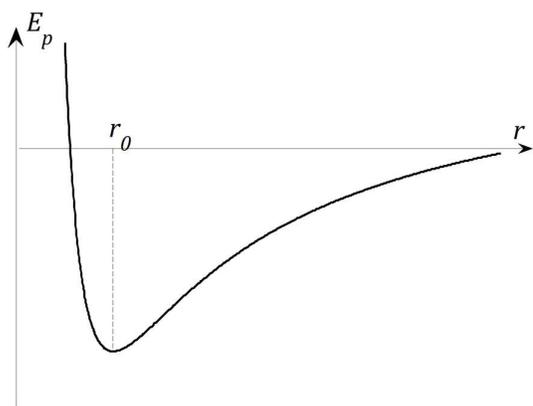


Fig. 1.44: energía potencial intermolecular en función de la distancia r entre moléculas. La región $r > r_0$ corresponde a presiones decrecientes.

En segundo lugar, los mínimos de las isothermas de la figura 1.43 se desplazan con continuidad, y ese mínimo desaparece a presión muy baja (o a valores de temperatura comparativamente elevados), como indica la curva punteada que conecta los mínimos. Eso significa que a partir de una cierta temperatura las curvas isothermas son monótonas crecientes con la presión.

Sabemos que en algún límite debe valer la ecuación (1.6) (ley de Clapeyron), de manera tal que el cociente Pv/T debe tender a un valor constante, a saber, R , la constante universal de los gases. De hecho, si

graficamos el coeficiente de compresibilidad $K = Pv/RT$ en función de la presión, las curvas se normalizan y tienden todas a $K = 1$ para $P \rightarrow 0$, como mostramos en la figura 1.45, donde se grafican las isothermas correspondientes al nitrógeno. La línea horizontal representa el coeficiente de compresibilidad de un gas ideal. Obsérvese de paso que las curvas tienen la forma general de las isothermas de la figura 1.43.

Cada una de las curvas de la figura 1.45 (o de la figura 1.43) es una función de la presión, diferente para cada temperatura. Si en general llamamos $G(T)$ a una de estas funciones, parece evidente que podremos desarrollar a cada una de ellas en una serie de la forma

$$Pv = RT \left[1 + \frac{\partial G}{\partial P} P + \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} P^2 + \dots \right] \tag{1.251}$$

A orden cero, claramente, recuperamos la ecuación de los gases ideales. Este límite supone que todas y cada una de las funciones del desarrollo son constantes con la presión (aunque no necesariamente independientes de la temperatura), esto es, no tiene en cuenta la presión extra que deviene de las interacciones entre las moléculas del gas, y esto sólo puede ocurrir si las moléculas ocupan un volumen específico mucho menor que el del recipiente (o sea, es un gas muy diluido). En la figura 1.45.b mostramos la isoterma de 150K del nitrógeno comparada con el desarrollo a segundo orden de la aproximación (1.251) para $\partial G/\partial P = 0,1183 \text{ atm}^{-1}$ y $\partial^2 G/\partial P^2 = -0,2183 \text{ atm}^{-2}$.

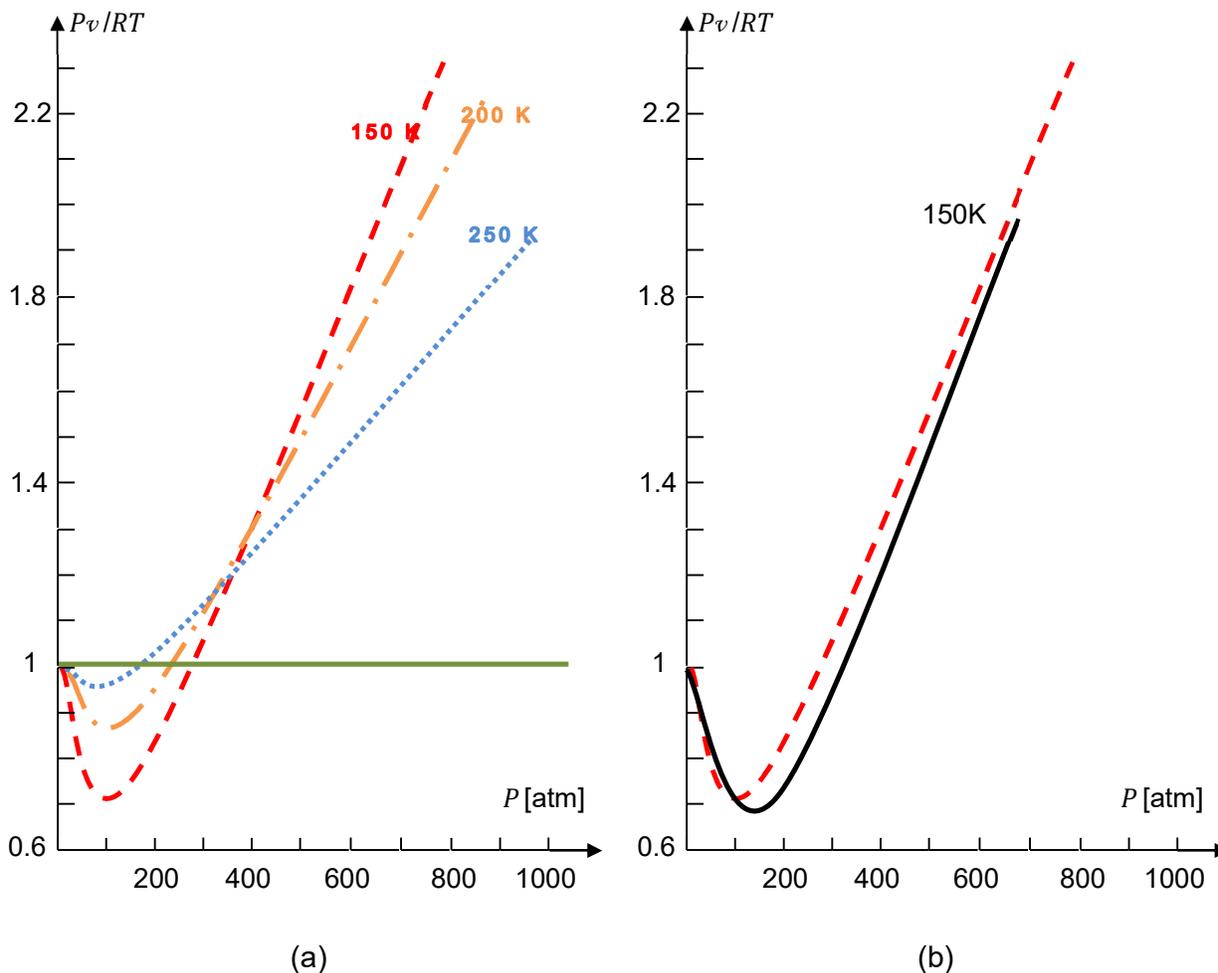


Fig. 1.45: el panel de la izquierda muestra el factor de compresibilidad del nitrógeno a diferentes temperaturas. Obsérvese que a medida que la temperatura crece el mínimo de las curvas se desplaza hacia la izquierda. La recta horizontal representa el factor K para un gas ideal. En el panel (b) se compara la isoterma de 150K con la ecuación que resulta de tomar sólo los primeros tres términos del desarrollo (1.242), esto es, asumiendo una dependencia cuadrática del factor de compresibilidad en términos de la presión.

Una forma diferente de tener en cuenta el volumen propio de las moléculas y sus interacciones fue introducida a fines del siglo XIX por Johannes van der Waals, basado en la observación de que las isothermas de un gas son hipérbolas en el plano PV sólo por encima de una cierta temperatura crítica T_c (isothermas de Andrews). Para temperaturas inferiores estas curvas reflejan el cambio de estado de la fase de vapor a líquido (aquí los términos vapor y gas se refieren a distintos estados termodinámicos y no diferentes estados de agregación) como ilustramos en la figura 1.46. Una de las hipótesis centrales del modelo de van der Waals consiste en considerar a las moléculas como esferas con volumen propio (*covolumen*) de manera tal que el volumen real del gas es el del recipiente, V , menos el de las moléculas, b . Por otro lado, debido a la interacción con las paredes, y producto de

colisiones que no son idealmente elásticas, la presión que se mide es menor que la real, de

manera tal que a la presión del gas P debe sumarse un término adicional P' . En síntesis, para n moles de un gas la ecuación de van der Waals resulta en la forma

$$\left(P + \frac{n^2 a}{v^2}\right)(v - nb) = nRT \quad (1.252)$$

donde los coeficientes a y b se calculan para cada gas y para cada temperatura a partir del punto de inflexión de la isoterma de temperatura crítica. En ese punto, debe cumplirse

$$\left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_T = 0 \quad (1.253. a)$$

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right|_T = 0 \quad (1.253. b)$$

de donde resultan los coeficientes a y b en términos de los valores de presión, volumen y temperatura en el punto crítico, a saber

$$a = \frac{27}{8} RT_c b \quad (1.254. a)$$

$$a = 27P_c b^2 \quad (1.254. b)$$

$$b = \frac{V_c}{3n} \quad (1.254. c)$$

La ecuación que resulta es una cúbica que aproxima a los valores medidos sólo a temperaturas moderadas, aunque posiblemente el mérito principal de este modelo sea el predecir la existencia de una presión a la que coexisten las fase líquida y de vapor.

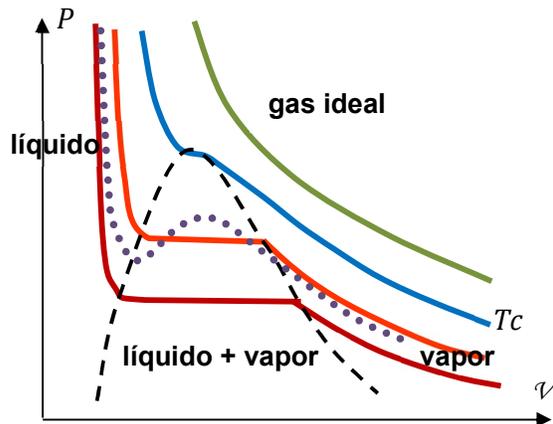
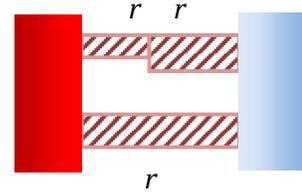


Fig. 1.46: esquema cualitativo de las isothermas de Andrews. La línea de guiones representa el continuo de volúmenes y presiones a los que ocurre el cambio de estado a cada temperatura. La línea de puntos es una isoterma de van der Waals. Obsérvese que por encima de la temperatura T_c las curvas son las que corresponden a un gas ideal.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Los recipientes de la figura se hallan conectados térmicamente a través de 3 barras de igual resistencia térmica r . La resistencia térmica equivalente del conjunto es R . Si los focos se conectaran con las tres barras en serie, halle la expresión de la resistencia térmica equivalente en función de R . ¿Cambia el resultado si intercambia de lugar las fuentes?



Ejercicio 2: Las ollas de aluminio tienen la ventaja de que no se oxidan y son relativamente económicas. ¿Serán eficientes a la hora de conservar el calor? Para tener una idea,

- calcule la densidad de potencia calorífica que fluye por una lámina de aluminio de 2 mm de espesor ($\kappa_{AL} = 209,3 \text{ W/m K}$) si la diferencia de temperatura entre sus lados es de 20°C ;
- calcule ahora la potencia calorífica para una olla de $0,6 \text{ m}^2$ de superficie (incluyendo la tapa);
- la calculada en (b) es la pérdida de calor por conducción. Estime ahora la pérdida de calor por radiación ($\varepsilon_{Al} = 0,05$) suponiendo que la temperatura ambiente es de 20°C y la olla está llena de agua a 40°C . Discuta si la pérdidas de calor por los dos mecanismos son comparables.

Ejercicio 3: La mitad del espesor de una pared que separa dos ambientes es de hierro, en tanto que la otra mitad es de madera. Sabemos que el hierro es mejor conductor del calor que la madera. Si la temperatura del lado del hierro es de 40°C y del lado de la madera es de 10°C , discuta si la temperatura de la unión hierro-madera es mayor, menor o igual a 25°C (que es el valor promedio entre las temperaturas a ambos lados de la pared).

Ejercicio 4: Demuestre que la potencia calorífica ϕ_Q que fluye a través de un caño cilíndrico de longitud L , radio interno R_{INT} y radio externo R_{EXT} , cuyo coeficiente de conductividad térmica es κ , en el caso en que ϕ_Q sea constante vale

$$\phi_Q = \frac{2\pi\kappa L (T_{EXT} - T_{INT})}{\ln(R_{EXT}/R_{INT})}$$

Ejercicio 5: Suponga que un termotanque cilíndrico de radio de la base $R=40 \text{ cm}$ y $1,50 \text{ m}$ de altura contiene 750 l de agua a 70°C y que esa temperatura se mantiene constante. El termotanque está recubierto con una capa de poliestireno ($\kappa = 0,03 \text{ kcal / hora m }^\circ\text{C}$) de 1cm de espesor y la temperatura externa es de 20°C . Suponiendo que la base y la tapa están idealmente aisladas térmicamente,

- calcule la cantidad de calor que se pierde en una hora;
- estime la temperatura del agua al cabo de diez minutos si se apagara el termotanque y discuta si el poliestireno es buen aislante térmico.

Ejercicio 6: Un bloque macizo cúbico cuya superficie es de $0,06 \text{ m}^2$ emite una potencia de radiación de 25 W , y su coeficiente de emisividad es $\varepsilon=0,3$. Calcule:

- la temperatura del bloque;

b) la potencia que habrá de radiar si el bloque se corta a la mitad.

Ejercicio 7: El recipiente A de la figura contiene 400g de agua líquida a 363K, el B contiene 300g de agua sólida a 270K. Los recipientes se conectan térmicamente a través de una varilla de cobre de 2 cm de largo y 5cm² de sección en el momento en que se agregan 10g de hierro a 473K al recipiente B. Asumiendo que los recipientes, salvo en el contacto con la varilla, son rígidos y adiabáticos, y que la varilla está recubierta por un aislante térmico ideal



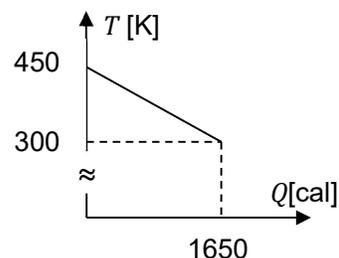
- a) calcule el estado del recipiente B (como si estuviera aislado) luego de arrojar el hierro (asuma que el calor específico del hierro se mantiene constante, $c_{Fe} = 0,11 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$);
- b) calcule la temperatura de equilibrio del sistema (puede despreciar el calor absorbido por el cobre);
- c) estime el tiempo mínimo que lleva alcanzar el equilibrio sabiendo que la conductividad térmica del cobre vale $k_{Cu} = 0,92 \text{ cal / } ^\circ\text{C cm seg}$.

Ejercicio 8: Un recipiente de 50 g con capacidad calorífica $c_r = 0,6 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ contiene 0,1 litro de agua líquida a 30°C y está recubierto por una cubierta adiabática. Se agregan 500g de agua a 53°C.

- a) halle la temperatura del sistema cuando se alcance el equilibrio;
- b) calcule la variación de entropía del recipiente.

Ejercicio 9: Dentro de un calorímetro de equivalente en agua $\pi = 50\text{g}$ hay 300 g de agua a 10°C. Se agregan 200 g de una sustancia a 80°C, y la temperatura final de equilibrio es de 17°C. Calcule el valor del calor específico de la sustancia.

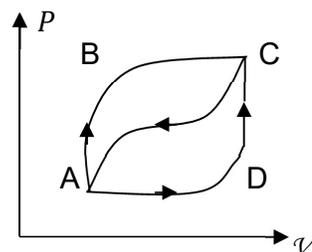
Ejercicio 10: El gráfico muestra la cantidad de calor que cede una sustancia al enfriarse. Se coloca esta sustancia a 400K en contacto térmico con 100g de aluminio ($c_{AL} = 0,21 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$) a 320K. Calcule el valor de la temperatura de equilibrio del sistema.



Ejercicio 11: En un calorímetro ideal se tienen 100g de hielo a -6°C . Se agrega agua líquida hasta obtener 1 l de agua líquida a 343K. Calcule la temperatura a la que se hallaba el agua que se agregó. ($c_{HIELO} = 0,5 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$; $L_f = 80 \text{ cal/g}$; $L_v = 540 \text{ cal/g}$).

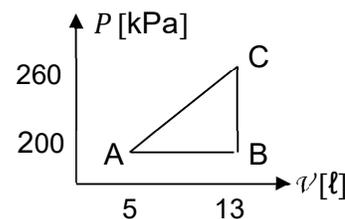
Ejercicio 12: Un recipiente con capacidad calorífica despreciable que contiene 1 litro de agua líquida a 30°C se coloca dentro de un recipiente adiabático que contiene 500g de hielo a -16°C . Halle la temperatura y la composición del sistema cuando se alcance el equilibrio. (Adopte $c_{HIELO} = 0.5 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$, $L_f = 80 \text{ cal/g}$).

Ejercicio 13: La figura muestra diversos procesos que realiza un gas ideal monoatómico. En el proceso ABC el sistema recibe 500 kJ de calor y realiza un trabajo neto de 350 kJ.



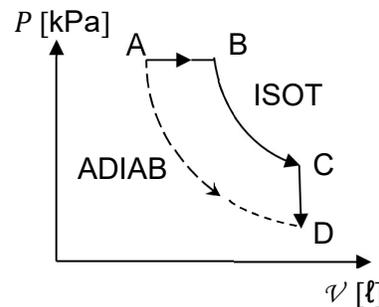
- a) calcule el calor entregado al sistema en el proceso ADC si el trabajo que realiza el sistema es de 220 kJ;
- b) si el sistema evoluciona entre C y A por el camino intermedio y recibe 480 kJ de trabajo neto, discuta si el sistema absorbe o libera calor. Justifique.

Ejercicio 14: Un mol de gas ideal evoluciona de acuerdo al ciclo ABCA que se muestra en la figura.



- a) calcule el valor del trabajo que el gas realiza por ciclo;
- b) indique los signos de calor, trabajo, energía y entropía en cada una de las transformaciones.

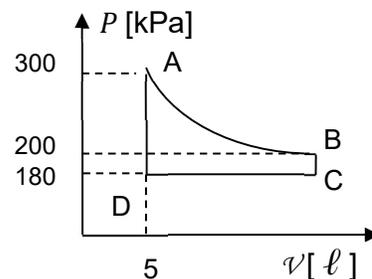
Ejercicio 15: El gráfico Pv muestra 2 evoluciones, ABCD y AD, que realizan 3 moles de gas ideal diatómico ($c_p = 7R/2$; $c_v = 5R/2$). Del siguiente conjunto de afirmaciones indique las verdaderas.



- a) $\Delta U_{AD} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD}$
- b) $Q_{BC} = Q_{AD}$
- c) $W_{AB} < W_{CD}$
- d) $\Delta U_{BC} > |\Delta U_{CD}|$
- e) $W_{BC} = Q_{BC}$
- f) $W_{BC} = 0$
- g) $W_{AD} > 0$
- h) $\Delta S_{AD} > 0$
- i) $Q_{CD} < 0$
- j) $Q_{AD} = W_{AD}$

Ejercicio 16: Suponga que en la evolución del ejercicio anterior vale $P_A = 831$ kPa, $P_D = 400$ kPa, $v_B = 9$ l y $v_C = 15$ l. Calcule la variación de entropía del gas en la transformación CD.

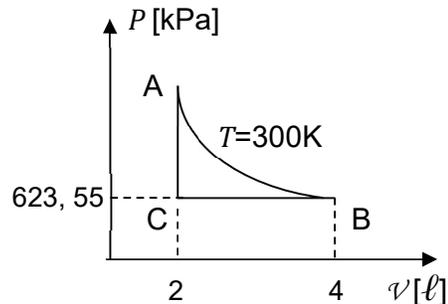
Ejercicio 17: Una máquina térmica realiza el ciclo ADCBA de la figura, transformando dos moles de un gas ideal monoatómico (BA es una isoterma).



- a) calcule el trabajo realizado por el sistema en cada transformación y en todo el ciclo;
- b) calcule la eficiencia de la máquina;
- c) realice el gráfico PT del ciclo.

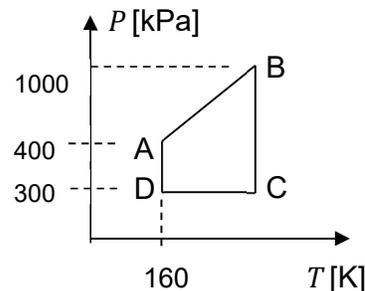
Ejercicio 18: La figura muestra la relación Pv de un ciclo ABCA de una máquina cíclica que trabaja transformando 1 mol de un gas ideal diatómico.

- calcule el valor de la presión en el estado A;
- calcule el valor del trabajo en cada transformación;
- calcule el valor del calor intercambiado en cada transformación;
- calcule la variación de energía en cada transformación;
- transforme el gráfico al plano PT .



Ejercicio 19: La figura muestra la relación PT de un ciclo ABCDA de una máquina cíclica que trabaja transformando 3 moles de un gas ideal monoatómico ($c_p = 5R/2$; $c_v = 3R/2$).

- transforme el gráfico al plano Pv , indicando los valores de las variables de cada estado alcanzado;
- calcule la variación de entropía del gas en la transformación BC;



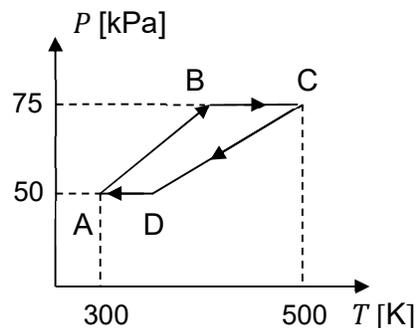
c) suponga que la máquina se halla en contacto térmico con un recipiente que contiene 50g de agua sólida a -20°C . Determine el estado final de este sistema al cabo de un ciclo.

Ejercicio 20: una máquina térmica opera entre dos focos caloríficos, a 700K y 300K , respectivamente. Si lo hace cediendo 2100 kcal a la fuente fría, calcule el valor máximo del trabajo que puede entregar.

Ejercicio 21: Se construyen tres máquinas térmicas que operan entre las mismas fuentes, la fría a 300K y la caliente a 900K . De la primera se asegura que absorbe 2.500 kcal del foco caliente y cede 10.500 kJ al foco frío, de la segunda se afirma que absorbe 5000 kcal del foco caliente y cede 10.450 kJ al foco frío, y de la tercera se afirma que toma 5.000 kcal y cede 5.225 kJ . Justifique cuál o cuáles de estas máquinas es realizable, y cuánto vale el trabajo que entrega.

Ejercicio 22: Una máquina térmica realiza el ciclo ABCDA de la figura, transformando dos moles de un gas ideal monoatómico ($c_p = 5R/2$; $c_v = 3R/2$). Calcule

- el trabajo realizado por el sistema en cada transformación y en todo el ciclo;
- el rendimiento de la máquina.



Ejercicio 23: Un mol de gas ideal monoatómico ($C_p = 5R/2$; $C_v = 3R/2$) se dilata a temperatura constante desde el estado A ($T_A=600K$, $V_A= 2\ell$) hasta duplicar el volumen en el estado B. Desde el estado B se lo dilata adiabáticamente hasta el estado C, en el que el volumen es de 6 litros. Luego se comprime el gas a presión constante hasta volver al volumen inicial (estado D), y por último se lo calienta a volumen constante hasta alcanzar el estado inicial. Suponiendo que el proceso se llevó a cabo de manera reversible

- construya el gráfico $P-V$ de la transformación;
- calcule el trabajo intercambiado por el gas en la etapa compresiva;
- calcule el calor intercambiado por el gas en la etapa de dilatación;
- respecto del ciclo ABCDA, marque las aseveraciones correctas

$C_p > C_v \Rightarrow \Delta U_{CD} > \Delta U_{DA}$	$Q_{AB} = 0$	$\Delta S_{CD} < 0$ y $\Delta S_{BC} = 0$
$W_{CICLO} > 0 \Rightarrow Q_{CICLO} < 0$	$W_{AB} = Q_{AB}$	$\Delta U_{AB} > \Delta U_{BC} $
$\eta_{CARNOT} = 1 - (T_c / T_A)$	$\Delta S_{CICLO} = 0 \Rightarrow Q_{CICLO} = 0$	$W_{ADCBA} < 0$

Ejercicio 24: Un bloque de 500 gramos de cobre se encuentra a 200 °C y se sumerge en 2 litros de agua a 10 °C que se encuentran en un recipiente adiabático. La mezcla se estabiliza a presión constante.

- calcule el cambio de entropía del cobre al llegar al equilibrio;
- calcule el cambio de entropía del universo;
- por tratarse de un proceso a presión y entropía constantes debe ser $\Delta H < 0$. Demuestre que esta desigualdad se cumple y que también es $\Delta G < 0$.

Ejercicio 25: Regrese al ejercicio 22 y calcule la variación A_{BC} y la variación H_{AB} . Compare los valores hallados con el trabajo W_{BC} y el calor Q_{AB} .

Ejercicio 26: Se lleva una muestra de 1g de hielo de agua a 0°C a vapor de agua a 100°C. Tomando las densidades de hielo, agua y vapor como 9.170 kg/m³, 9.998 kg/m³ y 9.583 kg/m³, respectivamente, calcule las variaciones de energía interna, de entalpía y de entropía de la muestra.

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: $R_{eq} = 9R / 2$. El resultado es el mismo.

Ejercicio 2: a) $\delta\phi_Q = 2.093 \text{ kW/m}^2 \equiv 500,7 \text{ kcal/m}^2 \text{ seg}$; b) $1.255,8 \text{ kW/m}^2 \equiv 300,4 \text{ kcal/m}^2 \text{ seg}$;
c) $6,89 \text{ W} \equiv 1,65 \text{ cal/seg}$.

Ejercicio 3: como $\kappa_H > \kappa_M$ y $\phi_H = \phi_M$ resulta $\Delta T_H < \Delta T_M$ de manera tal que debe ser $T > 25^\circ\text{C}$

Ejercicio 4: $\phi_Q = \kappa 2\pi R L \frac{dT}{dR}$. Si ϕ_Q es constante, es posible integrar la ecuación como

$$\frac{dR}{R} = \frac{2\pi\kappa L dT}{\phi_Q} \quad \text{y se obtiene} \quad \phi_Q = \frac{2\pi\kappa L (T_{EXT} - T_{INT})}{\ln(R_{EXT}/R_{INT})}$$

Ejercicio 5: a) $572,26 \text{ kcal/h}$; b) $69,88^\circ\text{C}$

Ejercicio 6: a) $395,6 \text{ K}$; b) $33,33 \text{ W}$.

Ejercicio 7: a) equilibrio a $-1,52^\circ\text{C}$; b) $T_{eq \text{ SIST}} = 16,78^\circ\text{C}$; c) $t \approx 140 \text{ seg}$

Ejercicio 8: a) $T_{eq} = 48,25^\circ\text{C}$; $\Delta S_{rec} = 7,33 \text{ J/K}$.

Ejercicio 9: $c = 0,194 \text{ cal/g }^\circ\text{C}$

Ejercicio 10: $T_{eq} = 347,5 \text{ K}$

Ejercicio 11: $T_o = 87^\circ\text{C}$

Ejercicio 12: 175 g de hielo y 1.325 g de agua líquida a 0°C .

Ejercicio 13: a) $Q_{ADB} = 370 \text{ kJ}$; b) absorbe calor ($Q_{CA} = |W_{CA}| + \Delta U_{BA}$, $\Delta U_{BA} < 0$ pero $| \Delta U_{BA} | < W_{SIST}$)

Ejercicio 14: a) $W_{CICLO} = -240 \text{ J}$;

	AB	BC	CA
Q	+	+	-
W	+	0	-
ΔU	+	+	-
ΔS	+	+	-

Ejercicio 15: son verdaderas: (a), (e), (g), (i).

Ejercicio 16: $\Delta S = -13,73 \text{ J/K}$

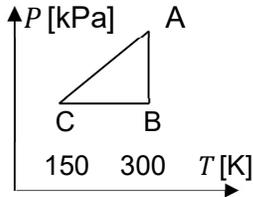
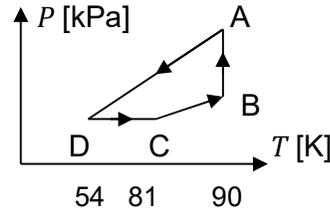
Ejercicio 17:

a) $W_{BA} = -608,2 \text{ J}$ $W_{CB} = W_{AD} = 0$

$W_{DC} = 450 \text{ J}$

$W_{CICLO} = -158,2 \text{ J}$

b) $\eta = Q_F / W_{CICLO} = 4,53$



Ejercicio 18: a) $P_A = 1.247 \text{ kPa}$;

b) $W_{AB} = 1.728,8 \text{ J}$ $W_{BC} = -1.247,1 \text{ J}$ $W_{CA} = 0$

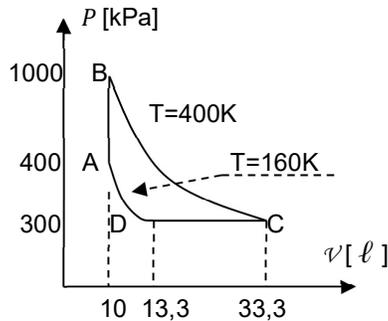
c) $Q_{AB} = 1.728,8 \text{ J}$ $Q_{BC} = -4.362,75 \text{ J}$ $Q_{CA} = 3.116,25 \text{ J}$

d) $U_{AB} = 0$ $U_{BC} = -3.115,65 \text{ J}$ $U_{CA} = 3.116,25 \text{ J}$

Ejercicio 19:

b) $\Delta S_{BC} = 7,17 \text{ cal/K} \equiv 30 \text{ J/K}$.

c) 5,32g de agua líquida en equilibrio hielo a 0°C.



térmico con 44,68g de

Ejercicio 20: $W_{MAX} = 2.100 \text{ kcal}$

Ejercicio 21: La primera viola el primer principio (cede más calor que el que recibe) y la tercera viola el segundo principio (tiene un rendimiento mayor que η_{CAR}). Sólo es posible la segunda, y $W = 10.450 \text{ kJ}$.

Ejercicio 22: a) $W_{AB} = W_{CD} = 0$ porque son transformaciones isocóricas

$W_{BC} = 831,75 \text{ J}$ $W_{DA} = -554,5 \text{ J}$ $W_{CICLO} = 277,25 \text{ J}$

b) $\eta = 0,04$

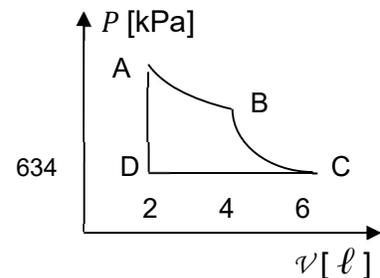
Ejercicio 23: b) $W_{COMP} = -2.536,88 \text{ J}$ c) $Q_{DILAT} = 3.457,69 \text{ J}$

d) son verdaderas $W_{AB} = Q_{AB}$, $\Delta S_{CD} < 0$ y $\Delta S_{BC} = 0$, $W_{ADCBA} < 0$

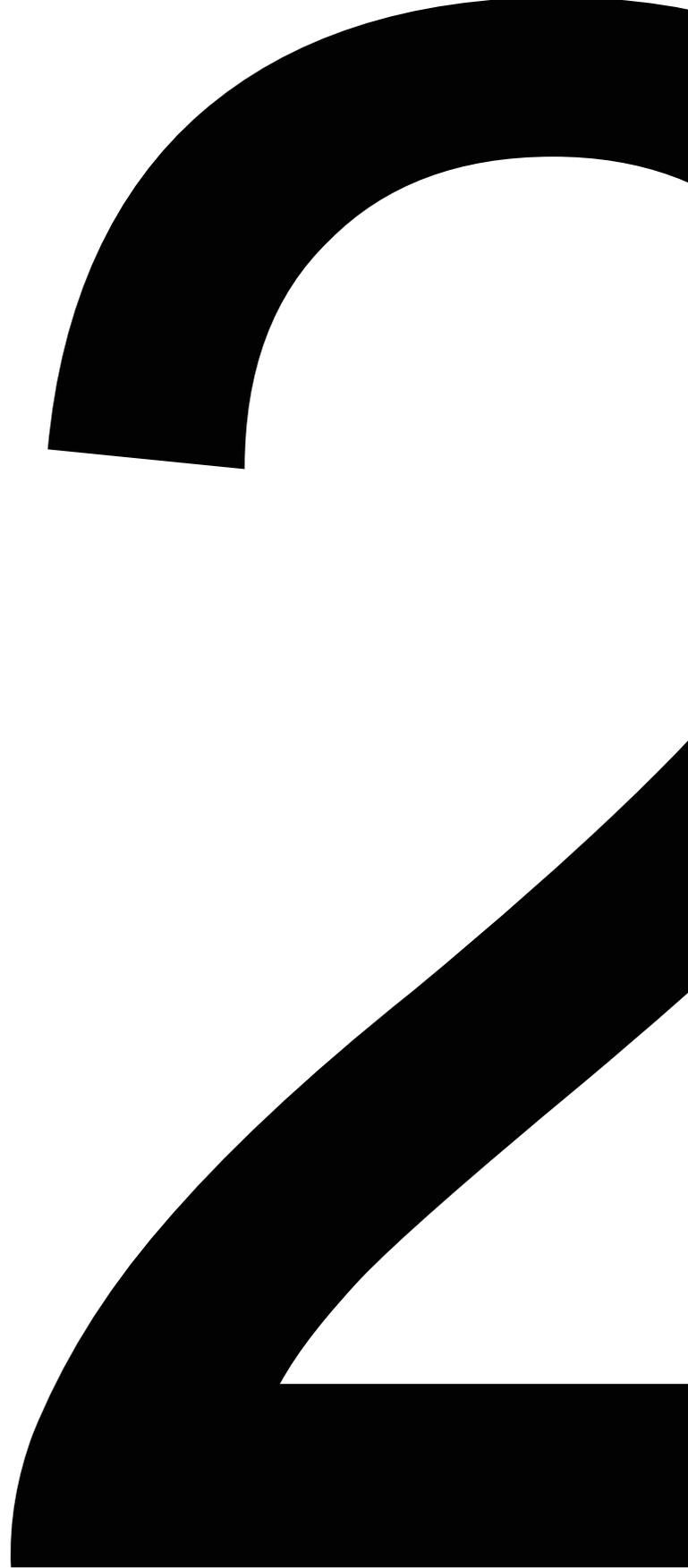
Ejercicio 24: a) $-22,94 \text{ cal/}^\circ\text{C}$ b) $6,84 \text{ cal/}^\circ\text{C}$

Ejercicio 25: $A_{BC} = -831,75 \text{ J}$; $H_{AB} = 3.740,3 \text{ J}$

Ejercicio 26: 2.838,9 J; 3.009,6 J; 8.578,7 J/K.



Fuerzas y campos eléctricos



2.1 – Introducción

De acuerdo a la tradición aceptada, el primero en describir algún tipo de fenómeno eléctrico fue Tales de Mileto, que unos 2.700 años atrás observó que el ámbar adquiere propiedades específicas y diferentes cuando se lo frota, por ejemplo, con lana. No debe de haber resultado difícil a Tales hacerse de alguna pieza de ámbar (que es una resina vegetal fosilizada a la que los antiguos griegos nombraban *elektron*) porque ya en aquella época los fenicios comercializaban estas resinas como “piedras” preciosas. Por lo demás, en esta región, enclavada en la costa occidental de lo que hoy es Turquía, no deben de haber faltado ovejas. Como sea, estas características novedosas, que se relacionan con la propiedad de atraer (o eventualmente repeler) a otros cuerpos, se denominaron por extensión *propiedades eléctricas*, y fueron estudiadas con algún detalle recién 2.500 años después del descubrimiento de Tales.

Desde un punto de vista puramente fenomenológico, en la experiencia de Tales hay, entre muchas, una observación relevante: no parece evidente que cualquier cuerpo frotado se electrice (es decir, que adquiera las propiedades del ámbar). Si frotamos un trozo de goma con un trapo de lana, lo único notable en la goma es que aumenta su temperatura, pero es incapaz de interactuar eléctricamente con los cuerpos con los que interactúa eléctricamente el ámbar (o la lana que usamos para frotarlos).

Esto no indica definitivamente que la goma no pueda electrizarse, porque en principio podría tratarse de la existencia de algún tipo de umbral al que no se accede por simple frotamiento. Después de todo no hemos sugerido ningún mecanismo o fenómeno que dé origen a las propiedades eléctricas de la materia. En todo caso, así como invocamos una propiedad de la materia denominada *carga gravitatoria* – a la que por simplicidad llamamos *masa* – para explicar la interacción gravitatoria, podemos invocar la existencia de otra propiedad o carga de la materia, a la que por extensión y coherencia tendremos que llamar *carga eléctrica*, en términos de la cual podamos explicar la interacción eléctrica[†].

Lo más que cabe preguntarse a esta altura es si la carga eléctrica es una propiedad que se halla en la materia y se pone de manifiesto (al menos en algunos cuerpos) cuando la frotamos con trapos de lana, o si la carga se genera y aparece en el proceso de frotamiento. La respuesta a esta pregunta no es inocente, porque marca necesariamente la

[†] En líneas absolutamente generales y modernas, todas las formas ordinarias de la materia están constituidas por dos clases fundamentales de partículas elementales: *leptones* y *quarks*. Ambos forman parte del conjunto de los *fermiones*, categorización esta referida al momento angular intrínseco (o spin) de una partícula subatómica. Los fermiones más familiares posiblemente sean los electrones, los protones y los neutrones. Leptones y quarks poseen cuatro tipos diferentes de *carga* (en el sentido que se le da a esta palabra en la Física moderna, como sinónimo de propiedad): color, débil, electromagnética y gravitatoria. Asociadas a cada uno de estos atributos existen cuatro interacciones: fuerte, débil, electromagnética y gravitatoria, que se originan en el intercambio de cuatro tipos diferentes de *bosones*, una suerte de “partículas mensajeras” con spin diferente al de los fermiones, que transportan la información de la interacción. Para decirlo en términos concretos, a cada carga de la materia se halla asociada una fuerza, mediada por una partícula mensajera. A pesar de su riqueza conceptual y elegancia explicativa, en el texto no habremos de regresar a estas formas de interpretación.

línea de pensamiento a seguir. Una cosa es pensar que la persona a la que usted llama por teléfono *se genera* con el sonido del teléfono y otra bien diferente es pensar que la persona está ahí y que su existencia *se pone de manifiesto* cuando la llamamos por teléfono.

A lo largo de este capítulo habremos de fundamentar la idea general de que la carga eléctrica es una de las propiedades fundamentales de los cuerpos y que, en consecuencia, lo único que hacemos al frotar cuerpos es ponerla de manifiesto, no la generamos. Y si la carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia tiene sentido, entonces, pensar en la medida de la intensidad de la interacción eléctrica porque sabemos que a cada propiedad le corresponde una interacción. Esto lo haremos en la sección 2.3, en la que formularemos las ideas fundamentales de la *fuerza electrostática*. En el apartado 2.5 y los siguientes habremos de presentar la interacción electrostática desde un punto de vista posiblemente más elegante y moderno, aunque igualmente contundente, introduciendo las ideas centrales de lo que se conoce como *campo de fuerzas*.

2.2 – Primera ley de la electrostática

Para regresar a la respuesta acerca de si la carga existe o si la generamos al frotar un cuerpo adecuado podemos pensar en esta experiencia: tomamos un cuerpo que manifieste propiedades eléctricas, como el cuerpo C de la figura 2.1, en el que con la letra Q indicamos que posee propiedades eléctricas (de hecho, de aquí en más indicaremos con una letra Q (eventualmente q) la presencia de carga eléctrica en un medio). Es irrelevante por ahora cómo adquirió carga eléctrica este cuerpo; a los efectos prácticos podemos pensar que lo hemos frotado con un trapo de lana. Acerquemos el bloque C a un cuerpo metálico que está partido en dos, con sus partes en contacto como también se sugiere en la figura 2.1. Para no agregar más elementos, supongamos que todo el sistema se halla en vacío.

Los tres cuerpos se apoyan sobre soportes de goma, porque de acuerdo a nuestra experiencia a este nivel la goma no se ve influida por la presencia del cuerpo *cargado* (este es un término coloquial que popularmente se utiliza para indicar que un cuerpo manifiesta propiedades eléctricas; no vemos razones para no utilizarlo, a condición de que se sobreentienda que nos referimos a la carga eléctrica). Separemos ahora las partes del bloque metálico: podemos comprobar que manifiestan las propiedades eléctricas del cuerpo C , que inicialmente estaba y continúa cargado; de hecho, la parte B atrae a los mismos objetos que el cuerpo C , y se repele con éste, en tanto que los objetos que son atraídos por B resultan repelidos por la parte A , que se atrae con los cuerpos B y C .

Hay aquí dos observaciones importantes: por un lado, parece evidente que la carga eléctrica se hallaba presente en el cuerpo metálico y que en presencia de otras cargas se redistribuye, porque en el caso que acabamos de analizar no hubo frotamiento alguno. Aceptar esta línea de pensamiento es equivalente a postular que la carga eléctrica no se

crea ni se destruye y que, en consecuencia, existe una unidad mínima y fundamental de carga eléctrica de la que todas las cargas eléctricas del universo son múltiplos exactos[†].

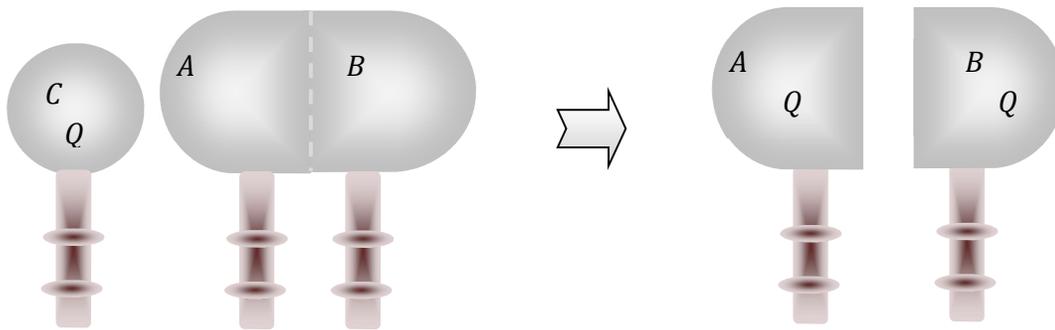


Fig. 2.1: un cuerpo cargado eléctricamente (lo indicamos con la letra Q) se acerca a un cuerpo metálico, cortado en dos partes A y B. Cuando se separan, las partes A y B están cargadas. Todos los cuerpos se sujetan con barras de goma.

Por otro lado, a partir de la observación de que los tres cuerpos cargados no pueden atraerse *mutua y simultáneamente* parece evidente que sólo pueden interactuar atractiva o repulsivamente, de manera tal que, si aceptamos que las propiedades eléctricas se originan en cargas, parece haber sólo dos tipos de carga. Convencional y arbitrariamente, a estos dos tipos de carga se las denomina *positiva* y *negativa*.

Luego, podemos justificar el fenómeno observado pensando que tanto las cargas negativas como positivas, sin importar por ahora su origen o su exacta definición, se hallaban presentes desde un principio en el bloque metálico, estadísticamente en cantidades idénticas, y que se redistribuyeron cuando se vieron influidas por el cuerpo C .

Tomemos ahora un bloque idéntico al C , digamos D , y frotémoslo con un trapo de lana idéntico al original: observaremos que los dos bloques C y D se repelen, como también lo hacen los trapos de lana entre sí, aunque cada trapo se atrae con cada bloque.

Aparecen aquí dos elementos fundamentales: por un lado ¿cómo adquieren propiedades eléctricas los bloques y los trapos? No podemos invocar redistribución de cargas eléctricas en los cuerpos porque nuestra experiencia cotidiana nos enseña que las cargas eléctricas están, pero distribuidas en configuraciones de equilibrio (en el sentido de no manifestar de manera evidente sus propiedades eléctricas); luego, la carga eléctrica tendería a regresar a su distribución

La experiencia indica que sólo existen dos tipos de carga eléctrica, a las que arbitrariamente se denomina positiva y negativa. Y aunque parezca innecesario, no está demás decir que esas denominaciones carecen de significado físico, porque no es que el electrón tiene carga negativa, al electrón se le asigna carga eléctrica negativa.

[†] Esta carga es la del electrón, pero para nuestra fundamentación su valor es por ahora irrelevante.

original. Tampoco parece razonable pensar en una suerte de aniquilamiento selectivo de cargas, de manera tal que el camino más sencillo parece ser suponer que algunas cargas eléctricas migraron de un cuerpo a otro.

Por otro lado, si aceptamos que los dos bloques adquirieron igual tipo de carga eléctrica (después de todo fueron puestas de manifiesto en procesos idénticos; de otra manera tendríamos que pensar en un universo “caprichoso”, algo que no aceptamos porque atenta contra nuestra intención de establecer leyes que cuantifiquen fenómenos repetibles) podemos pensar que la carga eléctrica de los trapos es del tipo (o signo, de acuerdo a nuestra denominación convencional) diferente a la de los bloques. Luego, nuestro próximo paso es postular que las cargas de igual signo se repelen, en tanto que las de signo opuesto se atraen.

En el ejemplo de la figura 2.1, parece ahora evidente que las cargas de igual signo fueron repelidas hacia el extremo más alejado (el cuerpo B) en tanto que las de signo contrario fueron atraídas y se desplazaron hacia el extremo próximo a C (es decir, al bloque A). Como los bloques C y B quedaron cargados con carga eléctrica de igual signo, se justifica que se repelan, en tanto que los bloques A y C se atraen por estar cargados con cargas de signo opuesto.

Obsérvese que la imposibilidad de la atracción mutua y simultánea de los tres cuerpos de la experiencia es central. De a pares y por separado la situación es completamente diferente, y podría llevarnos a pensar en un número arbitrario de tipos de carga eléctrica. Por lo demás, es importante resaltar que hablamos de atracción, porque la repulsión mutua y simultánea es perfectamente factible entre un número cualquiera de cuerpos cargados.

Sintetizando, en base a todas estas observaciones podemos enunciar una suerte de principio básico, un postulado que sirva de punto de partida, de esta manera:

► *Primera ley de los fenómenos eléctricos:* dado que jamás se ha observado la atracción mutua y simultánea de tres o más cuerpos cargados eléctricamente, postulamos que existen sólo dos tipos de carga. Los cuerpos con carga de igual signo se repelen, en tanto que los cuerpos con carga eléctrica de signo opuesto se atraen.

Un último comentario antes de abandonar esta discusión: vale la pena recalcar que en el problema que estamos presentando no hay tres cuerpos sino seis, porque están los tres mangos de goma. Sin embargo, y como ya dijimos, a este nivel por lo menos la goma no se ve influida por la presencia de los cuerpos cargados; recordemos que hemos aceptado la idea de que siempre hay cargas eléctricas presentes, aunque en algunos cuerpos o sustancias sea comparativamente difícil desplazarlas, de modo tal que no estamos diciendo que la goma no posea cargas eléctricas sino que, en todo caso, existen tantas de un signo como de otro, y la carga Q del cuerpo C del ejemplo es insuficiente para redistribuirlas de modo tal que la goma manifieste sus propiedades eléctricas.

A las sustancias por las que es dificultoso desplazar cargas eléctricas se las llama *aislantes o dieléctricos*, en tanto que a aquellas sustancias en las que las cargas eléctricas

se desplazan con relativa facilidad se las denomina *conductoras*. Tengamos en cuenta que, en base lo que venimos discutiendo, ninguna sustancia parece ser idealmente conductora, y por lo tanto ninguna habrá de ser idealmente aislante. Por lo demás, téngase muy presente que no hemos establecido en ningún momento el significado preciso de la “dificultad” o “facilidad” de desplazar cargas; tampoco lo hemos cuantificado, aunque vale la pena adelantar que lo haremos en el capítulo 6.

Nuestro cuerpo y los metales parecen ser buenos conductores de la electricidad, porque ambos permiten circular cargas con facilidad. Basta pensar que la corriente eléctrica (fenómeno que habremos de formalizar en la unidad 7, pero a la que ahora apelamos en términos modernamente intuitivos) se transmite por cables metálicos y si los tocamos circula por nuestro cuerpo. Por otro lado, el aire es un aislante, porque si no lo fuera conduciría la corriente eléctrica como los cables y se transmitiría a través de nuestro cuerpo. Pero no es un aislante ideal, pues al cabo los rayos, que son fenómenos asociados a descargas eléctricas, se transmiten a través del aire.

Si frotamos vidrio con un trapo de seda y ámbar con un trapo de lana, veremos que el ámbar se repele con el paño de seda, de la misma manera que el vidrio se repele con la lana. Decimos entonces que las cargas (eléctricas) del vidrio y de la lana son del mismo signo, que las cargas (eléctricas) del ámbar y la seda son iguales, pero que las del vidrio y del ámbar, por ejemplo, son opuestas.

El umbral a partir del cual un aislante se comporta como conductor depende de cada sustancia. Y parece evidente que los términos conductor y aislante se relacionan más con nuestra experiencia cotidiana que con un valor de referencia. En los próximos capítulos habremos de formalizar estos conceptos de manera rigurosa.

2.3 – Ley de Coulomb

Si las cargas eléctricas interactúan entre sí, si se atraen o se repelen con una fuerza determinada, debe ser posible entonces modelizar la intensidad de la interacción. Esto es, debe existir una ley absolutamente general que permita calcular la fuerza que se ejercen dos cargas eléctricas aisladas. Y como la carga eléctrica es una propiedad fundamental, no tendríamos que esperar que esta ley se derive de otras.

Para decirlo de otra forma, pensemos en la carga gravitatoria. La ley de gravitación universal de Newton establece la intensidad de la interacción entre dos cuerpos aislados a partir de sus masas. Esta es una ley fundamental, imposible de derivarse de otras. Las leyes de Kepler, que permiten calcular las características centrales de las órbitas de los objetos planetarios, no son fundacionales porque pueden derivarse de la ley de gravitación universal. Parece razonable: a cada propiedad de la materia se le asocia una fuerza, cada fuerza puede calcularse a partir de una ley, y todos los fenómenos asociados a una dada propiedad se explican en base a la respectiva ley fundacional.

En el caso de la fuerza eléctrica el crédito del trabajo fundacional corresponde al físico francés Charles de Coulomb, que en el año 1777 y a partir de mediciones efectuadas con una balanza de torsión estableció empíricamente la ley de la intensidad de las interacciones electrostáticas. Coulomb concluyó que la fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales en reposo una respecto de la otra (que de aquí en más llamaremos fuerza eléctrica o fuerza electrostática) es tal que

- a) su módulo es proporcional al producto de los valores de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa;
- b) su dirección es la recta que une las cargas;
- c) es atractiva si las cargas son de signo contrario y es repulsiva si las cargas son de igual signo.

Si $|\vec{F}_{q'q}|$ representa el módulo de la fuerza eléctrica, simbólicamente escribimos

$$|\vec{F}_{q'q}| \propto \frac{|q'q|}{R^2} \tag{2.1}$$

donde q y q' son los valores de las cargas que interactúan y R es la distancia que las separa.

Podemos formalizar vectorialmente el conjunto de observaciones suponiendo que las dos cargas q y q' están localizadas en las posiciones \vec{r} y \vec{r}' , respectivamente (véase la figura 2.2), de manera tal que la distancia que las separa es

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \tag{2.2}$$

Una manera muy elegante de sintetizar las observaciones b y c es definiendo el versor de la interacción, llamémoslo \hat{e}_q , de la forma

$$\hat{e}_q = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.3}$$

Luego, escribiendo la proporción en términos de un factor de proporcionalidad k , la expresión (2.1) resulta

$$\vec{F}_{q'q} = k \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k q q' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{2.4}$$

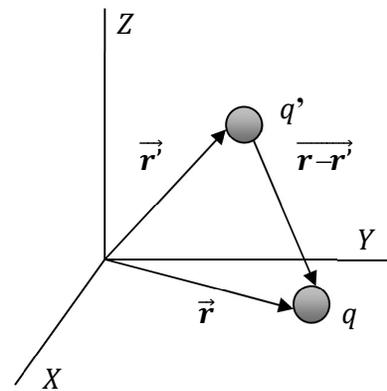


Fig. 2.2: las cargas puntuales interactúan a lo largo de la línea que une sus centros

$\vec{F}_{qq'}$ representa la fuerza que la carga q' ejerce sobre la carga q , que por supuesto tiene idéntica intensidad a la fuerza $\vec{F}_{q'q}$ que la carga q ejerce sobre q' , aunque es de sentido contrario (y, de acuerdo a la tercera ley de Newton, se halla aplicada en la carga q'). Obsérvese que si los signos de q y q' son iguales, la fuerza $\vec{F}_{qq'}$ tiene la dirección del vector $\vec{r}-\vec{r}'$, esto es, representa una fuerza repulsiva sobre q (vista desde la carga q'); si los signos de q y q' son distintos, la fuerza $\vec{F}_{q'q}$ tiene sentido contrario al vector $\vec{r}-\vec{r}'$, es decir, representa una fuerza atractiva sobre la carga q (o sea, hacia la carga q'). En síntesis, la expresión (2.4) establece el valor de la fuerza que ejerce la carga q' sobre la carga q , por eso la hemos llamado $\vec{F}_{q'q}$.

En términos de las componentes de los vectores, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}' = (x', y', z')$, y teniendo en cuenta que

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (2.5)$$

resulta

$$\vec{F}_{q'q} = k \frac{q q'}{|(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2|^{3/2}} ((x-x'); (y-y'); (z-z')) \quad (2.6)$$

Las unidades de la constante k y de la carga q dependen del sistema de unidades que se use para medir la fuerza. Por ejemplo, en el sistema *cgs* se toma $k = 1$, de manera tal que las unidades de carga son $[q] = cm \text{ din}^{1/2} \equiv \text{statcoulomb}$.

En el sistema *MKS* se adopta como unidad de carga el coulomb (C) de manera tal que dos cargas de $1C$ cada una, separadas un metro, en el vacío se ejerzan una fuerza de valor $9 \times 10^9 N$. Este valor resulta de tomar

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (2.7)$$

donde $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$ es una constante llamada *permitividad del vacío*, que se halla relacionada a las propiedades eléctricas de este medio dieléctrico. Su estudio en detalle habremos de posponerlo hasta el capítulo 6, pero aquí podemos adelantar que su valor cambia cuando se cambia de medio dieléctrico. A los efectos prácticos, y hasta tanto no sea necesario o conveniente escribir las ecuaciones en términos de la permitividad, habremos de tomar en cuenta sólo

La permitividad se asocia a la manera en que un aislante *permite* que se orienten sus moléculas para que se establezca un campo de fuerzas eléctricas. O sea, de alguna manera es una medida de la dificultad para hacer que un aislante manifieste propiedades eléctricas.

el valor de la constante k_0 . Obsérvese de paso que hemos subindicado con un 0 a la constante k para indicar que se trata de la constante de vacío.

2.4 – Generalización de la ley de Coulomb

Dado que las fuerzas son aditivas vectorialmente, podemos generalizar rápidamente la ley de Coulomb para calcular la fuerza que un conjunto discreto de cargas ejerce sobre una carga dada. Para ello pensemos en un conjunto de $N + 1$ cargas discretas como muestra la figura 2.3. Para no confundirnos, llamaremos q a la carga sobre la que calculamos la fuerza ejercida por las N cargas restantes, a las que llamaremos cargas fuente y las distinguiremos primándolas, esto es, las anotaremos como q'_j . Es casi inmediato que la suma vectorial se escribe como

$$\vec{F}(\vec{r}) = k \sum_{j=1}^N q q'_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \quad (2.8)$$

donde es importante notar que, una vez fijadas las posiciones de las cargas fuente, el valor de la fuerza neta sobre la carga q depende de su posición \vec{r} en el espacio.

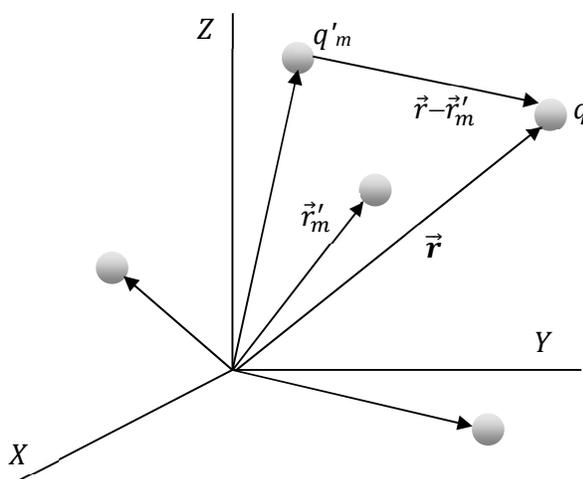


Fig. 2.3: el conjunto de N cargas fuente q'_1, q'_2, \dots, q'_N , ubicadas en $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N$, ejerce sobre la carga q una fuerza \mathbf{F} que es la suma vectorial de cada fuerza individual. En la figura sólo se muestran los vectores respecto de la m -ésima carga fuente, q'_m .

Si en lugar de ser discreta, la distribución de cargas fuera continua la expresión (2.8) tendría que modificarse consistentemente, pensando en la contribución de un elemento

diferencial de carga fuente dq' e integrando sobre todos los elementos de carga, esto es, escribiendo

$$\vec{F}(\vec{r}) = kq \int \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \tag{2.9}$$

Debemos notar que la distribución de carga puede ser lineal, en superficie o en volumen. En el primer caso se trata de una distribución unidimensional de cargas, a razón de $\lambda \text{ C/m}$, de manera tal que en la expresión anterior debemos reemplazar $\int dq'$ por $\int \lambda(r') dr'$. La cantidad λ se denomina *densidad lineal de carga*.

Consistentemente, una distribución de carga en superficie representa una configuración en la cual una *densidad superficial de carga* σ (cuya unidad es C/m^2 se ha distribuido bidimensionalmente, de manera tal que en la expresión (2.9) escribimos $\int dq' = \iint \sigma(r') dS'$.

Por último, si la distribución de cargas es en volumen, con *densidad volumétrica de cargas* ρ (cuya unidad, de manera casi evidente, es C/m^3), debemos reemplazar la distribución $\int dq'$ por $\iiint \rho(r') dV'$.

Ejemplo 2.1: Sean tres cargas puntuales, $q'_1 = 2 \times 10^{-6} \text{C}$, $q'_2 = -3 \times 10^{-6} \text{C}$, $q = 10^{-6} \text{C}$, distribuidas en un plano como indica la figura 2.4. Calculemos la fuerza ejercida por las cargas q'_1 y q'_2 sobre la carga q .

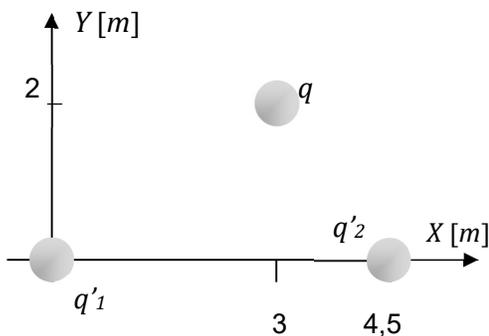


Fig. 2.4: configuración de cargas del ejemplo 2.1. Debe notarse que la fuerza sobre la carga q_3 depende de la posición relativa de las cargas.

Obsérvese ante todo que la elección del sistema de referencia no es única, porque dados tres puntos siempre es posible orientar el sistema de referencia de manera tal que al menos dos de ellos queden alineados sobre un mismo eje. Parece evidente, entonces, que el valor de la fuerza no puede depender de la elección del sistema de referencia, aunque por supuesto los valores de los vectores posición de las cargas fuente (q'_1 y q'_2 en este caso) y de la carga sobre la que se calcula la fuerza habrán de cambiar al cambiar el sistema de referencia. Con nuestra elección resultan

$$\vec{r}'_1 = (0; 0)m \tag{2.10. a}$$

$$\vec{r}'_2 = (4,5; 0)m \quad (2.10. b)$$

$$\vec{r} = (3; 2)m \quad (2.10. c)$$

de manera tal que

$$\vec{r} - \vec{r}'_1 = (3; 2)m \quad (2.11. a)$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_2 = (-1,5; 2)m \quad (2.11. b)$$

y en consecuencia

$$|\vec{r} - \vec{r}'_1|^3 = [(3^2 + 2^2)m^2]^{1/2}]^3 = 46,87 m^3 \quad (2.12. a)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_2|^3 = [(-1,5^2 + 2^2)m^2]^{1/2}]^3 = 15,62 m^3 \quad (2.12. b)$$

De esta manera el cálculo de la fuerza neta resulta de manera inmediata por aplicación directa de la expresión (2.7); con todos los parámetros en unidades MKS obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k \left[\frac{q'_1 q}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_1) + \frac{q'_2 q}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_2) \right] = \\ &= 9 \times 10^9 \times \left[\frac{2 \times 10^{-1}}{46,87} (3; 2) - \frac{3 \times 10^{-1}}{15,62} (-15; 2) \right] N = (3,74; -2,69) \times 10^{-3} N \quad (2.13) \end{aligned}$$

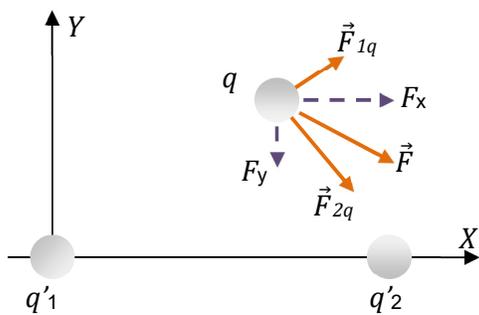


Fig. 2.5: se muestran las fuerzas F_{1q} (la que la carga q'_1 ejerce sobre q) F_{2q} (la que la carga q'_2 ejerce sobre q) la fuerza neta F y sus componentes F_x y F_y .

Obsérvese que el primer término de la expresión (2.13) corresponde a la fuerza \vec{F}_{1q} , en tanto que el segundo sumando corresponde a la fuerza \vec{F}_{2q} , que no es otra cosa que decir que estamos aplicando el principio de superposición. En la figura 2.5 se muestra, además de estas fuerzas, la fuerza neta ejercida sobre la carga q . Debe notarse que a partir de los valores relativos y la disposición de las cargas, la dirección y el sentido de la fuerza neta era predecible porque la fuerza \vec{F}_{1q} es repulsiva y la fuerza \vec{F}_{2q} es atractiva, de forma tal que la componente F_x debe ser positiva en tanto que F_y debe ser negativa porque la

componente F_{2qy} es mayor que la componente F_{1qy} .

Ejemplo 2.2: Sea la distribución de cargas del ejemplo anterior, pero cambiemos ahora la carga puntual q'_1 por un alambre de longitud $L = 0,25\text{ m}$ y densidad lineal de carga constante $\lambda = 8 \times 10^{-6}\text{ C/m}$, con su extremo izquierdo en el origen del sistema de coordenadas. Calculemos el valor de la fuerza eléctrica sobre la carga q debida a esta configuración.

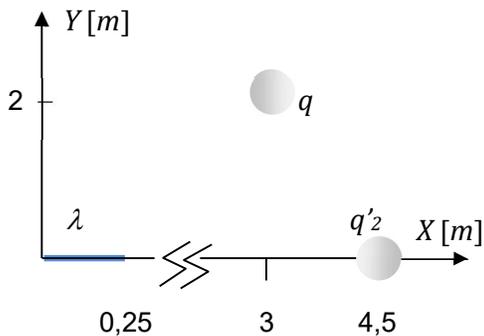


Fig. 2.6: configuración de cargas del ejemplo 2.2. La contribución del alambre resulta de la suma de las contribuciones de todos los elementos infinitesimales de carga.

El principio de superposición nos permite calcular el valor de la fuerza neta sobre la carga q como la suma (vectorial) de las fuerzas que ejercen el alambre por un lado y la carga puntual q'_2 por el otro. El valor de la fuerza ejercida por q'_2 sobre q ya está calculado implícitamente en la

expresión (2.13) y vale

$$\vec{F}_{2q} = (2,59; 3,46)10^{-3}\text{ N} \tag{2.14}$$

Por su lado, el valor de la fuerza $F_{\lambda q}$ que el alambre cargado ejerce sobre q lo calculamos integrando sobre los elementos diferenciales de carga fuente, que en este caso se reduce a $dq' = \lambda dx'$.

A partir de la expresión (2.9) y teniendo en cuenta que las cargas fuente del alambre se localizan en las posiciones

$$\vec{r}'_{\lambda} = (x'; 0)$$

resulta de manera casi evidente

$$\vec{F}_{\lambda q} = k_0 q \lambda \int_0^L dx' \frac{(3 - x'; 2)}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} \tag{2.15}$$

La interpretación de la expresión (2.15) es sencilla e inmediata: si cada carga infinitesimal se asocia a una carga puntual, el alambre contribuye a la fuerza neta como la suma de todas las contribuciones infinitesimales, como se ilustra en la figura 2.7 para dos contribuciones elementales (marcadas en rojo).

Obsérvese que la carga neta del alambre, digamos q_{λ} , vale

$$q_{\lambda} = \int_0^{0,25} 8 \times 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}} dx' = 2 \times 10^{-6}\text{ C} \tag{2.16}$$

pero de ninguna manera se comporta ni puede pensarse como una carga puntual de ese valor, al menos mientras se lo vea como una distribución continua. Con esto queremos

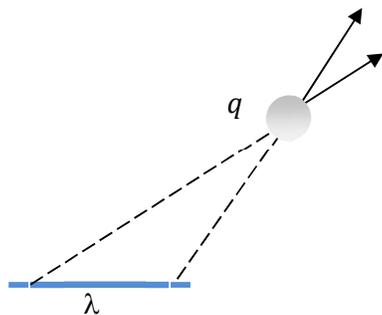


Fig. 2.7: contribución de dos elementos de carga del alambre. Obsérvese que el elemento de carga de la derecha contribuye con una fuerza mayor porque se halla a menor distancia de la carga q_3 .

decir que este problema no es equivalente al del ejemplo anterior. En principio, la falta de equivalencia se debe al hecho de que el alambre no está centrado en el origen, sino desplazado hacia uno de sus lados. Sin embargo, no deja de ser cierto que “muy lejos” del alambre, esto es, a distancias muchos mayores que cualquier longitud característica del problema, el alambre se ve como una carga puntual. Esto significa que si ubicamos la carga q a distancias mucho mayores que la longitud del alambre, la fuerza sobre ella habrá de parecerse a la que ejercen las dos cargas puntuales del ejemplo anterior (obsérvese que los valores q'_1 y q_λ son iguales) y cuanto más alejemos a la carga q o más pequeño sea el alambre más parecido serán los resultados.

Por lo pronto, la integral (2.16) consiste en dos integrales muy sencillas que resultan en la fuerza del alambre sobre la carga q

$$\vec{F}_{13} = kq_3\lambda \left[\int_0^{0,25} dx' \frac{3 - x'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} \hat{e}_x + \int_0^{0,25} \frac{2 dx'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} \hat{e}_y \right] =$$

$$= (1,22; 0,86) \times 10^{-3} N \tag{2.17}$$

y la fuerza neta sobre la carga q , teniendo en cuenta la fuerza \vec{F}_{2q} , resulta

$$\vec{F} = (3,81; -2,60) \times 10^{-3} N \tag{2.18}$$

Se propone como ejercicio realizar el mismo cálculo con el alambre simétricamente distribuido respecto del origen, esto es, integrar la expresión (2.16) entre $-L/2$ y $L/2$. En ese caso vale la pena comparar los resultados que se obtienen con los del ejemplo 2.1.

2.5 – El campo eléctrico

Regresemos a la fuerza que se ejercen dos cargas q y q' ubicadas en alguna región del espacio (expresión (2.4)) ¿Cómo “saben” las cargas que deben interactuar? ¿Cómo se entera una de la existencia de la otra? En el pie de página de la introducción de este capítulo hemos sugerido que las interacciones son mediadas por “partículas mensajeras”, pero aun así no adelantaríamos gran cosa, sencillamente porque estaríamos pasando el problema de comprender una interacción a entender qué es una partícula mensajera, algo que está completamente fuera de nuestro enfoque.

Una manera alternativa y todavía elegante de interpretar este fenómeno es pensar que toda carga modifica las propiedades del espacio a su alrededor, y que todo cuerpo con carga del mismo origen es capaz de detectar estas propiedades modificadas e interactuar.

Las partículas mensajeras (o partículas *mediadoras* o *portadoras* (de la fuerza)) juegan un rol fundamental dentro del marco del *Modelo Estándar*, que resume las propiedades de la materia en 12 partículas elementales (seis quarks y seis leptones) y un conjunto de partículas mediadoras que transportan la información de las cuatro fuerzas fundamentales. La interacción fuerte es mediada por ocho *gluones*, la interacción débil es portada por tres partículas llamadas W^+ , W^- , Z , la fuerza electromagnética es mediada por *fotones* y la gravitatoria por *gravitones*.

Las propiedades modificadas del espacio se resumen en un ente (vectorial) que contiene toda la información de la interacción y que se denomina *campo de fuerzas*. Así, por ejemplo, todo cuerpo (llamémoslo A) con carga gravitatoria (masa) modifica las propiedades del espacio de un modo tal que cualquier otro cuerpo (digamos, B) con carga del mismo origen (en este caso gravitatoria) detecta estas modificaciones e interactúa con el primer cuerpo, el que provocó las modificaciones. El campo de fuerzas generado, consistentemente, se llama campo de fuerzas gravitatorias o, más sucintamente, campo gravitatorio.

Por lo demás, podemos pensar el problema al revés y asegurar que el primer cuerpo (el cuerpo A) detecta las propiedades del espacio modificadas por la presencia del segundo (el B), de manera tal que interactúan en idéntica medida y el principio de interacción newtoniano (la tercera ley de Newton) se cumple implícitamente.

En el caso que nos ocupa, podemos decir que todo cuerpo con carga eléctrica modifica particularmente las propiedades del espacio de tal manera que cualquier otro cuerpo con carga eléctrica es capaz de detectarlas e interactuar con esas propiedades modificadas. El campo de fuerzas generado por una carga eléctrica se denomina campo de fuerzas eléctricas o, en forma abreviada, *campo eléctrico*.

Prestemos atención al hecho de que todo cuerpo cargado (en nuestro caso específico, eléctricamente) genera un campo independientemente de que haya o no otro cuerpo para detectarlo. Pero el campo debe ser tal que, si se coloca una carga eléctrica en un dado punto del espacio, debe generar una fuerza de intensidad dada por la ley de Coulomb.

Además, la expresión del campo debe ser absolutamente simétrica, porque dadas dos cargas q y q' da lo mismo pensar cuál se halla en el campo de la otra (de hecho, *cada una* se halla en el campo de la otra). La clave para hallar la expresión matemática del campo eléctrico se encuentra en la expresión (2.4), que expresa la fuerza que una carga q' ubicada en \vec{r}' ejerce sobre una carga q ubicada en el punto \vec{r} . Si la escribimos como

$$\vec{F}_{q'q} = q \left[kq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (2.19)$$

vemos que lo que está entre corchetes es un ente vectorial que cumple con los requisitos que estamos pidiendo: en el punto \vec{r} genera sobre q la fuerza (2.4), y es simétrica porque si conmutamos las variables primadas y sin primar obtenemos el campo eléctrico que la carga q genera en la posición \vec{r}' donde se halla q' (y genera una fuerza de iguales módulo y dirección pero sentido contrario).

Luego, en términos absolutamente generales, pensemos en un conjunto de N cargas eléctricas q'_1, \dots, q'_N ubicadas en los puntos $\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N$. A partir de la expresión (2.8) definimos el **vector de intensidad de campo eléctrico** $\vec{E}(\vec{r})$ generado por las N cargas discretas en un punto \vec{r} del espacio como

El campo eléctrico es el ente vectorial que resume las propiedades del espacio modificadas por la presencia de una carga eléctrica. Todo cuerpo con carga eléctrica modifica las propiedades del espacio de manera similar, es capaz de detectar las propiedades modificadas por otros cuerpos con carga eléctrica, e interactuar a través del campo eléctrico. La medida de esa interacción es la fuerza eléctrica.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{j=1}^N q'_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \quad (2.20)$$

y

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \quad (2.21)$$

para el caso de distribuciones continuas de carga. Obsérvese que el vector intensidad del campo eléctrico (que se nombra simplemente como vector campo eléctrico) depende sólo de la distribución de cargas fuente y genera una función vectorial que en principio es diferente en cada punto \vec{r} del espacio. Esto significa que las propiedades electrostáticas en el punto \vec{r} dependen de la manera en que se localizan las cargas fuente y de sus valores. Para ponerlo en términos concretos pensemos en la distribución discreta que da origen al campo eléctrico de la identidad (2.20), y supongamos que disponemos de una carga q de

valor tal que es incapaz de modificar sustancialmente la distribución de las cargas fuente, esto es, se trata de una carga puntual de valor mucho menor que el de cualquiera de las cargas fuente, es decir, tal que $|q| \ll |q_m|$ ($1 \leq m \leq N$) (generalmente, a una carga con estas propiedades se la denomina *carga de prueba*). Como ya se dijo, la configuración de cargas q'_1, \dots, q'_N modifica las propiedades del espacio, independientemente de que la carga q se coloque o no. Si llevamos nuestra carga de prueba por el espacio detectaremos la presencia de propiedades características, y en cada punto podremos medir la intensidad de la interacción, que en definitiva no es otra cosa que una medida proporcional a la intensidad del campo.

Obsérvense algunos detalles de interés: en primer lugar, la medida del campo eléctrico podría interpretarse como la fuerza que la distribución de cargas de las ecuaciones (2.20) o (2.21) ejerce sobre una carga q de valor unidad, esto es,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.22)$$

Hay que tener algún cuidado con esta interpretación porque no estamos diciendo que un campo de fuerzas es una fuerza dividida por una carga o simplemente el valor de la

El campo eléctrico es generado por la distribución de cargas fuente (las que están primadas en la ecuación del campo). No siempre la modificación de la configuración de cargas fuente lleva a una modificación del valor del campo eléctrico en un determinado punto del espacio. Pero si sólo se modifica una carga, el campo eléctrico necesariamente cambia. Y una vez sumado (o integrado) el miembro derecho de su ecuación de definición, el campo eléctrico sólo depende de la posición del punto campo (r).

fuerza por unidad de carga. Lo que estamos asegurando es que si una carga unidad experimenta una dada fuerza en un determinado punto del espacio, en ese punto existe un campo de fuerzas cuyo valor coincide numéricamente con el de la fuerza. Todavía más, como la carga q es escalar, resulta que la dirección de la fuerza coincide con la del campo eléctrico, pero el sentido de la fuerza queda determinado por el signo de la carga q , es decir, coincide o no con el sentido del campo si la carga es positiva o negativa, respectivamente.

En segundo lugar, las expresiones (2.20) y (2.21) indican explícitamente que para el campo eléctrico vale el principio de superposición. Por otro lado, las ecuaciones (2.20) y (2.21) no están escritas en ningún sistema particular de coordenadas, y representan cada una de ellas tres

ecuaciones escalares, una para cada coordenada espacial. La elección del sistema de coordenadas depende, en general, de las simetrías del problema.

Por último, pero no por eso menos importante, digamos que por ahora habremos de medir el campo eléctrico en las unidades que resultan de su interpretación como fuerza por unidad de carga, esto es, $[E] = N/C$.

Ejemplo 2.3 : Supongamos cuatro cargas de módulo $|q| = 10^{-3} \text{ C}$, que se localizan en los vértices de un cuadrado de lado $2a = 1\text{m}$. Calculemos el valor del campo eléctrico en todo punto del eje Z suponiendo

- a) que las cargas son todas positivas;
- b) que las cargas son alternadamente positivas y negativas;
- c) sólo una de las cargas es negativa

La configuración aparece en la figura 2.8, en la que hemos numerado arbitrariamente las cargas y hemos marcado el vector posición de una de las cargas. El punto del espacio en el que se calcula el campo eléctrico se denomina *punto campo*. La geometría del problema sugiere trabajar en coordenadas cartesianas, y en este caso las coordenadas del punto campo son

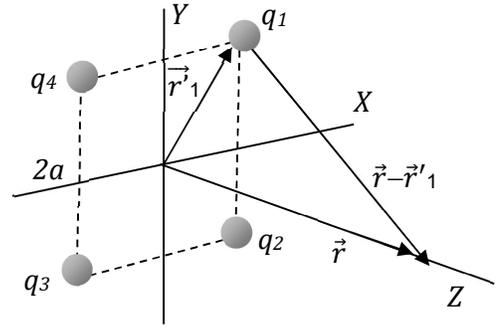


Fig. 2.8: configuración de cargas del ejemplo 2.3.

$$\vec{r} = (0; 0; z) \tag{2.23}$$

Por su lado, las coordenadas de los puntos fuente son

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= (a; a; 0) & \vec{r}'_2 &= (a; -a; 0) \\ \vec{r}'_3 &= (-a; -a; 0) & \vec{r}'_4 &= (-a; a; 0) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Luego, entre estas últimas dos expresiones es inmediato

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}'_1 &= (-a; -a; z) & \vec{r} - \vec{r}'_2 &= (-a; a; z) \\ \vec{r} - \vec{r}'_3 &= (a; a; z) & \vec{r} - \vec{r}'_4 &= (a; -a; z) \end{aligned} \tag{2.25}$$

y para $n = 1, 2, 3, 4$ es casi evidente que resulta

$$|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3 = (2a^2 + z^2)^{3/2} \tag{2.26}$$

De esta forma, el campo eléctrico se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} [(-a; -a; z) + (-a; a; z) + (a; a; z) + (a; -a; z)] = \\ &= \frac{4kqz}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para los valores particulares del ejercicio, con la coordenada z medida en metros, resulta

$$\vec{E}(z) = \frac{3,6 \times 10^7 z}{(0,5 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \frac{N}{C} \quad (2.28)$$

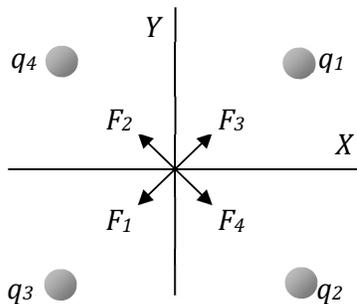


Fig. 2.9: los campos generados por cada carga por separado se anulan de a pares.

El primer valor notable es el del campo en $z = 0$, pues a partir de la expresión (2.28) es inmediato $E(z = 0) = 0$. Este resultado era de esperar por la simetría del problema, pero igualmente analicémoslo a la luz de la figura 2.9. Si en el centro del cuadrado colocáramos una carga de prueba (por definición, de valor unitario y signo positivo) las fuerzas sobre esta carga de prueba serían las que se han dibujado. Por la simetría del problema es casi evidente que las fuerzas se anulan de a pares y, luego, de acuerdo a la ecuación (2.28) el campo eléctrico se anula en $z = 0$.

Obsérvese de paso que el hecho de que la carga de prueba sea de signo positivo es irrelevante, porque en caso de ser negativa los vectores dibujados no cambiarían, sólo cambiaría su numeración (cada vector apuntaría hacia su carga).

Supongamos ahora que las cargas 1 y 3 son positivas, en tanto que las cargas 2 y 4 son negativas, como se sugiere en la parte (b) del enunciado. Nada hay en la formalización del problema que deba ser cambiado, salvo, por supuesto, los signos de dos cargas. En la expresión (2.27), de acuerdo a la elección de las cargas, esto se traduce en

$$\vec{E}(z) = \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} [(-a; -a; z) - (-a; a; z) + (a; a; z) - (a; -a; z)] = 0 \forall z \quad (2.29)$$

El resultado (2.29) también era de esperar. Obsérvese que en $z = 0$ la figura 2.9 sigue valiendo, sólo que hay que intercambiar los subíndices de las fuerzas F_2 y F_4 . De esta manera en $z = 0$ el campo es nulo. Muy lejos de la configuración sólo se ve su carga total, precisamente nula, de manera tal que el campo eléctrico debe anularse (de hecho, es fácil ver que para $z \gg a$ el campo E tiende a $4kq/z^2$ de manera tal que, independientemente del valor de las cargas, muy lejos de la configuración se anula). Luego, el campo es nulo en todo punto del eje Z .

Esto no significa que el campo eléctrico sea nulo. Se trata de una particular configuración, con la propiedad de que es incapaz de generar fuerza alguna sobre una carga de prueba colocada en cualquier punto de su eje de simetría axial. Obsérvese que en este caso es posible desplazar una carga rectilíneamente sin realizar trabajo contra las fuerzas eléctricas.

Con respecto al caso (c), observemos que, de nuevo, sólo hay que cambiar un signo en la ecuación (2.27). Elijamos la carga q_1 como negativa, de manera tal que resulta

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} [-(-a; -a; z) + (-a; a; z) + (a; a; z) + (a; -a; z)] = \\ &= \frac{2kqa\hat{e}_x + 2kqa\hat{e}_y + 3kqz\hat{e}_z}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora el campo eléctrico no se anula en ningún punto del espacio, y parece notable que se produzca en una configuración que no tiene ninguna simetría, esto es, una disposición en la cual resulta imposible trazar un eje que haga que las dos partes que resultan sean físicamente iguales. En el próximo capítulo discutiremos con algún detalle algunas simetrías particularmente sencillas y analizaremos las maneras en que los campos eléctricos se hallan relacionados con esas simetrías.

Ejemplo 2.4: Analicemos el problema anterior pero para dos cargas solamente, una de valor q y la otra de valor $-q$, separadas una distancia d . Ubiquémoslas en las posiciones mostradas en la figura 2.10, de manera tal que, si \vec{r}_+ y \vec{r}_- denotan los vectores de los puntos

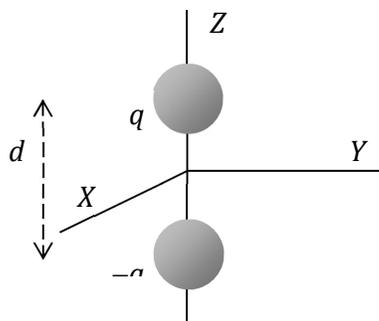


Fig. 2.10: las dos cargas del ejemplo 2.4. En el límite $d \rightarrow 0$ la configuración tiende a un dipolo.

fuente de las cargas positiva y negativa, respectivamente, escribiremos $\vec{r}_+ = (0, 0, d/2)$ y $\vec{r}_- = (0, 0, -d/2)$

Obsérvese que el problema tiene simetría de rotación, porque sin importar cuánto giremos alrededor del eje Z vamos a ver siempre la misma configuración. Esto significa que si planteamos el problema en coordenadas cilíndricas, ningún resultado puede depender del ángulo azimutal ϕ .

En coordenadas cartesianas, en un punto campo genérico $\vec{r} = (x, y, z)$, el campo eléctrico generado por esta configuración será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = kq \left[\frac{(x; y; z - \frac{d}{2})}{\left(x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{(x; y; z + \frac{d}{2})}{\left(x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \quad (2.31)$$

Estudiemos el campo eléctrico sobre el eje que contiene a las cargas; con $x = y = 0$, la expresión (2.31) se reduce a la forma

$$\vec{E} = kq \left[\frac{z - \frac{d}{2}}{\left(\left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{z + \frac{d}{2}}{\left(\left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \hat{e}_z = kq \left[\frac{sg(z)}{\left| z - \frac{d}{2} \right|^2} - \frac{sg(z)}{\left| z + \frac{d}{2} \right|^2} \right] \hat{e}_z \quad (2.32)$$

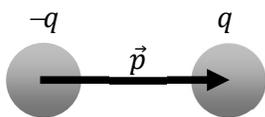
donde $sg(z)$ representa la *función signo*, definida como

$$sg(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$ y que $x/|x| = sg(x)$ desarrollamos la igualdad (2.32) para obtener

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq}{z^2} sg(z) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2z} \right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2z} \right)^2} \right] \hat{e}_z = \frac{kq}{z^2} sg(z) \left[\frac{2d}{z \left(1 - \frac{d^2}{4z^2} \right)^2} \right] \hat{e}_z = \\ &= \frac{2kqd}{z^3} sg(z) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d^2}{4z^2} \right)^2} \right] \hat{e}_z = \frac{2kqd}{|z|^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d^2}{4z^2} \right)^2} \right] \hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ahora, en términos de la figura 2.11, definamos la el momento dipolar \vec{p} como



$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} qd \hat{e}_z \quad (2.35)$$

Fig. 2.11: dipolo eléctrico.

sobre el eje Z resulta

$$\vec{E} = \frac{2k\vec{p}}{|z|^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d^2}{4z^2} \right)^2} \right] \quad (2.36)$$

que en el límite $z \gg d$ tiende a

$$\vec{E} = \frac{2k}{|z|^3} \vec{p} \quad (2.37)$$

Obsérvese que la orientación del vector \vec{p} hace que el campo eléctrico quede correctamente definido. Por lo demás, nótese que el límite $z \gg d$ no es lo mismo que $z \rightarrow \infty$ porque en este último caso el campo se anula (como debe ser, porque vista “de lejos” la configuración es prácticamente una carga puntual. En rigor, se trata de una configuración finita y en consecuencia se anula al infinito).

Calculemos ahora el campo eléctrico sobre cualquier eje perpendicular al eje dipolo, que pase por su centro. Por comodidad, calculemos el campo en un punto sobre el eje X de la figura 2.10, pero tengamos en cuenta que, por la simetría de la configuración, el resultado es válido para toda dirección perpendicular. En nuestro caso, será

$$\vec{r} = (x; 0; 0) \quad (2.38. a)$$

$$\vec{r}_{\pm} = \left(0; 0; \pm \frac{d}{2}\right) \quad (2.38. b)$$

de manera tal que resulta

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- &= kq \left[\frac{(x; 0; -\frac{d}{2})}{\left(x^2 + \left(-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{(x; 0; \frac{d}{2})}{\left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \\ &= -\frac{kqd}{x^3} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{d^2}{4x^2}\right)^{3/2}} \right] \hat{e}_z = -\frac{k\vec{p}}{x^3} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{d^2}{4x^2}\right)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Luego, el campo generado por el dipolo en todo eje perpendicular que pase por su centro, tiene la dirección del vector \vec{p} , sentido contrario, y depende sólo de la distancia al eje del dipolo.

Ejemplo 2.5: Una varilla de longitud $2L$ y radio $R \ll L$ (de manera que el problema puede considerarse unidimensional) tiene una distribución de cargas λ . Calculemos el campo eléctrico que genera la distribución de cargas en distintos puntos del espacio.

El campo eléctrico es inmediato a partir de la expresión (2.18). Observemos que la configuración posee simetría de rotación alrededor del eje X , de manera tal que el campo sobre el eje Y es igual al campo sobre el eje Z o sobre cualquier eje que pase por el origen y sea perpendicular al eje X . Escribamos el problema en coordenadas cartesianas, de manera tal que podamos definir los vectores fuente y campo en las formas

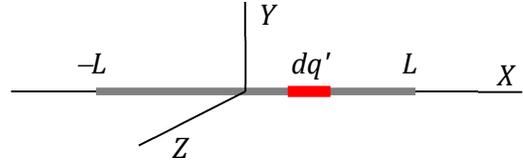


Fig. 2.12: elemento de carga sobre la varilla del ejemplo 2.5.

$$\vec{r} = (x; y; z) \tag{2.40}$$

$$\vec{r}' = (x'; 0; 0) \tag{2.41}$$

$$dq' = \lambda dx' \tag{2.42}$$

y el campo eléctrico resulte en consecuencia

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{-L}^L \lambda dx' \frac{(x - x'; y; z)}{[(x - x')^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \tag{2.43}$$

Es importante notar que la ecuación (2.43) contiene toda la información física que es posible obtener acerca del campo eléctrico de la configuración de la figura 2.12, y que su valor sólo depende del punto campo y de la forma funcional de la densidad de carga λ . Por ejemplo, para $\lambda =$ constante positiva el campo sobre el eje X (esto es, $y = z = 0$) se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= k\lambda \int_{-L}^L dx' \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \hat{e}_x = k\lambda \operatorname{sg}(x - x') \int_{-L}^L \frac{dx'}{(x - x')^2} \hat{e}_x = \\ &= k\lambda \operatorname{sg}(x) \left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x + L} \right) \hat{e}_x = k\lambda \operatorname{sg}(x) \frac{2L}{x^2 - L^2} \hat{e}_x \end{aligned} \tag{2.44}$$

Obsérvese que el campo eléctrico es siempre saliente (porque hemos considerado $\lambda > 0$), y esa información está contenida en la función $\operatorname{sg}(x)$ porque el cálculo es válido para puntos tales que $|x| > L$.

Supongamos ahora que la densidad de carga varía como $\lambda = \lambda_0 x'$ (λ_0 una constante positiva) y recalculamos el campo sobre el eje X . Lo único que cambia es la función a integrar (y posiblemente su complejidad) pero no el método. Reemplazando en la expresión general (2.43), para $y = z = 0$ resulta

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) &= k\lambda_0 \int_{-L}^L x' dx' \frac{(x-x')}{|x-x'|^3} \hat{e}_x = k\lambda_0 \operatorname{sg}(x-x') \int_{-L}^L \frac{x' dx'}{(x-x')^2} \hat{e}_x = \\ &= k\lambda_0 \operatorname{sg}(x) \left(\frac{x}{x-x'} + \ln(x-x') \right)_{-L}^L \hat{e}_x = k\lambda_0 \operatorname{sg}(x) \left(\frac{2Lx}{x^2-L^2} + \ln \frac{x-L}{x+L} \right) \hat{e}_x\end{aligned}\quad (2.45)$$

Obsérvese que el campo eléctrico ahora está siempre dirigido en el sentido \hat{e}_x porque para valores negativos de la coordenada x la carga es negativa y $\operatorname{sg}(x) = -1$. A modo de ejemplo numérico, supongamos que la varilla mide $L = 1\text{m}$, y que la densidad de carga tiene un valor $\lambda_0 = 10^{-6}\text{C/m}$. Calculemos el campo eléctrico en las posiciones $x = -3\text{m}$ y $x = 3\text{m}$.

$$\vec{E}(x = -3\text{m}) = 9 \times 10^9 \times 10^{-6} \times (-1)(-0,75 + \ln 2) \hat{e}_x \frac{\text{N}}{\text{C}} = 511,67 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{e}_x \quad (2.46)$$

$$\vec{E}(x = 3\text{m}) = 9 \times 10^9 \times 10^{-6} \times (+1)(0,75 + \ln 0,5) \hat{e}_x \frac{\text{N}}{\text{C}} = 511,67 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{e}_x \quad (2.47)$$

que son idénticos, como ya habíamos anticipado en la discusión previa.

Ejemplo 2.6: Aprovechemos los resultados del ejemplo anterior para calcular el campo eléctrico en el centro de una espira cuadrada que se halle en el plano XY con uno de sus lados apoyado en el eje X .

Parece evidente que el alambre de la figura 2.12 es el lado de la espira apoyado en el eje X . Ante todo, notemos que si giramos el alambre sobre sí mismo, a lo largo de su eje longitudinal (que es el eje que coincide con el alambre) el problema no cambia en lo más mínimo, de manera tal que la configuración posee simetría de rotación alrededor del eje X , o sea que el campo sobre el eje Y es igual al campo sobre el eje Z o sobre cualquier eje que pase por el origen y sea perpendicular al eje X .

Escribamos el problema en coordenadas cartesianas, de manera tal que los vectores fuente y campo vengan dados por las ecuaciones (2.40) – (2.42) y el campo eléctrico resulte en consecuencia el de la ecuación (2.43) que por comodidad aquí repetimos

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{-L}^L \lambda dx' \frac{(x - x'; y; z)}{[(x - x')^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

Supongamos ahora que queremos calcular el campo eléctrico en un punto genérico de coordenadas $(0; L/2; 0)$. Esta elección no parece caprichosa, toda vez que esa sería la posición del centro de la espira cuadrada vista desde el alambre de la figura 2.12. Basta reemplazar en la expresión (2.43) y resulta

$$\vec{E}(r) = k \int_{-L}^L \lambda dx' \frac{(-x'; \frac{L}{2}; 0)}{((x')^2 + (L/2)^2)^{3/2}} \quad (2.48)$$

La integral se opera entre $-L$ y L porque esos son los puntos extremos de la distribución; en cambio, $L/2$ es la distancia al alambre. Obsérvese que el campo eléctrico depende de la forma que adopte la distribución de cargas, λ . Por ejemplo, si tomamos $\lambda = \lambda_0 =$ constante, la ecuación (2.48) resulta en la forma

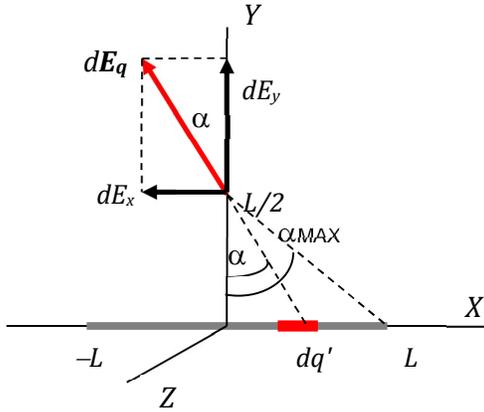
$$\vec{E}(r) = k \lambda_0 \int_{-L}^L dx' \frac{x'}{[(x')^2 + (L/2)^2]^{3/2}} (-\hat{e}_x) + k \lambda_0 \int_{-L}^L dx' \frac{L}{[(x')^2 + (L/2)^2]^{3/2}} (\hat{e}_y) \quad (2.49)$$

Es fácil ver que la primera integral es nula y la segunda resulta

$$\vec{E}_y = k \lambda_0 L \left[\frac{x}{L^2 \sqrt{x^2 + (L/2)^2}} \right]_{-L}^L (\hat{e}_y) = k \lambda_0 \frac{4\sqrt{5}}{5L} (\hat{e}_y) \quad (2.50)$$

Este era un resultado esperado porque la densidad de carga es simétrica, es decir, a un lado y otro del origen vale lo mismo, de manera tal que las contribuciones de dos puntos simétricos respecto del origen deben ser iguales en magnitud y formar el mismo ángulo respecto del eje Y . Luego, las componentes horizontales se anulan por ser iguales y opuestas y las verticales se suman porque son iguales y apuntan en el mismo sentido.

Una manera alternativa de calcular el campo eléctrico del alambre en el punto $(0; L/2; 0)$ es apelando a una sencilla integral geométrica. Para ello prestemos atención a la figura 2.13, en la que hemos descompuesto el vector campo eléctrico \vec{E}_q generado por el elemento diferencial de carga dq' en sus componentes



$$E_x = E_q \operatorname{sen} \alpha \quad (2.51. a)$$

$$E_y = E_q \cos \alpha \quad (2.51. b)$$

y el campo eléctrico (en el caso que estamos tratando, $\lambda =$ constante) en el punto $(0; L/2; 0)$ lo calculamos como

$$dE_q(\vec{r}) = \frac{k dq'}{D^2} = k \lambda_0 \frac{dx'}{D^2} \quad (2.52)$$

Fig. 2.13: esquema geométrico del integrando de la ecuación (2.48) del ejemplo 2.6.

Obsérvese que D es la distancia del elemento diferencial de carga al punto en el que estamos calculando el campo (en el que nace el vector campo eléctrico generado en ese elemento de carga y que en la figura 2.13 hemos marcado como $d\vec{E}_q$). Observemos que para todo punto sobre el eje X vale la relación

$$x' = D \operatorname{sen} \alpha \rightarrow dx' = D \cos \alpha d\alpha \quad (2.53)$$

de manera tal que la expresión (2.52) resulta en la forma

$$dE_q(\alpha) = \frac{k \lambda_0}{L} \cos^2 \alpha d\alpha$$

y, en consecuencia,

$$\vec{E}(r) = \frac{k \lambda_0}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha_{MAX}} d\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha (\hat{e}_x) + \frac{k \lambda_0}{L} \int_{-\alpha_{MAX}}^{\alpha_{MAX}} d\alpha \cos^3 \alpha (\hat{e}_y) \quad (2.54)$$

donde α_{MAX} se refiere a la máxima amplitud del ángulo de integración (que en nuestro caso es $\arctg 2$). De nuevo, dado que el coseno es una función par y la primera integral es proporcional a $\cos^3 \alpha$, resulta que la componente del campo en X se anula. Por lo demás, la segunda integral resulta

$$E_y = \frac{k \lambda_0}{L} \left[\operatorname{sen} \alpha - \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{3} \right]_{-\alpha_{MAX}}^{\alpha_{MAX}} = \frac{2k \lambda_0}{L} \left[\operatorname{sen} \alpha_{MAX} - \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha_{MAX}}{3} \right] \quad (2.55)$$

y como

$$\text{sen } \alpha_{MAX} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + (L/2)^2}}$$

obtenemos la expresión (2.50).

Regresemos a la espira. Si con cuatro de estos alambres formamos una espira cuadrada, el campo en el centro de la espira será nulo porque la contribución de cada alambre es la misma, pero estas contribuciones son perpendiculares entre sí y opuestas de a pares. Pero esto no significa que el campo de una espira rectangular es siempre nulo, lo es en el particular caso que estamos tratando, porque si la densidad de carga es diferente también lo será el campo. Por lo demás, estamos pensando en el campo en el centro de la espira, nadie dice que en otro punto (aún con λ =constante) el campo se anule.

Ejemplo 2.7: Un disco plano, de radio R_b , fijo a un sistema de referencia, está cargado homogéneamente con densidad superficial de carga σ , como muestra la figura 2.14. Calculemos el valor de la intensidad del campo eléctrico en todo punto del eje de simetría axial del disco (eje Z en la figura 2.14).

La primera consideración sobre esta configuración es su aparente simetría, porque parece evidente que rotar el disco un ángulo arbitrario alrededor del eje Z no puede modificar el valor del campo eléctrico. Y en principio, todo indica que el campo eléctrico sólo puede tener componente a lo largo del eje Z , porque cualquier contribución en otra dirección se cancela con la contribución del elemento de superficie que se halla en oposición.

Por lo demás, la carga de un elemento diferencial de área fuente puede calcularse a partir de la figura 2.14 como

$$dq' = \sigma R' d\phi' dR' \quad (2.56)$$

ubicado genéricamente en la posición

$$\vec{r}' = (R' \cos \phi' ; R' \text{sen } \phi' ; 0) \quad (2.57)$$

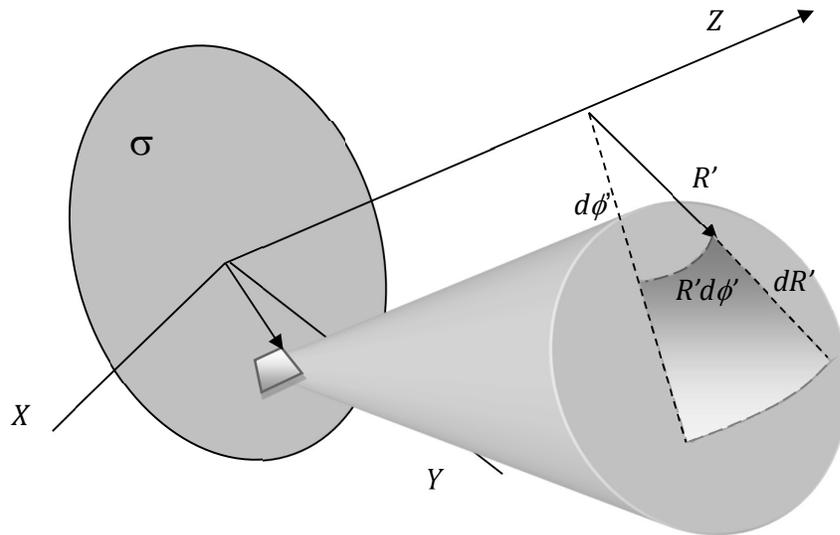


Fig. 2.14: en el círculo de la derecha se muestra, aumentado, un elemento de superficie del disco plano. Obsérvese que, al ser un elemento infinitesimal, el elemento de superficie se confunde con un rectángulo de lados r' y $r' d\phi'$.

Como de momento nos interesa calcular el campo en los puntos del eje Z , esto es, para todo punto de la forma

$$\vec{r} = (0; 0; z) \tag{2.58}$$

resulta

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-R' \cos \phi'; -R' \text{sen } \phi'; z) \tag{2.59}$$

y, por consiguiente,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(-R' \cos \phi')^2 + (-R' \text{sen } \phi')^2 + z^2} = (R'^2 + z^2)^{1/2} \tag{2.60}$$

de manera tal que la expresión (2.21) del campo eléctrico se transforma automáticamente en la forma integral

$$\vec{E} = k\sigma \int_0^{Rb} R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{(-R' \cos \phi'; -R' \text{sen } \phi'; z)}{(R'^2 + z^2)^{3/2}} \tag{2.61}$$

De la expresión (2.61), como esperábamos, se desprende de manera inmediata que el campo eléctrico a lo largo del eje Z no tiene componente paralela al plano del disco. En efecto, las integraciones angulares en las direcciones \hat{e}_x y \hat{e}_y resultan nulas porque son proporcionales a $\text{sen } \phi'$ la primera componente y a $\text{cos } \phi'$ la segunda, que entre 0 y 2π se anulan. En consecuencia sólo sobrevive la tercera componente de la integral, que resulta

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 2\pi k \sigma z \left(\frac{-1}{\sqrt{R'^2 + z^2}} \right)_0^{Rb} \hat{e}_z = 2\pi k \sigma z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z| \sqrt{1 + \frac{R_b^2}{z^2}}} \right) \hat{e}_z = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} s g(z) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_b^2}{z^2}}} \right] \hat{e}_z\end{aligned}\quad (2.62)$$

donde hemos usado las identidades $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1/2}$ y $z/|z| = s g(z)$. Coloquemos ahora una carga puntual de valor q a una distancia R del centro del disco, sobre el eje de simetría axial. Queda claro que, en virtud de la identidad (2.21), la fuerza que el disco ejerce sobre la carga viene dada por el producto entre la carga q y la expresión (2.62) para el campo eléctrico del disco. Ahora bien, la carga neta del disco vale $Q = \sigma\pi R_b^2$, y es evidente que de ninguna manera la fuerza resulta ser kqQ/R_b^2 . De hecho, el valor de la fuerza eléctrica no parece tender a kqQ/R^2 cuando $R_b \rightarrow 0$. Sin embargo, notemos que a partir de la identidad (2.62) el módulo de la fuerza puede escribirse como

$$F = 2\pi k q \sigma \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_b^2}{z^2}}} \right]\quad (2.63)$$

y recordemos que para una cantidad $\beta \ll 1$ vale la aproximación de primer orden

$$(1 + \beta)^\alpha \approx 1 + \alpha\beta\quad (2.64)$$

En nuestro caso, para $R_b \ll R$, o sea, $(R_b/R)^2 \ll 1$ podemos aproximar la identidad (2.63) por la expresión

$$F = 2\pi k q \sigma \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R_b^2}{R^2} \right) \right] = 2\pi k q \sigma \frac{R_b^2}{2R^2} = kq \frac{\sigma\pi R_b^2}{R^2}\quad (2.65)$$

Obsérvese que la expresión (2.65) es válida para $R_b \ll R$, y esto ocurre para $R_b \rightarrow 0$ o para $R \rightarrow \infty$ (estamos pensando indistintamente en reducir el radio del disco o en alejar la carga q) de manera tal que en ambos límites la fuerza se aproxima a kqQ/R^2 . En el primer caso porque el disco se reduce a una carga puntual, y en el segundo porque muy alejado del disco éste se ve como un punto.

Obsérvese de paso que el campo eléctrico apunta siempre en la dirección del eje Z , pero cambia de signo al pasar por el plano del disco, porque en $z = 0$ el campo vale $\sigma/2\epsilon_0$ del lado positivo y vale $-\sigma/2\epsilon_0$ del lado negativo, y para $|z| \rightarrow \infty$ el campo se anula en ambos sentidos. En la figura 2.15 hemos graficado el campo eléctrico del disco en función de la distancia a su centro sobre el eje de simetría.

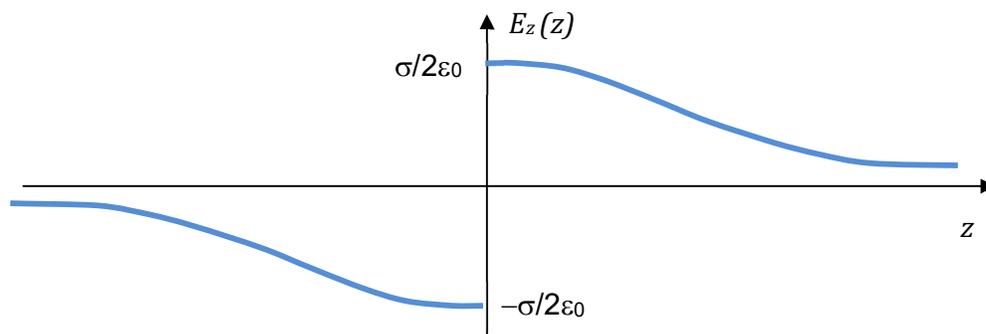


Fig. 2.15: campo eléctrico axial de un disco plano en función de la distancia a su centro. Obsérvese que el campo no está definido en el centro del disco, que es donde cambia de signo.

A partir de la expresión (2.62) es muy sencillo calcular el campo creado por las configuraciones que se pueden generar por deformación continua del disco, como puede ser una corona plana, un aro, etc. A modo de ejemplo lo haremos en algunos casos particulares.

1) campo eléctrico generado por un plano infinito cargado con densidad superficial de carga uniforme σ

En este caso es casi evidente que debe tomarse el límite $R_b \rightarrow \infty$, de manera tal que resulta

$$\vec{E}(z) = 2\pi k\sigma s g(z)\hat{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} s g(z)\hat{e}_z \quad (2.66)$$

Es casi evidente que el campo eléctrico cambia de signo al pasar de un lado al otro del plano cargado, es decir, es siempre saliente (entrante) si $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$). Pero a diferencia

del disco finito el campo ahora es constante (en módulo y en dirección), como se ilustra en la figura 2.16. Las aplicaciones prácticas de esta propiedad se discutirán en el capítulo 5.

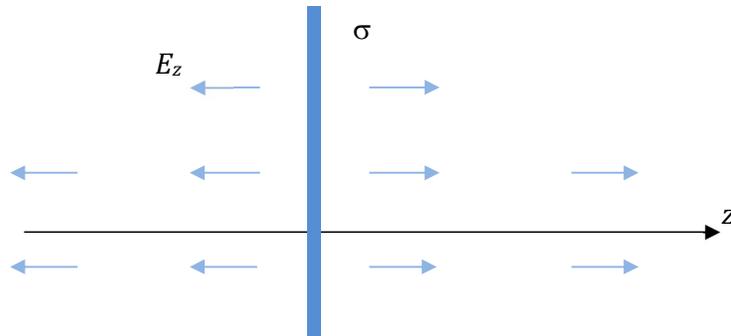


Fig. 2.16: campo eléctrico de un plano infinito cargado con σ constante (en el caso ilustrado de valor positivo). Cada vector que se muestra es una medida de la intensidad del campo en esa región. El hecho de que sean de igual longitud indica que el campo eléctrico es constante en todo punto del espacio.

2) campo eléctrico generado por un aro de radio R_b

En este caso la expresión (2.61) simplemente no se integra en dr' , y la densidad superficial de carga se transforma en densidad lineal de carga, siendo $dq' = \lambda R_b d\phi'$. El procedimiento general que condujo a la ecuación (2.61) se aplica ahora para obtener de manera inmediata

$$\vec{E} = k\lambda \int_0^{2\pi} R_b d\phi' \frac{(-R_b \cos \phi'; -R_b \text{sen } \phi'; z)}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi k R_b \lambda z}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (2.67)$$

3) campo eléctrico generado por una corona de radios interno R_a y externo R_b

Ahora se trata sencillamente de cambiar los límites de integración de la expresión (2.61), e integrar la variable radial entre R_a y R_b . Es fácil verificar que la ecuación (2.61) se transforma en

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sg(z) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_a^2}{z^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_b^2}{z^2}}} \right] \hat{e}_z \quad (2.68)$$

En la parte de ejercitación del capítulo se sugieren otras configuraciones, cuyos campos eléctricos se pueden derivar a partir del campo eléctrico del disco plano.

Ejemplo 2.8: Regresemos a la ecuación (2.67) del campo eléctrico generado por el aro de radio R_b del ejemplo anterior, sección 2. Supongamos que está apoyado en el plano XY , con su centro en el origen del sistema coordenado, y cargado ya no con densidad constante sino con densidad lineal $\lambda(\phi')$, y calculemos el campo eléctrico que el anillo genera a lo largo del eje Z (eje de simetría de revolución del anillo) para diferentes formas de la densidad lineal de carga.

Notemos ante todo que la carga total del anillo se escribe como

$$Q_{ANILLO} = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi') R_b d\phi' \quad (2.69)$$

de manera tal que sólo cuando está cargado con densidad lineal constante vale $2\pi\lambda R_b$. Por ejemplo, si la función de densidad fuera de la forma

$$\lambda(\phi') = \lambda_0 \cos \phi' \quad (2.70)$$

(con λ_0 constante y, para simplificar el análisis, positiva) la carga total del anillo sería nula (para convencerse, basta integrar la ecuación (2.69) con la densidad propuesta). Pero de modo alguno carga total nula implica campo eléctrico nulo. Para demostrarlo, alcanza con trabajar específicamente la densidad lineal de la expresión (2.70).

En tal caso, lo único que debemos cambiar en la ecuación (2.67) es la expresión de la densidad de carga, de modo tal que el campo eléctrico será de la forma

$$\vec{E} = k\lambda_0 \int_0^{2\pi} R_b \cos \phi' d\phi' \frac{(-R_b \cos \phi'; -R_b \sen \phi'; z)}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.71)$$

Antes de integrar podemos inspeccionar la forma del campo eléctrico a lo largo del eje Z . Para ello, coloquemos una carga de prueba en algún punto z_0 de este eje, como mostramos en el panel izquierdo de la figura 2.17. Parece inmediato que dos elementos simétricamente ubicados provocan una fuerza de idéntico módulo, aunque, por supuesto, una es atractiva y la otra repulsiva. La fuerza neta (y en consecuencia el campo), entonces, no tendrá componente a lo largo del eje Z sino que sólo puede tener una componente paralela al plano XY . Esto significa que la tercera integral de la expresión (2.71) es nula.

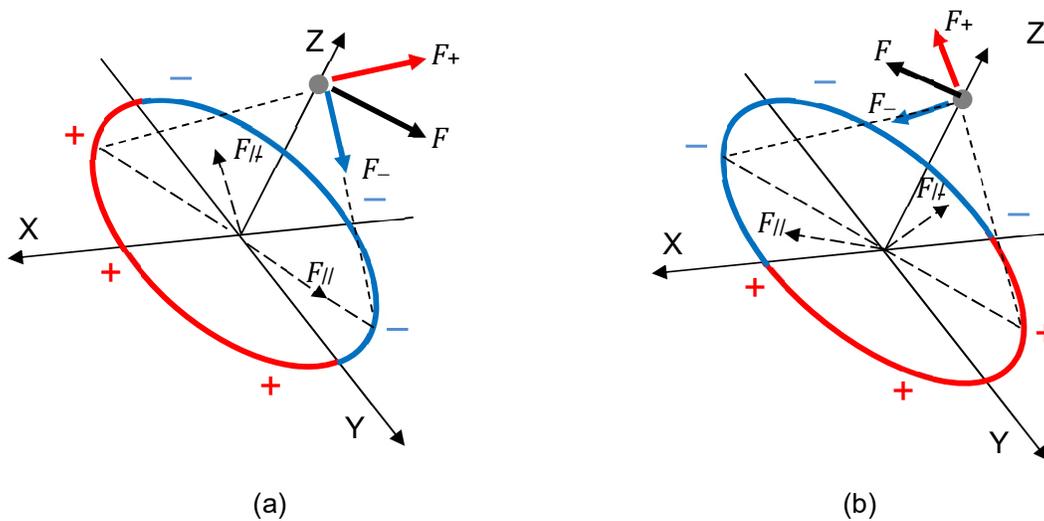


Fig. 2.17: (a) la mitad del anillo del lado positivo del eje X tiene carga positiva, en tanto que la otra mitad tiene carga negativa. La fuerza de dos elementos simétricos respecto de los ejes X e Y provocan una fuerza sobre la carga de prueba que no tiene componente a lo largo del eje Z. Las componentes $F_{||}$ son las proyecciones de la fuerza F paralelas al plano XY. (b) ahora es la mitad del anillo del lado positivo del eje Y la que tiene carga positiva, en tanto que la otra mitad tiene carga negativa. Un análisis similar al del caso del panel (a) muestra que la única componente del campo será en la dirección $-E_y$. Como antes, las componentes $F_{||}$ son las proyecciones de la fuerza F paralelas al plano XY.

Por lo demás, parece evidente que la fuerza (y en consecuencia el campo eléctrico) tendrá el mismo valor para el mismo ángulo ϕ a un lado y otro del eje X (obsérvese la figura 2.17, en la que se muestran dos componentes $F_{||}$ para el mismo ángulo a un lado y otro del eje de abscisas), esto es, las componentes E_y se anularán de a pares y se reforzarán las componentes en X, que además están orientadas en sentido negativo.

O sea, la segunda integral del campo (2.71) debe ser nula y la primera componente debe ser negativa.

En efecto, cualquiera sea la altura z sobre el plano XY, las integrales resultan

$$E_x = k\lambda_0 \int_0^{2\pi} R_b \cos \phi' d\phi' \frac{(-R_b \cos \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\lambda_0 \pi R_b^2}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.72.a)$$

$$E_y = k\lambda_0 \int_0^{2\pi} R_b \cos \phi' d\phi' \frac{(-R_b \sen \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\lambda_0 R_b^2}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \left[\frac{\sen^2 \phi'}{2} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (2.72.b)$$

$$E_z = k\lambda_0 \int_0^{2\pi} R_b \cos \phi' d\phi' \frac{z}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\lambda_0 R_b z}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} [\sen \phi']_0^{2\pi} = 0 \quad (2.72.c)$$

Supongamos ahora que la densidad de carga fuera de la forma

$$\lambda(\phi') = \lambda_0 \operatorname{sg}(y') \quad (2.73)$$

donde, como antes, la densidad λ_0 es constante y positiva. El problema parece similar al que acabamos de resolver, por lo menos en lo que respecta a que una mitad del anillo es positiva y la otra mitad es negativa. De hecho, la carga total del anillo es nula, y todo se ve como si hubiéramos girado 90° el anillo. En la figura 2.17(b) mostramos la nueva densidad de carga. En efecto, resulta

$$Q_{ANILLO} = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \operatorname{sg}(y') R_b d\phi' \equiv \int_0^\pi \lambda_0 R_b d\phi' - \int_\pi^{2\pi} \lambda_0 R_b d\phi' = 0 \quad (2.74)$$

Sin embargo ahora la única componente del campo no nula es la componente E_y , en sentido negativo. Este resultado puede obtenerse también integrando la expresión (2.67) teniendo en cuenta la distribución (2.73).

$$E_x = k\lambda_0 R_b^2 \left\{ \int_0^\pi d\phi' \frac{(-\cos \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} - \int_\pi^{2\pi} d\phi' \frac{(-\cos \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \right\} = 0 \quad (2.75. a)$$

$$E_y = k\lambda_0 R_b^2 \left\{ \int_0^\pi d\phi' \frac{(-\operatorname{sen} \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} - \int_\pi^{2\pi} d\phi' \frac{(-\operatorname{sen} \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \right\} = - \frac{4k\lambda_0 R_b^2}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.75. b)$$

$$E_x = \frac{k\lambda_0 R_b^2 z}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \int_0^\pi d\phi' - \int_\pi^{2\pi} d\phi' \right\} = 0 \quad (2.75. a)$$

Lo que debería quedar en evidencia en estos ejemplos es que el cálculo de campos eléctricos generados por diferentes distribuciones de carga es siempre el mismo en cuanto a su tratamiento formal, a lo sumo cambia la densidad de carga, y con ella, posiblemente, la complejidad y el número de las integrales a resolver. Otro de los aspectos a destacar es que cada vez que las distribuciones de carga presentan algún grado de simetría hay componentes del campo que se anulan. El estudio de las componentes del campo y las simetrías asociadas lo dejaremos para el próximo capítulo. Por ahora, y para sintetizar estas ideas, presentemos un caso ligeramente diferente a los anteriores, digamos un alambre en forma de arco circular (un anillo incompleto) de radio R_b , con densidad de carga variable. Para fijar ideas, supongamos que la densidad es de la forma

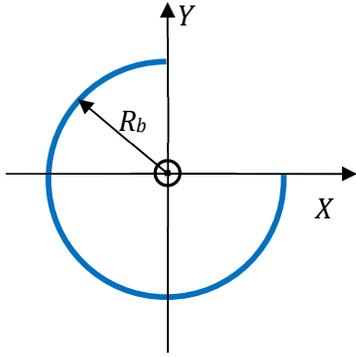


Fig. 2.18: el alambre de la figura tiene carga negativa no uniforme, y es evidente la falta de simetría pues, por ejemplo, el lado derecho de la configuración no es igual al lado izquierdo.

$$\lambda(\phi') = \lambda_0 \text{sen } \phi' \quad (2.76)$$

con λ_0 negativo, y que se trata de tres cuartos de un anillo apoyado en el plano XY , como mostramos en la figura 2.18. Calculemos el campo eléctrico de esta distribución de carga en todo punto del espacio (el eje Z es perpendicular al plano de la figura y saliente, como indica el círculo con un punto en el centro del sistema de referencia).

Para comenzar, debemos escribir los vectores campo (\vec{r}) y fuente (\vec{r}'). En nuestro caso, serán

$$\vec{r} = (x; y; z) \quad \vec{r}' = (R_b \cos \phi'; R_b \text{sen } \phi'; 0) \quad (2.77)$$

en tanto que las restantes cantidades se escriben como

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = ((x - R_b \cos \phi')^2 + (y - R_b \text{sen } \phi')^2 + z^2)^{3/2} \quad (2.78)$$

$$dq' = \lambda_0 R_b \text{sen } \phi' d\phi' \quad (2.79)$$

de manera tal que, teniendo en cuenta que las cargas se alojan entre $\phi' = \pi/2$ y $\phi' = 2\pi$, la expresión del campo eléctrico resulta

$$\vec{E} = k\lambda_0 \int_{\pi/2}^{2\pi} R_b \text{sen } \phi' d\phi' \frac{(x - R_b \cos \phi'; y - R_b \text{sen } \phi'; z)}{((x - R_b \cos \phi')^2 + (y - R_b \text{sen } \phi')^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.80)$$

Esta es la expresión del campo en todo punto del espacio. Si queremos especificar alguno en particular, sólo debemos reemplazar en la expresión (2.80) las coordenadas del punto campo. Por ejemplo, a lo largo del eje Z las coordenadas del punto campo son de la forma $(0; 0; z)$ de manera tal que el campo generado por el alambre a lo largo de ese eje resulta de la forma

$$\vec{E} = -k|\lambda_0| \int_{\pi/2}^{2\pi} R_b \text{sen } \phi' d\phi' \frac{(-R_b \cos \phi'; -R_b \text{sen } \phi'; z)}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.81)$$

donde hemos hecho explícito que la densidad de carga λ_0 es negativa. La integración de las componentes es inmediata, y resulta en las formas

$$E_x = -k|\lambda_0| \int_{\pi/2}^{2\pi} R_b \text{sen } \phi' d\phi' \frac{(-R_b \cos \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k|\lambda_0|R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.82. a)$$

$$E_y = -k|\lambda_0| \int_{\pi/2}^{2\pi} R_b \text{sen } \phi' d\phi' \frac{(-R_b \text{sen } \phi')}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3k|\lambda_0|R_b^2}{4(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.82. b)$$

$$E_z = -k|\lambda_0| \int_{\pi/2}^{2\pi} R_b \text{sen } \phi' d\phi' \frac{z}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k|\lambda_0|z R_b}{(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.82. c)$$

Ejemplo 2.9: El cuerpo puntual de la figura tiene masa m y carga eléctrica q . Se halla en vacío, en equilibrio por sobre un plano (que a los efectos prácticos puede considerarse infinito) cargado con densidad de carga uniforme σ_{INF} . Estudiemos el equilibrio de esta carga puntual.

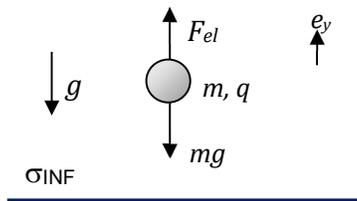


Fig. 2.19: la carga puntual está sujeta a dos fuerzas, que se contrarrestan y permiten el equilibrio. En tanto el campo gravitatorio sea uniforme y el plano infinito, la posición de la carga sobre el plano es irrelevante.

Notemos ante todo que el equilibrio depende de los signos de las cargas involucradas, pues parece evidente que la fuerza eléctrica debe ser repulsiva. O sea, las cargas q y σ_{INF} deben ser de igual signo. Por lo demás, el equilibrio es inmediato y resulta en la forma

$$q \frac{\sigma_{INF}}{2\epsilon_0} = mg \quad (2.83)$$

Obsérvese que la condición de equilibrio queda definida completamente porque requiere que los signos de las cargas del miembro izquierdo sean

iguales. En el próximo ejemplo veremos que esta condición se complica si colocamos no uno sino dos planos, infinitos y paralelos.

Ejemplo 2.10: Regresemos al ejemplo 2.9 y coloquemos un plano con densidad superficial σ_{SUP} por sobre la carga. Como antes, y a los efectos prácticos, los planos pueden considerarse infinitos. En función de los otros parámetros del problema, hallemos el valor de σ_{SUP} que permite el equilibrio.

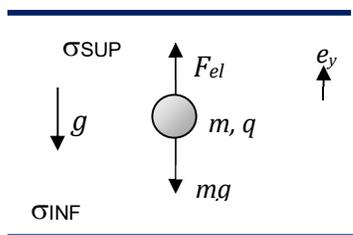


Fig. 2.19: la carga puntual está sujeta a dos fuerzas, que se contrarrestan y permiten el equilibrio. En tanto el campo gravitatorio sea uniforme y los planos infinitos, la posición de la carga entre los planos es irrelevante.

Notemos ante todo que el equilibrio no sólo depende de los signos de las cargas involucradas sino también de las cantidades de carga superior e inferior. Por ejemplo, dos planos con igual cantidad de carga de igual signo hacen inviable el equilibrio, cualquiera sea el signo de la carga puntual. En cambio, dos planos con igual cantidad de carga de signo opuesto permiten alcanzar el equilibrio sólo si la carga del plano inferior tiene igual signo que el de la carga puntual (y por ende el plano superior tiene carga opuesta). En la tabla inferior anotamos las posibles combinaciones de cargas, y agregamos cuáles de esas combinaciones pueden llevar al equilibrio del sistema.

caso	$sg(q)$	$sg(\sigma_{INF})$	$sg(\sigma_{SUP})$	Condición
1	+	+	+	$\sigma_{INF} > \sigma_{SUP}$
2	+	+	-	posible
3	+	-	+	imposible
4	+	-	-	$ \sigma_{INF} < \sigma_{SUP} $
5	-	-	-	$ \sigma_{INF} > \sigma_{SUP} $
6	-	+	-	imposible
7	-	-	+	posible
8	-	+	+	$\sigma_{INF} < \sigma_{SUP}$

La condición de equilibrio $\sum \vec{F} = \vec{0}$ impone en consecuencia

$$\frac{|q|}{2\epsilon_0} (|\sigma_{INF}| - |\sigma_{SUP}|)\hat{e}_y + mg(-\hat{e}_y) = 0 \quad \text{casos 1 y 5} \quad (2.83)$$

$$\frac{|q|}{2\epsilon_0} (|\sigma_{SUP}| - |\sigma_{INF}|)\hat{e}_y + mg(-\hat{e}_y) = 0 \quad \text{casos 4 y 8} \quad (2.84)$$

$$\frac{|q|}{2\epsilon_0} (|\sigma_{INF}| + |\sigma_{SUP}|)\hat{e}_y + mg(-\hat{e}_y) = 0 \quad \text{casos 2 y 7} \quad (2.85)$$

Parece evidente que, en cualquier caso, podremos escribir

$$|\sigma_{INF}| = |\alpha \sigma_{SUP}| \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.86)$$

y que en término de las expresiones (2.83)-(2.85) podemos asegurar que será

$$|\alpha| > 1 \text{ si } \text{sg}(q) = \text{sg}(\sigma_{INF}) = \text{sg}(\sigma_{SUP}) \tag{2.87.a}$$

$$|\alpha| < 1 \text{ si } \text{sg}(q) \neq \text{sg}(\sigma_{INF}) \text{ y } \text{sg}(\sigma_{INF}) = \text{sg}(\sigma_{SUP}) \tag{2.87.b}$$

$$|\alpha| \text{ cualquiera si } \text{sg}(q) = \text{sg}(\sigma_{INF}) \text{ y } \text{sg}(\sigma_{INF}) \neq \text{sg}(\sigma_{SUP}) \tag{2.87.c}$$

Luego, la condición de equilibrio se reduce a la forma

$$|\sigma_{SUP}| = \frac{2\varepsilon_0 mg}{|q|(1 + j|\alpha|)} \tag{2.88}$$

donde $j = \pm 1$ de acuerdo a las restricciones sobre los valores de α dadas por las expresiones (2.87).

Ejemplo 2.11: Sea una esfera de radio R cargada en volumen con densidad volumétrica de carga ρ , como se muestra en la figura 2.20. Estudiemos el campo eléctrico que genera esta distribución de cargas en todo punto \vec{r} del espacio tal que $|\vec{r}| > R$.

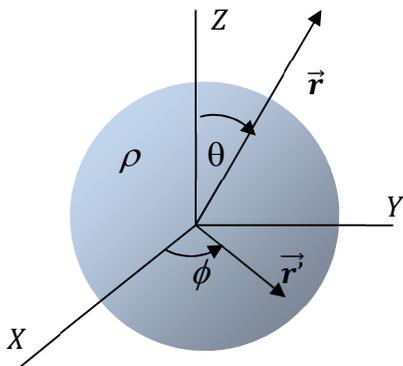


Fig. 2.20: esfera con carga eléctrica distribuida en volumen.

Convengamos en que la densidad de carga puede ser, en principio, una función arbitraria de las tres variables que definen las coordenadas esféricas, esto es,

$$\rho = \rho(r, \theta, \phi)$$

donde, recordemos, r es la distancia radial, θ es el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal, definidos en la figura 2.20. En términos absolutamente generales, se habla de simetría esférica cuando las propiedades relacionadas al fenómeno que se estudia no dependen de ninguno de los dos ángulos. En nuestro caso, si la densidad de carga no depende ni del ángulo polar ni del ángulo azimutal,

diremos que tiene simetría esférica. En tal caso, girar la esfera (o girar en torno a ella) no provoca ninguna modificación física en el entorno, porque después de girar no hay nada que haya cambiado y cualquier lugar del espacio a una dada distancia r es indistinguible del resto, esto es, desde cualquier punto de una esfera de radio r que rodee a la esfera cargada, y sea concéntrica con ella, todo se vería siempre igual, antes y después de girar cualesquiera de las dos esferas.

El campo eléctrico que genera la esfera cargada depende sólo de la distribución de carga, de manera que no puede ser función de ningún ángulo y sólo puede depender de la distancia r al centro. Esto significa que, en principio, el campo eléctrico debiera escribirse como

$$\vec{E}(r) = E_r(r) \hat{e}_r + E_\theta(r) \hat{e}_\theta + E_\phi(r) \hat{e}_\phi \quad (2.89)$$

Ahora bien, si el campo tuviera componente en alguna de las direcciones angulares, rotar la esfera en un sentido o en otro (digamos horario o antihorario) sería distinguible porque podríamos reconocer las variaciones del campo eléctrico. Y como sólo depende de la densidad de carga, estaríamos viendo variaciones angulares de ρ , en contra de nuestra hipótesis de que sólo depende de la distancia radial. Para que esto no ocurra, tanto $E_\theta(r)$ como $E_\phi(r)$ deben ser constantes. Pero el campo eléctrico de la esfera, para $r \gg R$, se ve como el de una carga puntual (porque la misma esfera se ve como un punto), esto es, decrece como $1/r^2$. Luego, tanto $E_\theta(r)$ como $E_\phi(r)$ deben ser nulos en todo punto.

En síntesis, una distribución esféricamente simétrica de carga genera un campo eléctrico esféricamente simétrico, esto es, de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{e}_r$.

Obsérvese que todavía la densidad volumétrica de carga puede ser función de la distancia al centro, pero nuestro razonamiento sigue siendo válido. Y de hecho, para $R \rightarrow 0$ la configuración es la de una carga puntual en el origen, de manera tal que se sigue que el campo eléctrico de una carga puntual en el origen de un sistema de referencia ($r' = 0$) es de la forma

$$\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{e}_r \quad (2.90)$$

2.6 – Campo eléctrico en los conductores

La esfera del ejemplo 2.11 está cargada en volumen, pero nada más se dijo acerca de sus características. Parecería en principio que fuera indistinto que se trate de una esfera conductora o una esfera de material aislante. Sin embargo no lo es.

En la sección 2.2 adelantamos que, a diferencia de los conductores, las cargas en los dieléctricos tienen muy poca movilidad (dicho esto en un sentido coloquial, aunque no debería entenderse en su concepto clásico). En primera aproximación parece válido considerarlas fijas, incluso en presencia de un campo eléctrico de intensidad menor a la de ruptura (a partir de la cual el dieléctrico se “pincha” y se torna conductor). De esta manera, tener una esfera dieléctrica cargada en volumen es posible, aun en la hipótesis electrostática (cargas quietas).

En los conductores, por el contrario, las cargas se mueven con relativa facilidad, y en presencia de un campo eléctrico de hecho lo hacen porque la fuerza coulombiana neta sobre ellas es no nula. Por lo tanto, si en el interior de un conductor hubiera campo eléctrico y cargas libres en exceso (cargas en volumen), estas estarían en movimiento, contradiciendo así la hipótesis electrostática de que las cargas permanecen fijas.

En síntesis, el equilibrio electrostático se establece una vez que las cargas en exceso de los conductores migran hacia la superficie. La razón de que se muevan hacia la superficie es muy sencilla: si migraran hacia el centro las fuerzas repulsivas serían más intensas que alojadas en la superficie externa, que es la región en la que soportan la menor fuerza repulsiva. Más aún, el campo electrostático en la superficie de un conductor no puede tener componente tangencial, porque si la tuviera habría desplazamiento de cargas a lo largo de la superficie, contradiciendo la hipótesis electrostática. En consecuencia, podemos enunciar sin más que

En situación electrostática tanto el campo eléctrico como la densidad de carga neta son nulos en el interior de los conductores, y el campo en la superficie es perpendicular a la misma.

Obsérvese que estamos adoptando una visión sobresimplificada del problema, porque no estamos prestando atención alguna a la estructura atómica del conductor. Pareciera que todo ocurre como si pudiéramos disponer cargas eléctricas puntuales y aisladas en el interior de un conductor macizo de la misma manera en que se colocan municiones en el interior de una masilla. Si ese fuera el punto (y no lo es) deberíamos aceptar que *hasta* dos cargas se pueden colocar, porque una sola en el centro se acomodaría a la estructura, y dos se aceptan si son de signo opuesto. Por otro lado, parece importante que el conductor sea macizo, porque de ser hueco aparentemente no traería tantas dificultades. En el próximo capítulo habremos de justificar estos resultados desde un punto de vista ligeramente distinto.

2.7 – Líneas de campo

En términos absolutamente generales, dada una configuración de cargas siempre es posible trazar curvas que en todo punto sean tangentes al vector campo eléctrico. Y como la dirección del campo eléctrico coincide con la dirección de la fuerza (aunque no necesariamente coinciden los sentidos) estas curvas también habrán de ser tangentes, punto a punto, a la fuerza que experimentaría una carga de prueba colocada en dichos puntos. Las curvas así construidas se denominan *líneas de campo* (o *líneas de fuerza*).

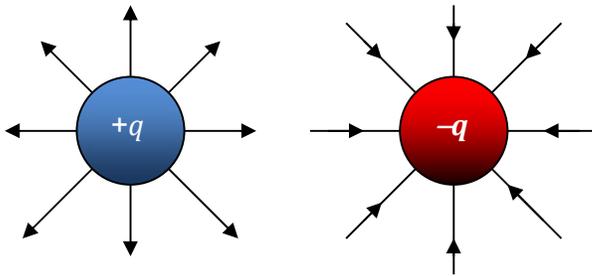


Fig. 2.21: líneas de campo de una carga puntual (a) positiva, (b) negativa. En ambos casos las líneas siguen la dirección radial.

El caso más sencillo es el de una carga puntual. De acuerdo a la expresión (2.90) el campo de tal configuración es puramente radial, saliente (en el sentido \hat{e}_r) si $q > 0$, y entrante (en el sentido $-\hat{e}_r$) si $q < 0$. Las líneas tangentes a la dirección radial son líneas también radiales, con origen en el centro. Luego, las líneas de campo de una carga puntual son como las que se muestran en la figura 2.21.

La figura 2.22 muestra las líneas de campo de una configuración de dos cargas de signo contrario. Obsérvese que las líneas nacen en la carga positiva (pintada de azul) y mueren en la carga negativa (pintada de rojo).

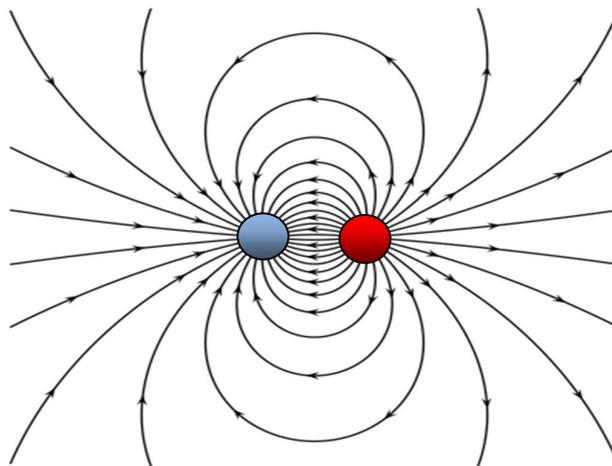


Fig. 2.22: líneas de fuerza de una configuración formada por dos cargas puntuales de signo contrario (la roja negativa y la azul positiva). En el dibujo, la carga positiva es la de la derecha, que es donde nacen las líneas de campo. Obsérvese que toda línea que nace en $+q$ finaliza en $-q$, esto es, no hay ninguna línea que quede abierta.

En el caso de dos cargas de igual signo debe existir un plano de simetría, porque las cargas son indistinguibles y si se las intercambia de lugar todo debe permanecer igual. Luego, las líneas deben ser tangentes a ese plano porque todas las líneas son ahora salientes o entrantes, según que las cargas sean positivas o negativas, respectivamente. Las líneas de campo de esta configuración se muestran en la figura 2.23.

Finalmente, analicemos las líneas de campo en una configuración formada por un plano infinito cargado homogéneamente en superficie con densidad $\sigma > 0$ y una carga

puntual de valor $-q$ a una distancia d del plano, como se muestra en la figura 2.24.

Obsérvese que cada línea que sale del plano (las líneas de un plano aislado son todas salientes y paralelas, véase el ejemplo 2.7.1) debe llegar a la carga puntual. Por otro lado, al superponerse campos generados por cargas con signo contrario, existe un punto en el cual el campo se anula. En este caso será el punto ubicado a una distancia x_0 tal que

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{kq}{x_0^2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2kq\epsilon_0}{\sigma}} \quad (2.91)$$

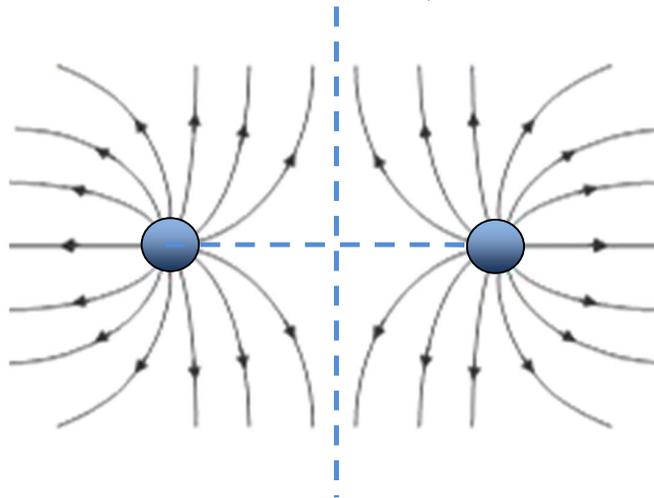


Fig. 2.23: líneas de fuerza de una configuración formada por dos cargas positivas. Las líneas punteadas marcan los planos de simetría, a medio camino entre las dos cargas. Obsérvese que las líneas son, en este caso, todas salientes, y es por este motivo es que no pueden atravesar el plano.

Si la distancia d a la que se encuentra la carga es menor que el valor de x , las líneas de campo son como las de la figura 2.24.

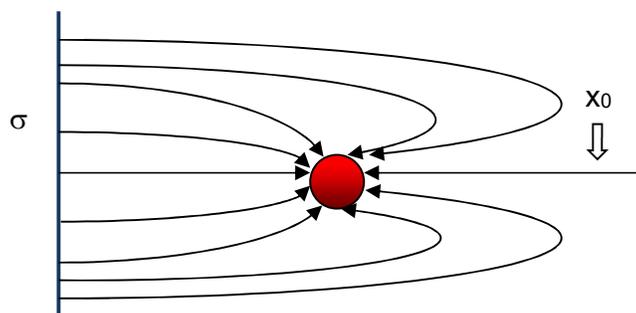


Fig. 2.24: líneas de campo de la configuración de un plano con carga $\sigma > 0$ y una carga $-q$. Se muestra el punto x_0 en el cual el campo de la configuración es nulo.

Resumen del capítulo

En este capítulo hemos introducido el concepto de carga eléctrica como una propiedad particular de la materia (en realidad, *otra* propiedad) que le permite interactuar con todos los otros cuerpos del universo que manifiesten la misma propiedad. De hecho, hemos presentado la idea del campo eléctrico como un conjunto de propiedades modificadas del espacio que es detectable por todo cuerpo que posea carga eléctrica no nula. La medida de la intensidad de esta interacción es, precisamente, la fuerza eléctrica.

Un detalle distintivo respecto de la fuerza gravitatoria es que esta fuerza puede ser atractiva o repulsiva, un fenómeno que no llevó a aceptar la existencia de dos, y sólo dos, tipos de carga. Hicimos hincapié en el hecho de que la intensidad de campo eléctrico y la fuerza eléctrica son dos representaciones de un mismo fenómeno. Pero no debiera perderse de vista que interpretamos el universo a partir de las fuerzas, de manera tal que en última instancia el vector campo eléctrico es un ente matemático elegante y útil, pero secundario.

Otro aspecto a destacar es que hemos hecho nuestra presentación asumiendo que todos los cuerpos poseen cargas eléctricas, sólo que algunos ponen de manifiesto sus propiedades eléctricas de manera más rápida y evidente que otros, y a partir de esta observación fenomenológica hemos dividido groseramente a las sustancias en conductoras y aislantes. Y decir que la división es grosera parece razonable porque hasta que no podamos cuantificar esta propiedad su clasificación es, al menos, arbitraria.

Por último, hemos argumentado que en la hipótesis electrostática el campo eléctrico en el interior de un conductor debe ser nulo, porque de otra manera existirían cargas en movimiento (violando así la hipótesis que pretendemos plantar). De hecho, las cargas en un conductor deben moverse para alcanzar el equilibrio electrostático, y aunque el cálculo formal de los tiempos involucrados en estos procesos de tendencia al equilibrio exceden en mucho el marco matemático de este libro, podemos asegurar que son lo suficientemente breves (frente a los tiempos típicos de los problemas que tratamos) como para ser ignorados. Pero como resultado de esta hipótesis hemos debido postular que el campo electrostático en la frontera de un conductor debe ser perpendicular a su superficie, idea que nos ayudó, junto con las ideas de simetría que completaremos en el próximo capítulo, a introducir el concepto de líneas de campo como el conjunto de curvas tangentes al campo eléctrico en cada punto del espacio.

Complementos del capítulo

Ejercicio complementario 1: dos cuerpos de idéntica masa M se hallan unidos a sendos resortes ideales de constante elástica $K_e = 100 \text{ N/m}$, y se encuentran separados una distancia $R = 1 \text{ m}$. Se los une ahora con una cuerda de longitud $L = 0,25 \text{ m}$ y se les

suministra carga eléctrica q al de la izquierda y $2q$ al de la derecha, como muestra la figura 2.25. Suponiendo $q = 10 \mu C$ calculemos:

- a) el módulo de la tensión de la cuerda;
- b) la máxima compresión de cada resorte si se corta la soga que une a los cuerpos.

En lo que sigue habremos de suponer que el piso no ofrece resistencia apreciable al deslizamiento de los bloques, y que el tamaño de los bloques es mucho menor que R (esto significa que a los efectos prácticos tratamos a los bloques como cuerpos y cargas puntuales).

Es muy tentador pensar que la tensión de la cuerda es dos veces la suma de la fuerza elástica y la fuerza coulombiana que se ejercen los bloques entre sí, porque tiran de la soga en sentidos opuestos. Sin embargo, el equilibrio estático de cada uno de los bloques impone que la tensión T de la cuerda sea igual a la fuerza de repulsión

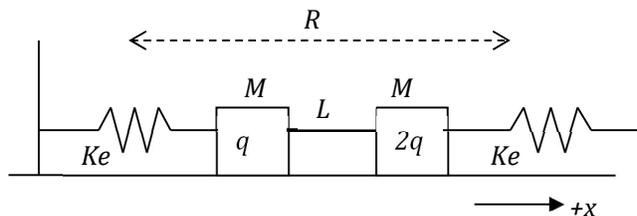


Fig. 2.25: los bloques son en realidad puntuales. Se ha definido el sentido positivo hacia la derecha

electrostática sumada a la fuerza elástica, porque en este caso particular son ambas opuestas a la tensión de la cuerda. Teniendo en cuenta que los cuerpos son considerados puntuales, la deformación de cada resorte vale $\Delta x = (R-L)/2$, de manera tal que resulta

$$T = \frac{2kq^2}{L^2} + K_e \frac{R-L}{2} \tag{2.92}$$

que para los valores propuestos alcanza un valor $T = 403,8 N$. Una vez que se corta la cuerda, el equilibrio habrá de lograrse cuando la fuerza elástica sobre cada bloque iguale a la fuerza de repulsión electrostática. En ese momento cada uno de los resortes se habrá comprimido una cantidad δx , y los bloques se hallarán a una distancia $R + 2\delta x$. Luego, la condición de equilibrio impone

$$K_e \delta x = k \frac{2q^2}{(R + 2\delta x)^2} \Rightarrow (R + 2\delta x)^2 = \frac{2kq^2}{K_e \delta x} \tag{2.93}$$

La ecuación que resulta es cúbica, y puede resolverse numéricamente. Con todo, para ilustrar la solución, hemos graficado las curvas que representan a los miembros derecho e izquierdo de la segunda igualdad, una hipérbola y una parábola, respectivamente. Las dos curvas se cortan en el valor de equilibrio δx_{eq} como muestra la figura 2.26, que para los valores del problema resulta del orden de $1,8 cm$. Obsérvese que todos los coeficientes son positivos, y que el hecho de que uno de los cuerpos tenga el doble de la carga del otro no

hace que la fuerza eléctrica sobre cada cuerpo sea diferente (una situación que por cierto era de esperar a partir del principio de interacción).

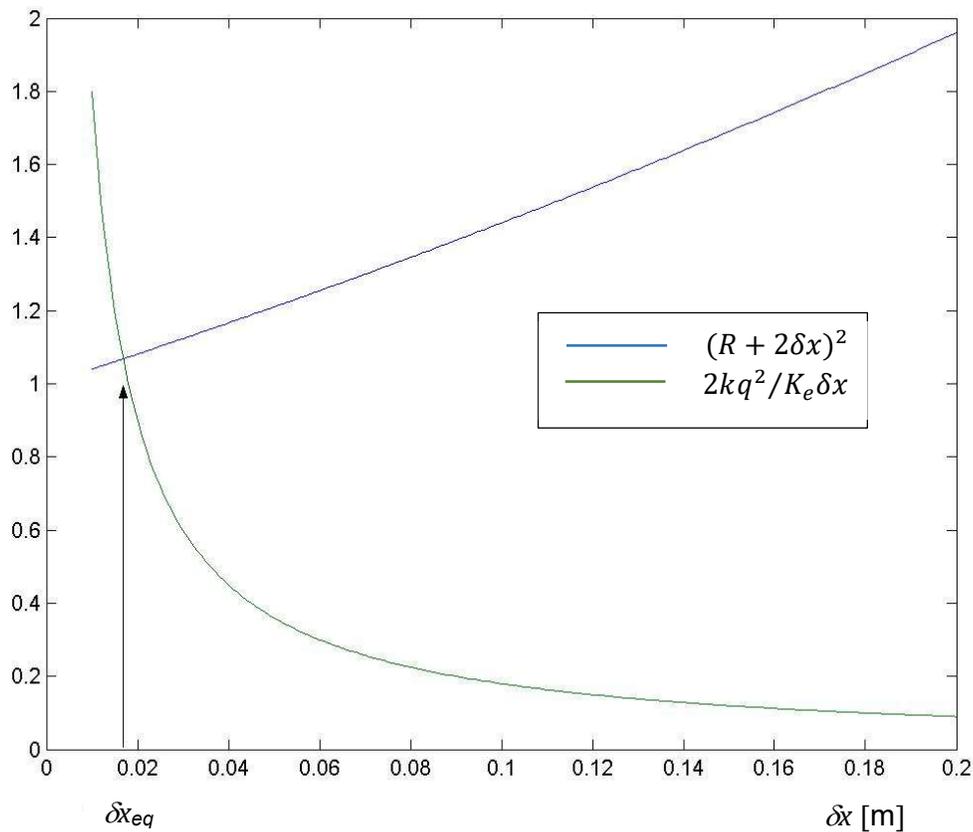


Fig. 2.26: solución gráfica de la expresión (2.93). Con una flecha vertical se muestra la localización del valor de la deformación de equilibrio (δx_{eq}), que para los valores del problema resulta de alrededor de 1,8 cm.

Ejercicio complementario 2: El péndulo cónico de la figura 2.27 consiste en un cuerpo puntual de masa M y carga Q que gira con velocidad angular ω sujeto a un hilo de longitud ℓ . Sobre el eje de giro y a la misma altura de la masa M se halla fijo un cuerpo cargado con carga q , de signo contrario a Q . En equilibrio, el hilo forma un ángulo ϕ con la vertical. Hallemos la relación entre la velocidad angular del cuerpo y el ángulo ϕ de inclinación.

Antes que nada, notemos que en ausencia de carga la fuerza centrípeta es el resultado de la suma del peso del cuerpo que gira y la tensión de la cuerda que lo sostiene, como mostramos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.28 a. Es casi evidente que en ausencia de fuerza eléctrica el módulo de la fuerza centrípeta vale

$$F_c = Mg \operatorname{tg} \phi \quad (2.94)$$

de manera tal que escribiendo la aceleración centrípeta como $\omega^2 R$, donde R es el radio de la circunferencia que describe la masa M , resulta

$$Mg \operatorname{tg} \phi = M \omega^2 R = M \omega^2 \ell \operatorname{sen} \phi \quad (2.95)$$

y la relación entre la velocidad angular ω y el ángulo ϕ se escribe como

$$\cos \phi = \frac{g}{\ell \omega^2} \quad (2.96)$$

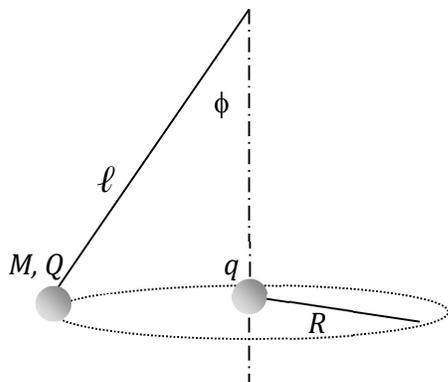


Fig. 2.27: el péndulo cónico modifica su velocidad angular cuando se cargan los cuerpos porque varía el valor de la fuerza centrípeta

Evidentemente, el balance de fuerzas se modifica cuando se suministra carga al cuerpo que rota. Aparece una fuerza eléctrica, atractiva en este caso porque las cargas son de signo opuesto, y la expresión (2.95) debe sustituirse por

$$Mg \operatorname{tg} \phi + k \frac{|qQ|}{R^2} = M \omega^2 R \quad (2.97)$$

Obsérvese que hemos tomado $|qQ|$ porque la expresión (2.97) está escrita en módulos. Reemplazando ahora R por $\ell \operatorname{sen} \phi$, después de una sencilla manipulación matemática resulta

$$Mg \frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{\cos \phi} + k \frac{|qQ|}{\ell^2} = M \omega^2 \ell \operatorname{sen}^3 \phi \quad (2.98)$$

y a partir de aquí se obtiene de manera inmediata la relación entre el ángulo de inclinación y la velocidad angular como

$$\frac{g}{\ell} \sec \phi + k \frac{|qQ|}{M \ell^3} \operatorname{cosec}^3 \phi = \omega^2 \quad (2.99)$$

Obsérvese de la relación (2.96) que un incremento de la velocidad de rotación provoca un incremento del ángulo ϕ , porque $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \cos \phi \rightarrow 0$ (o, equivalentemente, $\phi \rightarrow \pi/2$). Sin embargo, esta relación no es tan evidente a partir de la identidad (2.99), y de hecho la función $\omega(\phi)$ ya ni siquiera es monótona, como se ve en la figura 2.29, donde la línea llena corresponde a la situación que estamos analizando (ecuación (2.99)) en tanto que la línea de puntos corresponde al caso en que es $Q = 0$ (expresión (2.96)).

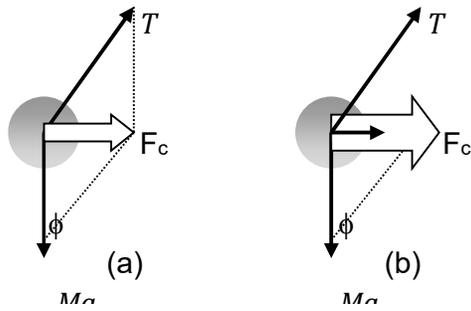


Fig. 2.28: diagrama de cuerpo libre sin fuerza eléctrica en (a) y con fuerza eléctrica (el vector horizontal en negrita) en (b).

Es evidente que para los valores que se han elegido para los parámetros del problema, y dentro del intervalo escogido para ϕ (entre $\pi/6$ y $5\pi/8$) hay un amplio rango de valores, entre aproximadamente $\phi = \pi/6$ y $\phi = 1$, en el que existen dos valores posibles de equilibrio para la velocidad angular ω . Esto significa que una vez fijados los valores de las cargas, la masa M y la velocidad angular, el ángulo de equilibrio no es único. La razón de que existan dos valores de equilibrio, digamos ϕ_1 y $\phi_2 > \phi_1$, tiene que ver con el hecho de que al pasar de ϕ_1 a ϕ_2 (para lo cual hay que desplazar la carga de valor q de manera tal que quede a la misma altura que la otra)

disminuye la fuerza de atracción eléctrica pero se incrementa la componente del peso en la dirección del centro de giro.

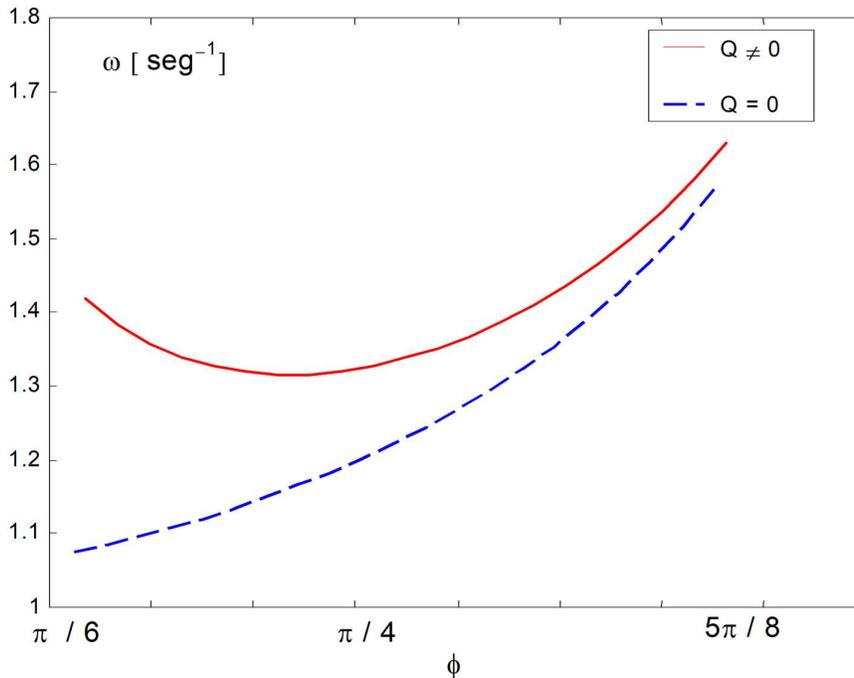


Fig. 2.29: soluciones de las ecuaciones (2.96) (en línea de puntos) y (2.99) ($Q \neq 0$) para $|qQ| = 10^{-10} \text{ C}^2$, $M=0,009 \text{ kg}$, $\ell=10\text{m}$. *Obsérvese* que la fuerza eléctrica modifica la función $\omega(\phi)$ de tal manera que ni siquiera es monótona, como lo es en el caso $Q=0$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Sean cuatro cargas, ubicadas en los vértices de un cuadrado, de valor q en dos vértices opuestos, y $-q$ en los otros dos. Utilizando solamente razonamientos de simetría explique cómo es el campo eléctrico en los puntos A, B, C, D, ubicados a mitad de cada uno de los lados del cuadrado.

Ejercicio 2: Dos esferas concéntricas de radios $r=a$ y $r=b>a$, están cargadas con cargas $+Q_a$ y $-Q_b$, respectivamente. Se transporta una carga negativa $-dq$ desde la esfera exterior a la interior. Justifique e indique claramente:

- la dirección y el sentido del campo eléctrico de la configuración;
- la dirección y el sentido de la fuerza eléctrica sobre la carga $-dq$.

Ejercicio 3: a) una placa infinita vertical está homogéneamente cargada en superficie con una distribución superficial de carga σ . A la derecha de la placa se coloca un péndulo cargado y éste se separa de la vertical alejándose de la placa. Justifique qué ocurre con el mismo péndulo si se lo coloca a la izquierda de la placa.

b) imagine la situación inicial anterior y suponga que a la derecha del péndulo se coloca instantáneamente otra placa infinita vertical, cargada ésta con una distribución superficial de carga $-\sigma$. Justifique si el péndulo modifica su posición de equilibrio y, en caso afirmativo, si se acerca o se aleja de la placa de la izquierda.

c) imagine la situación inicial del ítem (a) y suponga que a la derecha del péndulo se coloca instantáneamente otra placa conductora, infinita, vertical y descargada. Justifique si el péndulo modifica su posición de equilibrio y, en caso afirmativo, si se acerca o se aleja de la placa de la izquierda.

Ejercicio 4: Sean dos cargas puntuales, $q_1=3\times 10^{-6}$ C y $q_2=-2\times 10^{-6}$ C. La primera se ubica 1 m por encima de una carga $q_3=10^{-4}$ C, en tanto que q_2 se ubica 2 m a la derecha de q_3 . Calcule la fuerza que las cargas q_1 y q_2 ejercen sobre la carga q_3 .

Ejercicio 5: Una esfera de masa $m=20$ g se encuentra suspendida de un hilo que forma un ángulo $\alpha=37^\circ$ con respecto a una placa plana conductora (que puede considerarse infinita) cargada con densidad $\sigma=8,85\ \mu\text{C}/\text{m}^2$. Calcule el valor de la carga de la esfera.

Ejercicio 6: Dos cargas de valor q_1 y q_2 , respectivamente, se hallan separadas una distancia L . Se coloca una carga positiva de valor q_3 sobre la recta que une a las cargas q_1 y q_2 . Determine la posición del punto en el que la carga q_3 se halla en equilibrio en los casos

- $q_2=q_1$;
- $q_2=-2q_1$;
- $q_2=-q_1$.

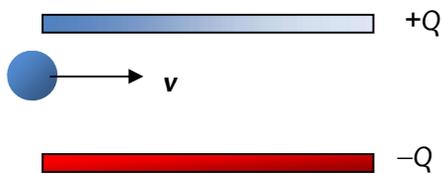
Ejercicio 7: Las dos cargas de la figura se hallan en equilibrio, unidas por un resorte de longitud en reposo $\ell_0 = 0,2\text{m}$ deformado 4cm. Para $q_1 = 4 \times 10^{-6}\text{ C}$ y $q_2 = 2 \times 10^{-6}\text{ C}$

- a) calcule el valor de la constante elástica;
- b) justifique si es posible reemplazar el resorte por una carga eléctrica a los efectos de lograr el equilibrio (en caso afirmativo, indique su signo y dónde debe colocarse).



Ejercicio 8: Dos péndulos de igual masa m e idéntica longitud ℓ se cuelgan del mismo punto. Se suministra idéntica carga q a las dos masas. Determine el valor del ángulo de equilibrio α_{eq} en función de la carga, la masa y la longitud de los péndulos.

Ejercicio 9: Un haz de protones de energía cinética media $E = 10\text{ keV}$ ingresa a una región del espacio entre dos placas de $0,25\text{ m}^2$ de área cada una.



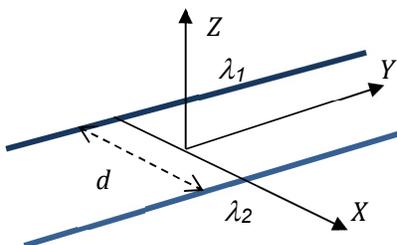
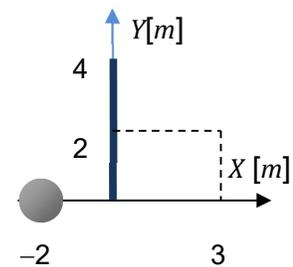
- Cada placa posee 2 nC de carga eléctrica, una positiva y la otra negativa. Entre las placas se ha practicado el vacío. Despreciando efectos de borde,
- a) discuta si el haz se desvía hacia arriba o hacia abajo;
- b) calcule la desviación media del haz cuando avanza

6 cm en la región interplacas.

($m_p = 1,67 \times 10^{-27}\text{ kg}$; $q_e = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$; $1\text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{ J}$)

Ejercicio 10: Un cuerpo puntual de masa m y carga q levita en equilibrio sobre un plano de área A cargado con carga Q . Calcule el valor de la carga Q .

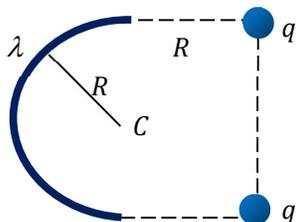
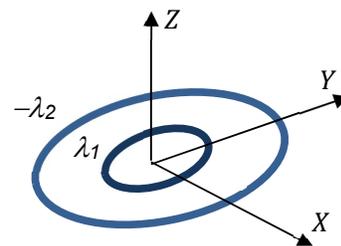
Ejercicio 11: Sea la configuración de la figura, que consiste en un alambre recto con densidad de carga uniforme λ y una carga puntual ubicada sobre el eje horizontal. Calcule el campo eléctrico en el punto de coordenadas $(3; 2)$. Discuta si el campo en el punto $(-3; 2)$ tiene el mismo valor que en el $(3; 2)$.



Ejercicio 12: Los alambres paralelos, rectos e infinitos de la figura tienen densidades de carga λ_1 y λ_2 , respectivamente, se hallan en el vacío y están separados una distancia d . Halle el campo eléctrico en todo punto del eje Z (perpendicular al plano de los alambres, y situado a $d/2$ de cada uno de ellos).

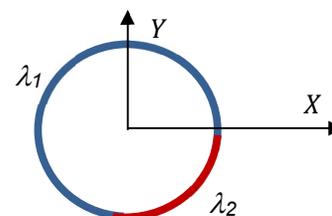
Ejercicio 13: Sea la configuración de cargas de la figura del ejercicio 12, pero suponga ahora que los hilos conductores paralelos tienen longitud $2L$ e idéntica densidad de carga, λ . Como antes, todo el sistema se halla en el mismo plano y en el vacío. Calcule el valor del campo eléctrico E en todo punto del eje Z (observe que los alambres se extienden entre $-L$ y $+L$; asuma $L \gg a$).

Ejercicio 14: Los aros concéntricos de la figura, de radios r_1 y $r_2 > r_1$, densidades de carga λ_1 y $-\lambda_2$, respectivamente, se hallan en el vacío y en el mismo plano. Suponiendo $|\lambda_2| > \lambda_1$ halle el campo eléctrico en todo punto del eje de simetría Z (perpendicular al plano de los aros, que pasa por el centro). En particular, para $\lambda_1 = 4 \times 10^{-6}$ C/m, $r_1 = 3$ m, $|\lambda_2| = 2\lambda_1$, $r_2 = 4$ m halle la fuerza sobre una carga puntual de valor $q = 3 \times 10^{-6}$ C ubicada en la posición $\mathbf{r} = (0; 0; 4)$ m).



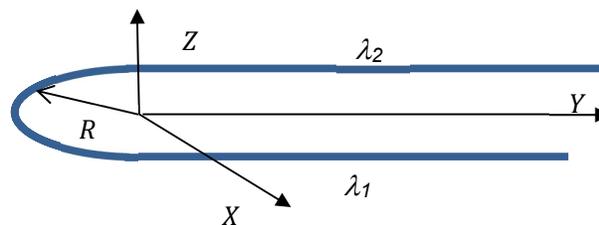
Ejercicio 15: Dada la configuración de la figura, calcule el campo eléctrico \mathbf{E} en todo punto del eje que pasa por el punto C y es perpendicular al plano del dibujo. Considere puntuales a las cargas de los extremos. Discuta si el aro se halla en una posición de equilibrio, y de no ser así indique la fuerza que debe realizarse para evitar que se desplace. Asuma $q = 10^{-6}$ C, $\lambda = 2 \times 10^{-6}$ C/m.

Ejercicio 16: El alambre circular de la figura, de radio $R = 1$ m, ha sido cargado con densidad lineal de carga $\lambda_1 = 3 \mu\text{C/m}$ a lo largo de $3/4$ de su circunferencia. La parte restante se ha cargado con densidad lineal de carga λ_2 .



- calcule el valor de λ_2 para que la carga total del anillo sea nula;
- calcule el valor del campo eléctrico de la configuración en todo punto del eje geométrico de simetría perpendicular al plano de la espira;

Ejercicio 17: Sea la configuración de cargas de la figura, formada por una semicircunferencia de radio R y densidad lineal de carga λ_1 y dos hilos conductores paralelos de longitud $L \gg R$ y densidad de carga λ_2 cada uno de ellos. Todo el sistema se halla en el mismo plano y en el vacío.



- calcule el valor de λ_2 de manera tal que la configuración tenga carga neta nula;
- calcule el valor del campo eléctrico en todo punto del eje Z;
- indique hacia dónde se mueve una carga $+q$ si se la coloca sobre el eje Y.

Ejercicio 18: Halle el campo eléctrico generado por una corona circular en su eje de simetría axial, suponiendo que tiene radio interno r_a y radio externo r_b , y está cargada con densidad superficial de carga σ constante. Usando los resultados del ejemplo 1.5, calcule el campo eléctrico que en el punto $\mathbf{r} = (0; 0; 4L)$ generan la corona y un alambre de longitud L y densidad lineal de carga λ constante, ubicado a lo largo del eje de simetría axial de la corona a una distancia $2L$ del centro

de la misma (Observe que debe cambiar los extremos de integración que llevaron a la expresión (1.41)).

Ejercicio 19: Sea una esfera de radio R cargada con densidad volumétrica de carga $\rho(r) = \rho_0 r^2$. Halle la expresión del campo eléctrico producido por la esfera en todo punto del espacio.

Ejercicio 20: Del siguiente conjunto de afirmaciones tres son verdaderas. Indique cuáles son

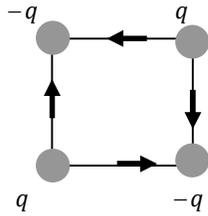
- a) Sobre una carga puntual el campo eléctrico es siempre paralelo a la fuerza eléctrica.
- b) La dirección del campo eléctrico coincide siempre con la de la fuerza eléctrica.
- c) Dos cargas puntuales de igual valor y signo opuesto generan un campo eléctrico nulo.
- d) El campo eléctrico generado por dos alambres infinitos, paralelos, de igual valor de carga y signo opuesto se anula en algún punto fuera de la configuración.
- e) El campo eléctrico de una configuración de cargas puntuales se modifica siempre que se modifican las posiciones de las cargas.
- f) El campo eléctrico de una configuración de cargas puntuales se modifica si se modifica la posición de una de las cargas.
- g) El campo eléctrico en el interior de los conductores se anula sólo si se deposita igual cantidad de carga negativa y positiva.
- h) El campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo, sea macizo o hueco.
- i) El valor absoluto del campo eléctrico en el interior de un dieléctrico es siempre menor que en el interior de un conductor.

Ejercicio 21: Del siguiente conjunto de afirmaciones indique cuáles son verdaderas.

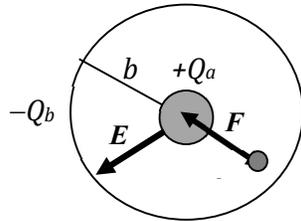
- a) Una carga en un campo eléctrico se acelera de manera proporcional a la intensidad del campo. V
- b) Una carga eléctrica puede estar en equilibrio entre dos cargas de signo opuesto. F
- c) Una carga eléctrica puede estar en equilibrio entre dos cargas de igual signo. V
- d) El signo de una carga eléctrica en equilibrio entre dos cargas de igual signo es irrelevante. V
- e) El campo eléctrico fuera de dos placas planas infinitas se anula siempre, cualesquiera sean los valores de las densidades de cargas de los planos. F
- f) El campo eléctrico generado por dos cargas de igual signo sólo puede anularse en algún punto que no se halle en la línea que une las cargas.
- g) Cuatro cargas iguales situadas en los vértices de un rectángulo generan campo eléctrico nulo en el punto en el que se cortan las diagonales. V
- h) Cuatro cargas iguales situadas en los vértices de un cuadrilátero generan campo eléctrico nulo en el punto en el que se cortan las diagonales. F

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1:



Ejercicio 2:



Ejercicio 3: a) es indistinto porque el campo eléctrico de un plano infinito positivo es constante y saliente; b) El péndulo se aleja aún más de la placa izquierda porque el campo eléctrico se duplica; c) se inducen cargas de signo negativo de un lado de la placa y positivo del otro, de manera que el péndulo se aleja algo más que en el caso a.

Ejercicio 4: $\mathbf{F} = 0,45 \mathbf{e}_x - 2,7 \mathbf{e}_y$.

Ejercicio 5: $3 \times 10^{-7} \text{ C}$

Ejercicio 6: a) en la región interna, a una distancia $x=L/2$ de q_i ; b) en la región externa a la configuración, a una distancia $x=0,414 L$ de q_i ; c) en el infinito.

Ejercicio 7: a) $k_{\text{elást}} = 31,25 \text{ N/m}$; b) la carga debe colocarse a 9,37 cm a la derecha de q_i ; el signo es indiferente.

Ejercicio 8: $\text{tg } \alpha_{\text{eq}} \text{ sen}^2 \alpha_{\text{eq}} = k q^2 / 4mg\ell^2$

Ejercicio 9: a) se desvía hacia arriba; b) aproximadamente 8 cm.

Ejercicio 10: $Q = \frac{2\epsilon_0 mgA}{q}$

Ejercicio 11:

$$\vec{E} = \frac{kQ(5; 2)}{[5^2 + 2^2]^{\frac{3}{2}}} + k\lambda \int_0^4 dy' \frac{(3; 2 - y')}{[3^2 + (2 - y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(Obsérvese que la integral vectorial consiste en dos integrales escalares, una en la dirección X y otra en la dirección Y) El campo en $(-3;2)$ no es el mismo que en $(3;2)$ por la presencia de la carga puntual.

Ejercicio 12:
$$\vec{E} = k(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\left(\frac{d}{2}; 0; z\right)}{\frac{d^2}{4} + z^2}$$

Ejercicio 13:
$$\vec{E}(z) = k\lambda \left(0; 0; \frac{16Lz}{(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2 + 4L^2 + 4z^2}} \right)$$

Ejercicio 14:
$$\vec{E}(z) = \left(\frac{\lambda_1}{(r_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{|\lambda_2|}{(r_2^2 + z^2)^{3/2}} \right) \frac{z}{2\epsilon_0} \text{sg}(z) \hat{e}_z \quad \vec{F} = -2,712 \times 10^{-3} \text{ N } \hat{e}_z$$

Ejercicio 15: $\vec{E} = \vec{E}_\lambda + \vec{E}_q$ (E_λ es el campo del alambre y E_q el generado por las cargas puntuales)

$$\vec{E}_\lambda = \frac{k \lambda}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (2R^2 \hat{e}_y + \pi R z \hat{e}_z)$$

$$\vec{E}_q = \frac{2kq}{(2R^2 + z^2)^{3/2}} (R(-\hat{e}_y) + z \hat{e}_z)$$

Ejercicio 16 a) $\lambda_2 = -9\mu\text{C}$

b)
$$\vec{E} = \frac{kR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[R(\lambda_1 - \lambda_2); -R(\lambda_1 - \lambda_2); \frac{\pi z}{2} (3\lambda_1 + \lambda_2) \right]$$

Ejercicio 17: a) $\lambda_2 = -\pi R \lambda_1 / 2L$ b) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ con

$$\vec{E}_1 = \frac{k \lambda_1 R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (2R \hat{e}_y + \pi z \hat{e}_z)$$

$$\vec{E}_2 = 2k \lambda_2 \left(\left[\frac{1}{(R^2 + L^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_y + \frac{\pi z L}{(R^2 + z^2)(R^2 + L^2 + z^2)^{1/2}} \hat{e}_z \right)$$

c) la carga se aleja del origen.

Ejercicio 18:
$$\vec{E}_{CORONA} = 2\pi k\sigma \operatorname{sg}(z) \left[\left(1 + \frac{r_a^2}{z^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{r_b^2}{z^2}\right)^{-1/2} \right] \hat{e}_z$$

$$\vec{E}_{TOTAL} = \left\{ \frac{k\lambda}{2L} + 2\pi k\sigma \left[\left(1 + \frac{r_a^2}{16L^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{r_b^2}{16L^2}\right)^{-1/2} \right] \right\} \hat{e}_z$$

Ejercicio 19:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^3}{5\epsilon_0} \hat{e}_r & 0 \leq r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r & R \leq r \end{cases}$$

Ejercicio 20: son verdaderas las proposiciones b, f, h.

Ejercicio 21: son verdaderas las proposiciones a, c, d, g

A large, bold, black number '3' is positioned on the right side of the page, partially cut off by the edge. It has a thick stroke and a clean, sans-serif font style.

Campo eléctrico: flujo y simetrías

3.1 – Introducción

En el caso más general, el cálculo de la intensidad del campo eléctrico presupone llevar adelante tres sumas o tres integrales, una por cada dimensión, según se trate de una distribución discreta o continua de cargas, respectivamente. En principio, algunas de esas sumas o integrales podrían ser nulas, como ha sido el caso de varios de los ejemplos del capítulo anterior, típicamente aquellos que poseían alguna simetría.

En palabras poco rigurosas asociamos una simetría a una operación que deja dos “porciones” iguales de sistema o, al menos, similares entre sí. Por ejemplo, decimos que un corte longitudinal frontal del cuerpo humano (un corte que pase por la cabeza y el ombligo) deja dos lados simétricos, derecho e izquierdo, pero no así un corte longitudinal lateral (un corte que pase por las orejas y los hombros), o uno transversal (un corte perpendicular a la columna vertebral).

Las partes derecha e izquierda del cuerpo humano no son iguales, pero convengamos que más allá de alguna ligera diferencia (irrelevante para nuestra discusión) que naturalmente siempre existe, decimos que esas partes son simétricas, en el sentido de que una parte parece directamente el “espejo” de la otra. Esa es la razón por la que posiblemente se piensa en una simetría como una proporción armoniosa y no como una identidad.

En términos estrictamente matemáticos las simetrías no se relacionan con parecidos sino con igualdades. Por tal motivo, cuando un sistema posee alguna determinada simetría adquiere un conjunto de propiedades matemáticas que simplifica notablemente el cálculo de algunos de sus parámetros. En muchas de las modelizaciones de los diversos fenómenos que estudia la Física se invoca algún particular grupo de simetrías. Las ventajas que presentan los fenómenos que pueden estudiarse de esta forma son varias, sobre todo porque suponen una primera integral del movimiento y, por lo demás, ofrecen en general la posibilidad de mantener el problema en un nivel matemático a la vez riguroso, elegante y tratable.

En los casos del capítulo anterior en que aparecía alguna simetría, argumentamos *a posteriori* las razones que llevaban a que una determinada componente del campo eléctrico se anulara, pero en general no anticipamos ese resultado. Parece conveniente, entonces, disponer de algún método general que nos permita anticipar si una o más de las componentes del campo eléctrico habrán de anularse basándonos solamente en argumentos de simetría. Para ello, en este capítulo habremos de asociar los campos a sus fuentes y, luego, habremos de analizar con algún detalle qué resultado cabe esperar conociendo las simetrías de la configuración de fuentes.

3.2 – Flujo de un campo vectorial

Recordemos brevemente que en la descripción matemática de los fenómenos naturales intervienen dos tipos de funciones, que se clasifican por el particular conjunto de magnitudes que definen. Así, según determinen un conjunto de valores escalares o de

vectores, se las denomina funciones escalares o funciones vectoriales. Los diferentes valores que puede adoptar una función escalar en su dominio de definición definen un *campo escalar*. En cambio, las funciones vectoriales, esto es, aquellas que determinan vectores - cuyas componentes son las que dependen de las coordenadas del punto - como puede ser el caso del campo eléctrico o el campo de fuerzas gravitatorias, definen *campos vectoriales*.

A modo de ejemplo, pensemos en el campo de vectores formado por las velocidades de los diferentes elementos de volumen de un fluido que circula por un canal cualquiera, como el de la figura 3.1. Tal vez valga la pena recalcar que no tiene por qué ser un fluido, lo importante es que sea un campo de vectores. En nuestro ejemplo, el fluido está circulando de izquierda a derecha, y en diferentes puntos tiene diferentes velocidades.

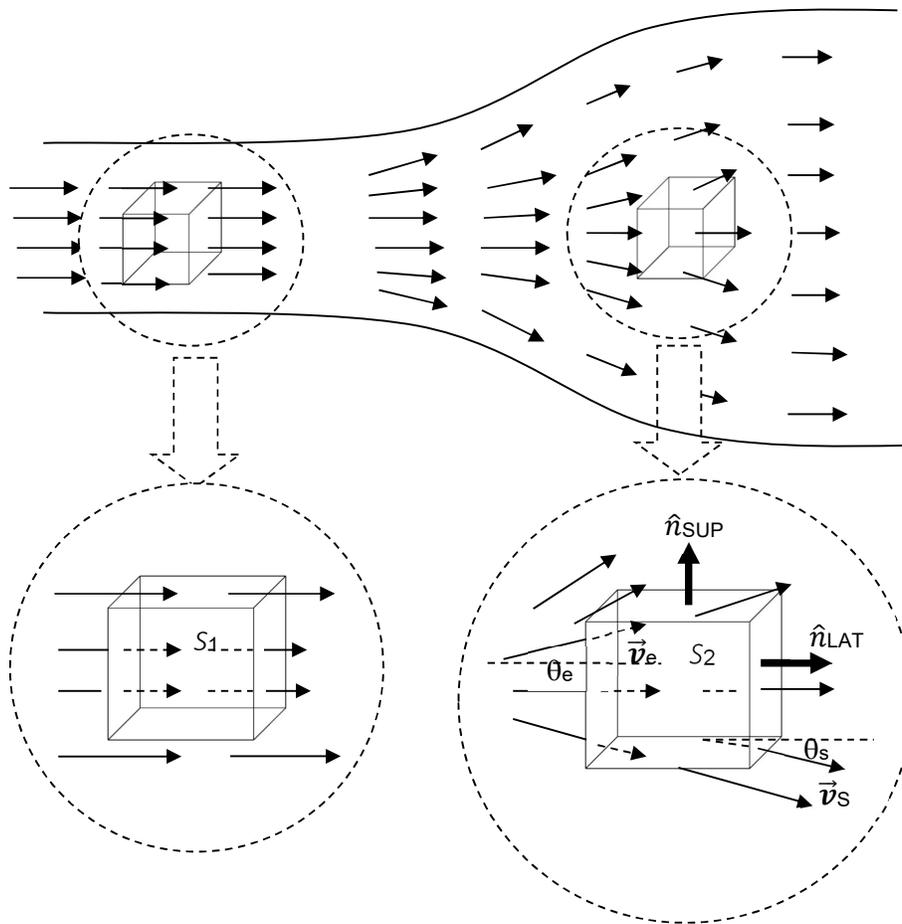


Fig. 3.1: Dos superficies orientadas arbitrarias cerradas, S_1 y S_2 , encierran cada una un volumen de fluido en diferentes secciones de un mismo canal. Por simplicidad, en la superficie de la derecha se muestran sólo dos de las seis normales exteriores que pueden definirse en un paralelepípedo.

Imaginemos dos superficies orientadas S_1 y S_2 , ambas cerradas y por comodidad completamente incluidas en el volumen del fluido. Estas superficies no tienen por qué ser reales, son simplemente superficies de control a través de las cuales el fluido se transporta. Por lo demás, y aunque las hemos dibujado cúbicas, las superficies pueden tener formas arbitrarias. En la figura se muestran sólo dos vectores normales a la superficie S_2 , positivos en el sentido saliente, uno en la tapa superior y otro en una tapa lateral, a los que arbitrariamente hemos llamado \hat{n}_{SUP} y \hat{n}_{LAT} .

Obsérvese que los vectores velocidad ingresan a la superficie S_1 paralelos a las tapas superior e inferior, y como en esa región del canal las velocidades son todas iguales

En términos poco estrictos, una superficie es cerrada cuando encierra un volumen determinado y no podemos acceder al interior. Por ejemplo, el interior de un vaso con su boca hacia arriba puede tocarse, de modo tal que la superficie del vaso es abierta. Puesto boca abajo sobre la mesa, la superficie vaso más mesa es cerrada.

(claramente el de nuestro ejemplo es un fluido ideal) dos aspectos son inmediatos: por un lado, los vectores que ingresan al interior de la superficie de control lo hacen paralelos a las normales a las tapas que se enfrentan al avance del fluido; por el otro, el número de vectores velocidad que ingresa al recinto interior es igual al número de vectores velocidad que salen. Esta última parece una observación innecesaria, pero tengamos en cuenta que en la región de la superficie S_1 el canal podría estar “pinchado” y de esa manera perder fluido (es decir, habría un sumidero de vectores y la diferencia entre los que entran y los que salen no sería nula, o sea,

el flujo no estaría balanceado).

Respecto de la superficie de control S_2 , es notable que algunos vectores velocidad entren a través de ella (como es el caso de \vec{v}_e), algunos de ellos salgan (por ejemplo el vector \vec{v}_s) y otros ni entren ni salgan.

Así definidas las cosas, en cada punto de las superficies S_1 y S_2 el producto $\vec{v} \cdot \hat{n}$ tiene un significado muy preciso: si es nulo, significa que los vectores \vec{v} y \hat{n} son perpendiculares y en ese punto el fluido avanza paralelo a la pared de la superficie S . Por el contrario, si los vectores \vec{v} y \hat{n} son paralelos, resulta que el fluido se transporta por completo a través de esa región de la superficie S . En general, dado un vector velocidad formando un ángulo cualquiera θ con la normal exterior, sólo una fracción $\cos \theta$ de ese vector se transporta a través de la superficie límite.

En el caso específico de nuestro ejemplo podría ser de interés conocer el volumen de fluido que atraviesa la superficie cerrada S por unidad de tiempo, esto es, el caudal $Q = v A$, donde v es la velocidad escalar del fluido y A es el área de la superficie que atraviesa ese fluido. De esta forma, si el problema es estacionario, el caudal neto a través de la superficie S será el caudal que sale a través de las paredes de S menos el caudal que entra a través de estas paredes, esto es, en términos vectoriales debemos escribir

$$Q_{NETO} = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS \quad (3.1)$$

En la expresión anterior, la integral en superficie es cerrada, indicando que se integra sobre toda la superficie S , esto es, el balance se realiza sumando las contribuciones sobre cada una de las paredes de la superficie S de la figura 3.1. Obsérvese que el caudal neto se halla asociado a la existencia de fuentes de caudal dentro del volumen encerrado por la superficie S . Estas fuentes pueden ser positivas (puntos por los que emana fluido, a los que se denomina *fuentes*) o negativas (puntos por los que el fluido desaparece, denominados *sumideros*).

En términos generales, cualquier campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ cumple con una expresión similar a la condición (3.1), y al caudal neto del campo se lo denomina *flujo del campo* \vec{A} , al que por denotaremos Φ_A , y que por su misma definición se escribe como

$$\Phi_A = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS \quad (3.2)$$

Posiblemente sean necesarias unas pocas aclaraciones respecto al significado de la expresión del flujo de campo. En primer lugar, de acuerdo a nuestra definición en el apartado 1.2, el flujo de la magnitud G , arbitraria, es un balance entre la cantidad de magnitud G que sale del recinto menos la cantidad de magnitud G que ingresa al recinto. Dicho de otra manera, si en el interior del recinto hay más fuentes que sumideros el flujo será positivo, y negativo en el caso contrario. Y si la cantidad de fuentes de G es igual a la de sumideros de G , el balance neto es nulo, pero eso no significa de manera alguna que sea nulo el campo o la magnitud G , en todo caso será estacionario, pero no necesariamente nulo.

Por otro lado, para que queden bien definidas las fuentes y los sumideros “en el interior del recinto” (el interior de la superficie S) es necesario que el recinto esté cerrado, de otra manera no parece posible poder definir un adentro y un afuera. El símbolo circular que aparece en la integral doble de las expresiones (3.1) y (3.2) precisamente indica que la superficie que se considera está cerrada. Si usted toma un vaso entre sus manos, la superficie del vaso representa una superficie abierta, usted puede tanto acceder al interior del vaso como tocar su parte externa. Pero si usted apoya el vaso sobre la mesa, boca abajo, ya no tiene acceso a la parte interna de esa superficie. Dicho de otra manera, la superficie está cerrada.

Por último, y de acuerdo a nuestros comentarios previos, el balance que se realiza sobre una superficie cerrada no tiene por qué ser válido si la superficie está abierta. Ya tendremos oportunidad de analizar el flujo de una cantidad vectorial fundamental (el vector inducción de campo magnético) cuyo valor es bien

El flujo de una magnitud G a través de una superficie cerrada representa el balance entre las fuentes de G y los sumideros de G en el interior de ese recinto. Por otro lado, el flujo de G es una medida de la cantidad de magnitud G que sale del recinto menos la cantidad de magnitud G que entra al recinto, de manera tal que si en el interior de la superficie el número de fuentes es igual al de sumideros el flujo neto es nulo, pero eso no significa que sea nula la cantidad G .

diferente según la superficie a través de la cual se lo calcula esté cerrada o abierta, y esas diferencias se expresan contundentemente en dos de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

3.3 – Flujo del campo eléctrico

La expresión (3.2) puede extenderse fácilmente al caso particular del campo eléctrico, porque sabemos que las fuentes de campo eléctrico son las cargas eléctricas encerradas por la superficie S . Más aún, las cargas positivas son fuentes de la que emanan líneas de campo y las cargas negativas son sumideros en los que esas líneas terminan. Para ponerlo en otros términos, el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada resulta en un balance entre el número de líneas de campo que salen del recinto encerrado por la superficie menos el número de líneas de campo que entran al recinto limitado por esa superficie.

Con todo, no sería suficiente igualar la ecuación (3.2) a la carga eléctrica total Q_T que encierra la superficie cerrada, fundamentalmente porque no coincidirían las unidades. En el caso del campo de velocidades que nos sirvió para introducir el concepto de flujo de campo igualamos la integral en superficie al caudal neto, y está bien porque precisamente así se define el caudal.

En el caso del campo eléctrico, apelando a un sencillo argumento dimensional, es casi inmediato que el flujo debe ser proporcional a Q_T/ϵ_0 , esto es, debe ser

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \alpha \frac{Q_T}{\epsilon_0} + \beta \quad (3.3)$$

donde α y β son constantes a determinar, la primera adimensional y la segunda con unidades de flujo (Nm^2/C o, equivalentemente, Jm/C).

Para pensar el valor de la constante β , imaginemos que armamos una configuración con dos cargas puntuales de valores $+q$ y $-q$. El campo eléctrico de esta configuración

Si se duplica el área de la superficie que encierra a las cargas no se duplica el valor del flujo del campo eléctrico. El flujo se duplica sólo si se duplica el valor de la carga neta encerrada por esa superficie.

decrece como r^{-2} porque resulta de la superposición de los campos eléctricos de dos cargas puntuales (que decrecen como $1/r^2$, véase el resultado (2.90) o la igualdad (2.37) en el caso de un dipolo, recordando en este último caso que el vector \vec{p} es proporcional a una distancia) y se anula en el infinito. Como podemos encerrar la carga neta en una superficie finita, resulta que, al

menos “muy lejos” de la configuración, tenemos campo eléctrico nulo y carga neta nula, de manera tal que debe ser $\beta = 0$ para que la identidad (3.3) sea de validez general.

Imaginemos ahora una única carga, en el origen de un sistema arbitrario de referencia. Como el campo eléctrico que genera esta carga es radial (véanse la discusión del ejemplo 2.11 y la expresión (2.90)) cualquier superficie esférica de radio R centrada en

el origen tiene su normal paralela al sentido de \vec{E} , de manera tal que la expresión (3.3) se escribe como

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dS = \oiint_S \frac{kq}{R^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r R^2 \sin \theta d\phi d\theta = \alpha \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

Como estamos integrando en las variables angulares, y el campo de la carga puntual es sólo función de la distancia al origen, resulta de manera inmediata

$$4\pi k_0 q = \frac{4\pi q}{4\pi \epsilon_0} = \alpha \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \alpha = 1 \quad (3.5)$$

y, en definitiva, la expresión completa del flujo del campo eléctrico se resume en la identidad

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

Aunque la demostración formal de la validez de la identidad (3.6) se debe a Mihail Ostrogradsky, la ley se asocia a uno de sus descubridores, Carl Friedrich Gauss, y el enunciado correspondiente se conoce como teorema de Gauss. Debemos observar que si bien la expresión (3.6) se dedujo para una carga puntual, es válida para cualquier distribución de cargas porque siempre podemos apelar al principio de superposición. Más aún, como el flujo del campo está asociado a la distribución de fuentes y sumideros, parece inmediato que no deba tratarse de una carga única sino que vale para cualquier distribución. Y de hecho, con carga total queremos significar

El teorema de Gauss tiene validez absolutamente general, cualquiera sea la configuración de cargas. Lo que en general no es fácilmente calculable es el campo eléctrico asociado a esa configuración, porque para poder hacerlo el campo no debe depender de las variables de integración.

$$Q_T = \begin{cases} \sum_{n=1}^N q_n & \text{para } N \text{ cargas discretas} \\ \iiint_V \rho dV & \text{para una distribución en volumen} \end{cases} \quad (3.7)$$

o sus similares si se tratara de una distribución lineal o en superficie (pero siempre contenida completamente en una superficie cerrada). El teorema de Gauss, como veremos en los ejemplos que siguen, constituye una poderosa y elegante herramienta para calcular el campo eléctrico de diversas configuraciones de carga. Sin embargo, debemos adelantar que si bien tiene validez absolutamente general, los cálculos son sencillos sólo en aquellos

casos en que la configuración posee alguna simetría, y en particular son de interés práctico las simetrías cilíndrica y esférica que habremos de analizar con algún detalle.

Ejemplo 3.1: en una dada región del espacio el campo eléctrico es unidireccional y constante en el tiempo. Decece desde $E_1 = 600 \text{ N/C}$ hasta $E_2 = 450 \text{ N/C}$, 20m campo abajo (esto es, en la dirección y sentido del campo). Calculemos el valor de la carga eléctrica encerrada por un prisma de 16 m de lado en las caras perpendiculares al campo y 20m de longitud paralela al campo, con esas cuatro caras paralelas al campo, y por un cilindro de 20m de largo y 16m de diámetro con su eje de rotación longitudinal paralelo al campo.

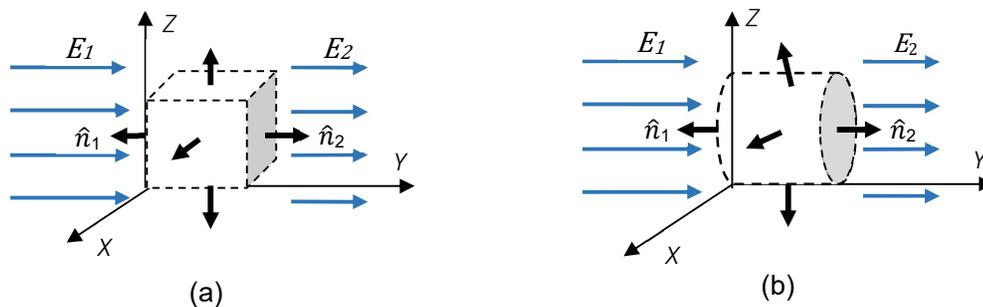


Fig. 3.2: (a) superficie gaussiana cúbica en la zona del campo del ejemplo 3.1. Obsérvese que el volumen gaussiano ni siquiera es de existencia real. A la derecha, la figura (b) muestra la superficie gaussiana cilíndrica inmersa en la misma región del espacio. Se muestran algunos versores normales a las respectivas superficies, pero sólo se han numerado las que van en la dirección del campo eléctrico.

La expresión (3.6) indica que debemos integrar el campo eléctrico sobre toda la superficie cerrada. En el caso del cubo es lo mismo que decir que debemos integrar sobre sus seis caras y sumar las contribuciones. Parece evidente, con todo, que el producto escalar entre el campo eléctrico y las normales salientes es no nulo sólo para las que son paralelas al eje Y , esto es, \hat{n}_1 y \hat{n}_2 , de manera tal que resulta

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dS = \iint E_1 \hat{e}_y \cdot (-\hat{e}_y) dS + \iint E_2 \hat{e}_y \cdot (\hat{e}_y) dS = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

Obsérvese que en la primera integral el producto escalar es negativo, en tanto que en la segunda es positivo. Si llamamos S_1 y S_2 a las superficies de las caras del cubo, resulta

$$Q_T = \epsilon_0[-E_1 S_1 + E_2 S_2] = -0,34 \mu\text{C} \quad (3.9)$$

Debemos ser cuidadosos con la interpretación de este resultado. Que el recinto que hemos elegido contenga carga negativa era de esperar, porque si pensamos el flujo de campo

como la cantidad de campo que sale del recinto menos la cantidad de campo que entra al mismo el resultado obtenido es inmediato toda vez que el campo que sale del cubo es menor que el que entra.

Desde otra perspectiva, podemos pensar el flujo de campo como el balance entre las líneas de campo que salen (asociadas a carga positiva) menos las que entran (asociadas a las cargas negativas encerradas). Como el campo eléctrico entrante al volumen que encierra la carga es mayor que el que sale, es inmediato asociar más líneas de campo entrante que líneas de campo saliente del recinto, de modo tal que necesariamente la carga neta encerrada debe ser negativa. Este es un punto importante: desconocemos el detalle de la carga encerrada, sólo hemos calculado su valor neto. En el ejemplo 3.2 discutimos esta observación con algún detalle.

Efectuemos ahora el cálculo para el cilindro del panel (b) de la figura 3.2. Como antes, parece evidente que la superficie lateral no contribuye a la integral (3.6) porque la normal saliente es perpendicular a la dirección del campo, de modo tal que la integral sobre la superficie cerrada se reduce a la suma de las contribuciones sobre cada tapa. Específicamente

$$\begin{aligned} \Phi_E = \oiint_S \vec{E}(r) \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_{TAPA1} E_1 \hat{e}_y \cdot (-\hat{e}_y) \, dS + \iint_{TAPA2} E_2 \hat{e}_y \cdot (\hat{e}_y) \, dS + \\ &+ \iint_{LATERAL} E(y) \hat{e}_y \cdot \hat{e}_\perp \, dS = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde \hat{e}_\perp representa un versor perpendicular a \hat{e}_y . De nuevo, llamando S_1 y S_2 a las superficies de las tapas del cilindro, resulta

$$Q_T = \epsilon_0[-E_1 S_1 + E_2 S_2] = -0,267 \, \mu\text{C} \quad (3.11)$$

El resultado (3.11) podría parecer sospechoso porque no coincide con el (3.9). Sin embargo debemos tener en cuenta que hemos integrado en diferentes volúmenes y lo que debe valer lo mismo es la densidad volumétrica de carga dentro del recinto, que de hecho resulta

$$\rho = \frac{Q_{CUBO}}{V_{CUBO}} = \frac{-0,34 \, \mu\text{C}}{20\text{m} (16\text{m})^2} = \frac{Q_{CIL}}{V_{CIL}} = \frac{-0,267 \, \mu\text{C}}{\pi 20\text{m} (8\text{m})^2} = -66,4 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3} \quad (3.12)$$

Ejemplo 3.2: en el ejemplo 3.1 hemos calculado la carga encerrada en un recinto a partir de la forma en que varía un campo eléctrico particular. Sin embargo, no parece evidente

que haya carga real, porque podríamos pensar que se trata de un campo eléctrico que naturalmente decrece en una dirección dada, y que para que se produzca esa variación no necesita de cargas distribuidas de alguna manera en el espacio. Por ejemplo, pensemos en el recinto de la figura 3.3, que se trata de dos esferas concéntricas, de radios R_1 y R_2 , respectivamente, en cuyo centro hay alojada una carga puntual Q . El campo eléctrico decrece en el sentido radial saliente, y la superficie en cuestión es cerrada y no aloja carga eléctrica alguna. Parece evidente que el flujo de campo a través de esta superficie será

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dS = \iint E_1 \hat{e}_r \cdot (-\hat{e}_r) dS + \iint E_2 \hat{e}_r \cdot (\hat{e}_r) dS = 0 \quad (3.13)$$

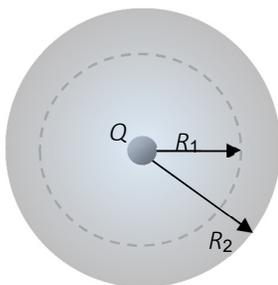


Fig. 3.3: la superficie gaussiana es un casquete esférico de radios R_1 y R_2 , en cuyo centro hay alojada una carga puntual Q . Obsérvese que esta carga está afuera de la superficie, de modo que la carga neta encerrada vale cero

y, en efecto, reemplazando las expresiones del campo y de las superficies resulta

$$\Phi_E = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = 0 \quad (3.14)$$

El resultado (3.14) era de esperar, porque sabíamos que el flujo a través de esta superficie cerrada es nulo porque no hay carga neta encerrada. Lo importante a destacar es que aun cuando el campo eléctrico decrece naturalmente, la diferencia entre sus valores de entrada a la superficie y salida de la superficie es acorde con el hecho de que en el interior de la superficie no hay carga alojada.

Regresemos al campo del ejemplo 3.1. Podemos generarlo a partir de dos placas infinitas paralelas, una de ellas cargada con densidad superficial de carga $\sigma_1 = 9,29 \text{ nC/m}^2$ y la otra, a 20 m de distancia, cargada con densidad superficial de carga $\sigma_2 = -1,328 \text{ nC/m}^2$. La distancia entre los planos no tiene incidencia sobre el campo eléctrico (recordemos que el campo generado por un plano infinito es uniforme, véase la expresión (2.66)), la fijamos para repetir las condiciones del ejemplo 3.1, porque estas distribuciones de carga producen un campo eléctrico de 600N/C entre los planos, y de 450N/C a la derecha del plano con densidad σ_2 , como se ve en la figura 3.4. Pero para que el cubo tenga un lado del lado del campo E_1 y el otro lado en el lado del campo E_2 debe atravesar la placa con densidad de carga σ_2 . En tal caso, el recinto cerrado ya no encierra carga nula sino que aloja una cantidad de carga

$$Q = \sigma_2(16 \text{ m})^2 = -0,34\mu\text{C} \quad (3.15)$$

que, naturalmente, coincide con el valor (3.9).

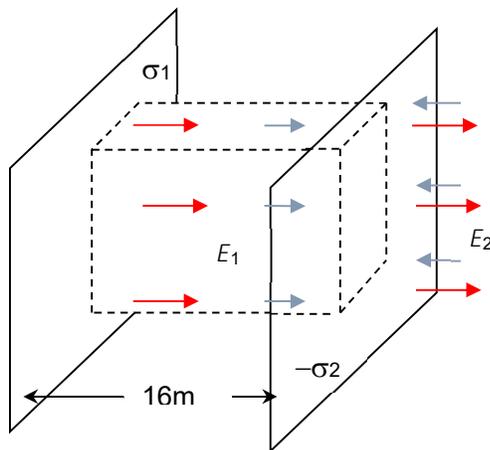


Fig. 3.4: los planos de la figura generan un campo similar al del ejemplo 3.1, $E_1=600\text{N/C}$ en la zona entre ellos y $E_2=450\text{N/C}$ a la derecha de σ_2 .

Lo que acabamos de mostrar es que el teorema de Gauss no identifica las distribuciones de carga sino que calcula el valor de carga total. Por ejemplo, si encerramos un dipolo en una esfera gaussiana, el flujo de campo a través de esa superficie será nulo porque la carga neta de un dipolo lo es. Pero si encerráramos veinte dipolos iguales el resultado sería el mismo, porque la carga total encerrada sigue siendo nula. Y hay aquí una característica que debe tenerse en cuenta: carga total nula de modo alguno supone campo eléctrico nulo. O sea, que la carga total de una distribución sea nula no implica que no genere campo eléctrico.

3.4 – Simetrías

Ya en los capítulos anteriores hemos recurrido varias veces al concepto de simetría, aunque en general apelando a él de una manera intuitiva. Y de hecho, si queremos integrar el miembro izquierdo de la expresión (3.6) será necesario tener alguna idea concreta acerca de la forma en que el campo \vec{E} varía en el espacio.

Sin pretender una definición formal, diremos que una determinada propiedad o configuración es simétrica respecto de una dada operación (o respecto a una aplicación) si se conserva inalterada después de efectuar la operación.

Por ejemplo, una figura geométrica puede presentar *simetría especular*, que supone que existe un eje que parte en dos mitades al cuerpo, una de las cuales es el reflejo de la otra en un espejo. De esta manera, si se la gira 180° , la figura es la misma. Cuando una figura es idéntica a sí misma frente a cualquier giro se dice que presenta *simetría de rotación*. Por ejemplo, el elipsoide de la figura 3.6 presenta simetría especular respecto del eje ss' y de rotación alrededor de su eje mayor pp' .

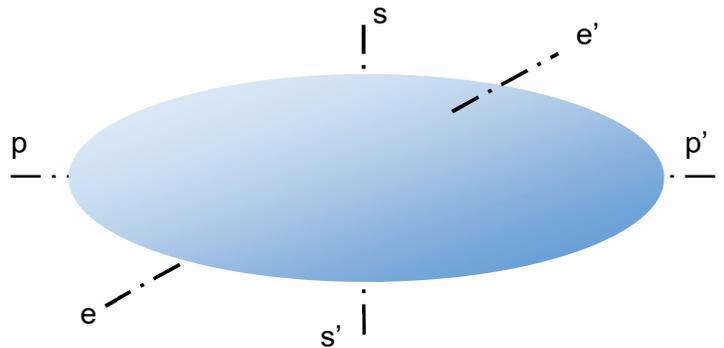


Fig. 3.5: una rotación rígida alrededor del eje pp' deja al elipsoide invariante, cualquiera sea el valor de la rotación. En cambio, se requiere girar 180° alrededor del eje ss' para que el elipsoide adopte la configuración inicial. Obsérvese que se requiere de rotación de 360° alrededor del eje ee' que dejar invariante la configuración del elipsoide. La primera es una simetría de rotación, la segunda una simetría especular, y la tercera no es una rotación de simetría.

Hay dos simetrías específicas que son de nuestro particular interés y que habremos de ilustrar a continuación: la simetría esférica y la simetría cilíndrica.

3.4.1: simetría esférica

Parece evidente que cualquier rotación de una esfera regular y homogénea alrededor de cualquiera de sus diámetros deja invariante la configuración inicial. Que es lo mismo que decir que las rotaciones son indistinguibles o, lo que es igual, que éstas son simetrías de rotación.

Pensemos en una esfera a la que le pintamos un punto sobre su superficie. Este punto puede ser localizado en un sistema de referencia con origen en el centro de la esfera con sólo indicar los valores del ángulo polar, θ , y azimutal, ϕ . La figura 3.6 ilustra esta situación. Parece evidente que cualquier rotación que efectuemos (salvo las de 360°) puede ser detectada con sólo observar que el punto parece haberse desplazado sobre la superficie de la esfera.

Dicho de otro modo, si alguna propiedad dependiera de alguno de los ángulos

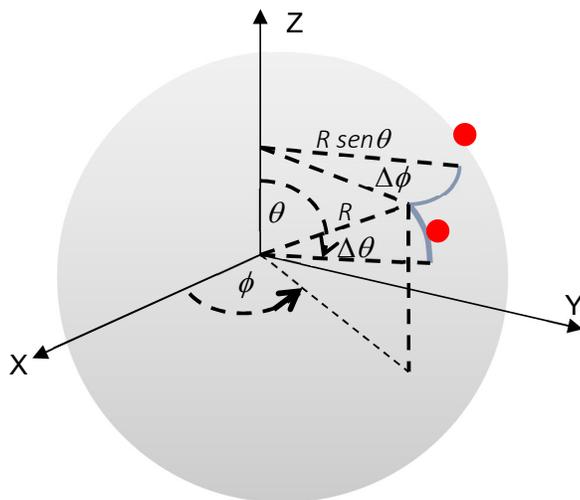


Fig. 3.6: el punto rojo se ha desplazado sobre la superficie de la esfera desde su posición inicial (medida por los ángulos iniciales θ y ϕ) hasta una nueva posición, indicada como $\theta - \Delta\theta$ y $\phi + \Delta\phi$.

serían distinguibles y necesariamente esa propiedad debe depender de los ángulos en cuestión.

Por el contrario, si cualquier rotación fuera indistinguible, esa propiedad no podría depender de los ángulos polar y azimutal y, al cabo, sólo podría depender de la distancia al centro del sistema de coordenadas, esto es, la distancia radial. Esta propiedad se conoce como *simetría esférica*, y ya la hemos adelantado en el ejemplo 2.11. En esa oportunidad vimos que, frente a tal simetría, ninguna propiedad asociada a las cargas, incluido el campo eléctrico, puede

depender de las variables angulares; y todavía más, el campo eléctrico ni siquiera podía tener componentes en las direcciones angulares, de manera tal que concluimos en que

El campo eléctrico asociado a una distribución de cargas esféricamente simétrica sólo tiene componente en la dirección radial y su valor depende sólo de r , la distancia al centro de la distribución esférica.

Matemáticamente expresamos esta conclusión en la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{e}_r \tag{3.16}$$

3.4.2: simetría cilíndrica

Una configuración presenta simetría de traslación cuando sus propiedades son invariantes frente a desplazamientos en una dirección. Por ejemplo, la figura 3.7 muestra el perfil de velocidades de un fluido moviéndose en un canal. Este perfil se repite en los puntos *A* y *B* y, en general, en cualquier posición a lo largo del eje *X*, independientemente del punto donde se lo considere. Dicho de otra manera, es imposible distinguir la posición horizontal observando sólo el perfil de velocidades. Sin embargo, el perfil no es el mismo si nos desplazamos en la dirección *Y*, de manera tal que hay simetría de desplazamiento a lo largo

del eje X pero no del eje Y . De esta manera, la velocidad del fluido de la figura 3.7 es una función que depende de la coordenada y pero no puede depender de la coordenada X .

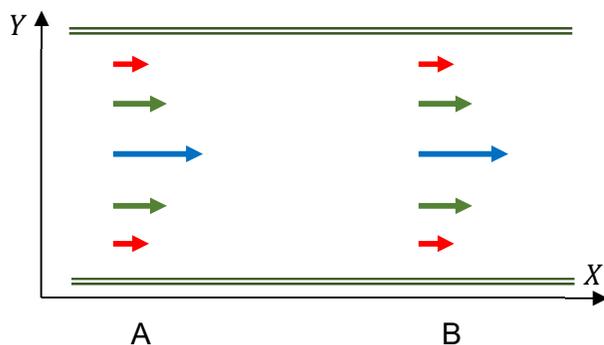


Fig. 3.7: los vectores indican la velocidad de diferentes elementos del fluido en un corte transversal de un canal. El perfil de velocidades es invariante frente a desplazamientos horizontales pero no frente a desplazamientos verticales.

depender más que de la distancia perpendicular R al eje de la distribución (en lugar del símbolo habitual ρ hemos usado el símbolo R para indicar la distancia perpendicular al eje, intentando evitar que se confunda con la densidad volumétrica de cargas).

Si suponemos que las cargas se hallan distribuidas a lo largo del eje Z , la expresión del campo eléctrico en coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) tendremos que escribirla en la forma

$$\vec{E}(R) = E_R(R)\hat{e}_R + E_\phi(R)\hat{e}_\phi + E_z(R)\hat{e}_z \quad (3.17)$$

Sin embargo, por tratarse de una distribución infinita y homogénea se anulan las contribuciones en E_z porque siempre habrá dos semirrectas con contribuciones iguales y contrarias en la dirección \hat{e}_z . Y debido a la simetría de rotación también debe anularse la componente E_ϕ porque de otra manera podríamos distinguir los giros horarios de los antihorarios, de manera tal que concluimos que

El campo eléctrico asociado a una distribución de cargas con simétrica cilíndrica sólo tiene componente en la dirección radial \hat{e}_R y depende sólo de R , la distancia perpendicular al eje de la distribución cilíndrica.

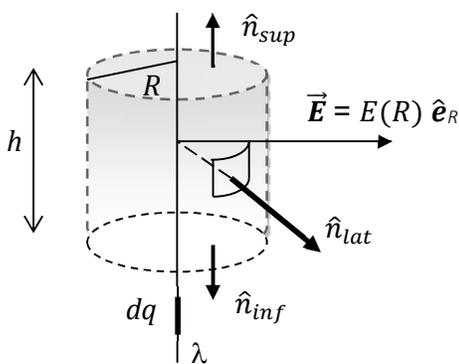
En términos matemáticos, la conclusión anterior se expresa diciendo que con simetría cilíndrica el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E}(R) = E_R(R)\hat{e}_R \quad (3.18)$$

Ejemplo 3.3: Calculemos el campo eléctrico generado por un alambre infinito cargado uniformemente con densidad lineal de carga λ .

Prestemos atención a la simetría de la configuración. Se trata de una distribución de cargas con simetría cilíndrica, de manera tal que el campo eléctrico sólo tiene componente en la dirección radial y depende sólo de la distancia R al alambre. Construyamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio R (que sólo introducimos como una herramienta de cálculo) y calculemos el flujo del campo eléctrico a través de las paredes de esta superficie

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (3.19)$$



En la última expresión hemos escrito la superficie del cilindro como la suma de la superficie de las tapas más la superficie lateral. Sin embargo, como el campo eléctrico \vec{E} sólo tiene componente radial, resulta

$$\vec{E} \cdot \hat{n}_{sup} = \vec{E} \cdot \hat{n}_{inf} = 0 \quad (3.20)$$

Fig. 3.8: alambre con carga lineal homogénea. Se muestra la superficie gaussiana de radio R .

de manera tal que sólo sobrevive el segundo sumando del miembro derecho de la igualdad (3.19). Ahora bien, como $\hat{n}_{lat} = \hat{e}_R$ y la superficie lateral tiene radio R , resulta (véase la ecuación (2.56)) $d\vec{S} = R d\phi dz \hat{e}_R$. Por otro lado, dado que es $dq = \lambda dz$ la carga total encerrada por la superficie cilíndrica de altura h vale

$$Q_T = \int_0^h dq = \int_0^h \lambda dz = \lambda h \quad (3.21)$$

Luego, teniendo en cuenta que la integración es en las variables ϕ y z , y el campo sólo depende de R , de manera casi inmediata de la expresión (3.6) resulta

$$E(R) 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0} \hat{e}_R \quad (3.22)$$

Ejemplo 3.4: Supongamos un casquete cilíndrico infinito de radios interno R_a y externo R_b , respectivamente, cargado en volumen con densidad de carga $\rho(R) = \rho_0 R$, como el que ilustra la figura 3.9. Calculemos el campo eléctrico de esta configuración en cada punto del espacio.

La forma de la configuración sugiere por sí misma la existencia de tres regiones, según sea $R < R_a$, $R_a < R < R_b$ o $R > R_b$. A su vez, R es la distancia perpendicular al eje ee' de simetría del cilindro.

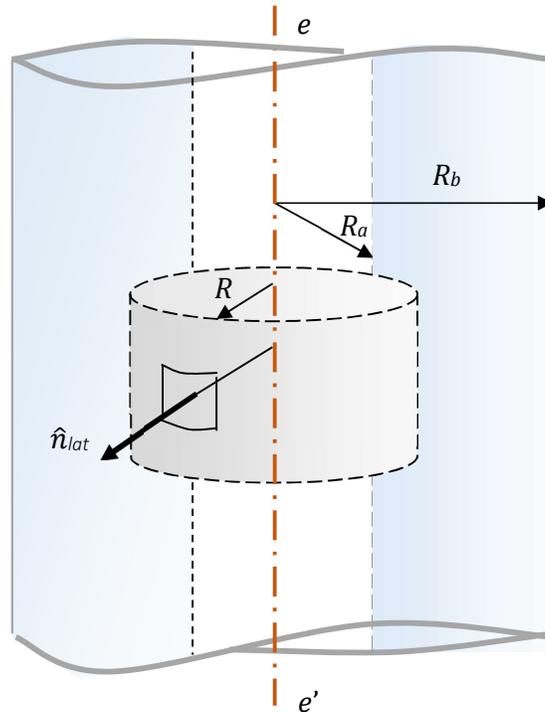


Fig. 3.9: corte del casquete cilíndrico del ejemplo 3.2. Se muestran la superficie (cilíndrica) gaussiana de radio R , en la región $R_a < R < R_b$, y la normal saliente de la superficie lateral, \mathbf{n}_{LAT} . El eje ee' es el eje de simetría axial de la configuración.

En todas estas regiones, y debido a la simetría cilíndrica del problema, el campo eléctrico tiene sólo componente E_R en la dirección \hat{e}_R . Por lo tanto, la única superficie del cilindro que contribuye al flujo de campo es la lateral, porque las normales de las tapas son perpendiculares al campo, y en consecuencia el flujo a través de las tapas es nulo. Por otro lado, como en el ejemplo anterior, el diferencial de superficie orientada se escribe como

$$d\vec{S} = R d\phi dz \hat{e}_R \quad (3.23)$$

de manera tal que $E(R)$ no se integra y el flujo a través de la pared cilíndrica de altura h resulta ser

$$\Phi_E = 2 \pi h R E(R) \quad (3.24)$$

Calculemos ahora el valor del campo eléctrico en cada una de las regiones propuestas

Región 1: $R < R_a$

El cilindro gaussiano, en este caso no encierra carga alguna, sencillamente porque toda la carga se concentra en la región interna del casquete. Luego, si llamamos E_1 al campo eléctrico de la región 1, resulta $E_1 = 0$.

Región 2: $R_a < R < R_b$

El cilindro gaussiano encierra una cantidad de carga que depende del radio R . De hecho, vale

$$Q_T = \iiint_V dq = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \int_{R_a}^R \rho_0 R^2 dR = 2 \pi h \rho_0 \frac{(R^3 - R_a^3)}{3} \quad (3.25)$$

de manera tal que, a partir de las expresiones (3.24) y (3.25), llamando E_2 al campo de esta región, resulta

$$\vec{E}_2(R) = \rho_0 \frac{(R^3 - R_a^3)}{3\epsilon_0 R} \hat{e}_R \quad (3.26)$$

Región 3: $R > R_b$

Ahora cualquier superficie gaussiana habrá de encerrar toda la carga contenida en el cilindro. Lo único que cambia respecto de la identidad (3.25) es que el límite de integración superior debe reemplazarse por R_b , de manera tal que inmediatamente, llamando E_3 al campo en esta región, resulta

$$\vec{E}_3(R) = \rho_0 \frac{(R_b^3 - R_a^3)}{3\epsilon_0 R} \hat{e}_R \quad (3.27)$$

En la figura 3.10 hemos graficado el campo eléctrico en función de la distancia R al eje de simetría del cilindro.

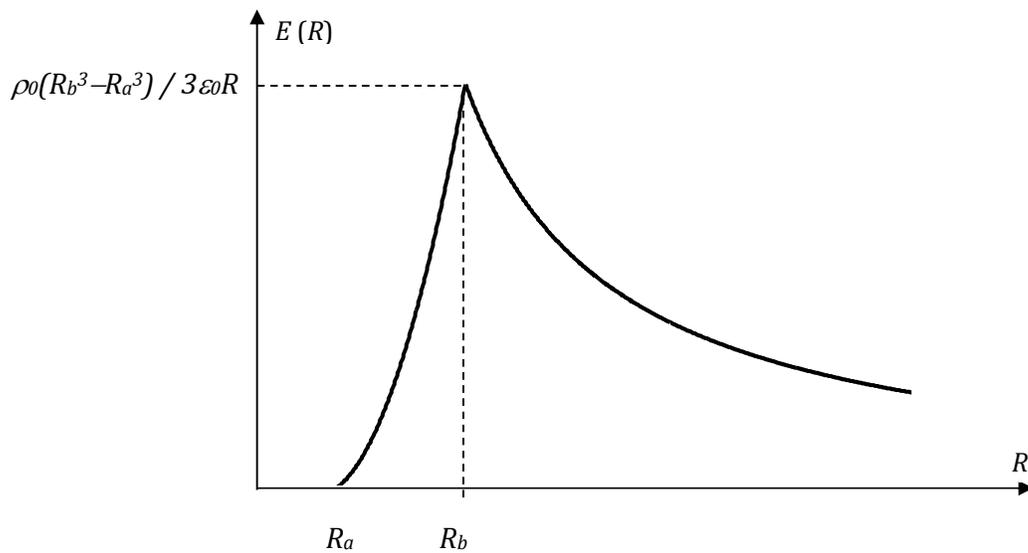


Fig. 3.10: campo eléctrico del casquete cilíndrico en función de la distancia radial R al eje de simetría de revolución del cilindro. Obsérvese que, producto de la distribución de cargas, el campo crece como R^2 entre R_a y R_b y decrece como R^{-1} para $R > R_b$.

Ejemplo 3.5: Sea el casquete conductor esférico de la figura 3.11, de radios interior r_a y exterior r_b , respectivamente, al que se le deposita una carga neta Q y se lo aísla. Posteriormente se aloja una carga puntual de valor q en el centro del casquete. Estudiemos la distribución de cargas y el valor del campo eléctrico en todo punto del espacio antes y después de colocar la carga puntual.

Analicemos primero la situación $q = 0$. En la región interior del casquete, $r < r_a$, no hay carga alguna, de manera tal que a partir del teorema de Gauss el flujo en esa región es nulo. La simetría esférica de la distribución de cargas impone que el campo eléctrico E_1 en esta región sea de la forma

$$\vec{E}(r) = E_R(r)\hat{e}_r \tag{3.28}$$

en tanto que el diferencial de superficie orientada en una esfera es de la forma

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{e}_r \tag{3.29}$$

Luego, dado que el campo es paralelo al diferencial de superficie, en la zona $r < r_a$ la única solución admisible es $E_1(r) = 0$.

Obsérvese que todavía podríamos pensar que habiendo carga eléctrica distribuida en la

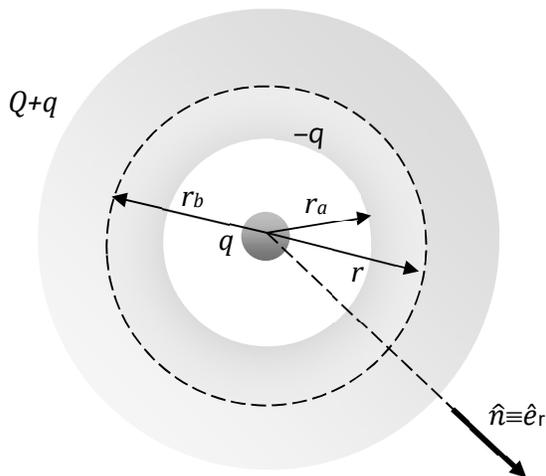


Fig. 3.11: casquete esférico con una carga alojada en el centro. Obsérvese que sobre el casquete se inducen cargas, de manera tal que el campo eléctrico dentro del conductor es nulo.

superficie exterior del casquete bien podría producirse una especie de “campo hacia adentro” del conductor. Pero recordemos que en el interior de un conductor el campo electrostático es nulo, de manera tal que la carga Q sólo produce un campo “hacia afuera”, esto es, en la región $r > r_b$.

Entonces, dado que el casquete es conductor, el campo eléctrico E_2 en su interior debe ser nulo (véase la sección 2.6) antes y después de colocar la carga puntual en su centro. Para decirlo de otra forma, el campo en el interior del casquete va a ser nulo, independientemente del valor de la carga eléctrica colocada en la región $r < r_a$.

Desde el punto de vista del teorema de Gauss, en la región $r_a < r < r_b$ la carga

total encerrada por la superficie gaussiana de radio r debe ser nula, de forma tal que concluimos que la carga Q se aloja por completo en la superficie exterior.

En la región exterior, $r > r_b$, el campo (al que denotaremos E_3) debe verse como el de una carga puntual de carga Q . De hecho, la carga total encerrada por cualquier esfera gaussiana de radio $r > r_b$ vale Q , y por simple integración se ve que en la región $r > r_b$ resulta

$$\vec{E}_3(r) = \frac{k Q}{r^2} \hat{e}_r \tag{3.30}$$

Analicemos ahora la situación $q \neq 0$.

Para diferenciar los nuevos resultados de los anteriores primaremos a las nuevas variables. Observemos ante todo que en la región $r < r_a$ la carga encerrada por una superficie gaussiana será q , de manera tal que el campo E'_1 en esa región debe ser el de una carga puntual en el origen, esto es,

$$\vec{E}'_1(r) = \frac{k q}{r^2} \hat{e}_r \tag{3.31}$$

En la región $r_a < r < r_b$ el campo eléctrico E'_2 sigue siendo nulo porque el casquete es conductor. Pero desde el punto de vista de la carga neta encerrada por una superficie gaussiana de radio $r_a < r < r_b$ esto sólo es posible si la carga q induce una carga de valor $-q$ en la superficie interna del casquete, porque sólo en ese caso la carga total encerrada será nula.

Pero entonces la carga q también induce una carga de igual signo y valor en la superficie externa, de manera tal que en la región $r > r_b$ la carga total encerrada por una esfera gaussiana será $Q + q - q + q = Q + q$ y el campo eléctrico E'_3 será de la forma

$$\vec{E}'_3(r) = \frac{k(Q + q)}{r^2} \hat{e}_r \quad (3.32)$$

Resumen del capítulo

A lo largo del capítulo hemos desarrollado las ideas centrales del concepto de simetrías y la manera en que estas pueden ser explotadas para calcular la estructura del campo eléctrico. Aún cuando en principio no ofrecimos una demostración rigurosa del teorema de Gauss, sino más bien una argumentación dimensional para justificar el resultado, debemos resaltar que la validez del método es absolutamente general y puede aplicarse cualquiera sea la forma de la configuración de cargas que origina el campo que se calcula. Con todo, no está de más insistir en que los cálculos necesarios en este método son matemáticamente accesibles sólo cuando la configuración es marcadamente simétrica.

En el capítulo 2 hemos calculado los campos eléctricos originados por diferentes distribuciones de carga, y siempre hemos apelado implícitamente a algún criterio de simetría para aligerar el cálculo o simplemente para tener una visión *a priori* de la estructura del campo eléctrico. La diferencia con el método empleado en este capítulo es la manera explícita en que trabajamos las simetrías y las transformamos en herramienta de cálculo.

Complementos del capítulo

Cálculo del campo eléctrico generado por una placa cargada uniformemente en superficie con densidad σ utilizando el teorema de Gauss.

Imaginemos una placa metálica infinita, cargada en superficie con densidad σ , que supondremos constante. Sabemos que el campo eléctrico en la superficie debe ser perpendicular a la placa porque por hipótesis la placa es conductora. Denotemos con \hat{e}_z a

dicha dirección perpendicular (que es lo mismo que decir que la placa coincide con el plano XY) de manera tal que el campo eléctrico sea entonces de la forma

$$\vec{E} = E \operatorname{sg}(z) \hat{e}_z \quad (3.33)$$

Por otro lado, si la placa es infinita y homogénea parece razonable que el campo eléctrico sea invariante frente a cualquier tipo de traslación, de manera tal que tenga el mismo valor independientemente de la región sobre la placa donde lo calculemos. Y como la placa es de espesor nulo, el campo a ambos lados de la placa es el mismo (en la figura lo hemos dibujado saliente, asumiendo, sin decirlo, que es $\sigma > 0$).

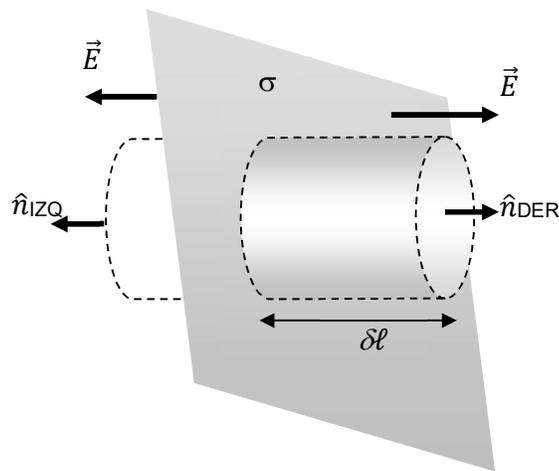


Fig. 3.12: corte de un plano infinito cargado en superficie y el cilindro gaussiano a través del cual se calcula el flujo del campo eléctrico.

Tomemos como superficie gaussiana un cilindro elemental de altura infinitesimal δl en la parte externa a la placa, como mostramos en la figura 3.12. De acuerdo a lo expuesto hasta aquí, el campo eléctrico es paralelo sólo a las normales a las tapas del cilindro (que hemos denotado \hat{n}_{IZQ} y \hat{n}_{DER} respectivamente) y la única contribución al campo sólo puede provenir de los cilindros exteriores (es cierto que el campo eléctrico de una placa infinita es perpendicular a la placa, pero en todo caso no está de más recordar que el campo eléctrico en la superficie de un conductor cualquiera siempre es perpendicular a la superficie). En el límite $\delta l \rightarrow 0$ resulta que la carga encerrada por el cilindro vale $\delta q = \sigma \oint dS$, de manera tal que por simple aplicación del teorema de Gauss obtenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{TAPAS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \iint_{TAPAS} dS \quad (3.34)$$

Pero las integrales sobre las tapas son idénticas, de manera tal que si R es el radio del cilindro gaussiano resulta

$$\oint_{TAPAS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{E} \cdot \hat{n}_{IZQ} dS + \iint \vec{E} \cdot \hat{n}_{DER} dS = 2 \pi R^2 E \operatorname{sg}(z) \quad (3.35)$$

en tanto que la integral sobre la placa vale simplemente πR^2 . Luego, es inmediato que reobtenemos el resultado (2.66)

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sg}(z) \hat{e}_z \quad (3.36)$$

El teorema de Gauss en forma diferencial

Supongamos una dada distribución continua de cargas en un volumen \mathcal{V} , digamos

$$dq = \rho(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (3.37)$$

encerrada en una superficie cerrada S (cuyo volumen es precisamente \mathcal{V}). Aplicando el teorema de Gauss a esta superficie resulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (3.38)$$

El teorema de la divergencia (véase el apéndice) nos permite escribir la última expresión en la forma

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (3.39)$$

de manera tal que, combinando las últimas dos identidades, podemos escribir

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} - \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (3.40)$$

y para el volumen \mathcal{V} tendiendo a cero parece evidente que la identidad se reduce a la forma

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (3.41)$$

El significado de esta igualdad es obviamente el mismo que el de la ecuación (3.6). De hecho, la divergencia de un campo vectorial en un punto puede pensarse como la diferencia entre el flujo de campo saliente y el flujo de campo entrante respecto a un dado volumen de control (por unidad de volumen de control y en el límite del volumen de control tendiendo a cero). El miembro derecho de la identidad (3.41) indica que las fuentes y sumideros del flujo de campo eléctrico son las cargas distribuidas en ese volumen de control. En el próximo capítulo habremos de avanzar sobre la identidad (3.41) una vez que definamos el campo eléctrico en términos de una función potencial.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Demuestre que si en el eje de simetría axial de un conductor cilíndrico infinito de radio R_0 , cargado uniformemente en superficie, se coloca un alambre conductor, también infinito y cargado con densidad lineal uniforme, no se vulnera la simetría original y el campo eléctrico puede calcularse usando el teorema de Gauss. Calcule dicho campo.

Ejercicio 2: Discuta por qué si el alambre del problema anterior es finito se rompe la simetría cilíndrica.

Ejercicio 3: Calcule el campo eléctrico en el espacio comprendido entre dos placas plano paralelas infinitas, cargadas una con densidad superficial $+\sigma$ y la otra con densidad $-\sigma$.

Ejercicio 4: Una carga puntual $q = 3 \mu\text{C}$ se halla en el centro de una esfera de 1 cm de radio. Calcule

- a) el valor del campo eléctrico en los puntos situados en la superficie de la esfera;
- b) el valor del flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de la esfera;
- c) el valor del flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de un cubo de arista 2cm cuyo centro coincide con el centro de la esfera;
- d) a la luz del resultado anterior, discuta cómo varía el flujo si
 - d1) se duplica el área de la superficie que encierra a la carga;
 - d2) se duplica el valor de la carga encerrada;
- e) discuta si el valor del flujo varía si la carga puntual es desplazada del centro de simetría (pero se mantiene dentro de la superficie cerrada).

Ejercicio 5: Se coloca un dipolo en el origen de un sistema de referencia arbitrario. El campo eléctrico no es nulo pero la carga neta lo es (véase el ejemplo 2.4). En consecuencia, el flujo de campo a través de cualquier superficie que rodee al dipolo es nulo. ¿Significa que el campo es perpendicular a la normal a *toda* superficie cerrada?

Ejercicio 6: Se dispone un conjunto de N cilindros coaxiales, todos de espesor despreciable, de radios $R_m = R_0 / m$ ($1 \leq m \leq N$), cargado cada uno de ellos con densidad superficial de carga $\sigma_m = m \sigma_0 > 0$. Halle el valor del campo eléctrico en la región $R_m \leq R \leq R_{m+1}$ entre dos cilindros cualesquiera.

Ejercicio 7: Tres cilindros infinitos coaxiales, de radios R_1 , $R_2 > R_1$ y $R_3 > R_2$, están cargados con densidades uniformes σ_1 , σ_2 y σ_3 , respectivamente. Calcule el valor de σ_3 de manera tal que el campo eléctrico sea nulo en la región $R > R_3$.

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{e}_R & R < R_C \\ \frac{1}{2\pi\epsilon_0 R} (\lambda + 2\pi\sigma R_C) \hat{e}_R & R > R_C \end{cases}$$

(λ y σ denotan las densidades de carga del alambre y del cilindro, respectivamente)

Ejercicio 2: sólo una región del eje de simetría tendría carga.

Ejercicio 3:
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_\perp & \text{entre las placas} \\ 0 & \text{en la región exterior} \end{cases}$$

\hat{e}_\perp es un versor perpendicular a las placas, de $+\sigma$ a $-\sigma$.

Ejercicio 4: a) $\mathbf{E} = 2,7 \times 10^7 \mathbf{e}_r$ N/C; b) $\Phi_E = 3,39 \times 10^4$ Nm²/C; c) $3,39 \times 10^4$ Nm²/C; d1) no varía; d2) se duplica; e) el valor del flujo no varía.

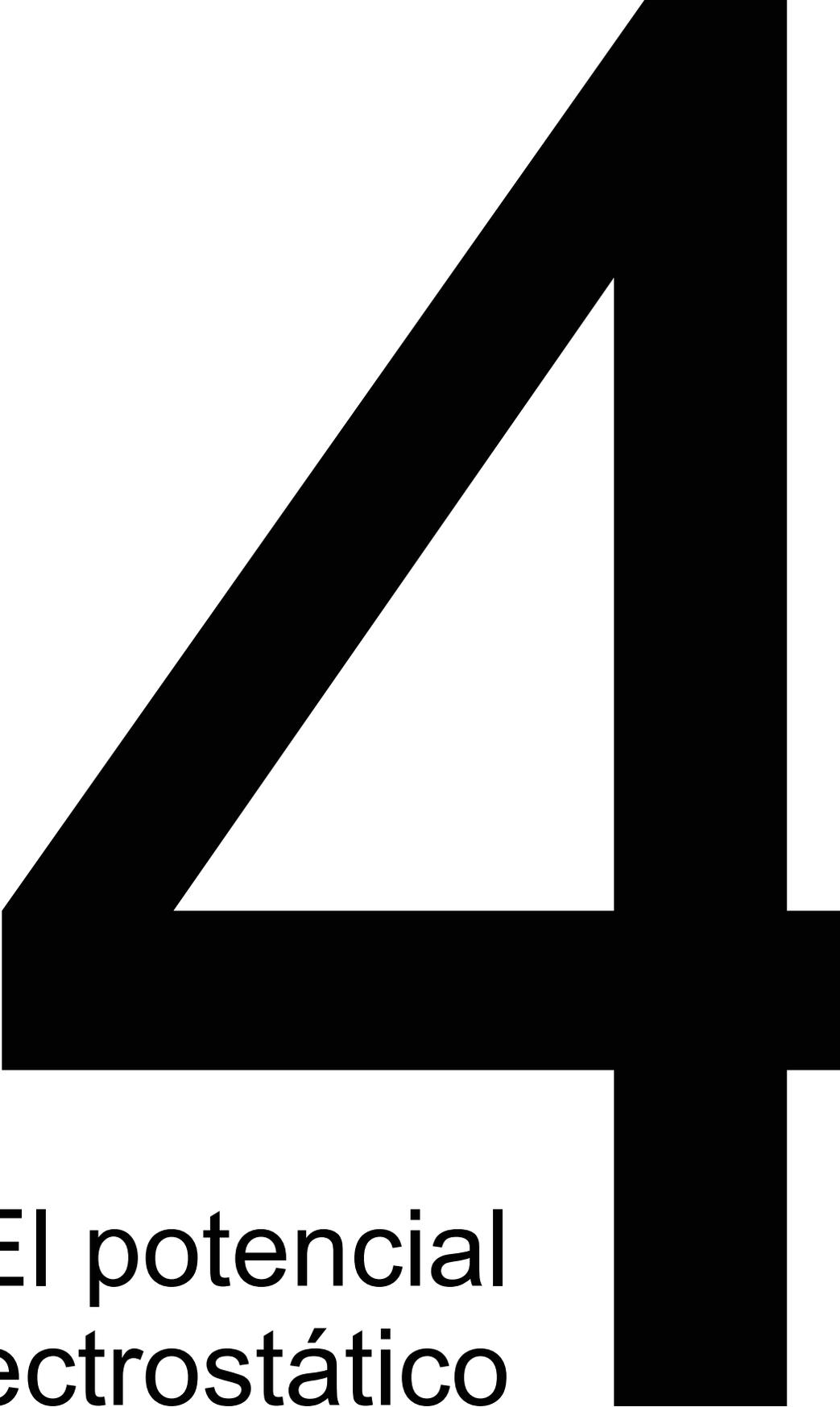
Ejercicio 5: No. Significa que la suma de las proyecciones positivas del campo sobre la superficie son iguales a la suma de las proyecciones negativas o, si se prefiere, que hay tantas líneas de campo que salen de, como líneas de campo que entran a la superficie.

Ejercicio 6:

$$\vec{E} = \frac{m\sigma R_0}{\epsilon_0 R} \hat{e}_R$$

Ejercicio 7:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{R_3}$$



El potencial
electrostático

4.1 – Introducción

Imaginemos que en una región del espacio armamos una configuración cualquiera de cargas, y la encerramos en un recinto de paredes no conductoras. A una persona que no sabe de nuestra operación le damos un objeto cargado eléctricamente y le pedimos que, una vez puesto en movimiento, lo desplace a velocidad constante entre dos puntos cualesquiera de la región que rodea a nuestra distribución de cargas (pero a igual altura respecto de algún plano de referencia). Parece razonable pensar que, en general, esta persona tendrá que realizar alguna fuerza (en particular en contra del campo eléctrico de la configuración que nosotros hemos armado) para llevar el objeto entre esos dos puntos. Sabe que si debe ejercer esa fuerza es porque existe otra fuerza que se opone al desplazamiento a velocidad constante.

Obsérvese que no estamos diciendo que la otra fuerza se opone al desplazamiento, sino que tiende a acelerar al objeto. Para evitar esa aceleración nuestro ayudante debe a su vez ejercer alguna fuerza sobre el cuerpo, porque la condición es que se desplace (idealmente) a velocidad constante.

Ahora bien, esta persona no tiene la más remota idea del origen de la fuerza que acelera al objeto, pero puede calcular el trabajo que esa fuerza realiza entre los puntos entre los que se mueve el objeto calculando el trabajo que él mismo ha realizado. Como la suma de los trabajos de todas las fuerzas es igual a la variación de energía cinética, y ésta no ha cambiado (como tampoco ha cambiado la energía potencial, por eso impusimos la condición de que los puntos inicial y final estuvieran a igual altura respecto de un plano de referencia), el trabajo de la fuerza desconocida es igual en valor absoluto al que él ha realizado, pero es de signo opuesto. La fuerza desconocida puede tener cualquier origen, puede no ser de una única especie, tanto da, lo importante es que podemos calcular el trabajo que ha realizado. Y como la energía cinética del objeto no varió, podemos asegurar sin más que el trabajo invertido al llevarlo de un punto a otro en todo caso podría traducirse en una variación de alguna energía potencial (que no es la gravitatoria porque los puntos extremos de la trayectoria están a igual altura).

Hasta aquí no parece haber nada nuevo, y de hecho no lo hay, pero lo que queremos resaltar es que *sabemos* que el trabajo de la fuerza eléctrica está necesariamente asociado a la variación de una energía potencial, en este caso electrostática por tratarse de fuerzas electrostáticas. Y lo único que resta hacer es hallar la expresión matemática de esa energía potencial electrostática.

Una manera poco rigurosa aunque no por ello menos útil de encarar el análisis es observar que las expresiones formales de las fuerzas gravitatoria y eléctrica son idénticas. Si bien en el ejemplo 4.5 profundizaremos algo más el tema, adelantemos que las expresiones del potencial deben ser también similares. Recordemos que el módulo de la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos puntuales de masas m_1 y m_2 , respectivamente, separados una distancia r vale

$$F_{21} = m_1 \frac{G m_2}{r^2} \quad (4.1)$$

en tanto que el valor absoluto de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales de intensidades q_1 y q_2 , respectivamente, separados una distancia r vale

$$F_{21} = q_1 \frac{k q_2}{r^2} \quad (4.2)$$

Como es habitual, G y k se refieren a las constantes de gravitación universal y eléctrica, respectivamente[†]. Si el potencial gravitatorio de la masa m_2 en la posición de la masa m_1 (esto es, a una distancia r) vale

$$V_G = G \frac{m_2}{r} \quad (4.3)$$

Si las expresiones de la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática son formalmente idénticas, deben serlo también las expresiones de los potenciales gravitatorio y electrostático.

Y así como la variación de energía potencial gravitatoria se asocia al trabajo de la fuerza propia del campo gravitatorio (la fuerza peso) la variación de energía potencial electrostática debe asociarse al trabajo de la fuerza propia del campo eléctrico (la fuerza eléctrica).

parece razonable pensar que el potencial electrostático de la carga q_2 en la posición de la carga q_1 (esto es, a una distancia r) sea de la forma

$$V_E = k \frac{q_2}{r} \quad (4.4)$$

A lo largo de este capítulo la tarea será formalizar estas ideas y dar un significado preciso al potencial electrostático. A partir de ahí, habremos de asociar los conceptos de trabajo de la fuerza eléctrica, que naturalmente asociaremos a la energía electrostática.

4.2 – Campo y potencial electrostáticos

En el capítulo anterior hemos analizado la estructura del campo eléctrico cuando la configuración de cargas que lo genera posee muy alta simetría. Pero parece evidente que a partir de la definición (2.21) del campo eléctrico, que aquí repetimos

$$\vec{E}(r) = k \int dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.5)$$

[†] Anotamos k y no k_0 porque los desarrollos valen para cualquier medio, no sólo el vacío. La diferencia es el valor de la permitividad, aspecto que discutiremos en el capítulo 6.

es posible resaltar un interesante conjunto de propiedades que exceden el marco de una simple simetría. Para ello, recordemos que la identidad (4.5) involucra tres identidades escalares, a saber

$$E_x(r) = k \int dq' \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (4.6. a)$$

$$E_y(r) = k \int dq' \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (4.6. b)$$

$$E_z(r) = k \int dq' \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (4.6. c)$$

Como las tres identidades escalares son funcionalmente idénticas podemos trabajar con cualquiera de ellas, digamos (4.6.a). La forma del integrando sugiere de inmediato plantearlo como

$$\frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (4.7)$$

Obsérvese un detalle de importancia: la derivación es respecto de la variable x (campo) y no de la variable x' (fuente), por eso es necesario el signo negativo. Luego, podemos reemplazar la identidad (4.7) en (4.6.a) notando que la integral se realiza respecto a las variables primadas, en tanto que la derivada es respecto a una variable sin primar. Por lo tanto, podemos intercambiar el orden de las operaciones y escribir

$$E_x(r) = -k \frac{\partial}{\partial x} \int dq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.8)$$

donde hicimos explícita la identidad

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (4.9)$$

De haber trabajado con las expresiones de las componentes $E_y(r)$ o $E_z(r)$ hubiéramos hallado expresiones similares, con la salvedad de que las derivadas parciales hubieran sido respecto de la variable y o z , según correspondiera. En total, entonces, podemos escribir

$$\vec{E}(r) = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z =$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) k \int dq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.10)$$

o, utilizando las definiciones del gradiente de una función escalar y del operador ∇ dadas en el apéndice (expresiones A3 y A4), sintetizar la expresión (4.10) en la forma

$$\vec{E}(r) = -\nabla \left(k \int dq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (4.11)$$

Como la integral (4.11) sólo depende de las variables primadas y el gradiente opera sobre las variables sin primar, conviene definir una función escalar, a la que llamaremos *potencial electrostático* $V(x, y, z)$, como

$$V(x, y, z) = k \int dq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k \int dq' \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (4.12)$$

en el caso de una distribución continua de cargas. Si la configuración que genera el campo eléctrico es una distribución de N cargas discretas no integramos sino que sumamos, de forma tal que resulta

$$V(x, y, z) = k \sum_{n=1}^N \frac{q'_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|} \quad (4.13)$$

y en consecuencia el campo eléctrico, en cualesquiera de los dos casos, se escribe como

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(x, y, z) \quad (4.14)$$

Vale la pena un comentario respecto de la última expresión. El gradiente de una función escalar es una función vectorial que apunta en la dirección de máximo cambio de la derivada direccional de esa función escalar, y su módulo en un punto mide el valor de ese cambio en el punto. En el caso concreto del potencial electrostático, el gradiente de potencial ∇V indica el sentido en que es máxima la variación del potencial. Luego, la ecuación (4.14) afirma que el campo eléctrico se orienta en el sentido en el que el potencial eléctrico decrece (o, lo que es lo mismo, en sentido contrario al del crecimiento del potencial).

Por ejemplo, hemos visto que el campo eléctrico de una carga puntual positiva está orientado en el sentido radial saliente \hat{e}_r , de manera tal que el gradiente de potencial está orientado en el sentido $(-\hat{e}_r)$, esto es, los puntos más próximos a la carga se hallan a potencial mayor que los puntos más alejados. Por un lado esto significa que, al menos en

este caso, debe existir algún punto en el que el potencial electrostático se anule. Y por el otro, como la expresión (4.14) sólo indica que existe un gradiente de potencial, esto es, indica una diferencia de potencial entre dos puntos, parece ser que el potencial electrostático habrá de quedar siempre definido a menos de un valor arbitrario, es decir, al valor del potencial electrostático en cualquier punto del espacio se le puede sumar siempre una constante de cualquier valor porque al calcular la diferencia de potencial (que es el ente que tiene significado) la constante arbitraria se anula. Si se prefiere, a la función (4.12) (o la función (4.13) en el caso discreto) se le puede sumar cualquier constante arbitraria porque el campo eléctrico no habrá de variar.

Por lo demás, si la fuerza eléctrica es directamente proporcional al campo eléctrico debe estar también relacionada linealmente con el potencial electrostático. Y como al desplazar una carga en contra de la fuerza eléctrica nos movemos entre puntos a diferente potencial, parece razonable suponer que el trabajo para desplazar aquella carga deba ser proporcional a la diferencia de potencial. Luego de un par de ejemplos para fijar ideas analizaremos con un poco de detalle estas conclusiones preliminares.

El potencial electrostático (al igual que el potencial gravitatorio) queda siempre definido a menos de una constante arbitraria. Esto significa que la medida del trabajo del campo para transportar una carga eléctrica de valor unidad (una masa de valor unidad en el caso del campo gravitatorio) no es el potencial electrostático sino la diferencia de potencial (al igual que en el caso del potencial gravitatorio).

Ejemplo 4.1: regresamos al alambre del ejemplo 2.5, cargado uniformemente con densidad lineal de carga λ_0 , y calculemos el potencial asociado a esta distribución de cargas en todo punto x del eje X tal que $x > L$.

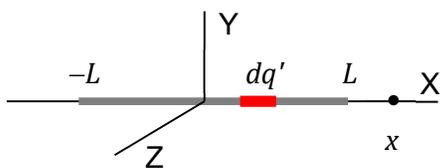


Fig. 4.1: varilla unidimensional cargada eléctricamente, en la que se muestra un elemento de carga y el punto donde se calcula el potencial electrostático.

Comencemos por notar que para aplicar la expresión (4.12) debemos definir los vectores campo \vec{r} y fuente \vec{r}' , además del elemento de carga dq'

$$\vec{r} = (x; 0; 0) \tag{4.15. a}$$

$$\vec{r}' = (x'; 0; 0) \tag{4.15. b}$$

$$dq' = \lambda_0 dx' \tag{4.15. c}$$

Obsérvese la forma del vector campo, tiene una sola componente porque elegimos calcular el potencial a una distancia x del borde del alambre. Luego, la expresión (4.12) se escribe como

$$dV = k \frac{dq'}{|r - r'|} = k\lambda_0 \frac{dx'}{x - x'} \tag{4.16}$$

y su integración es inmediata en la forma

$$V = k\lambda_0 \int_{-L}^L \frac{dx'}{x - x'} = -k\lambda_0 \ln\left(\frac{x - L}{x + L}\right) \tag{4.17}$$

Un par de observaciones se hacen necesarias. En primer lugar, el signo negativo de la integral proviene del hecho de que estamos integrando sobre las variables primadas. En segundo lugar, el potencial queda bien definido porque el argumento del logaritmo es siempre positivo (recuérdese que estamos trabajando en la región $x > L$) además de ser menor que la unidad, de manera tal que parece evidente que el potencial se anula en el infinito pero es siempre positivo, es decir, crece *hacia* el alambre (esto significa que en la región en la que estamos trabajando el gradiente de potencial apunta en sentido opuesto al sentido positivo del eje X). De acuerdo a la expresión (4.14) esto implica que el campo eléctrico E_x apunta en sentido contrario, es decir, hacia el infinito o, de otro modo, es más intenso cuanto más cerca del alambre nos encontramos.

¿Tiene algún significado que el potencial sea positivo? Ninguno de relevancia. Notemos que sin importar los valores de las variables de la ecuación (4.17) (salvo, por supuesto, que

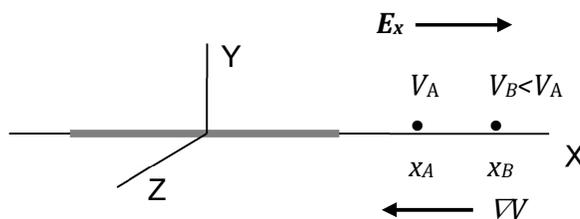


Fig. 4.2: Sentidos del campo eléctrico y del gradiente de potencial en el ejemplo de la varilla cargada eléctricamente del ejemplo 4.1.

sea $x > L$) la diferencia de valores del potencial entre un punto x_A y un punto x_B más alejado del alambre es positiva (véase la figura 4.2). Si ahora quisiéramos transportar una carga positiva desde x_B hasta x_A sabemos que deberíamos realizar trabajo positivo, porque tendríamos que “empujar” en contra de la fuerza eléctrica. Y si nosotros realizamos trabajo positivo, parece evidente que el campo eléctrico (en realidad la fuerza eléctrica) realiza trabajo

negativo. Estas ideas habremos de discutir las con más detalle en la sección próxima. Por ahora veamos de recuperar la expresión del campo eléctrico generado por la varilla (expresión (2.44)) a partir de la ecuación (4.14)

Como sólo nos interesa la componente del campo E_x , calcularemos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{d}{dx} \left[-k\lambda_0 \ln \left(\frac{x-L}{x+L} \right) \right] = k\lambda_0 \frac{2L}{x^2 - L^2} \quad (4.18)$$

que coincide con la expresión (2.44) salvo por la función $sg(x)$ (que en este caso es irrelevante porque estamos trabajando en la región $x > L$). Nótese que hemos cambiado las derivadas parciales por derivadas totales porque en este caso la única variable de la ecuación es x .

4.3 – El potencial y el trabajo de la fuerza electrostática

Analicemos las unidades del potencial electrostático. Dado que el campo eléctrico tiene unidades de fuerza sobre carga, es decir, $[E] = \text{N/C}$, y el gradiente tiene unidades de inversa de metro, esto es, $[\nabla] = 1/\text{m}$, resulta

$$[V] = \text{N m/C} = \text{J/C} \equiv \text{V (volt)}$$

Aun cuando las denominemos de una manera particular, las unidades de potencial son las de una energía por unidad de carga. Sin embargo, ya hemos adelantado en la sección anterior que en este caso el cambio de la energía interna del sistema se asocia a al trabajo del campo eléctrico.

Exploremos un poco esta idea. A partir de la identidad (2.22) podemos escribir

$$\vec{F}_{el}(r) = q\vec{E}(r) = -q\nabla V \quad (4.19)$$

El trabajo dW_{el} que realiza la fuerza eléctrica para mover la carga desde un punto A hasta un punto B a lo largo de un elemento diferencial $d\vec{r} = dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z$ vale

$$dW_{AB,el} = \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -q\nabla V \cdot d\vec{r} = -q dV \quad (4.20)$$

porque

$$\nabla V \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV \quad (4.21)$$

Luego, a partir de la expresión (4.20) resulta inmediatamente

$$W_{AB,el} = -q \int_A^B dV = -q[V(B) - V(A)] \quad (4.22)$$

Este es el trabajo que realiza la fuerza eléctrica, de manera tal que el trabajo requerido para llevar una carga q desde A hasta B *en contra* de la fuerza eléctrica (esto es, a velocidad constante) será

$$W_{AB} = -W_{AB,el} = q[V(B) - V(A)] \quad (4.23)$$

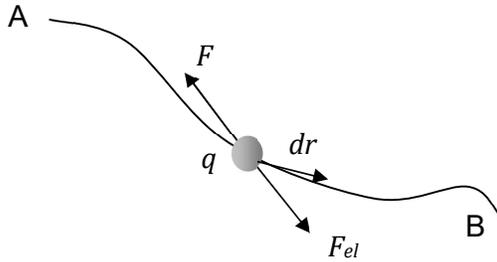


Fig. 4.3: El trabajo de la fuerza F se realiza en contra de la fuerza eléctrica para llevar la carga q a velocidad constante.

Obsérvese que el trabajo de la fuerza eléctrica no depende del camino de integración sino de los valores del potencial en los extremos de ese camino. Entonces, la fuerza eléctrica es conservativa y, en consecuencia, el campo electrostático también es conservativo, de manera tal que el trabajo de estas dos cantidades vectoriales es nulo en un ciclo cerrado y, por lo tanto, la integral de ambos vectores en una curva cerrada C debe ser nula, esto es

$$\oint_C \vec{F}_{el}(r) \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (4.24)$$

donde $d\vec{\ell}$ denota el elemento diferencial de arco a lo largo de la curva C . A las integrales de la forma (4.24) se las denomina *circulación* (del campo vectorial de que se trate). Que la circulación del campo electrostático sea nula (y aquí queremos recalcar que se trata una situación estática, que no tiene por qué seguir valiendo si las cargas están en movimiento) trae aparejada una serie de interesantes consecuencias. En primer lugar, como ya se dijo, el campo electrostático es conservativo. Esto significa que su integral entre dos puntos a lo largo de una curva cualquiera sólo puede depender de los valores de una función potencial en esos puntos. Precisamente, esa función potencial es el potencial electrostático. En efecto, de la identidad (4.19) resulta

$$\vec{E}(r) = -\nabla V \Rightarrow \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow -\int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = V_B - V_A \quad (4.25)$$

donde hemos escrito V_B y V_A en lugar de $V(B)$ y $V(A)$ para simplificar la notación. A su vez, no está de más recordar que $d\vec{r}$ representa un diferencial de posición en tres dimensiones, esto es, $d\vec{r} = dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z$ y no un diferencial en la dirección radial (aunque eventualmente, desde ya, en su oportunidad podría representarlo).

Por otro lado, a partir de las expresiones (4.24) y (4.25) se interpreta la diferencia de potencial $V_B - V_A$ como una medida del trabajo requerido para llevar una carga unidad

positiva desde A hasta B en contra de la fuerza eléctrica. Obsérvese que el potencial mismo no tiene un significado físico preciso (como no lo tiene el potencial gravitatorio, por ejemplo) pero sí lo tiene la diferencia de potencial.

La magnitud que aquí tiene significado físico es la fuerza y, por extensión, el campo eléctrico. Desde este punto de vista, el potencial puede pensarse como una herramienta matemática. De hecho, el campo eléctrico se define a partir del gradiente del potencial, esto es, a través de un operador que involucra una derivada espacial. Luego, si una función escalar $V(x, y, z)$ define correctamente un campo eléctrico, también lo hace la función escalar $V(x, y, z) + V_0$, donde V_0 es un potencial constante de valor arbitrario.

Una distribución de cargas confinadas en una región finita del espacio, por lo demás absolutamente arbitraria, se halla a distancia infinita de toda carga en el infinito. En consecuencia, la fuerza (en este caso eléctrica) que tal distribución puede ejercer sobre la carga en el infinito es nula y es nulo el trabajo que se requiere para desplazar a velocidad constante a esta carga eléctrica por el infinito, algo similar a lo que ocurre si deslizamos un bloque por una superficie horizontal sin rozamiento.

En síntesis, el potencial queda siempre definido a menos de una constante aditiva arbitraria y, en consecuencia, siempre será posible fijar un potencial de referencia. Por ejemplo, toda distribución finita de cargas tiene un campo que se anula en el infinito, de manera tal que el trabajo para mover una carga por el infinito es nulo y, en consecuencia, puede tomarse el potencial de infinito igual a cero. De esta manera, el potencial de una superficie dada representa el trabajo requerido para transportar una carga unitaria positiva desde el infinito a la superficie en cuestión. Pero debe tenerse en cuenta que si hay cargas en el infinito (distribuciones infinitas de carga) el potencial de referencia no puede ser nulo allí (véanse los ejemplos en esta misma sección).

Finalmente, podemos integrar la ecuación (4.19) sobre la superficie orientada \vec{S} que se apoya sobre el contorno C (que denotamos como $S(C)$), para

obtener (véase el apéndice)

$$\oint_C \vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (4.26)$$

y resulta que el campo electrostático es irrotacional. Las consecuencias sobre la geometría del campo son inmediatas, porque la expresión (4.26) impone toda una serie de restricciones sobre la forma del campo electrostático. Por ejemplo, si un campo es tal que su componente E_x varía en la dirección y , debe tener una componente E_y que varíe en la dirección x de tal forma que sea $\partial E_y / \partial x = \partial E_x / \partial y$, porque de otra forma la componente \hat{e}_z del rotor $\nabla \times \vec{E}$ no sería nula (véase la definición de rotor en la ecuación A1.8) y, luego, no sería nulo el rotor.

Sin embargo, como discutiremos en los capítulos 9 y 11, la identidad (4.26) ya no es válida si las cargas están en movimiento. A continuación analizaremos algunos ejemplos para fijar ideas.

Ejemplo 4.2: Sean tres cargas dispuestas como se muestra en la figura 4.4. Calculemos el trabajo que se requiere para transportar la carga q_2 desde su posición original en el punto A hasta el punto B.

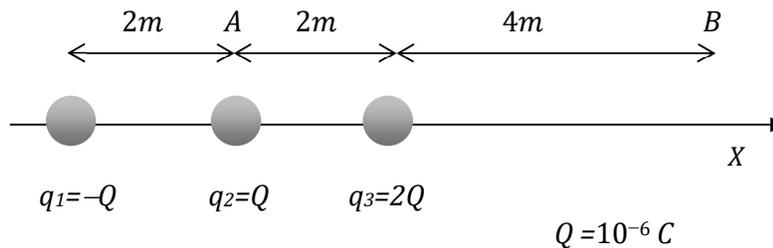


Fig. 4.4: el trabajo necesario para llevar la carga Q desde A hasta B se puede calcular en términos del potencial generado por las otras cargas.

El trabajo necesario para transportar la carga q_2 entre los puntos A y B puede evaluarse a partir de la diferencia de potencial generado por las otras dos cargas en esos puntos. Este es un detalle de suma importancia: si queremos calcular el potencial generado por una configuración cualquiera de cargas en un punto dado del espacio, la expresión (4.13) nos indica cómo hacerlo (a condición de que el punto en el que queremos calcular el potencial no coincida con el punto en el que se halla una de las cargas de la configuración). En el cálculo intervienen todas las cargas. Pero si queremos evaluar el trabajo requerido para transportar a una de las cargas de la configuración (cualquiera esta sea, en nuestro ejemplo se trata de la carga q_2) esa carga no participa del cálculo del potencial en los puntos inicial y final, participará del cálculo cuando multipliquemos su valor por la diferencia de potencial generado entre los puntos inicial y final por el resto de las cargas de la configuración. Fijemos nuestro sistema de referencia de manera tal que la carga q_1 se halle en el origen, y llamemos X al eje horizontal con sentido positivo hacia la derecha. En este sistema de referencia las coordenadas correspondientes a los puntos A y B son

$$\vec{r}_A = (2; 0; 0) \quad \vec{r}_B = (8; 0; 0) \quad (4.27)$$

en tanto que las de los puntos campo son

$$\vec{r}'_{q_1} = (0; 0; 0) \quad \vec{r}'_{q_3} = (4; 0; 0) \quad (4.28)$$

A partir de la identidad (4.13) es inmediato que

$$V_A = k \left[\frac{-Q}{2} + \frac{2Q}{2} \right] = \frac{kQ}{2} \quad V_B = k \left[\frac{-Q}{8} + \frac{2Q}{4} \right] = \frac{3kQ}{8} \quad (4.29)$$

y en consecuencia, el trabajo de la fuerza eléctrica, de acuerdo a la expresión (4.22), será

$$W_{AB,el} = -q_2(V_B - V_A) = -Q(V_B - V_A) = \frac{kQ^2}{8} = 1,12 \times 10^{-3} J \quad (4.30)$$

Obsérvese que el trabajo que debe realizarse en contra de las fuerzas eléctricas que ejercen sobre la carga q_2 las otras dos cargas es $-1,12 \text{ mJ}$. Por los valores relativos de estas dos cargas la fuerza que debe realizarse para que la carga q_2 se mueva con energía cinética constante (esto es, velocidad constante) es de empuje (en sentido \hat{e}_x) hasta pasar por la posición de la carga q_3 , y es de frenado desde esa posición hasta B. El signo negativo del trabajo neto indica que la fuerza entre r_{q_2} y B es de módulo mayor que la fuerza entre A y r_{q_2} . Por supuesto que también podemos calcular el trabajo realizado apelando a la expresión de la fuerza eléctrica. En ese caso será

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(r) d\vec{r} = \int_A^B -kQq \frac{1}{x^2} dx + \int_A^B 2kQq \frac{(x-4)}{|(x-4)^3|} dx \quad (4.31)$$

Obsérvese que la segunda integral del miembro derecho de la expresión (4.31) debe realizarse en dos partes porque cambia de signo en $x = 4 \text{ m}$. O, en todo caso, integrar teniendo en cuenta la identidad $x/|x| = \text{sg}(x)$.

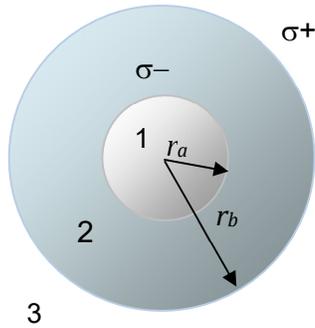
Sea por un método u otro, es interesante notar que el trabajo realizado no se empleó para aumentar la energía cinética de la carga q_2 , de manera tal que debe quedar como energía potencial del campo electrostático. En la sección 4.4 analizaremos este fenómeno con algún detalle.

Ejemplo 4.3: Sean dos esferas concéntricas de radios r_a y $r_b > r_a$ respectivamente. Ambas esferas tienen igual cantidad absoluta de carga, pero de signo contrario (obsérvese que si $Q_+ = |Q_-|$ no puede ser $\sigma_+ = |\sigma_-|$ porque los radios r_a y r_b son distintos). La configuración se muestra en la figura 4.5. Calculemos el trabajo necesario para transportar una carga $+q$ desde la cáscara interior a la cáscara exterior a velocidad constante.

Como método, calculemos previamente el campo eléctrico de la configuración en todo punto del espacio. A partir del teorema de Gauss y la simetría esférica de la configuración, es inmediato que en las regiones que hemos marcado como 1 y 3 en la figura 4.5 el campo

eléctrico es nulo, porque cualquier superficie gaussiana en estas regiones encierra carga neta nula.

Llamando E_2 al campo eléctrico en la región 2, esto es, la región definida por $r_a < r < r_b$, el teorema de Gauss también garantiza que en esta zona resulta



$$E_2 4\pi r^2 = \frac{-4\pi \sigma r_a^2}{\epsilon_0} \quad (4.32)$$

donde r es el radio de la esfera gaussiana. De esta forma se obtiene

$$\vec{E}_2(r) = \frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0 r^2} (-\hat{e}_r) \quad (4.33)$$

Fig. 4.5: configuración de cargas del ejemplo 4.2.

Antes de calcular el potencial electrostático podemos anticipar algunas de sus características. Por comodidad, convengamos en llamar V_a y V_b a los valores $V(r = r_a)$ y $V(r = r_b)$, respectivamente. En primer lugar, como el gradiente de potencial tiene sentido opuesto al campo eléctrico, se orienta en el sentido \hat{e}_r desde la superficie de radio r_a hacia la de radio r_b , y en consecuencia el potencial V_b de la superficie exterior es mayor que el de la superficie interna, V_a . Por lo demás, dado que el campo es proporcional a r^{-2} , el potencial debe ser proporcional a r^{-1} .

Podemos calcular la diferencia de potencial entre la cáscara externa y cualquier punto interior al casquete empleando directamente la expresión (4.25), a partir de la cual obtenemos

$$\int_r^{r_b} dV = - \int_r^{r_b} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_b - V(r) = - \int_r^{r_b} \frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0 r} (-\hat{e}_r) \cdot \hat{e}_r dr \quad (4.34)$$

De esta manera, en todo punto de la región $r_a < r < r_b$, el potencial queda completamente determinado por la expresión

$$V(r) = V_b - \frac{\sigma r_a^2}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.35)$$

Debe notarse que para todo casquete de radio $r < r_b$ el factor entre paréntesis en la identidad (4.35) es positivo, de manera tal que el potencial en todo punto $r < r_b$ es menor que el potencial en la superficie de radio r_b , como ya habíamos anticipado. Obsérvese, sin embargo, que el potencial $V(r)$ no está por completo definido, pues depende de una

constante aditiva, a saber, V_b . Sin embargo, de la ecuación (4.35) vemos que la diferencia de potencial $V_b - V_a$ entre ambas superficies

$$V_b - V_a = \frac{\sigma r_a^2}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.36)$$

está completamente definida e, inmediatamente, lo está el trabajo que realizan las fuerzas eléctricas generadas por los dos casquetes sobre la carga q cuando se la transporta desde la superficie de radio r_a hasta la superficie de radio r_b , esto es, $W_{ab,el} = -q(V_b - V_a)$. Luego, el trabajo a realizar contra las fuerzas eléctricas será

$$W_{ab} = q(V_b - V_a) \quad (4.37)$$

Obsérvense algunos detalles de interés: en primer lugar, dado que $r_b > r_a$ es evidente de la identidad (4.32) que $V_b - V_a > 0$. Esto significa que el trabajo que debe realizarse es positivo si la carga que se transporta es positiva, porque recordemos que la diferencia de potencial es una medida del trabajo por unidad de carga.

En realidad es lógico que el trabajo resulte positivo, porque sobre una carga positiva la cáscara exterior ejerce una fuerza en sentido entrante, al igual que la que le hace la cáscara interna. Luego, la fuerza en contra de las fuerzas eléctricas debe realizarse en sentido saliente, paralela al desplazamiento.

Por otro lado, es de notar que en virtud de ser el campo electrostático proporcional al gradiente de potencial, $\vec{E} \propto \nabla V$, resulta que en las regiones 1 y 3, en las que el campo es nulo, el potencial debe ser constante, aunque no necesariamente cero. De hecho, por ser $V_b > V_a$ no pueden ser ambos nulos.

En todo caso, el potencial de la esfera externa puede calcularse como el trabajo necesario para traer una carga unitaria q desde el infinito hasta la posición $r = r_b$. Como no hay cargas en infinito relacionadas con esta distribución, podemos tomar $V(\infty) = 0$. Y como en la región 3 el trabajo es nulo porque el campo es nulo, resulta $V_b = 0$.

Podría parecer que en realidad V_b no era una constante arbitraria, porque al cabo su valor lo hemos calculado. Lo que en verdad hicimos fue cambiar una constante arbitraria por otra, fijando el valor del potencial en el infinito. Con $V_b = 0$, de la expresión (4.27) resulta el valor de V_a , que es el valor constante del potencial en la región 1, interna al casquete, porque allí el campo electrostático es nulo. En la figura 4.6 graficamos el potencial $V(r)$ en función de la posición.

Obsérvese que el potencial en la región 1 (interna a la esfera) es negativo, aunque como ya hemos mencionado reiteradas veces este hecho carece de significado físico. El hecho concreto es que el trabajo requerido para transportar cargas desde la cáscara interna a la externa queda definido por la diferencia de potencial y no por el potencial mismo.

Todavía más, podríamos preguntarnos por el trabajo necesario para llevar cargas desde la superficie de radio r_b a la superficie interna de radio r_a , aunque en este caso es innecesario repetir el cálculo porque como estamos tratando con fuerzas conservativas sabemos que

el trabajo en un camino cerrado es nulo; luego, el trabajo W_{ba} requerido para llevar una carga q desde $r = r_b$ hasta $r = r_a$ debe ser igual y contrario a W_{ab} , esto es, $W_{ba} = -W_{ab}$.

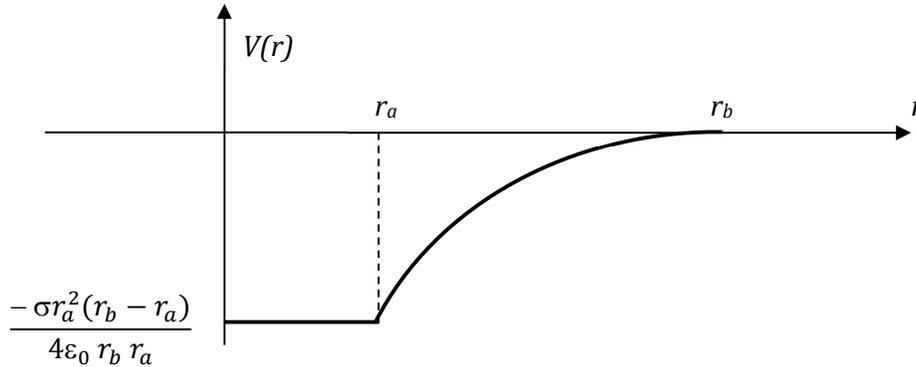


Fig. 4.6: potencial electrostático del casquete esférico en función de la distancia al centro, r . El valor del potencial V_a , constante para $r < r_a$, se obtiene a partir de la ecuación (4.36).

Pero cambiar el camino de integración no cambia la diferencia de potencial. De hecho, pudimos haber hecho los cálculos que nos condujeron a la expresión (4.36) integrando entre la superficie de radio $r = r_a$ y una superficie de radio $r > r_a$, de manera tal que las expresiones (4.34) y (4.35) resultarían respectivamente

$$\int_{r_a}^r dV = - \int_{r_a}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(r) - V_a = - \int_{r_a}^r \frac{\sigma r_a^2}{4\epsilon_0 r^2} (-\hat{e}_r) \cdot \hat{e}_r dr \quad (4.38)$$

$$V(r) = V_a + \frac{\sigma r_a^2}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r} \right) \quad (4.39)$$

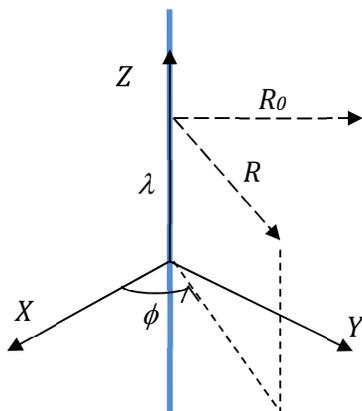
De nuevo, el potencial en todo casquete de radio $r > r_a$ es mayor que el potencial en la superficie de radio $r = r_a$, y a partir de la expresión (4.38) es inmediato que se recupera la forma (4.36).

Ejemplo 4.4: calculemos el potencial en todo punto del espacio generado por el alambre infinito del ejemplo 3.3.

El campo eléctrico de esta distribución resulta ser (véase la expresión (3.22))

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0} \hat{e}_R \quad (4.40)$$

Integremos la expresión (4.40) para obtener la expresión del potencial en todo punto R del espacio. Observemos ante todo que el campo eléctrico es saliente, de manera tal que el gradiente de potencial tiene sentido entrante ($-\hat{e}_R$); además, como la distribución tiene carga en el infinito ya no podemos fijar el potencial del infinito igual a cero, y la misma expresión del potencial debe reflejar esta propiedad. Elijamos calcular la diferencia de potencial entre una superficie a una distancia R del alambre (esto es, una superficie cilíndrica de radio R) y una superficie de referencia cualquiera de radio $R_0 > R$. Inmediatamente resulta



$$\int_{R_0}^R dV = - \int_{R_0}^R \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(R) - V(R_0) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \quad (4.41)$$

Fig. 4.7: el alambre infinito, cargado con densidad lineal λ , se halla sobre el eje Z. Obsérvese que la simetría cilíndrica del problema hace que el valor del ángulo ϕ sea irrelevante, pues ninguna rotación alrededor del eje Z provoca cambios ni en la configuración de cargas ni en la solución del problema. Hemos adoptado $R_0 > R$, pero el problema no cambiaría si adoptáramos la relación inversa.

Obsérvese que $\ln(R/R_0) < 0$ porque $R_0 > R$, de manera tal que la diferencia de potencial es positiva, como era de esperar en esta situación. Por lo demás, y tal como habíamos anticipado líneas arriba, R_0 no puede ser el infinito porque $\ln R_0$ diverge para $R_0 \rightarrow \infty$, y por el mismo motivo tampoco puede ser el origen. De esta manera el potencial $V(R)$ queda definido a menos de una constante, a saber, el potencial de referencia $V(R_0)$.

Sin embargo, si queremos calcular el trabajo para transportar una carga cualquiera entre dos puntos, la identidad (4.41) es suficiente porque la diferencia de potencial no depende de la constante aditiva. Por ejemplo, para $\lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ C/m}$ calculemos el trabajo para transportar a velocidad constante

una carga de valor $Q = -3 \times 10^{-3} \text{ C}$ entre $R_1 = 4\text{ m}$ y $R_2 = 1\text{ m}$.

Obsérvese que la fuerza eléctrica tiene sentido opuesto al campo eléctrico porque la carga a transportar es negativa. Luego, la fuerza que debe realizarse va en el sentido del campo eléctrico y su módulo vale $F = |Q|E$. Ahora bien, dado que deseamos transportar la carga en sentido entrante y la fuerza que ejercemos es en sentido saliente, resulta que el trabajo habrá de ser negativo. En efecto,

$$W_F = |Q| \int_{R_1}^{R_2} E(R) \hat{e}_R \cdot \hat{e}_R dR = |Q| \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_4^1 \frac{dR}{R} = -1495,83J \quad (4.42)$$

Desde el punto de vista del potencial, el trabajo de la fuerza vale

$$W_F = Q[V(R_2) - V(R_1)] \quad (4.43)$$

A partir de la identidad (4.33) calculamos la diferencia de potencial como

$$\begin{aligned} V(R_2) - V(R_1) &= \left[V(R_0) - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right) \right] - \left[V(R_0) - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 4,986 \times 10^7 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.44)$$

y reemplazando en la expresión (4.43) obtenemos el resultado (4.42).

Ejemplo 4.5: Extendamos el cálculo del potencial al casquete cilíndrico infinito del ejemplo 3.4, cargado con una densidad volumétrica de carga positiva creciente con el radio. Esta particular distribución de cargas (por completo arbitraria) genera en todo punto del espacio un campo eléctrico que, de acuerdo a las expresiones (3.26) y (3.27) y la discusión que las precede, puede sintetizarse como

$$\vec{E}(R) = \begin{cases} 0 & 0 < R < R_a \\ \rho_0 \frac{(R^3 - R_a^3)}{3\varepsilon_0 R} \hat{e}_R & R_a < R < R_b \\ \rho_0 \frac{(R_b^3 - R_a^3)}{3\varepsilon_0 R} \hat{e}_R & R > R_b \end{cases} \quad (4.45)$$

Como el campo eléctrico es nulo en $R < R_a$, en esa región el potencial es constante y por continuidad es el potencial $V(R = R_a) \equiv V_a$ de la superficie de radio $R = R_a$, esto es,

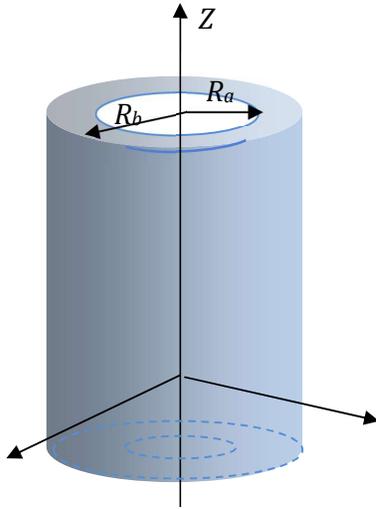


Fig. 4.8: sección de casquete cilíndrico infinito cargado con densidad variable de carga en volumen.

$$V(R) = V_a = \text{constante} \quad \text{si } R < R_a \quad (4.46)$$

En la región $R_a < R < R_b$ el campo eléctrico es no nulo y saliente, de manera que el gradiente de potencial es entrante, esto es, el potencial de la superficie de radio $R = R_b$ debe ser menor que el potencial de la superficie de radio $R = R_a$. Por cálculo directo a partir de la ecuación (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_R^{R_a} dV &= V_a - V(R) = \int_R^{R_a} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_a^3 - R^3}{3} - R_a^3 \ln\left(\frac{R_a}{R}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

de manera tal que el potencial en todo punto de la región, luego de un par de sencillas operaciones algebraicas, se expresa como

$$V(R) = V_a - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3 - R_a^3}{3} - R_a^3 \ln\left(\frac{R}{R_a}\right) \right) \quad \text{si } R_a < R < R_b \quad (4.48)$$

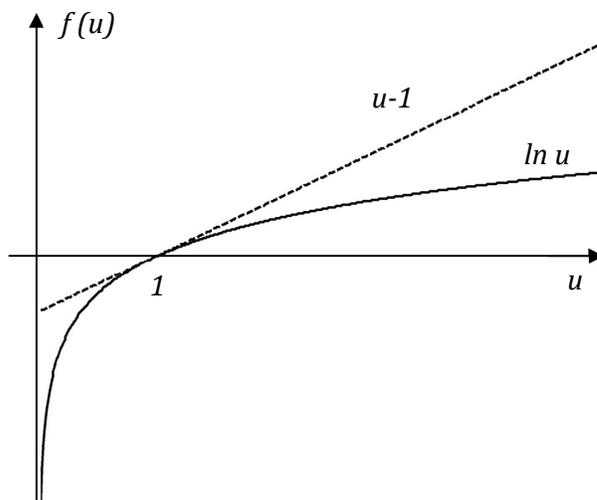


Fig. 4.9: las funciones $u-1$ y $\ln u$ se cruzan en $u=1$, donde ambas se anulan. En todo otro punto es $u-1 > \ln u$.

Es necesario remarcar que el término entre paréntesis en la expresión (4.48) es definido positivo. En efecto, si definimos la función $u = (R/R_a)^3$, nuestra afirmación es equivalente a decir que

$$\begin{aligned} \frac{R_a^3}{3} \left[\frac{R^3}{R_a^3} - 1 \right] &> R_a^3 \ln\left(\frac{R}{R_a}\right) \equiv \\ &\equiv u - 1 > \ln u \end{aligned} \quad (4.49)$$

En la última expresión hemos usado la conocida propiedad de los logaritmos $\ln(R/R_a)^3 = 3 \ln(R/R_a)$. Obsérvese la figura 4.9, en la que se ve claramente que la recta $u - 1$ se corta con la curva $\ln u$ en $u = 1$, donde

ambas son nulas, y como la recta crece más rápidamente que la función logarítmica, a partir de ese punto y en toda la región de interés $u > 1$ (o lo que es igual, $R > R_a$) se cumple nuestra afirmación de que el término entre paréntesis en la expresión (4.48) es definido positivo.

Por último, en la región $R > R_b$ donde el campo eléctrico decrece como $1/R$ resulta

$$V(R) - V_b = - \int_{R_b}^R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R_b^3 - R_a^3}{R} dR = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (R_b^3 - R_a^3) \ln\left(\frac{R}{R_b}\right) \quad (4.50)$$

de manera tal que para todo punto a una distancia $R > R_b$ del eje del cilindro vale

$$V(R) = V_b - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (R_b^3 - R_a^3) \ln\left(\frac{R}{R_b}\right) \quad \text{si } R > R_b \quad (4.51)$$

El valor de V_b resulta de la identidad (4.48)

$$V_b = V_a - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_b^3 - R_a^3}{3} - R_a^3 \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \right) \quad (4.52)$$

y los potenciales quedan todos expresados en términos del potencial de referencia V_a , que de acuerdo a la expresión (4.46) es el potencial de toda la región $R < R_a$ en particular el de los puntos del eje de simetría. Como en el eje $R = 0$ no hay cargas, tomemos

$$V(0) = V(R_a) = 0 \quad (4.53)$$

y los potenciales quedan completamente definidos en cada una de las regiones de interés.

4.4 – Energía potencial electrostática

En los ejemplos anteriores hemos igualado el trabajo requerido para mover una carga en un campo eléctrico al opuesto del realizado por la fuerza eléctrica. Si asumimos que las únicas dos fuerzas presentes son la eléctrica y la que desplaza la carga, suponer que las dos fuerzas son iguales y contrarias implica asumir que la energía cinética de la

carga no varía. Pero al desplazar una carga armamos una nueva configuración, de manera tal que, en general, el trabajo realizado debería quedar en alguna forma de energía.

Ahora bien, lo que se modifica con la redistribución de cargas es el campo eléctrico generado por el sistema de cargas, de manera tal que podemos pensar que el trabajo realizado durante el transporte de cargas queda almacenado como energía potencial del campo. De esta manera, para conocer la energía contenida en el campo electrostático de una distribución de cargas es necesario saber cuánto trabajo se realizó para armar la configuración que lo genera.

Para simplificar la discusión, pensemos primero en armar una configuración de sólo dos cargas. Para traer la primera carga, digamos q_1 , desde el infinito hasta su posición final no se requiere ningún trabajo porque el campo eléctrico es nulo en la región por la que se desplaza esta carga. Cuando traemos la carga q_2 ya debemos hacerlo en presencia del campo eléctrico \vec{E}_{12} generado por la carga q_1 en la posición de la carga q_2 . Pensado de otra forma, nuestro sistema ahora está formado por dos cargas, y debe entregarse trabajo al sistema para desplazar la segunda carga hasta su posición final a velocidad constante, manteniendo fija a la primera (obsérvese que la fuerza que mantiene en su posición a q_1 realiza trabajo nulo porque no hay desplazamiento alguno).

Llamemos V_{12} al potencial que la carga q_1 genera en la posición de la carga q_2 , de manera tal que sea $\vec{E}_{12} = -\nabla V_{12}$, y llamemos U_{12} a la energía asociada al trabajo neto para trasladar la segunda carga en presencia de la primera. Resulta

$$U_{12} = W_{12} = q_2 \int \vec{E}_{12} \cdot d\vec{r} = q_2 V_{12} \quad (4.54)$$

Por supuesto que podemos armar la configuración trayendo primero la carga q_2 y luego la carga q_1 . Físicamente el problema es el mismo, de manera tal que lo único que debemos hacer en la expresión anterior para calcular el trabajo requerido es intercambiar los subíndices, esto es

$$U_{21} = W_{21} = q_1 \int \vec{E}_{21} \cdot d\vec{r} = q_1 V_{21} \quad (4.55)$$

Realizar trabajo para transportar una carga eléctrica en presencia de un campo eléctrico es análogo a desplazar un bloque en contra de la fuerza de rozamiento. Que la variación de energía cinética sea nula no dice que lo sea el trabajo invertido, aun cuando no necesariamente ese trabajo haya sido útil para cambiar la energía completa del cuerpo transportado. Por ejemplo, en el caso de mover un bloque, ningún cambio de energía ocurrirá si, partiendo del reposo, el bloque se desplaza por una superficie horizontal y al final se detiene.

Obsérvese que los dos procesos requieren del mismo trabajo, de manera tal que necesariamente es $U_{12} = U_{21}$ y la energía final de la configuración puede escribirse como

$$U = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) \quad (4.56)$$

Extendamos ahora la formulación al problema de armar una configuración de $N > 2$ cargas. En principio, lo único novedoso es que al trasladar la k -ésima carga hay $k-1$ cargas presentes, y que en el cálculo de la energía final de la configuración debemos sumar sobre todos los pares de cargas posibles, esto es, debemos considerar todas las energías de la forma U_{jm} con $m \neq j$ (porque no contamos el potencial que la misma carga genera en su posición). De esta manera, resulta

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^N q_m V_{mj} = \frac{k}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_m q_j}{|\vec{r}_m - \vec{r}_j|} \quad m \neq j \quad (4.57)$$

Extendamos la expresión (4.57) al caso de una distribución continua de cargas. En el caso más general, supongamos que se trata de una distribución en un volumen \mathcal{V} , de manera tal que la energía habrá de estar asociada a la densidad de cargas y al potencial debido a esas cargas, esto es,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(R) V(R) d\mathcal{V} \quad (4.58)$$

Obsérvese que la integral se realiza sobre todo el volumen \mathcal{V} dentro del cual están distribuidas las cargas, y que hemos anotado explícitamente la dependencia con la posición tanto de la densidad de carga como del potencial de esa distribución.

Podemos escribir la expresión (4.58) en términos del campo eléctrico, sin necesidad de una demostración rigurosa. Previamente notemos que como la densidad de carga es nula fuera del volumen de integración, no hay dificultad en extender la integral a todo el espacio, de manera tal que de aquí en adelante podemos obviar el subíndice \mathcal{V} en la integral. Por otro lado, del teorema de Gauss (ecuación (3.6)) resulta

$$\iiint_{\mathcal{V}(S)} \rho(R) d\mathcal{V} = \epsilon_0 \oiint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} \quad (4.59)$$

El miembro izquierdo de (4.59) es no nulo sólo dentro del volumen donde se distribuyen las cargas, pero el miembro derecho es válido – y no necesariamente nulo – en cualquier punto del espacio. Por lo demás podemos usar la relación

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} \quad (4.60)$$

para reformular la ecuación (4.58). En principio reescribamos esa expresión en la forma

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\iiint \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} \right] \left[V(\infty) - \int_{\infty}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} \right] \quad (4.61)$$

Notemos ahora que la ecuación (4.59) está integrada “hacia afuera”, es decir, desde la configuración hacia el infinito. Si la distribución de cargas está limitada en el espacio podemos tomar sin más el potencial de infinito como nulo, de manera tal que resulta evidente que la integración de la forma (4.60) es “hacia adentro”, es decir, desde el infinito hacia la configuración. En consecuencia, el producto escalar $d\vec{S} \cdot d\vec{r}$ (cuyo módulo es $d\mathcal{V}$) es negativo y se cancela el signo negativo de la expresión (4.61). Luego, usando la igualdad $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$ (véase el apéndice de identidades vectoriales) resulta

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\vec{E}|^2 d\mathcal{V} \quad (4.62)$$

La interpretación de la ecuación (4.62) es interesante: ya habíamos adelantado al comienzo de esta sección que la energía del campo electrostático resulta del trabajo requerido para armar la configuración de cargas. Pero si bien las cargas están localizadas (eventualmente en un volumen finito) la energía se calcula integrando sobre todo el espacio, que es una manera de decir que la energía se halla “desparramada” por toda una región de volumen arbitrariamente grande y que en consecuencia puede ser intercambiada en cualquier región del espacio.

Ejemplo 4.6: Con el objeto de resaltar el significado de la expresión (4.62) calculemos el potencial y la energía potencial electrostática de la configuración de cargas del ejemplo 4.2 (véase la figura 4.4). Comparémosla después con la energía potencial (gravitatoria) almacenada en la configuración que resulta de transportar desde el infinito tres masas puntuales $m_1, m_2,$ y m_3 .

Calculemos primero el trabajo requerido para armar la configuración final de cargas. Como el orden en que se transportan las cargas es irrelevante, transportemos en primer lugar a la carga $q_1 = -Q$ hasta el origen de un sistema de coordenadas arbitrario. Esta carga se traslada sin necesidad de realizar trabajo porque no existe fuerza alguna que la acelere. Para llevar la carga $q_3 = 2Q$ hasta su posición se requiere de un trabajo que, de acuerdo a la ecuación (4.22), podemos evaluar como

$$W_{q_3} = q_3(V_{31} - V_\infty) = \frac{2Q k(-Q)}{|\vec{r}_{q_3} - \vec{r}_{q_1}|} = -\frac{2kQ^2}{|\vec{r}_{q_3}|} \quad (4.63)$$

donde V_{31} es el potencial generado por la carga q_1 en la posición (final) de la carga q_3 , y hemos definido nulo el potencial electrostático en el infinito. Posiblemente valga la pena recalcar que el de la ecuación (4.63) es el trabajo que realizamos nosotros (*en contra* de la fuerza eléctrica) por eso tiene signo positivo.

Para llevar desde el infinito hasta su posición final a la carga $q_2 = Q$ debemos realizar un trabajo

$$W_{q_2} = q_2(V_{21} - V_\infty) + q_2(V_{23} - V_\infty) = k \left[\frac{-Q^2}{|\vec{r}_{q_2}|} + \frac{2Q^2}{|\vec{r}_{q_2} - \vec{r}_{q_3}|} \right] \quad (4.64)$$

El trabajo total W_A que se ha invertido para armar la configuración con la carga q_2 en A resulta entonces

$$W_A = W_{q_2} + W_{q_3} = k \left[-\frac{2Q^2}{|\vec{r}_{q_3}|} - \frac{Q^2}{|\vec{r}_{q_2}|} + \frac{2Q^2}{|\vec{r}_{q_2} - \vec{r}_{q_3}|} \right] \quad (4.65)$$

Obsérvense dos detalles de interés: en primer lugar, como podemos intercambiar arbitrariamente el orden en que se traen las cargas, resulta que el valor (4.65) puede también escribirse como

$$W = \frac{k}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{q_m q_j}{|\vec{r}_m - \vec{r}_j|} \quad m \neq j \quad (4.66)$$

que no es otra cosa que la expresión (4.57) para la energía potencial electrostática de la configuración. En segundo lugar, para los valores del ejemplo 4.2 el trabajo neto W_A resulta nulo, de manera tal que se realiza tanto trabajo positivo como negativo o, dicho de otra forma, el sistema entrega tanto trabajo como el que recibe. De esta forma, resulta que la energía potencial electrostática de la configuración final es nula. De nuevo, que la energía potencial de una configuración resulte nula no significa que en ningún momento se realizó trabajo (análogamente, si usted arrastra una mesa, desde el reposo y hasta detenerla, por un camino horizontal sin rozamiento, el trabajo total que realiza es nulo – porque las velocidades inicial y final son iguales, a saber, cero – pero no significa que no realizó trabajo en ninguna parte del recorrido).

Si en lugar de armar la configuración con la carga q_3 en la posición A de la figura 4.4 lo hacemos con la carga en la posición B de la misma figura, a partir de la igualdad (4.61) podemos evaluar la energía potencial electrostática como

$$U_B = W_B = -\frac{k Q^2}{8} \quad (4.67)$$

y parece evidente que el trabajo requerido para llevar la carga q_3 desde A hasta B resulta igual a la variación de energía potencial electrostática (véase el resultado (4.30)), de la misma manera que el trabajo requerido para reconfigurar una distribución de masas es igual a la variación de la energía potencial gravitatoria (esto es, el trabajo de la fuerza peso).

La analogía entre la fuerza electrostática y la gravitatoria no puede ser completa porque, a diferencia de la primera, la gravitatoria es siempre atractiva.

Ya hemos adelantado que el problema es análogo a armar una configuración de masas. La analogía, sin embargo, no es completa porque a diferencia de la fuerza eléctrica la gravitatoria *siempre* es atractiva. Recordemos brevemente que el *campo gravitatorio* queda definido por lo que denominamos comúnmente *aceleración gravitatoria*, esto es,

\vec{g} , y que la fuerza gravitatoria (el *peso*) se define como el producto

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (4.68)$$

donde m es la medida de la carga másica o simplemente masa del cuerpo. A su vez, el campo gravitatorio generado en la posición \vec{r} por un cuerpo de masa M en la posición \vec{r}' se calcula como

$$\vec{g} = \frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.69)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Si definimos el potencial gravitatorio que la masa M (ubicada en el punto \vec{r}') genera en el punto \vec{r} como

$$V_G = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.70)$$

el campo \vec{g} puede escribirse como

$$\vec{g} = -\nabla V_G \quad (4.71)$$

De esta manera, el trabajo para transportar una masa m desde un punto r_A hasta un punto r_B por el campo gravitatorio generado por una masa M se escribe como

$$W_{AB} = -m(V_{G,B} - V_{G,A}) \quad (4.72)$$

donde $V_{G,A}$ y $V_{G,B}$ se refieren a los potenciales gravitatorios en los puntos r_A y r_B respectivamente. Obsérvese que el trabajo que se realiza en contra de las fuerzas gravitatorias precisamente está relacionado con el hecho de que la fuerza gravitatoria es atractiva. De esta manera, el trabajo W_{AB} de (4.72) es positivo si $V_{G,A} > V_{G,B}$ (porque estamos arrastrando la masa hacia regiones de menor potencial) y es negativo en el caso contrario (porque debemos ir frenando al cuerpo).

Con estas consideraciones en mente, queda claro que si en lugar de transportar las tres cargas del ejemplo 4.2 transportamos tres cuerpos masivos, llevar la primera masa, digamos m_1 , hasta su posición final no requiere trabajo alguno porque el campo gravitatorio es nulo en la región del espacio en la que se desplaza (desde ya que estamos asumiendo que los cuerpos de nuestro problema son los únicos en la región). Para traer la masa m_2 (a velocidad constante) debe realizarse un trabajo

$$W_2 = -m_2(V_{G,21} - V_{G\infty}) = -m_2 V_{G,21} = -\frac{G m_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (4.73)$$

donde $V_{G,21}$ es el potencial gravitatorio de la masa m_1 en la posición de la masa m_2 y a partir de la ecuación (4.73) hemos tomado $V_{G\infty} = 0$. Finalmente, el trabajo requerido para transportar desde el infinito hasta su posición final a la masa m_3 vale

$$W_3 = -m_3(V_{G,31} - V_{G\infty}) - m_3(V_{G,32} - V_{G\infty}) = -m_3 (V_{G,31} + V_{G,32}) \quad (4.74)$$

y el trabajo total para armar la configuración de masas resulta

$$W = -m_2 V_{G,21} - m_3 (V_{G,31} + V_{G,32}) \quad (4.75)$$

que puede escribirse en la forma

$$U_P = W = -\frac{G}{2} \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{m_p m_j}{|\vec{r}_p - \vec{r}_j|} \quad p \neq j \quad (4.76)$$

Parece evidente que todo el trabajo invertido en armar la configuración queda como energía potencial gravitatoria de la misma. Como en el caso electrostático, el valor de esta energía es independiente no sólo del orden en que se transportan las masas sino también del origen del sistema de coordenadas que se elija. Y más aún, el trabajo necesario para reconfigurar la distribución se escribe como la diferencia de potencial (gravitatorio) entre las dos configuraciones.

4.5 – Campo, potencial electrostático y superficies equipotenciales

Se denomina superficie de nivel de una función $f(x_1, x_2, x_3)$ a las superficies cuya ecuación es de la forma $f = \text{constante}$. Las coordenadas x_1, x_2, x_3 son generales; por ejemplo, en el caso de coordenadas cartesianas se trata de las coordenadas (x, y, z) , y será la terna (R, ϕ, z) si trabajamos en coordenadas cilíndricas.

En general se dice también que la función $f(x_1, x_2, x_3)$ es una función potencial, y queda entonces definido el gradiente de esta función, $\nabla f(x_1, x_2, x_3)$. En tal caso, las superficies en las cuales la función toma valores constantes se denominan superficies equipotenciales.

En el caso que nos interesa, consideremos una superficie sobre la cual el potencial electrostático es constante, esto es, $V(x_1, x_2, x_3) = \text{cte}$. Para cualquier desplazamiento sobre esta superficie debe cumplirse

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (4.77)$$

porque el potencial electrostático es constante, es decir, si \hat{e}_T representa un vector tangente a la superficie equipotencial, debe cumplirse

$$\nabla V \cdot \hat{e}_T = 0 \quad (4.78)$$

Esto significa que el gradiente de potencial es perpendicular a todo desplazamiento sobre la superficie equipotencial, de modo tal que el vector gradiente de potencial en todo punto es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por ese punto. Y como el gradiente de potencial y el vector campo eléctrico son antiparalelos (igual dirección pero sentido opuesto) resulta que las superficies de igual potencial eléctrico son perpendiculares al campo eléctrico.

Por ejemplo, como mostramos en la figura 4.10, el campo eléctrico del alambre infinito del ejemplo 4.3 es radial, de manera tal que las superficies equipotenciales son cilindros coaxiales cuyo eje común es el alambre. En el caso de una distribución esférica uniforme, las superficies equipotenciales son esferas concéntricas centradas en el centro de la distribución.

Ahora bien, de acuerdo a lo discutido hasta aquí resulta evidente que el campo electrostático dentro de un conductor debe ser nulo, pues en caso contrario habría fuerzas moviendo cargas, en contra de la hipótesis electrostática. Luego, en el interior de un conductor el potencial debe ser constante (aunque no necesariamente nulo).

Pero si este es el caso, resulta que en la superficie de un conductor el potencial también debe ser constante, pues en caso contrario las cargas estarían en movimiento a lo largo de la superficie. Y todavía más, dado que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ sobre cualquier curva cerrada (véase la expresión (4.24)), en particular a lo largo de cualquiera de las la curvas que delimitan un conductor, resulta que la componente tangencial del campo electrostático, E_{TANG} , es nula sobre la superficie de un conductor, porque $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_{TANG} d\ell$.

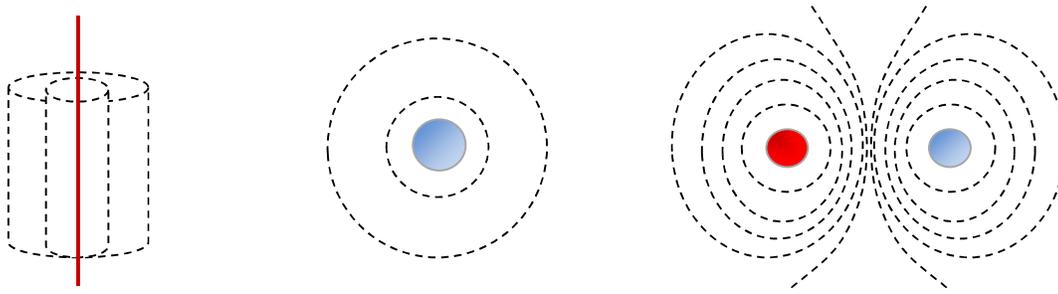


Fig. 4.10: superficies equipotenciales de un alambre (izquierda), una esfera (centro) y un par de cargas de signo opuesto (a la derecha). Todos los objetos están cargados uniformemente. Obsérvese que el signo de la carga eléctrica de cada uno de los cuerpos es irrelevante.

Podemos decirlo de otra manera: como para mover cargas es necesaria una diferencia de potencial, la superficie de los conductores son superficies equipotenciales. Y dado que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie del conductor, encontramos nuevamente que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales. En conclusión, resulta que

Las líneas de campo electrostático son siempre perpendiculares a la superficie de los conductores y, en general, perpendiculares a las superficies de igual potencial (superficies equipotenciales).

A modo de ejemplo pensemos en la esfera conductora A de la figura 4.11, cargada con carga positiva y rodeada por una cáscara esférica B inicialmente descargada. Como el campo en el interior de B es nulo, cualquier esfera gaussiana en la región interna de B debe encerrar carga neta nula, de manera tal que la solución es que cada carga de signo positivo de A induzca una carga de signo negativo en la superficie interior de B.

Pero como por cada carga negativa en la parte interior se induce una carga positiva en la superficie exterior del casquete, el campo eléctrico se ve “naciendo” en la superficie exterior de B. Piénsese de esta manera: como el casquete esférico está descargado, la carga neta encerrada por una esfera gaussiana externa debe contener toda la carga de A, y nada más que esa carga porque las otras son inducidas de a pares opuestos.

En la región vacía entre los conductores el campo no es nulo, porque hay carga en el conductor A, pero de nuevo, esa carga debe ser superficial. Las líneas de campo que nacen en la superficie del conductor A finalizan en la superficie interna del conductor B, para “reaparecer” en la superficie externa. Dicho sea de paso, de la figura 4.10 se desprende que una superficie uniforme genera un campo eléctrico uniforme. Y las superficies de potencial constante en cada región son esferas centradas en el origen del sistema de esferas cargadas.

Pero si la superficie no fuera uniforme y existieran regiones con mayor curvatura que otras resultaría que el vínculo de potencial constante haría que se acumule más carga en las regiones de menor curvatura y, en consecuencia, el campo eléctrico en esas regiones sería más intenso que en las de mayor radio de curvatura (efecto de punta).

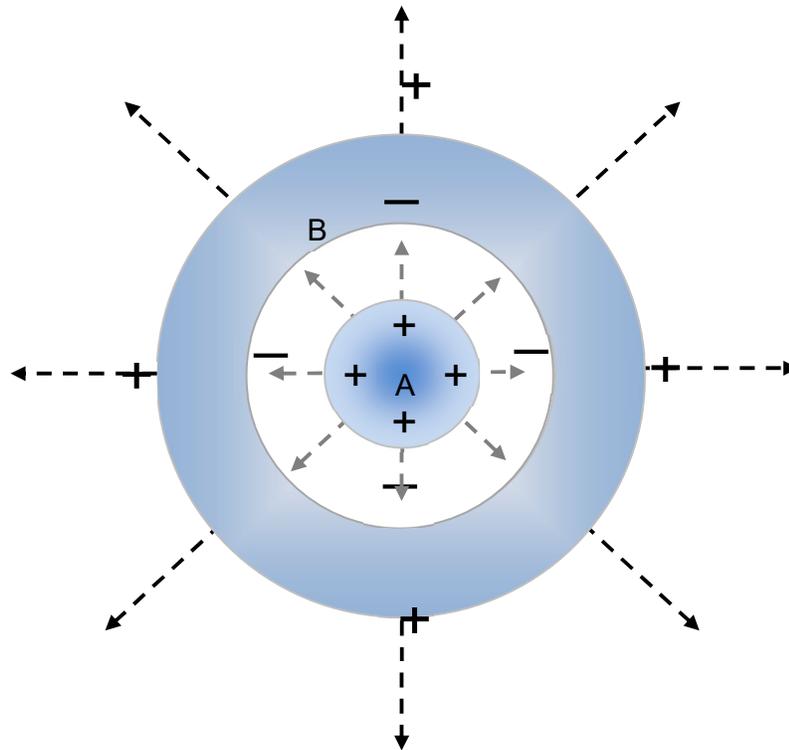


Fig. 4.11: sobre la superficie interna del casquete hueco conductor B se inducen cargas de signo opuesto a las de la esfera conductora interior. Estas cargas inducidas (en este caso negativas) a su vez inducen carga de signo opuesto en la superficie exterior, y en total, en el interior del casquete B, el campo eléctrico es nulo. Por cada carga neta en la esfera A se induce una carga igual en el casquete B, y desde afuera todo se ve como si el campo naciera en la superficie externa de B (se muestran unas pocas líneas de campo).

Si ahora colocamos la superficie exterior a un potencial de referencia nulo (como el potencial del infinito en ausencia de cargas) resulta que el trabajo para traer una carga desde el infinito hasta la esfera es nulo, porque en estas condiciones es $\Delta V = 0$. Todo ocurre como si conectáramos un conductor entre la esfera y el infinito, y llevásemos la carga por dentro del conductor, donde el campo es nulo. Para indicar que el conductor está a potencial cero usaremos el símbolo que se muestra en la figura 4.12 (habitualmente se dice que el conductor se conectó a tierra).

Pero como el potencial en toda la región externa al conductor es constante, resulta que el campo exterior es nulo. No importa la real distribución de cargas en el interior de la esfera, ni el valor de su campo eléctrico, afuera el campo es nulo (este efecto se conoce como *apantallamiento*).

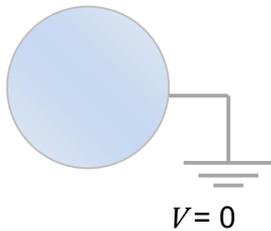
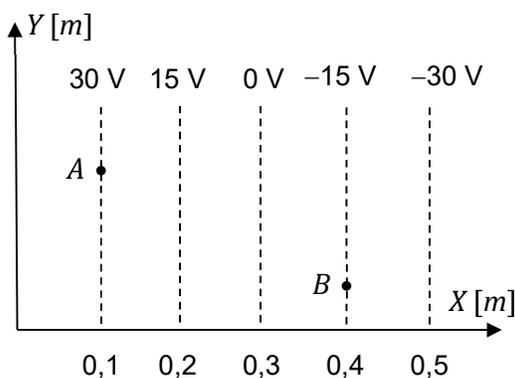


Fig. 4.12: un conductor “puesto a tierra” ($V=0$).

Cualquiera sea el origen de las cargas que puedan existir sobre el conductor, estas habrán de reacomodarse a las condiciones de contorno impuestas exteriormente. Desde ya que si el potencial de referencia sobre la superficie externa no fuera nulo sino de valor $V \neq 0$, el problema sería conceptualmente similar.

En el siguiente ejemplo discutiremos con alguna profundidad estos conceptos.

Ejemplo 4.7: La figura muestra las líneas equipotenciales que resultan de una dada configuración de cargas. A partir de esta información, calculemos el vector campo eléctrico que corresponde a esa configuración y el trabajo que realiza el campo para mover un electrón desde el punto A al punto B.



Notemos ante todo que las líneas de potencial están equiespaciadas, lo que indica que el campo eléctrico en la región debe ser uniforme porque sin importar la región que tomemos, cada 10cm el potencial varía 15V . Como el campo es uniforme, calculamos su valor como

$$|E| = \frac{\Delta V}{\Delta x} = 150 \frac{V}{m} \quad (4.79)$$

Fig. 4.13: superficies equipotenciales del ejemplo 4.7. Obsérvese que, además, las superficies están equiespaciadas.

Dicho sea de paso, hemos encontrado otra unidad para el campo eléctrico (de hecho, la más comúnmente utilizada) y es fácil ver que

es equivalente a la que veníamos utilizando, ya que

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{Nm}{Cm} = \frac{J}{Cm} = \frac{V}{m}$$

Por lo demás, el potencial crece hacia la izquierda, es decir, en la dirección $-\hat{e}_x$ (esto es lo mismo que decir que el gradiente de potencial va en la dirección $-\hat{e}_x$) de manera tal que el campo eléctrico irá en sentido opuesto, esto es, en la dirección \hat{e}_x . En total

$$\vec{E} = 150 \frac{V}{m} \hat{e}_x \quad (4.80)$$

Si ahora deseamos calcular el trabajo que el campo efectúa para trasladar un electrón entre A y B , podemos apelar a la expresión (4.22) notando que este trabajo es independiente del camino recorrido para ir de A hasta B . Luego, resulta

$$W_{AB,el} = -q [V_B - V_A] = -(-1,6 \times 10^{-19}C) \times (-15V - 30V) = -7,2 \times 10^{-1} J \quad (4.81)$$

Un par de comentarios se hacen necesarios: en primer lugar, notemos que está bien que el trabajo del campo sea negativo: el campo eléctrico apunta en sentido de las X positivas crecientes, de manera tal que la fuerza eléctrica sobre una carga negativa (el electrón) lo hará en sentido opuesto, es decir, en sentido de las X negativas, hacia la izquierda del sistema de referencia de la figura 4.13. El desplazamiento (desde A hasta B) se realiza en dirección opuesta a la fuerza, de modo tal que el trabajo de la fuerza eléctrica es negativo. En consecuencia, el trabajo que realiza el ente que lleva al electrón desde A hasta B , *en contra de la fuerza eléctrica*, es positivo.

Por otro lado, es preciso recalcar que no hubo necesidad de fijar una trayectoria específica para calcular el trabajo porque la fuerza electrostática es conservativa y, en consecuencia, su trabajo es independiente del camino de integración. Esta cualidad se refleja en el hecho de que para calcular el trabajo realizado (por unidad de carga) alcanza con evaluar el potencial electrostático en los puntos inicial y final, y restarlos.

Ejemplo 4.8: Sea el sistema de la figura 4.14, similar al de la figura 4.11, pero ahora con el conductor exterior conectado a un potencial de referencia V_1 . El símbolo del elemento que suministra la diferencia de potencial (usualmente se lo denomina *pila* o *batería*) se muestra en la figura 4.14. El segmento más largo representa la parte de la pila que se encuentra a mayor potencial, y habitualmente se lo llama borne positivo (al otro borne se lo identifica como negativo). Claramente, la diferencia de potencial entre los bornes de la pila es V_1 volt. En este caso el borne negativo está conectado a tierra, de manera tal que el potencial V_1 se mide respecto de tierra, es decir, la diferencia de potencial entre tierra y la superficie de radio r_c es de V_1 volt (que es lo mismo que decir que el trabajo para llevar una carga unidad entre la superficie de radio r_c y tierra tiene módulo V_1).

Supongamos que el conductor de radio r_a tiene una carga neta Q_a . Calculemos la carga sobre el conductor exterior, el campo eléctrico y el potencial de la configuración en todo punto del espacio.

Comencemos por notar que el problema tiene simetría esférica, de manera tal que el campo eléctrico es de la forma $E_r \hat{e}_r$. Dentro de los conductores el campo eléctrico es nulo, de manera tal que el teorema de Gauss nos asegura que toda superficie esférica de radio

$r_b < r < r_c$ centrada en el origen debe encerrar carga eléctrica total nula; esto es, en la superficie de radio r_b se induce entonces una carga $-Q_a$.

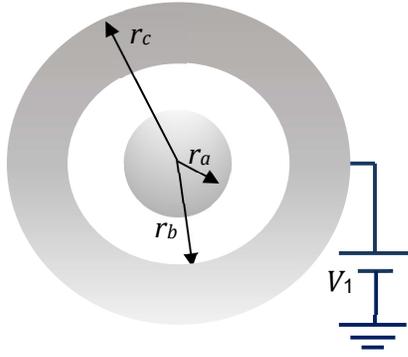


Fig. 4.14: el casquete esférico exterior se halla a potencial V_1 respecto de tierra (el símbolo indica que el potencial de la superficie de radio r_c es V_1 volt mayor que el de tierra).

Por otro lado, la cantidad de carga que encierra toda esfera gaussiana centrada en el origen y de radio $r > r_c$ habrá de tener dos componentes: una debida a la carga Q_a que se induce en la superficie externa del casquete mayor, y otra debido a la carga suministrada por la batería, llamémosla Q_B , de forma tal de que el potencial en la superficie de radio $r = r_c$ sea V_1 . Si llamamos Q_{EXT} a la suma de estas dos contribuciones, la simetría del problema impone que en la región $r > r_c$ sea

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ_{EXT}}{r^2} \hat{e}_r \quad (4.82)$$

Podemos ahora calcular el trabajo que realiza la fuerza eléctrica sobre una carga unidad para llevarla desde la superficie de radio r_c al infinito (esto es, la diferencia de potencial entre la superficie de radio r_c y el infinito, que también representa el trabajo para traer la carga desde el infinito hasta r_c en contra de la fuerza eléctrica, esto es, el potencial V_1)

$$\int_{r_c}^{\infty} dV = - \int_{r_c}^{\infty} \frac{kQ_{EXT}}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dr \Rightarrow V(\infty) - V_1 = \left[\frac{kQ_{EXT}}{r} \right]_{r_c}^{\infty} = - \frac{kQ_{EXT}}{r_c} \quad (4.83)$$

Si definimos $V(\infty) = 0$ (y en este caso podemos hacerlo porque esta distribución no tiene cargas en el infinito) resulta $V_1 = kQ_{EXT} / r_c$, y luego

$$Q_{EXT} = 4\pi\epsilon_0 r_c V_1 \quad (4.84)$$

Calculemos ahora el campo eléctrico en la región interna al radio r_c . Como ya dijimos, en el interior de la cáscara esférica conductora es nulo, como lo es dentro del conductor de radio r_a . En la región intermedia $r_a < r < r_b$ una superficie gaussiana esférica de radio r centrada en el origen encierra una cantidad Q_a de carga, de manera tal que la simetría del campo nos conduce de inmediato a

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ_a}{r^2} \hat{e}_r \quad (4.85)$$

y de manera análoga a como hicimos en el ejemplo 4.3 para llegar a la ecuación (4.32), podemos evaluar la diferencia de potencial entre las superficies de radios r_a y r_b como

$$V_a - V_b = \left. \frac{k Q_a}{r} \right]_{r_b}^{r_a} \Rightarrow V_a = V_b - k Q_a \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.86)$$

Pero como el campo dentro de los conductores es nulo, el potencial debe ser constante. Luego, toda la cáscara está a potencial V_1 , de manera tal que $V_b = V_1$, y todo el conductor de radio r_a está al potencial constante de la identidad (4.86). En síntesis, resulta

$$r < r_a \quad E(r) = 0 \quad V(r) = V_1 - k Q_a \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.87)$$

$$r_a < r < r_b \quad \vec{E}(r) = \frac{k Q_a}{r^2} \hat{e}_r \quad V(r) = V_1 - k Q_a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.88)$$

$$r_b < r < r_c \quad E(r) = 0 \quad V(r) = V_1 \quad (4.89)$$

$$r > r_c \quad \vec{E}(r) = \frac{k Q_{EXT}}{r^2} \hat{e}_r \quad V(r) = \frac{k Q_{EXT}}{r} \quad (4.90)$$

Ejemplo 4.8: La placa de la figura 4.15, que a los efectos prácticos puede considerarse infinita, está cargada con densidad uniforme de carga $+\sigma$. Calculemos el potencial que genera esta placa en todo punto, y en particular la diferencia de potencial entre los puntos A y B .

Si la placa es idealmente infinita nos enfrentamos a una dificultad análoga a la que encontramos en el ejemplo 4.3: como la distribución tiene carga en el infinito no podemos fijar el potencial del infinito igual a cero, de manera tal que habrá que hacerlo respecto de cualquier otro punto (arbitrario) con la única condición de que esté fuera de la placa. Por lo pronto, podría ser cualquiera de los puntos A o B de la figura 4.15, pero para mostrar el problema general tomaremos potencial cero en otro punto C , a distancia de la placa diferente de la que media entre la placa y los otros dos puntos.

Por otro lado, parece evidente que al ser infinita, la placa genera potencial de igual valor a igual distancia, es decir, todos los puntos que se hallen a igual distancia de la placa están

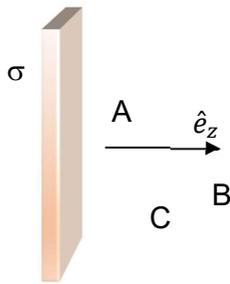


Fig. 4.15: la placa infinita cargada uniformemente genera un campo eléctrico constante, de manera tal que el potencial debe variar linealmente.

a igual potencial o, dicho de otro modo, las superficies equipotenciales son planos paralelos a la placa. Y a su vez, esto significa que el trabajo para llevar una carga desde A hasta B es el mismo cualquiera sea la diferencia de altura relativa entre esos puntos, es decir, si el punto B de la figura 4.15 estuviera sobre la línea horizontal en la que se ubica el punto A, la diferencia de potencial sería la misma que en la situación planteada en la figura.

Ahora bien, dado que el campo eléctrico de la placa infinita va como

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \quad (4.91)$$

resulta que el potencial a una distancia z de la placa podemos calcularlo respecto del punto z_c como

$$\int_{z_c}^z dV = - \int_{z_c}^z \vec{E}(z) \cdot d\vec{z} = - \int_{z_c}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \cdot dz \hat{e}_z = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_c) \quad (4.92)$$

de manera tal que el potencial de cualquier punto a distancia z de la placa, respecto del punto C (a distancia z_c de la placa) se escribe como

$$V(z) = V(z_c) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_c) \quad (4.93)$$

Notemos ante todo que nada decimos del valor del potencial en el punto C , puede ser nulo o no, tanto da. Lo importante es que si la carga σ de la placa es positiva, el campo eléctrico es saliente y, en consecuencia, el gradiente de potencial es un vector dirigido hacia la placa, de manera tal que, por ejemplo, el potencial del punto A es necesariamente mayor que el del punto B . Para convencernos alcanza con reemplazar en la expresión (4.93) para obtener

$$V(z_A) - V(z_B) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [(z_A - z_c) - (z_B - z_c)] = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_A - z_B) \quad (4.94)$$

y como $z_A < z_B$ resulta que, como esperábamos, la diferencia de potencial $V_A - V_B$ es positiva. Además, y esto es necesario destacar, la diferencia de potencial no depende de la posición del punto C , salvo, como ya dijimos, que no puede ser el infinito ni la placa misma. Por lo demás, como ya habíamos anticipado, el potencial varía linealmente con la distancia a la placa y, claramente, a igual distancia vale lo mismo, esto es, las superficies equipotenciales son superficies planas paralelas a la placa cargada.

Ejemplo 4.9: Las placas de la figura 4.16, separadas una distancia d y que a los efectos prácticos pueden considerarse infinitas, están cargadas con carga $+\sigma$ la de la izquierda y -2σ la de la derecha. Calculemos el potencial en todo punto del espacio generado por esta configuración.

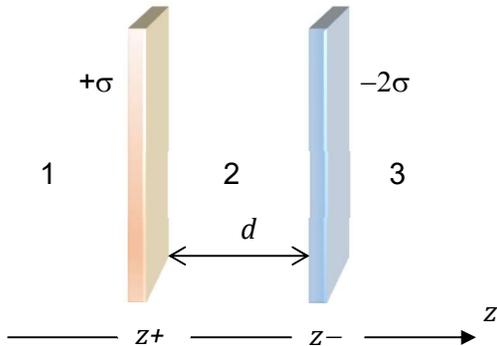


Fig. 4.16: las placas infinitas están cargadas uniformemente, pero su carga no es la misma. Aun así, el campo eléctrico en el interior de las placas es constante, de manera tal que el potencial en esa región debe variar linealmente.

Ante todo, notemos que una placa infinita no es necesariamente una placa de *dimensiones infinitas*. En reiteradas oportunidades hemos discutido (y seguiremos haciéndolo) que las relaciones de tamaño son relativas, esto es, no tiene sentido decir por ejemplo que algo “es grande”, sino que en todo caso “es grande respecto a”. En términos físicos, una placa es “muy grande” para algún observador, por ejemplo, si usted la ve “muy grande”. Si bien en la sección 5.2, y en referencia a la figura 5.1, regresaremos con esta discusión, digamos por ahora que la placa puede considerarse infinita en

términos de las dimensiones características del problema, esto es, si la longitud característica de la placa es mucho mayor que la distancia d entre las placas (y además estamos alejados de los bordes como para no poder ver que la placa tiene fin) podemos sin más pensar la placa como infinita. De este modo, tanto da si la distancia entre las placas es de 1 cm , 1 m o 1 km , en cualquier caso siempre existiría un tamaño de placas para el cual podrían considerarse “infinitas”.

Ahora bien, una vez consideradas infinitas, el campo interior a las placas (región 2 en la figura 4.16) habrá de ser la suma de las dos contribuciones debidas a las dos placas, debe ser constante porque cada placa contribuye con un campo uniforme, y estará orientado en el sentido \hat{e}_z porque ambos campos apuntan en igual sentido. Similarmente, en la región a la izquierda de la placa positiva (región 1 en la figura 4.16) el campo también será constante y también irá en sentido \hat{e}_z , aunque su módulo será menor que en la región 2 porque los campos apuntan en sentido opuesto. Por último, en la región a la derecha de la placa negativa (región 3) el campo se orienta en la dirección $-\hat{e}_z$, es constante y resulta de módulo igual al de la región 1. En síntesis, es fácil ver que el campo en cada región vale

$$\text{Región 1} \quad \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \quad (4.95)$$

$$\text{Región 2} \quad \vec{E}_2 = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \quad (4.96)$$

$$\text{Región 3} \quad \vec{E}_3 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \quad (4.97)$$

A su vez, los potenciales resultan inmediatamente similares al de la expresión (4.93). En efecto, tomemos el potencial de un punto C cualquiera entre las placas como referencia, y llamemos z_+ y z_- a las posiciones de las placas en un sistema de referencia orientado como se indica en la figura 4.16. Resulta entonces

$$\int_{z_C}^z dV = - \int_{z_C}^z \vec{E}(z) \cdot d\vec{z} = - \int_{z_C}^z \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \cdot dz \hat{e}_z = - \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_C) \quad (4.98)$$

de manera tal que en la región 2 vale

$$V(z) = V(z_C) - \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_C) \quad (4.99)$$

y la diferencia de potencial entre las placas resulta

$$V(z_+) - V(z_-) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} (z_- - z_+) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} d \quad (4.100)$$

Obsérvese que la diferencia de potencial es positiva, como era de esperar a partir del hecho de que el potencial crece de la placa negativa a la positiva. En la región 1, en la que el campo es de la forma (4.95), el potencial será

$$\int_z^{z_+} dV = - \int_z^{z_+} \vec{E}(z) \cdot d\vec{z} = - \int_z^{z_+} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z \cdot dz \hat{e}_z = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_+ - z) \quad (4.101)$$

En la región 1, en la que el campo eléctrico se orienta hacia la derecha, el potencial crece hacia la izquierda, de modo tal que la expresión

$$V(z) - V(z_+) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_+ - z) \quad (4.102)$$

resulta positiva y, en consecuencia, el potencial en z es mayor que en z_+ . Finalmente, a la derecha de la placa negativa, en la región 3, donde el campo eléctrico se orienta hacia la izquierda, resulta

$$\int_{z_-}^z dV = - \int_{z_-}^z \vec{E}(z) \cdot d\vec{z} = - \int_{z_-}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \cdot dz \hat{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_-) \quad (4.103)$$

de modo tal que el potencial en la región se escribe como

$$V(z) = V(z_-) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_-) \quad (4.104)$$

Parece casi evidente que el potencial en la región 3 crece hacia afuera, es decir, el potencial en todo punto z a la derecha de $z -$ es mayor que el potencial de la placa negativa.

4.6 – Potencial de un dipolo. Desarrollo multipolar

Calculemos el potencial producido en todo punto del espacio por la distribución dipolar que introdujimos en el ejemplo 2.4, esto es, dos cargas de valor $+q$ y $-q$ respectivamente, separadas una distancia λ y tales que tiene sentido definir la cantidad

$$\vec{p} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} q\lambda \hat{e}_{\mp} \quad (4.105)$$

donde \hat{e}_{\mp} es un versor orientado de la carga negativa a la carga positiva (véase la figura 2.11). En principio podríamos calcular el potencial generado por cada una de las cargas y luego sumarlas, como sugiere la definición (4.13) del potencial electrostático. La dificultad de tal procedimiento radica en el hecho de que la expresión que obtenemos es absolutamente general pero de dudosa practicidad. Parece entonces más adecuado apelar a alguna aproximación que nos simplifique la matemática involucrada y nos permita obtener alguna expresión todavía general.

Para darle a nuestro tratamiento un carácter más amplio pensemos en la distribución de la figura 4.17, que consiste en N cargas ubicadas en los puntos $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_m, \dots, \vec{r}'_N$. El potencial de una tal configuración viene dado por la expresión general (4.13)

$$V(x, y, z) = k \sum_{n=1}^N \frac{q'_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|}$$

y en principio parece evidente que pueden existir puntos en los cuales el potencial se anule. Esto no significa, de ninguna manera, que el potencial habrá de ser nulo en todo punto del espacio, ni aun en la situación en que la carga total de la configuración sea nula.

Para reforzar esta idea, regresemos por un momento a la configuración del ejemplo 4.2 (figura 4.3) y reemplacemos la carga de valor $-Q$ por otra de valor $-2Q$. Es evidente que si quitamos la carga q_2 , la carga total de la distribución sería nula, como lo sería el potencial que generan en el punto A (véase la expresión (4.29) para V_A). Este valor es independiente de la presencia o no de la carga q_2) pero no sería nulo el potencial en el punto B ni sería nulo el trabajo para transportar la carga q_2 del problema desde A hasta B.

Por otro lado, si una configuración de cargas ocupa un volumen limitado del espacio siempre podemos irnos “muy lejos” y ver a esa distribución como puntual. Y si además la carga neta de la distribución es nula (como en el caso planteado en el párrafo anterior),

pareciera que tanto el campo eléctrico como el potencial debieran ser nulos, en franca contradicción con los resultados que hemos obtenido a lo largo de los dos últimos capítulos.

Vale la pena, entonces, analizar esta situación con un poco de detenimiento, y para ello conviene desarrollar en serie de potencias el potencial electrostático que genera una distribución de cargas en un punto P “alejado” de la misma, esto es, ubicado en una posición \vec{r} tal que sea

$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'_m| \quad \forall m / 1 \leq m \leq N \quad (4.106)$$

como se sugiere en la figura 4.17.

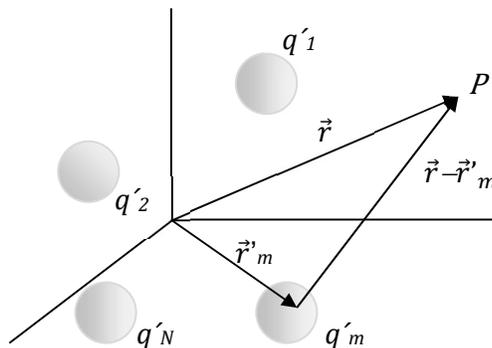


Fig. 4.17: distribución de N cargas puntuales. Sólo se muestran los vectores posición del punto campo P y del m-ésimo punto fuente.

Tengamos en cuenta que en la hipótesis (4.106) el desarrollo del módulo de la diferencia entre dos vectores posición

$$|\vec{r} - \vec{r}'_m| = [(\vec{r} - \vec{r}'_m) \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_m)]^{1/2} = \left[r^2 \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} + \frac{r'^2_m}{r^2} \right) \right]^{1/2} \quad (4.107)$$

puede escribirse como

$$|\vec{r} - \vec{r}'_m| = r(1 + \epsilon)^{1/2} \quad (4.108)$$

con

$$\epsilon = \frac{r'^2_m}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} \ll 1 \quad (4.109)$$

En términos de la ecuación (4.109) el potencial se escribe como

$$V(r) = k \sum_{m=1}^N \frac{q'_m}{r(1+\epsilon)^{1/2}} = k \sum_{m=1}^N \frac{q'_m}{r} (1+\epsilon)^{-1/2} \approx k \sum_{m=1}^N \frac{q'_m}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \quad (4.110)$$

donde hemos utilizado el desarrollo

$$(1+\epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon \quad (4.111)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.111), la ecuación (4.110) se escribe como

$$V(r) = k \sum_{m=1}^N \frac{q'_m}{r} + k \sum_{m=1}^N \frac{q'_m}{r} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2}\right) + k \sum_{m=1}^N q'_m \frac{r'^2_m}{r^3} \quad (4.112)$$

Obsérvese que el primer término del miembro derecho se escribe como $k Q_T / r$, donde Q_T es la carga total de la configuración,

$$Q_T = k \sum_{m=1}^N q'_m \quad (4.113)$$

A su vez, el segundo término puede escribirse como $k \vec{p} \cdot \vec{r} / r^3$, donde

$$\vec{p} = \sum_{m=1}^N q'_m \vec{r}'_m \quad (4.114)$$

es el momento dipolar de la distribución. De esta forma, resulta

$$V(r) = k \frac{Q_T}{r} + k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \gamma(r'^2) \quad (4.115)$$

donde $\gamma(r'^2)$ son términos de segundo orden que corresponden a momentos de orden superior del desarrollo del potencial y que de aquí en más no habremos de considerar.

Obsérvese que el potencial de un dipolo aislado resulta de la igualdad (4.113) teniendo en cuenta que en este caso es $Q_T = 0$

$$V_{DIP} = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (4.116)$$

La primera consecuencia casi inmediata es que el potencial de un dipolo aislado es nulo en todo el plano que corta en el punto medio a su eje axial y es perpendicular a este, porque en tal caso los vectores \vec{r} y \vec{p} son perpendiculares y es nulo el producto escalar. Esto significa que también es nulo el trabajo para transportar cualquier carga a lo largo de cualquier camino en este plano, aunque el campo eléctrico no es nulo (véase la expresión (2.37)). Por lo demás, vale la pena recordar que la expresión (4.95) se obtuvo para un dipolo centrado en el origen. Su extensión al caso general es inmediata, pensando al dipolo ubicado en la posición \vec{r}'

$$V_{DIP} = k \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.117)$$

Es necesario recalcar que el desarrollo multipolar (4.96) sólo es válido en las condiciones en que fue obtenido, esto es, para una distribución de cargas contenidas en un volumen finito y en un punto “muy alejado” de la región que contiene las cargas, y que el hecho de que conservemos sólo los dos primeros términos del desarrollo obedece a razones de practicidad.

De hecho, muchas configuraciones poseen simetrías que hacen que los primeros dos términos del desarrollo (4.96) sean nulos. De ninguna manera debería interpretarse que el potencial de estas distribuciones de carga es nulo, sino más bien que está representado por alguna combinación de los términos (cuadrupolar, octupolar, etc.) que sintetizamos en $\gamma(r'^2)$. Por ejemplo, la configuración de cuatro cargas alternadamente positivas y negativas formando un cuadrado en el ejemplo 2.3 (véase la figura 2.8) tiene carga neta nula y el potencial dipolar se anula a lo largo de cualquier eje de simetría, pero el potencial electrostático no es globalmente nulo porque siempre habrá que invertir una cierta cantidad de trabajo para desplazar carga eléctrica en presencia de esta distribución.

Que una dada configuración de cargas tenga carga total nula no implica de modo alguno que su campo eléctrico sea nulo o que sea nulo el trabajo necesario para transportar una carga en presencia de esa configuración. El ejemplo emblemático posiblemente sea el dipolo: el trabajo requerido para transportar una carga entre dos puntos simétricos sobre el plano que atraviesa perpendicularmente el eje del dipolo por su punto medio es cero, pero no significa que para cualquier par de puntos la diferencia de potencial lo sea.

Resumen del capítulo

En este capítulo hemos introducido el concepto de potencial electrostático como una función escalar de la que se deriva el campo electrostático. En consecuencia, en estas condiciones resulta que el electrostático es un campo de fuerzas conservativo, o lo que es igual, que la fuerza eléctrica es conservativa.

Por lo demás, interpretamos la diferencia de potencial entre dos puntos del espacio como una medida del trabajo necesario para transportar una carga entre esos dos puntos, con la particular ventaja de que, estando en presencia de fuerzas conservativas, el trabajo es independiente del camino recorrido y sólo es función de la diferencia de potencial entre los puntos de partida y de llegada, independientemente del valor que el potencial adopte en esos puntos.

Este es un aspecto central, porque como hemos discutido el potencial es sí mismo carece de significado físico. El ente significativo es el campo eléctrico (o si se prefiere, la fuerza eléctrica) y se define a partir de derivadas espaciales (el gradiente) del potencial, de manera tal que dos funciones potenciales que difieren en una cantidad constante generan el mismo campo de fuerzas.

En la sección 4.4 llegamos a la importante conclusión de que las líneas de campo electrostático son perpendiculares a las superficies externas de los conductores, de manera tal que esas deben ser superficies equipotenciales. En consecuencia, el transporte ideal de una carga eléctrica a lo largo de un conductor se realiza sin invertir trabajo.

Desde ya que este resultado no es válido si se transporta una carga en presencia de una distribución de cargas cualquiera. De hecho, hemos aprovechado esta circunstancia para calcular la cantidad de energía que es necesario invertir para armar una dada configuración, y hemos visto que esa energía puede pensarse almacenada tanto dentro del volumen que contiene a las cargas como en el campo eléctrico (extendido en todo el espacio) que esas cargas generan.

Complementos del capítulo

Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Regresemos a la forma diferencial del teorema de Gauss, expresión (3.41), que aquí reproducimos

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4.118)$$

A partir de la ecuación (4.14) parece evidente que podremos escribir

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \nabla V(\vec{r}) = -\nabla^2 V(\vec{r}) \tag{4.119}$$

donde el operador ∇^2 se denomina laplaciano y representa la divergencia del gradiente de una función escalar. Claramente, se trata de un operador en derivadas parciales, y en consecuencia su forma depende de las coordenadas que se escojan. Por lo pronto, parece evidente que la ecuación de Gauss ahora toma la forma

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.120}$$

que es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que se conoce como ecuación de Poisson. En particular, para aquellos puntos del espacio en los que no haya carga eléctrica presente, la ecuación adopta la forma

$$\nabla^2 V = 0 \tag{4.121}$$

que se conoce como ecuación de Laplace. A decir verdad, la ecuación de Poisson es una corrección a la ecuación de Laplace, y de hecho esta última es un caso particular de la primera. Si bien no habremos de adentrarnos en su significado profundo, vale la pena explorar el problema del potencial generado por una distribución de conductores extensos, que presentamos a continuación.

Sistema de conductores extensos. Coeficientes de capacidad e inducción.

Sea una distribución de N conductores extensos (con esto queremos decir que no se trata de cuerpos puntuales) como el que se muestra en la figura 4.18.

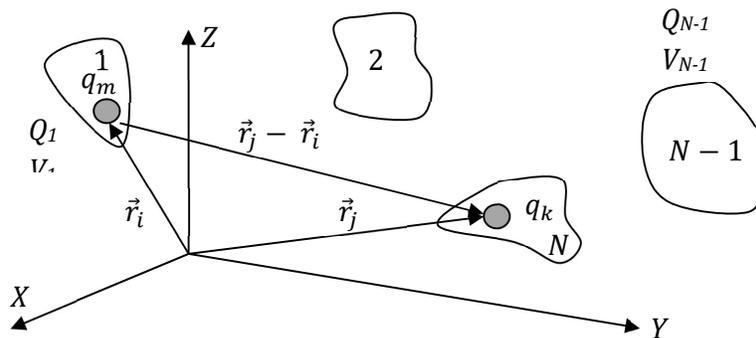


Fig. 4.18: los N conductores de la figura tienen carga y potencial propios, $Q_1 V_1, Q_2 V_2, \dots, Q_N V_N$, respectivamente. Se ha indicado una carga q_i en el i -ésimo conductor, sobre la cual se calcula el potencial generado por el resto de las M cargas presentes en el problema.

Supondremos que cada conductor tiene un número dado de cargas y que, en total, en el problema hay presentes $S \gg N$ cargas, distribuidas de alguna manera sobre los conductores. En particular, en la figura mostramos dos cargas alojadas en conductores diferentes, a las que genéricamente hemos denominado q_m y q_k . El potencial V_i generado por las $S - 1$ cargas restantes q_s en la posición de la i -ésima carga q_i será (véase la expresión (4.13))

$$V_i(x, y, z) = k \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^S \frac{q'_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_n|} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^S \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}'_n|} \right) q'_n \quad (4.122)$$

Obsérvese que el término entre paréntesis es un factor puramente geométrico definido positivo. Si convenimos en llamar a_{in} a estos coeficientes, con la necesaria convención $a_{ii} = 0$ (para no calcular el potencial de la i -ésima carga en su posición) podemos escribir la ecuación (4.122) en forma sucinta como

$$V_i(x, y, z) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^S \left(\frac{k}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_n|} \right) q'_n = \sum_{n=1}^S a_{in} q'_n \quad (4.123)$$

Claramente, podríamos escribir una ecuación similar para cada una de las S cargas presentes en el problema, nada hay que diga que sólo puede escribirse para una. En general, obtendremos un conjunto de S ecuaciones similares en su forma pero diferentes en su valor. Y todas estas ecuaciones estarían sujetas a las mismas condiciones de contorno, pues tratándose de conductores, el potencial sobre cada superficie debe ser constante (aunque, por supuesto, no necesariamente igual). Por ejemplo, para un sistema de 3 cargas en dos conductores, las ecuaciones serían de la forma

$$V_1 = a_{12} q'_2 + a_{13} q'_3 \quad (4.124. a)$$

$$V_2 = a_{21} q'_1 + a_{23} q'_3 \quad (4.124. b)$$

$$V_3 = a_{31} q'_1 + a_{32} q'_2 \quad (4.124. c)$$

o, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Recuérdese que los potenciales que figuran en las ecuaciones (4.124) son los que generan en la posición de la i -ésima carga las $S - 1$ cargas restantes. Pero algo debe

quedar claro: si son tres cargas distribuidas en dos conductores, dos en uno y la restante en el otro conductor, dos de ellas deben estar al mismo potencial, porque las cargas se hallan en la superficie de los conductores y éstas son superficies equipotenciales (sección 4.5). Por lo demás, podríamos invertir las ecuaciones (4.122) para escribir las cargas en función de los potenciales. Obtendríamos un sistema de ecuaciones de la forma

$$q_n = \sum_{j=1}^s b_{nj} V_j \quad (4.126)$$

Por ejemplo, para las cargas de las ecuaciones (4.124) podemos escribir

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

donde la matriz \mathbb{B} de los b_{in} es la inversa de la matriz \mathbb{A} de los a_{in} , esto es,

$$\mathbb{B} = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \begin{bmatrix} -a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} \\ a_{23}a_{31} & -a_{13}a_{31} & a_{21}a_{13} \\ a_{32}a_{21} & a_{32}a_{12} & a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

con $|\mathbb{A}| = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$ el determinante de la matriz de los a_{in} . Ahora bien, sobre el z -ésimo conductor hay una carga total Q_z , que es la suma de las q'_z que están sobre la superficie del conductor. Y como ya quedó dicho, si en el sistema hay N conductores hay a lo sumo N potenciales diferentes (es decir, la columna de potenciales de nuestro ejemplo de dos conductores tiene sólo dos valores diferentes). En consecuencia, siempre será posible escribir la cantidad de carga del z -ésimo conductor en la forma

$$Q_z = \sum_{i=1}^N C_{zi} V_i \quad (4.129)$$

Debe notarse que los coeficientes C_{zi} son factores puramente geométricos, pues de hecho derivan de los coeficientes a_{in} definidos en la expresión (4.124). Y aunque aquí no lo haremos, puede demostrarse que estos coeficientes son simétricos, es decir,

$$C_{zi} = C_{iz} \quad \forall z, i \quad (4.130)$$

En el siguiente ejemplo ponemos de manifiesto algunas propiedades de los coeficientes C_{zi} , que en general se denominan *coeficientes de capacidad* (los C_{ii}) y *de inducción* (los C_{zi} con $z \neq i$). En el próximo capítulo desarrollaremos un poco más en profundidad estas propiedades, analizando particularmente sus consecuencias.

Ejemplo 4.10: La figura 4.19 muestra dos conductores, uno de ellos con carga Q_1 a potencial V_1 , y el otro con carga Q_2 puesto a tierra (o sea, $V_2 = 0$). Analicemos los coeficientes de capacidad e inducción que se derivan de la expresión (4.125) en esta situación.

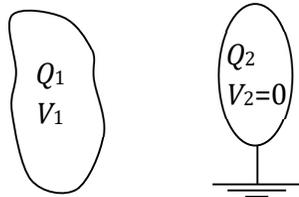


Fig. 4.19: uno de los conductores del ejemplo 4.10 está puesto a tierra. Obsérvese que estar a tierra no implica carga nula.

Observemos ante todo que si la carga Q_1 es positiva, el potencial V_1 también será positivo. Y a la inversa, $Q_1 < 0 \Rightarrow V_1 < 0$. Pero como la carga en el conductor 2 es inducida, debe cumplirse

$$sg(Q_2) = -sg(Q_1) \quad (4.131)$$

Aplicando directamente la expresión (4.129) escribimos

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad (4.132)$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \quad (4.133)$$

y como $V_2 = 0$ resultan inmediatamente

$$Q_1 = C_{11}V_1 \quad (4.134)$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 \quad (4.135)$$

Obsérvese ahora un detalle de importancia: dado que el signo de Q_1 es igual al del potencial V_1 , resulta que el coeficiente de capacidad C_{11} es definido positivo, es decir, siempre es positivo, como lo son todos los coeficientes de capacidad. En cambio, el coeficiente de inducción C_{12} es negativo y, en general, estos coeficientes son negativos o nulos. Comenzaremos el próximo capítulo analizando un caso similar a este, salvo por el hecho de que los conductores estarán aislados.

Principio de funcionamiento de una pila elemental

Una *pila elemental* es un dispositivo que contiene dos electrodos sumergidos en una solución electrolítica de ácido sulfúrico (SO_4H_2) diluida en agua. Uno de los electrodos es una barra de cobre y el otro es una barra de zinc. La placa de Cu es el borne positivo (o *ánodo*) de la pila común, en tanto que la barra de zinc es el borne negativo (o *cátodo*).

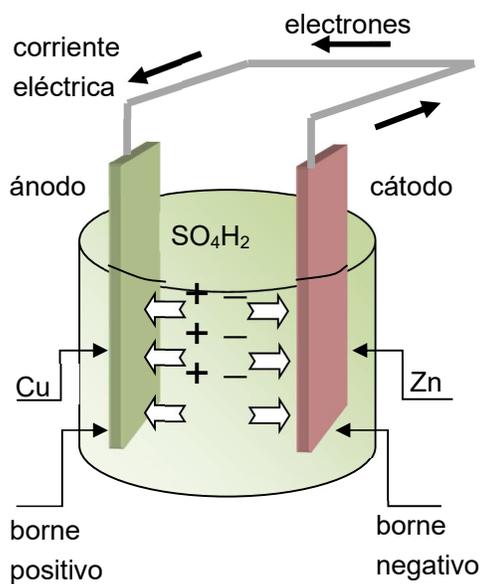


Fig- 4.20: esquema simplificado de una pila elemental.

Al diluir el ácido sulfúrico en agua, cada molécula de SO_4H_2 se divide en dos iones hidrógeno, positivos, y un ion sulfato (SO_4^-), negativo. En presencia de estos iones, la barra de zinc cede parte de sus átomos a la solución en forma de iones Zn^{++} (esto es, la barra de Zn se reduce porque por cada ion Zn^{++} liberado quedan dos electrones desnudos y todo ocurre como si la barra ganara electrones). Los iones Zn^{++} se unen a los iones sulfato. Mientras no se los reclame, el conjunto de electrones liberados permanece en la barra de zinc y le confieren carga negativa.

En presencia de los iones de hidrógeno, la barra de cobre sumergida en el electrolito se oxida (pierde electrones). Al ceder electrones quedan desnudas cargas positivas que le confieren al electrodo de cobre carácter positivo.

Si ahora conectamos los electrodos a través de un elemento conductor (digamos un alambre metálico) los electrones de la barra de Zn (el cátodo) repelen a los del alambre, que a su vez son atraídos por las cargas positivas desnudas en el electrodo de Cu (el ánodo). De esta manera se establece un flujo de cargas a través del conductor que, como veremos más adelante, constituye lo que conocemos como una *corriente eléctrica*. Dicho de otro modo, una corriente eléctrica es un flujo de electrones que se mueven por el alambre desde el borne negativo al positivo.

La diferencia de potencial que se establece entre los bornes de este tipo de pila elemental es del orden de 1 V , independientemente del tamaño de los electrodos o del volumen de solución electrolítica. Para elevar la diferencia de potencial entre los bornes deben cambiarse los materiales y/o la tecnología. Por ejemplo, en las pilas de dióxido de zinc-manganeso el ánodo es una placa de aleación de zinc (con pequeñas proporciones de plomo, cadmio y mercurio) y el cátodo es dióxido de manganeso mezclado con carbón granulado, ambos sumergidos en una solución acuosa y saturada de cloruro de amonio conteniendo 20% de cloruro de zinc. Este tipo de pilas suministra una diferencia de potencial del orden de $1,5$ a $1,7\text{ V}$.

También muy conocidas son las pilas de tipo botón (como las que se usan en las alarmas de autos y motos) que entregan alrededor de $1,3\text{ V}$ y funcionan con electrodos de mercurio y óxido de zinc sumergidos en un electrolito alcalino. También alcalinos son los electrolitos de las pilas que utilizan un ánodo de litio. El inconveniente principal que caracteriza a todo este tipo de pilas es que una vez agotadas deben desecharse.

Las pilas recargables (o celdas secundarias) constituyen un tipo especial de celdas electroquímicas que se caracterizan por ser regenerables, y esto en virtud de funcionar en

base a una reacción química reversible. Las más elementales son las de ácido-plomo, que funcionan en base a dos electrodos de sulfato de plomo sumergidos en una solución electrolítica de ácido sulfúrico en agua. Cuando a través de una fuente (los tradicionales cargadores, que aquí no habremos de discutir en detalle) se suministra carga externa a este dispositivo, el electrodo en contacto con el extremo negativo de la fuente se convierte en plomo y el electrodo que se conecta al borne positivo de la fuente se transforma en peróxido de plomo (cuando se recarga una pila no puede hacerse de manera arbitraria, las polaridades están siempre bien indicadas). Entre tanto, durante la carga, el electrolito se transforma en su mayor parte en ácido sulfúrico.

Una vez cargado, el dispositivo se comporta como una pila elemental: el electrodo de plomo se reduce (gana electrones) y se comporta como cátodo, en tanto que el electrodo de peróxido de plomo sufre una oxidación (pérdida de electrones), y se convierte en el ánodo (borne positivo de la pila). Parte del ácido sulfúrico del electrolito se convierte nuevamente en agua. Estas reacciones se detienen cuando entre las terminales de la celda se genera una diferencia de potencial de aproximadamente 2 V.

Potenciales biológicos y actividad neuromotriz

La actividad motriz y de procesamiento de la información que relaciona a los animales con su entorno se realiza en base a la transmisión de estímulos que provienen del sistema nervioso. Los elementos fisiológicos y anatómicos emisores y receptores de estos estímulos reciben el nombre de *neuronas*.

En términos generales, la forma de una neurona determina su funcionamiento. Y dada la fantástica diversidad de actividades que las células del sistema nervioso llevan a cabo (memoria, control de la motricidad y de la secreción hormonal, defensa, percepción sensorial, etc.) existe una gran variedad de formas, aunque todas poseen distintas regiones citoplasmáticas con composición molecular y función característica. Toda la actividad neuronal se realiza a través de estas regiones, que se prolongan en extensiones que reciben el nombre genérico de *neuritas*.

Básicamente, toda neurona se extiende en dos tipos de neuritas: las dendritas y el axón (normalmente es uno por célula nerviosa) como rudimentariamente se ilustra en la figura 4.21. Las primeras son prolongaciones irregulares, comparativamente cortas, que se ramifican reiteradas veces siguiendo un patrón que depende básicamente de la función que cumple la neurona. Por el contrario, el axón es un cuerpo regular y marcadamente uniforme, muy extendido y de forma cilíndrica, que conecta a través de sus ramificaciones con las células que habrán de recibir el estímulo.

Como en cualquier célula, la pared exterior de una neurona es una estructura semipermeable que separa la célula del medio externo, permitiendo selectivamente el pasaje de agua y algunos iones específicos a través de ella a partir de la interacción con un conjunto básico de proteínas que se hallan en el interior de la célula.

En el medio acuoso extracelular se hallan presentes muchas sales, en particular cloruro de potasio, *KCl*, que se disuelve generando iones positivos K^+ e iones negativos

Cl^- (las razones por las que el agua es capaz de disolver una sal las estudiaremos en el capítulo 6). En estado de reposo, es decir, mientras no es estimulada, la pared celular es sólo permeable a estos dos iones.

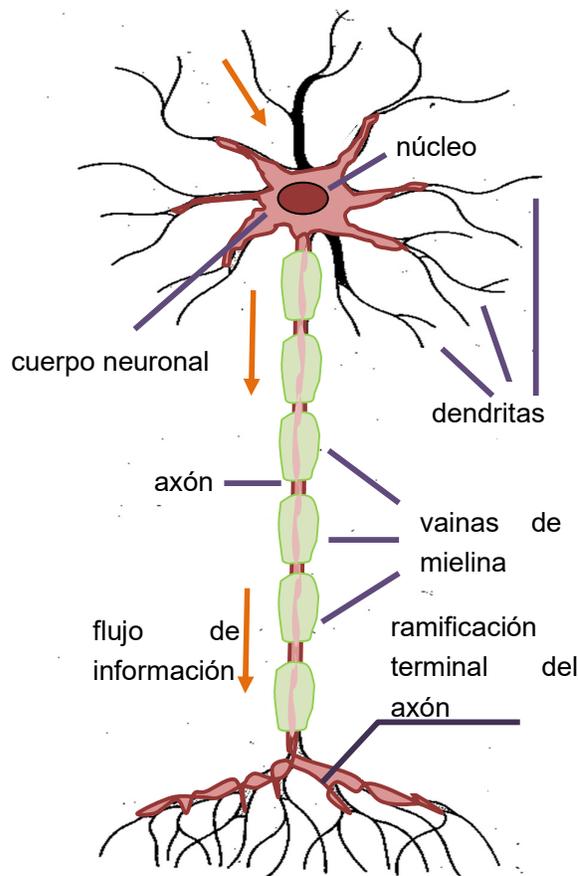


Fig. 4.21: esquema general de una neurona, en el que se muestra el axón, sus ramas terminales y las dendritas. Las flechas indican el sentido en el que viaja la información.

Ahora bien, en una disolución de KCl en equilibrio hay tantos iones K^+ como iones Cl^- , de manera tal que el conjunto se comporta como un sistema eléctricamente neutro (y todavía interactivo, a pesar de estar disuelto). Sin embargo, cerca de una membrana plasmática este equilibrio se rompe porque algunos iones pueden atravesarla.

En principio, sería de esperar que el equilibrio se estableciera una vez que se iguala la concentración de iones de cada tipo a un lado y otro de la membrana (de la misma forma que la diferencia de presión entre dos compartimentos provoca que el paso de un gas tenga un sentido preferencial hasta que las presiones se igualan). Pero el hecho de que las partículas que difunden a través de la pared estén cargadas eléctricamente hace que el equilibrio dinámico se alcance con valores de concentraciones intra y extracelular bien diferentes, fundamentalmente debido a la aparición de una diferencia de potencial que inhibe un flujo neto de cargas.

Con dos capas de carga superficial, una positiva y otra negativa, la pared celular se asemeja a una batería cuya

diferencia de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$ establece un campo eléctrico que contrabalancea la diferencia de concentraciones Δc de iones positivos a ambos lados de la pared (véase la figura 4.22). En presencia de este potencial de equilibrio, conocido como *potencial de Nernst* (de valor absoluto del orden de 85 mV), el flujo de iones positivos hacia un lado y otro de la pared alcanza un estado de equilibrio dinámico.

En estado de reposo, las neuronas tienen exceso de carga eléctrica negativa en el interior de la membrana celular respecto del exterior. Esto se debe a la libre circulación de iones potasio K^+ a través de la membrana celular, y al mismo tiempo, a la retención de moléculas grandes con carga negativa dentro de la célula.

Cuando una célula nerviosa (o una muscular) recibe un estímulo localizado, cambia repentinamente su permeabilidad a los iones K^+ y Na^+ (el ion sodio Na^+ se mantiene fuera de la célula nerviosa en estado de reposo a través de un proceso activo) aunque durante un muy breve lapso (del orden de las diezmilésimas de segundo) es preferentemente permeable al ion sodio.

Este proceso provoca una concentración de carga positiva en la parte interior y un exceso de carga negativa (por la migración de los iones positivos) en la parte exterior a la membrana, y en virtud de la interacción electrostática entre los iones las cargas no difunden sino que por el contrario se alojan a lo largo de la pared, modificando así el valor del potencial de equilibrio. La rápida variación temporal de la diferencia de potencial en el tiempo, debido al estímulo, recibe el nombre de *potencial de acción*. Vale la pena mencionar que el potencial de acción lleva la diferencia de potencial en la pared celular de -85 mV a $+60\text{ mV}$.

El exceso de carga positiva en una región localizada de una neurona atrae cargas negativas de las regiones inmediatamente vecinas, que se tornan ligeramente positivas y modifican su potencial de equilibrio. De esta manera se provoca la difusión de una inestabilidad que dispara en las zonas vecinas el potencial de acción. La propagación de este pulso, hacia un lado y otro de la región originalmente estimulada, se denomina *impulso nervioso*.

La concentración elevada de sodio en el interior del axón provoca en primer lugar la expulsión de iones potasio, y el sodio es luego bombeado al exterior mediante un proceso activo que restablece el estado de reposo y el potencial de equilibrio originales. El proceso completo dura menos de una milésima de segundo, tiempo después del cual la neurona se halla en condiciones de reiniciar el proceso.

El proceso de transmisión de impulsos entre neuronas se realiza a través de procesos químicos. De hecho, la señal eléctrica que alcanza el extremo del axón estimula unas pequeñas vesículas que se hallan en sus ramificaciones, que se conocen como *vesículas presinápticas*. Estas vesículas contienen sustancias químicas llamadas *neurotransmisores*, que una vez liberados alcanzan las dendritas de las neuronas vecinas y estimulan de esa forma el potencial de acción que permite que el impulso se transmita ahora por otras células nerviosas.

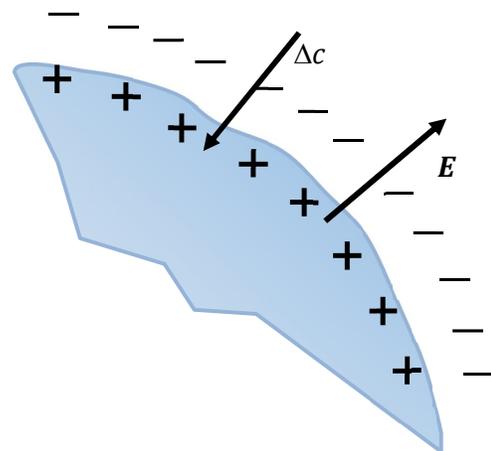
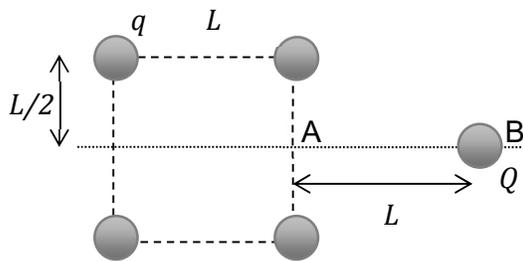


Fig. 4.22: fuera del reposo, la parte interna de la célula (en color azul) tiene un exceso de carga positiva respecto de la solución externa, pero la concentración de iones es menor que en la región exterior. En consecuencia, el campo eléctrico que se genera es opuesto al gradiente de concentración de cargas.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Sean cuatro cargas q de módulo 10^{-6} C cada una, ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado $L=1\text{m}$. Calcule el trabajo W_F para transportar una carga $Q=-10^{-6}$ C, a velocidad



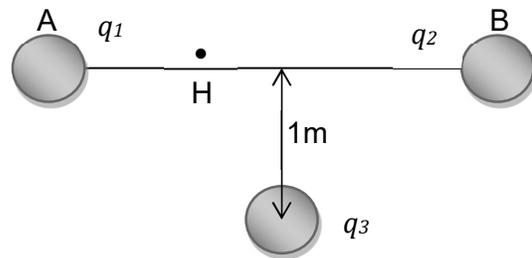
constante, en los siguientes casos:

- desde B hasta A si las cargas q son todas positivas;
- desde B hasta A si las cargas q son alternadamente positivas y negativas;
- desde el infinito al centro del cuadrado en ambos casos.

Ejercicio 2: Sea la configuración del ejercicio anterior, con las cargas alternadamente positivas y negativas. Usando razonamientos de simetría, calcule el trabajo necesario para mover la carga Q a lo largo del eje de simetría axial del cuadrado (el eje que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular al plano de las cargas).

Ejercicio 3: Calcule la energía potencial electrostática de las configuraciones a y b del ejercicio 1, en ambos casos con la carga Q en el infinito.

Ejercicio 4: Las cargas $q_1 = 2\mu\text{C}$ y $q_2 = -3\mu\text{C}$ de la figura, ubicadas en los puntos A y B, respectivamente, se hallan separadas una distancia $AB=2\text{m}$. Desde el punto D, ubicado un metro por debajo del punto medio del segmento AB, se lleva una carga $q_3 = 5\mu\text{C}$ al punto H, 30 cm a la derecha de q_1 .



- calcule el trabajo realizado para transportar la carga q_3 desde D hasta H;
- calcule la fuerza necesaria para mantener a la carga q_3 en el punto H;
- discuta y justifique si el trabajo necesario para llevar a q_3 a 30 cm a la izquierda de q_2 es mayor, menor o igual que el calculado en el punto (a);
- discuta y justifique cómo cambian cualitativamente los resultados de los puntos (a) y (b) si la carga q_3 es negativa.

Ejercicio 5: Dos esferas concéntricas de radios r_a y $r_b > r_a$, están cargadas con cargas $+Q_a$ y $-Q_b$, respectivamente. Se transporta una carga negativa $-\delta q$ desde la esfera exterior a la interior. Justifique e indique claramente:

- la dirección y el sentido del campo eléctrico de la configuración en la región interna;
- la dirección y el sentido de la fuerza eléctrica sobre la carga $-\delta q$;
- la dirección y sentido del gradiente de potencial;
- el signo del trabajo que debemos realizar para transportar la carga $-\delta q$ a velocidad constante;

e) el valor de dicho trabajo.

Ejercicio 6: Calcule el potencial electrostático en todo punto del eje de simetría de un anillo cargado linealmente con densidad de carga λ .

Ejercicio 7: Sea una esfera de radio R cargada con densidad volumétrica de carga $\rho = \rho_0 r^2$. Halle la expresión del potencial electrostático en todo punto del espacio.

Ejercicio 8: a) dada la configuración de la figura, calcule el potencial V en el punto C (considere puntuales a las cargas de los extremos);

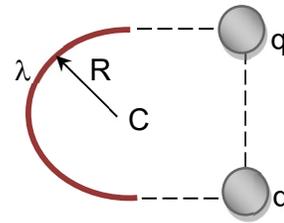
b) suponga ahora que se cambia el alambre curvo por un segmento recto de longitud $2R$, ubicado a una distancia R del punto C , manteniendo constante la cantidad total de carga (no la densidad)

b1) calcule la nueva densidad de carga;

b2) repita el cálculo del punto (a);

c) explique por qué el potencial en el punto C de la primera configuración es mayor que el de la segunda;

d) discuta cuál de las dos configuraciones requiere más trabajo para ser armada.

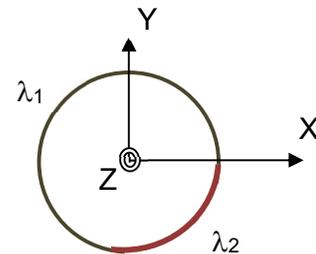


Ejercicio 9: El alambre circular de la figura, de radio R , ha sido cargado con densidad lineal de carga λ_1 a lo largo de $3/4$ de su circunferencia. La parte restante se ha cargado con densidad lineal de carga λ_2 .

a) calcule el valor de λ_2 para que la carga total del anillo sea nula;

b) explique cualitativamente cómo es la forma del campo eléctrico a lo largo del eje geométrico de simetría (el eje Z en la figura);

c) justifique por qué si la carga total es nula, el campo eléctrico y el potencial de la configuración no son nulos en todo punto del espacio.

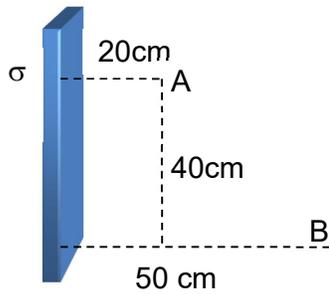


Ejercicio 10: La diferencia de potencial entre dos placas plano paralelas, separadas $0,05\text{m}$, es de 4 kV . Un electrón, cuya carga vale $q_e \equiv e^- = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ y su masa $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\text{ kg}$, abandona la superficie de una de las placas y es acelerada hacia la otra. Suponiendo que el electrón parte del reposo,

a) calcule la velocidad del electrón cuando llega a la otra placa;

b) calcule el trabajo que realiza el campo eléctrico para llevar al electrón de una placa a la otra;

c) compare la variación de la energía cinética del electrón con el trabajo realizado por el campo.



Ejercicio 11: La placa plana de la figura posee una densidad de carga $\sigma = 12 \mu\text{C}/\text{m}^2$.

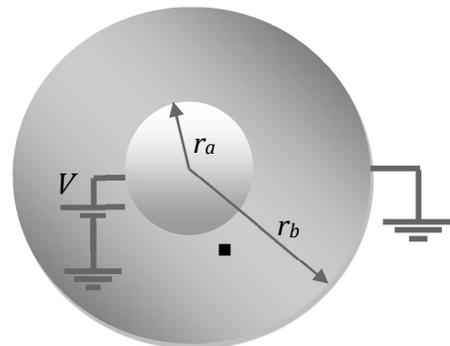
- calcule el trabajo que realiza el campo para llevar una carga $Q = -2 \mu\text{C}$ desde A hasta B;
- calcule la distancia que media entre puntos cuya diferencia de potencial es de 1000V ;
- repita los cálculos suponiendo que a 4m de distancia se coloca otra placa, paralela la placa de la figura, con densidad de

carga $\sigma = 16 \mu\text{C}/\text{m}^2$ (Suponga que las dimensiones de la placa son mucho mayores que las distancias involucradas).

Ejercicio 12: Dibuje las líneas equipotenciales que corresponden a un dipolo (tenga en cuenta que las líneas de campo son las que se muestran en la figura 2.19)

Ejercicio 13: La figura muestra una configuración eléctrica, que consiste en una esfera metálica, hueca, de radio r_a , conectada a una fuente de potencial V , rodeada por otra esfera metálica hueca, de radio r_b , conectada a tierra. El medio entre las esferas es el vacío.

- calcule el potencial V en todo punto del espacio;
- calcule el valor de la carga sobre la esfera interior.



Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: a) $W_F = -3,42 \times 10^{-2} \text{ J}$; b) $W_F = 0$; c) $W_F = -5,09 \times 10^{-2} \text{ J}$ si las cuatro cargas son positivas, W_F nulo en el otro caso.

Ejercicio 2: El campo eléctrico es nulo en el eje de simetría axial, de manera tal que es nula la fuerza sobre cualquier carga sobre ese eje y no se requiere de trabajo alguno para desplazarla. De otra forma, el potencial es nulo porque la carga total es nula y se trata del potencial en el plano medio de dos dipolos enfrentados.

Ejercicio 3: a) $U = 4,87 \times 10^{-2} \text{ J}$; b) $U = -2,32 \times 10^{-2} \text{ J}$.

Ejercicio 4: a) $W = 0,25 \text{ J}$; b) $\vec{F} = 1,04 \text{ N}$ hacia la carga q_i ; c) el trabajo es mayor (de hecho, $W = -0,36 \text{ J}$); ambos cambian sólo de signo.

Ejercicio 5: a) \vec{E} tiene dirección radial saliente, pues se dirige de la carga positiva a la negativa; b) \vec{F} es un vector opuesto a \vec{E} porque la carga es negativa (fuerza es radial y entrante); c) el gradiente de potencial es radial y entrante porque siempre es un vector opuesto a \vec{E} ; d) el trabajo es negativo porque ejercemos fuerza en sentido contrario al desplazamiento;

$$e) W = -\delta q (V_a - V_b) = -k \delta q \left(\frac{Q_a}{r_a} - \frac{-Q_b}{r_b} \right)$$

Ejercicio 6:

$$V = \frac{2\pi k \lambda R}{\sqrt{(R^2 + z^2)}}$$

(z es la altura sobre el plano del anillo).

Ejercicio 7:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & r \geq R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} & r < R \end{cases}$$

$$\text{Ejercicio 8: a) } V_C = \pi k \lambda + \sqrt{2} \frac{k q}{2R}$$

b₁) $\lambda' = \frac{\pi\lambda}{2}$ b₂) $V_C = 0,885\pi k\lambda + \sqrt{2} \frac{kq}{2R}$;

c) los puntos de la circunferencia están todos a la misma distancia R del punto C, mientras que sólo uno de los del alambre (a saber, el central) está a esa distancia; todos los otros están a distancia mayor;

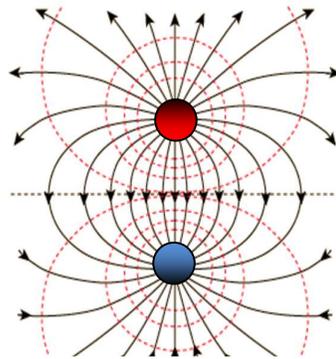
d) la segunda, porque hay que trasladar las cargas mayor distancia.

Ejercicio 9: a) $\lambda_2 = -3\lambda_1$; b) el campo tiene componentes en los tres ejes por la falta de simetría; c) la carga total nula hace que el primer término del desarrollo multipolar sea nulo, pero no es cierto que el potencial dipolar lo sea.

Ejercicio 10: a) $V \approx 37.506$ km/seg; b) $W = 6,4 \times 10^{-16}$ J; c) valen lo mismo.

Ejercicio 11: a) $W_{AB} = -0,4$ J; b) $d = 1,475$ mm; c) $W_{AB} = 0,1333$ J y $d = 4,425$ mm.

Ejercicio 12:



Ejercicio 13: a)

$$V(r) = \begin{cases} V & r < r_a \\ k Q_a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right) & r_a < r < r_b \\ 0 & r > r_b \end{cases}$$

b) $Q_a = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a} V$

Capacitores



5.1 – Introducción

En el capítulo anterior hemos discutido con cierto detalle la relación que existe entre la carga de un conductor, el campo eléctrico que genera y su potencial electrostático. Uno de los aspectos más interesantes que surgen de aquel análisis es que para aumentar en una cantidad dq la cantidad de carga de un conductor aislado debemos realizar un trabajo que se mide completamente por dV , la diferencia de potencial entre el punto donde se encuentra inicialmente la carga dq y el punto de la superficie del conductor donde se la deposita.

Pero el trabajo efectuado para transportar la carga dq debe modificar, de alguna manera, la energía de la configuración. Para decirlo en términos poco rigurosos, el transporte de carga no es gratuito sino que se realiza a expensas de un intercambio de energía, aun cuando no sepamos *a priori* cuánto vale la energía intercambiada ni quién la cede o quién la recibe.

El análisis que efectuamos a partir de la expresión (4.62) no parece demasiado alentador para decidir el valor de la energía intercambiada. A lo sumo parece indicar que la energía, antes y después del traslado de la cantidad de carga dq , queda contenida en el campo eléctrico de la configuración y se distribuye en todo el espacio, infinitamente, de manera tal que parecería que la energía asociada al trabajo intercambiado no puede ser recuperada o, en todo caso, recuperar esa energía es impracticablemente complicado. Una cosa es hacer harina con los granos de trigo contenidos en una bolsa y otra muy distinta es pretender juntar primero los granos por todo el universo.

La única manera, casi obvia, que parece presentarse para recuperar la energía invertida en el armado de una configuración de cargas es que el campo eléctrico (generado por esas cargas) quede confinado en una región finita del espacio a la cual se pudiera acceder con relativa facilidad. Pero para eso la configuración de cargas debe disponerse de manera tal que el campo quede aislado. Precisamente en este capítulo habremos de discutir las formas en que podemos aislar un campo eléctrico, aunque más no sea a primer orden, de manera tal de poder disponer de la energía empleada al transportar las cargas de la configuración que dieron origen a ese campo eléctrico, y analizaremos algunos de los dispositivos que se emplean para almacenar la energía contenida en el campo eléctrico.

5.2 – Concepto de capacidad. Condensadores (capacitores)

El campo eléctrico de una configuración cualquiera de cargas, en particular el de un conductor, depende linealmente de la cantidad de carga y es función de la geometría del conductor. Por ejemplo, son bien diferentes las geometrías de los campos eléctricos generados por una esfera de radio R y un alambre de longitud L , aunque ambos sean directamente proporcionales a la cantidad de carga que los genera. Es casi evidente, entonces, que el campo eléctrico de la configuración habrá de variar cuando cambie la cantidad de carga, y que esta variación debe ser lineal. Para convencernos alcanza con recordar el teorema de Gauss para el campo eléctrico (ecuación (3.6)).

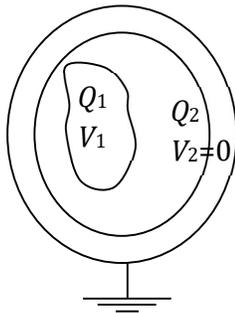
Como por otro lado la diferencia de potencial es linealmente proporcional al campo eléctrico, resulta que la relación entre la variación dq de la carga de un conductor aislado y la diferencia de potencial dV que mide el trabajo para producir la variación de carga, también debe ser lineal y depender sólo de la geometría del conductor. En síntesis, sin importar ni el carácter ni la magnitud del valor del cambio de la carga de una configuración, el trabajo relacionado (y, luego, la energía involucrada) debe ser directa y linealmente proporcional a la variación de carga de la configuración.

Estas ideas ya aparecieron en la ecuación (4.129) y en el ejemplo 4.10. Allí, para un sistema de N conductores, hicimos evidente la relación lineal que existe entre la carga de un conductor y los potenciales de todos los conductores del sistema. Repitamos aquí por comodidad la ecuación (4.129), en la que escribimos la carga del z -ésimo conductor en la forma

$$Q_z = \sum_{j=1}^N C_{zj} V_j \tag{5.1}$$

en términos de los coeficientes puramente geométricos C_{zi} que tienen la propiedad de ser definidos positivos cuando se repite el subíndice, es decir, los coeficientes C_{ii} (denominados coeficientes de capacidad) son siempre positivos e independientes de la carga y del potencial. Resolvamos la ecuación (5.1) para los dos conductores de la figura 5.1, en el que el conductor interior tiene carga Q_1 y se encuentra a potencial V_1 , en tanto que el otro está a tierra ($V_2 = 0$) y tiene carga Q_2 (inducida por el conductor 1).

Aplicando directamente la expresión (5.1) obtenemos el sistema de dos ecuaciones



$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \tag{5.2. a}$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \tag{5.2. b}$$

que, en virtud de ser $V_2 = 0$, se reduce a las formas

$$Q_1 = C_{11}V_1 \tag{5.3. a}$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 \tag{5.3. b}$$

Fig. 5.1: sistema de dos conductores con uno de ellos puesto a tierra y el otro, interior y contenido en el primero, se halla a potencial $V_1 \neq 0$.

Como el campo eléctrico entre las superficies que limitan al conductor 2 debe ser nulo, el teorema de Gauss asegura que debe serlo la suma de las cargas encerradas, esto es

$$Q_1 + Q_2 = 0 \equiv Q_1 = -Q_2 \tag{5.4}$$

de forma tal que inmediatamente resulta

$$C_{11} = -C_{21} \quad (5.5)$$

es decir, cuando se trata de dos conductores, uno rodeando al otro, el externo puesto a tierra, el coeficiente de capacidad es igual al de inducción cambiado de signo. Y como además el conjunto está puesto a tierra, el campo eléctrico entre los conductores ha quedado aislado (véase la sección 4.5). Un dispositivo como este, que consta de sólo dos conductores, aislados, cargados con cargas iguales y opuestas, se denomina condensador o capacitor. El coeficiente de capacidad del sistema define su *capacidad*, de manera tal que la capacidad de un condensador es definido positivo, independiente de la carga y del potencial a que se halla el condensador, y es un factor puramente geométrico.

Simbólicamente, para todo capacitor escribimos los resultados anteriores en la forma

$$dq = C dV \quad (5.6)$$

en la que el coeficiente de proporcionalidad C es la capacidad *del condensador* (porque de hecho el coeficiente de capacidad de un sistema de dos conductores aislados es único)

El hecho de que la capacidad de un conductor se defina como un factor de proporcionalidad, de alguna manera define la capacidad como la cantidad de carga que debe traerse desde el infinito hasta la superficie conductora (finita) para incrementar en un volt su diferencia de potencial (respecto de infinito). Y hablamos sólo de capacidades de conductores porque en un dieléctrico (un aislante eléctrico) podríamos distribuir carga eléctrica en volumen y entonces el trabajo empleado para el transporte de cargas no quedaría inmediatamente definido. En un conductor sí, porque la carga se distribuye en superficie, recuérdese que todo conductor representa un sistema equipotencial, se encuentra todo al mismo potencial V de la superficie.

La capacidad de un conductor, de alguna manera, es una medida de la cantidad de carga que debe suministrarse a ese conductor para aumentar en una unidad la diferencia de potencial en su superficie (respecto del infinito). Por esa razón es una cantidad que depende sólo de factores geométricos y de modo alguno puede ser función de la carga o de la diferencia de potencial misma.

Para fijar estas ideas consideremos una esfera conductora de radio R cargada con carga q , de manera tal que su potencial en la superficie valga

$$V = \frac{kq}{R} \quad (5.7)$$

Alcanza con comparar las expresiones (5.6) y (5.7) para intuir que la capacidad de la esfera debe ser el factor R/k . Y de hecho lo es. Para verlo es suficiente con incrementar en una cantidad dq la carga q de la esfera (trayendo esa cantidad de carga desde el infinito) de modo tal que alcance un valor $Q = q + dq$. Este trabajo se traduce inmediatamente en un incremento dV de su potencial, que alcanza un valor V' dado por

$$V' = V + dV = \frac{kQ}{R} = \frac{k}{R} (q + dq) \quad (5.8)$$

de manera tal que la capacidad de la esfera de radio R , como esperábamos, vale

$$C = \frac{dq}{dV} = \frac{Q - q}{V' - V} = \frac{R}{k} \approx 1,1 \times 10^{-10} R \quad (5.9)$$

Por lo que se ve, la capacidad es una cantidad siempre positiva y su unidad es una unidad derivada que, a partir de la identidad (5.6), resulta del cociente entre carga y diferencia de potencial; en el sistema MKSC se la denomina farad (o más comúnmente faradio), y se la denota F . Obsérvese que la capacidad de una esfera del tamaño de la Tierra, cuyo radio medio es aproximadamente $6,4 \times 10^6 m$, es del orden de $7 \times 10^{-4} F$. Esto significa que a una semejante esfera metálica debemos agregarle $7 \times 10^{-4} C$ de carga para incrementar en un volt su potencial electrostático. Pero siendo un factor geométrico no trae demasiada información, salvo, quizás, que la unidad faradio parece demasiado grande para los cuerpos que manejamos habitualmente.

Ahora bien, ya hemos reiterado en numerosas oportunidades que el trabajo realizado para transportar cargas a un conductor aislado se traduce en una variación de su energía, almacenada en el campo eléctrico que genera el conductor. Desde ya que si el conductor no está aislado debemos tener

En el sistema cgs la unidad de capacidad es el statfaradio (que se anota como stF). En este mismo sistema de unidades, las cargas se miden en statcoulombs (stC) y los potenciales en statvolt (stV). Se define el statcoulomb como la cantidad de carga que debe tener cada uno de dos cuerpos para provocar entre ellos una fuerza de 1 dina. Entonces, en este sistema de unidades el valor de la constante k vale 1 dina cm^2/stC^2 . Sabiendo que $1 N = 10^5$ dina, y en el sistema MKS es $k = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, resulta de inmediato $1C = 3 \times 10^9 stC$, $1 F = 9 \times 10^9 stF$, y, en consecuencia, $1stV = 300 V$.

en cuenta que la posición del resto de los conductores del universo modifica el potencial en el punto donde se encuentra el conductor que estamos analizando. Eso es lo que hicimos al final del capítulo anterior y al principio de este. En consecuencia, el trabajo invertido en el transporte de carga habrá de depender de la disposición de todos los conductores y la energía se repartirá también entre todos los conductores.

El problema puede pensarse desde el punto de vista del campo eléctrico que genera cada conductor, que necesariamente afecta la distribución de cargas del resto de los conductores hasta encontrar el equilibrio. Mover cargas de un conductor a otro, por ejemplo, habrá de modificar todo el equilibrio porque todos los conductores se enteran del transporte de cargas vía la modificación de los campos eléctricos.

Por eso la solución plausible es aislar de a dos conductores. Por ejemplo, regresemos a los dos conductores de la figura 5.1, y pensémoslos como dos cáscaras conductoras esféricas concéntricas, de radios r_a y $r_b > r_a$, respectivamente, con cargas de igual magnitud y signo contrario. No importa el origen de esa carga, en el caso analizado

en la figura 5.1 se trataba de carga inducida pero ese detalle es ahora irrelevante. Sabemos que esas dos esferas generan un campo eléctrico nulo en la región externa a las dos cáscaras, porque tanto en $r > r_a$ como en $r > r_b$ cualquier superficie gaussiana encierra carga neta nula y la simetría esférica de la configuración nos asegura que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie (de manera tal que además del flujo es nulo también el campo). Cada esfera, a su vez, está a un potencial dado (véase el § 4.4), de manera tal que si llamamos V y V_b a los potenciales de las esferas, la diferencia de potencial entre ambas será $V_{ab} = V_b - V_a$.

La razón por la que aparece una diferencia de potencial es la siguiente: supongamos que las cargas que transportamos a la superficie interna de la configuración (la de radio menor, r_a) son las negativas. Que sean negativas o positivas carece de importancia para nuestra discusión, sólo pedimos que sean todas del mismo signo. Para llevar a velocidad constante la segunda carga desde el infinito a la esfera (y a todas las siguientes cargas negativas) debemos “empujar” en contra de la fuerza eléctrica, porque se trata de cargas de igual signo. Nuestro trabajo es siempre positivo y creciente (porque a mayor cantidad de carga depositada en la esfera, mayor es el trabajo que debemos realizar). Transportemos ahora la carga positiva a la esfera exterior. La primera carga positiva es atraída hacia la esfera por la presencia de las cargas negativas y nuestro trabajo es negativo porque debemos “tirar” de la carga para llevarla a velocidad constante. El trabajo que debemos realizar se mide, precisamente, por el potencial (por unidad de carga) que genera la esfera interna en la posición donde depositamos la carga que traemos. A medida que traemos más cargas positivas y las depositamos en la esfera externa el trabajo disminuye, e incluso llega a ser positivo cerca de la configuración.

Pero el trabajo neto negativo no habrá de ser mayor que el trabajo neto positivo, de manera tal que el potencial de la configuración resulta positivo y se mide por la diferencia de trabajos realizados o, equivalentemente, por la diferencia de potencial entre las esferas. Obsérvese que, salvo que se fijen los potenciales externamente (a través de una pila por ejemplo), el potencial de la esfera interna es mayor que el de la externa porque se requiere más trabajo para acarrear las cargas desde el infinito para armar la configuración (“se recorre más camino” hasta r_a que hasta r_b). Si la carga que se deposita en cada esfera vale Q , los potenciales de cada una de ellas serán

$$|V_a| = \frac{k|Q|}{r_a} \quad (5.10.a)$$

El trabajo empleado para armar una configuración de cargas queda contenido en alguna forma de energía (del campo eléctrico asociado) de la misma manera que el trabajo empleado para armar una configuración de masas queda contenido en alguna forma de energía (en este caso del campo gravitatorio). Para poder recuperar la energía electrostática debemos disponer de un arreglo que permita aislar el campo eléctrico, y esto se logra disponiendo conductores de pares (capacitores)

$$|V_b| = \frac{k|Q|}{r_b} \quad (5.10. b)$$

de manera tal que de su propia definición resulta

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a} \quad (5.11)$$

La identidad (5.11) es, en síntesis, la expresión de la capacidad de un arreglo de dos cáscaras esféricas concéntricas conductoras, que aíslan en su interior el campo eléctrico

Siempre podemos definir el faradio como la capacidad de un capacitor cuyas armaduras están cargadas con 1 coulomb a una diferencia de potencial de 1 volt. Pero de nuevo, debemos notar que esta definición no dice nada acerca de la geometría del capacitor (tanto da si es esférico o plano, la separación entre sus placas e, incluso, el dieléctrico entre las armaduras) de modo tal que la capacidad debe ser siempre independiente de la carga y de los procesos de carga.

generado por las cargas que existen en cada una de las superficies, es decir, se trata de un condensador, y por su geometría se lo caracteriza como condensador esférico.

Dos planos infinitos paralelos, cargados con densidad superficial de carga de igual valor y de signo contrario, también aíslan un campo eléctrico en su interior. Recordemos que si el plano infinito cargado es el plano XY , su campo eléctrico vale (ecuación (2.66))

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sg}(z) \hat{e}_z \quad (5.12)$$

El campo eléctrico de la configuración de dos planos habrá de ser también constante e independiente de la ubicación relativa de los planos. La figura 5.2 ilustra gráficamente la situación. Los campos generados por ambos planos son de igual magnitud. La diferencia evidente es que en un caso las líneas de campo son entrantes y en el otro son salientes. El campo eléctrico es constante, de manera tal que en la región externa a las placas cada vector saliente se cancela con uno entrante. En cambio, en la región interna el campo de las placas es en el mismo sentido y la contribución es constructiva, esto es, se suman ambos campos eléctricos. En conclusión, el campo es nulo fuera de las placas y entre ellas vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_z \quad (5.13)$$

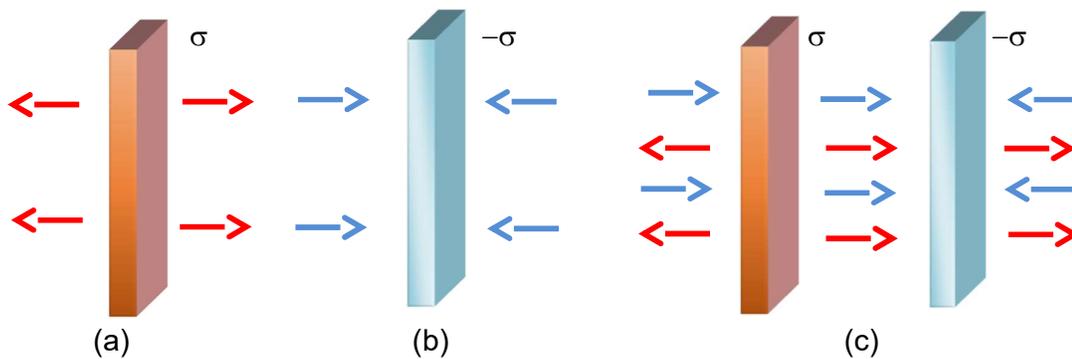


Fig. 5.2: (a) y (b) muestran las líneas de campo eléctrico en planos aislados cargados con densidad positiva y negativa, respectivamente. En (c) el sistema consiste en dos planos con carga opuesta. Obsérvese que en la región entre los planos las líneas tienen el mismo sentido, en tanto que en la región externa los sentidos son opuestos y, por tanto, el campo se cancela.

A los efectos prácticos, las placas están aisladas del resto de los conductores porque el campo eléctrico en la región externa es nulo. Desde ya que la construcción de un dispositivo semejante es impensable, pero si la distancia entre dos placas reales, digamos d , es mucho menor que la longitud característica de cada placa, en la región interna y lejos de los bordes las placas se ven “infinitas”. Piénselo de esta manera: si usted apoya la nariz en la mitad de un muro, el muro le parece infinito porque “no termina nunca”. Si apoya la nariz en su mano verá buena parte de lo que hay detrás de su mano. La diferencia entre el muro y su mano es que la longitud de su nariz (la distancia entre sus ojos y el objeto) es mucho menor que el ancho o el largo del muro pero es comparable a la longitud característica de su mano. Por lo demás, es necesario estar lejos de los bordes del paredón; si se asoma por la parte superior del muro verá parte de la pared y parte del resto del universo, de manera tal que no encontrará manera de pensar al muro como infinito.

Pensemos por ahora que trabajamos en esta aproximación. Supongamos que la placa positiva de la figura 5.2 (c) se halla a potencial V_1 en el origen de un sistema de coordenadas, digamos z , que crece hacia la derecha, y que la placa negativa se encuentra en la posición $z = d$, a potencial V_2 . Dado que el campo eléctrico se orienta en la dirección \hat{e}_z queda claro que el potencial crece en sentido opuesto, es decir, $-\hat{e}_z$, y en consecuencia resulta $V_1 > V_2$. La diferencia de potencial la calculamos (siguiendo el procedimiento del capítulo 4) a partir de la expresión (5.13) escribiendo

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dz \tag{5.14}$$

de donde es inmediato que vale la relación

$$V_2 - V_1 = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0} \Rightarrow V_{21} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (5.15)$$

Como estamos tratando el caso de dos placas finitas (placas reales) tiene sentido evaluar el valor de la carga de cada placa como $Q = \sigma A$, donde A es el área de cada placa. Luego, la capacidad de un capacitor de dos placas paralelas será

$$C = \frac{\sigma A}{\sigma d / \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (5.16)$$

Debemos mencionar que la expresión (5.16) es válida sólo dentro de la aproximación que le da origen, es decir, una configuración de dos placas paralelas separadas una distancia mucho menor que la longitud característica de cada placa. Vale la pena recordar también que el campo eléctrico de la expresión (5.14) vale sólo lejos de los bordes de las placas. Si L_1 y L_2 designan el largo y el ancho de cada placa nuestra aproximación significa que la distancia d entre las placas es tal que $d \ll L_1, L_2$. Y que los cálculos tengan valor lejos de los bordes de las placas del capacitor tiene que ver con la curvatura de las líneas de campo eléctrico en esos bordes, de manera tal que es imposible garantizar que en esa región el campo sea uniforme y, menos aún, homogéneo.

Normalmente, a los capacitores se los clasifica por su geometría. Así, la expresión (5.16) representa la capacidad de un capacitor plano, en tanto que la identidad (5.11), como ya dijimos, expresa la capacidad de un capacitor esférico.

La capacidad de un capacitor depende directa y linealmente del dieléctrico que se coloca entre las armaduras (a través del coeficiente o constante de permitividad). En nuestras expresiones figura el coeficiente de vacío, aunque su valor es absolutamente similar al del aire. Sin embargo, por razones que discutiremos en el próximo capítulo, la permitividad del respecto de los dieléctricos es siempre mayor que la de vacío, de manera tal que introducir un dieléctrico diferente de aire entre las armaduras aumenta la capacidad del arreglo

5.3 – Energía almacenada en un capacitor

Ya hemos mencionado que al agregar carga a las placas de un capacitor debe incrementarse la energía contenida en el campo eléctrico. Podemos analizar la situación de esta manera: pensemos que entre las dos placas de un capacitor existe una diferencia de potencial V_{21} , es decir, la placa positiva se halla a un potencial $V_1 - V_2$ volt por encima del potencial de referencia de la placa negativa. El trabajo que debe realizarse para transportar una cantidad de carga dQ desde la placa negativa a la positiva en contra de la fuerza eléctrica vale

$$dW = V_{21} dQ \quad (5.17)$$

que es una medida del incremento de energía dU del sistema. El transporte de la cantidad diferencial de carga dQ altera en dV_{21} la diferencia de potencial. A partir de la definición (5.6) es inmediato escribir

$$dW = dU = CV_{21}dV_{21} \quad (5.18)$$

Luego, el trabajo neto W , relacionado con el transporte de la cantidad total de carga de la placa y que se traduce en el incremento de energía interna U del capacitor, vale

$$W = U = \int CV_{21}dV_{21} = \frac{1}{2}CV_{21}^2 + \alpha \quad (5.19)$$

La energía almacenada en un capacitor naturalmente depende de su capacidad. Sin embargo, aumentar la capacidad no implica necesariamente aumentar la energía almacenable porque la variación depende además del proceso de carga.

donde α es una constante de integración. Sin embargo, si los potenciales de las dos placas fueran iguales ($V_{21} = 0$) el trabajo para transportar el elemento diferencial de carga dQ sería nulo y no habría variación alguna de energía (obsérvese que en este caso el campo eléctrico *entre* las placas sería cero, de manera tal que la fuerza eléctrica también se anularía, es decir, no haría falta realizar trabajo en contra del campo eléctrico para transportar la carga). Si a ese estado le asignamos energía nula debe ser $\alpha = 0$ y resulta

$$U = \frac{1}{2}CV_{21}^2 \equiv \frac{1}{2}C \Delta V^2 \quad (5.20)$$

Desde un punto de vista formal, las expresiones

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V \quad (5.21)$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (5.22)$$

que se obtienen a partir de la forma (5.20) usando la identidad (5.5), son en un todo equivalentes aunque, como discutiremos más adelante en este capítulo, se asocian a

procesos en los que la energía varía manteniendo la carga constante o el potencial constante.

5.4 – Asociaciones de capacitores

5.4.1 – Asociación en serie

Dos capacitores en serie se muestran en la figura 5.3, en la que además se introduce el símbolo circuital de un capacitor. Obsérvese que en esta disposición conectan entre sí una de sus placas a través de un alambre conductor. Puede pensarse de forma análoga a como lo hicimos en el capítulo 1, en relación a las resistencias térmicas: si el flujo (en este caso de cargas) se interrumpe al quitar uno de los elementos, esos elementos están en serie. Si, por el contrario, encuentra un camino alternativo por donde fluir, esos elementos están en paralelo.

En la conexión serie la batería no entrega una carga por cada placa, sino que por cada carga que entrega se induce otra en cada una de las otras placas. Eso es lo que provoca que la carga de todos los capacitores en serie sea la misma.

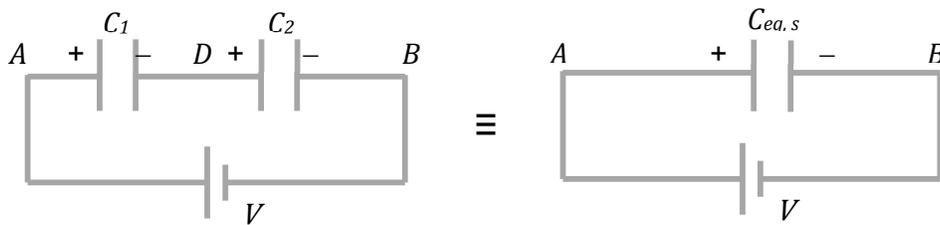


Fig. 5.3: asociación serie de dos capacitores. Hallar la capacidad equivalente significa encontrar el valor de un único capacitor capaz de reemplazar eléctricamente a los otros dos.

Nótese que al conectar la batería habrán de circular cargas hasta las placas de los capacitores. Cuando una carga positiva q se aloja en la placa izquierda del capacitor C_1 , una carga $-q$ se induce en la placa opuesta y una carga q debe migrar a la placa adyacente del capacitor C_2 . Algo similar ocurre en este capacitor, y las cargas habrán de fluir hasta que la diferencia de potencial $V_{BA} = V_A - V_B$ sea igual al potencial de la batería (obsérvese de paso que es el punto A el que está a mayor potencial, y en consecuencia todo ocurre como si se tratara de dos pilas en oposición). Pero que el potencial $V_{BA} = V_A - V_B$ sea igual al potencial de la batería no implica de modo alguno que lo sean los potenciales $V_{DA} = V_A - V_D$ y $V_{BD} = V_D - V_B$, los potenciales de cada capacitor. Y esto se debe a que el proceso de carga impone que las cargas en las placas adyacentes se igualen, de manera tal que la carga en ambos capacitores debe ser la misma (digamos Q).

Hay aquí otro punto de interés. La placa derecha del capacitor C_1 y la placa izquierda del capacitor C_2 se hallan a igual potencial. Al cabo, están conectados por un conductor, y sabemos que un conductor es un sistema de potencial constante. Los que no están a igual

potencial son los puntos A y B , aunque una vez logrado el equilibrio, como no circula más carga, debe ser

$$V_{BA} = V_A - V_D + V_D - V_B = V_{C1} + V_{C2} = V \quad (5.23)$$

Si queremos transportar una unidad de carga desde el punto A de la figura 5.3 hasta el punto B , debemos realizar un trabajo que puede pensarse como la suma de todos los trabajos parciales realizados en cada tramo arbitrario del circuito (en la unidad 7 discutiremos esta propiedad como una consecuencia directa de la conservación de la energía). De esta forma, en términos de la igualdad anterior, para transportar una carga unidad desde A hasta B habrá que realizar un trabajo

$$V_{BA} = V_{DA} + V_{DB} \quad (5.24)$$

Ahora bien, dado que

$$V_{AD} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} \quad (5.25)$$

en tanto que

$$V_{DB} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2} \quad (5.26)$$

resulta de manera inmediata

$$V_{AB} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{eq,s}} \quad (5.27)$$

donde $C_{eq,s}$ representa la capacidad equivalente del arreglo en serie, esto es, la capacidad que tendría que tener un único capacitor que reemplazara a los dos del arreglo. De esta manera resulta

$$\frac{1}{C_{eq,s}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq,s} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (5.28)$$

Si se agrega un capacitor a un arreglo en serie la capacidad del conjunto disminuye. Por el contrario, si se agrega un capacitor en paralelo la capacidad del sistema aumenta.

El procedimiento formal puede extenderse a un arreglo serie de N capacitores. Obsérvese que las placas de los N capacitores habrán de tener la misma carga, porque de otra manera no puede alcanzarse el equilibrio, pero si los valores de los capacitores son diferentes son diferentes también las diferencias de potencial entre las placas de cada capacitor del arreglo. Utilizando un sencillo

argumento de conservación de la energía, lo más que podemos asegurar es que el trabajo invertido para pasar por todos los capacitores es igual al trabajo entregado por la fuente. En síntesis, dados N capacitores C_1, C_2, \dots, C_N en serie, su capacidad equivalente resulta

$$C_{eq,s} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}} \tag{5.29}$$

5.4.2 – Asociación en paralelo

Dos capacitores en paralelo se muestran en la figura 5.4. De nuevo, se trata de hallar el valor de un único capacitor que sea eléctricamente equivalente a los dos capacitores dados.

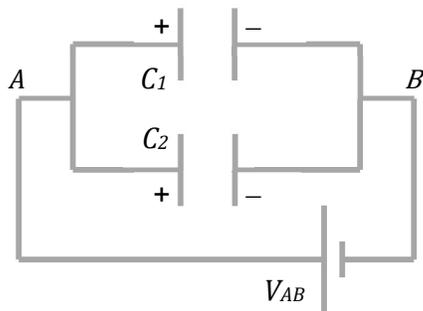


Fig. 5.4: dos capacitores en paralelo.

Obsérvese que en esta disposición conectan entre sí sus dos placas, y están al mismo potencial. Al conectarse la batería se transportan cargas a las placas de los capacitores. En este caso, si deseamos transportar una carga entre los puntos B y A de la figura 5.4 ya no es necesario pasar a través de los dos capacitores. Como el trabajo para transportar la carga unidad depende sólo de la diferencia de potencial entre los extremos, resulta que así como la diferencia de potencial entre placas es la misma para los dos capacitores, en general no habrán de ser iguales

sus cargas (salvo que los dos capacitores sean indistinguibles, lo que implica que tienen el mismo valor). Luego, las cargas de cada capacitor valen

$$Q_1 = C_1 V_{BA} \tag{5.30}$$

$$Q_2 = C_2 V_{BA} \tag{5.31}$$

Si la idea es reemplazar el arreglo paralelo por un capacitor equivalente, parece razonable pensar que la carga Q de este capacitor equivalente sea la suma de las cargas

de los dos capacitores del arreglo. De hecho, la carga total del arreglo se distribuye entre las placas de los dos capacitores, de manera tal que debe cumplirse

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{5.32}$$

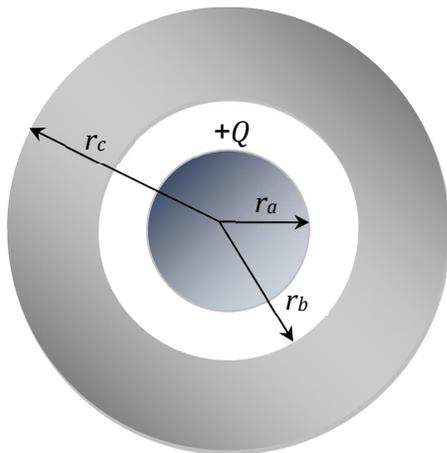
De esta forma, es casi inmediato a partir de las tres identidades últimas que la capacidad equivalente del arreglo paralelo, digamos $C_{eq,\parallel}$, se expresa como

$$C_{eq,\parallel} = \frac{Q}{V_{BA}} = \frac{Q_1}{V_{BA}} + \frac{Q_2}{V_{BA}} = C_1 + C_2 \tag{5.33}$$

La extensión al caso de N capacitores dispuestos en paralelo es inmediata. Dados N capacitores C_1, C_2, \dots, C_N en paralelo, su capacidad equivalente resulta

$$C_{eq,\parallel} = C_1 + C_2 + \dots + C_N \tag{5.34}$$

Una curiosidad que surge de las expresiones (5.29) y (5.34). Estas expresiones parecen ser opuestas a las de asociaciones de resistencias (al menos las térmicas, que discutimos en la sección 1.10.1, ecuaciones (1.59) y (1.64)), es decir, agregar un capacitor en serie disminuye la capacidad total, en tanto que si se lo agrega en paralelo la aumenta. La razón de este comportamiento tiene que ver con la energía de la configuración, que se asocia al trabajo que realiza la fuente para cargar los capacitores del arreglo. Supongamos dos capacitores idénticos, que se cargan por completo con una unidad de carga (de valor irrelevante para la discusión). Si están en serie, la fuente entrega sólo una unidad de carga, si están en paralelo debe entregar dos. Luego, el arreglo en paralelo almacena más energía que el arreglo en serie, que es lo mismo que decir que su capacidad es mayor.



Ejemplo 5.1: Sea la configuración de conductores de la figura 5.5, que consiste en un conductor de radio r_a rodeado de una cáscara esférica, concéntrica, de radios interior r_b y exterior r_c . Calculemos la capacidad de la esfera interna, que tiene carga $+Q$.

La simetría esférica del problema indica que en las regiones $r_a < r < r_b$ y $r > r_c$ el campo electrostático también es esféricamente simétrico, es decir, es de la forma

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{e}_r \tag{5.35}$$

Fig. 5.5: en el casquete esférico interior (de radio r_a) se ha depositado una cantidad Q de carga. Sobre las otras superficies la carga se induce.

en tanto que en la región $r_b < r < r_c$ el campo es nulo, como lo es en la zona $r < r_a$, por tratarse del interior de conductores. Luego, en estas dos últimas zonas el potencial es constante (no necesariamente nulo, y de hecho no lo es).

En particular, en la región $r_b < r < r_c$ por continuidad resulta $V(r_b) = V(r_c)$. Tomando como referencia $V(\infty) = 0$ (podemos hacerlo porque la configuración de cargas es finita, es decir, no hay cargas en el infinito) calculamos el potencial $V_c \equiv V(r_c)$ como

$$\int_{r_c}^{\infty} dV = - \int_{r_c}^{\infty} \frac{kQ}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dr \Rightarrow V_c = \frac{kQ}{r_c} \tag{5.36}$$

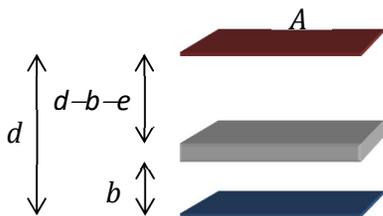
A partir de la última expresión podemos ahora calcular el potencial $V_a \equiv V(r_a)$

$$\int_{r_a}^{r_b} dV = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{kQ}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dr \Rightarrow V_a = V_b + kQ \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = kQ \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} \right) \tag{5.37}$$

y, finalmente, la capacidad de la esfera de radio r_a y carga Q vale

$$C = \frac{Q}{V_a} = \frac{1}{k \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} \right)} \tag{5.38}$$

Ejemplo 5.2: Sea un capacitor de placas plano-paralelas, de área $A = 1 \text{ cm}^2$ cada una, separadas una distancia $d = 5 \times 10^{-2} \text{ cm}$. Entre las placas, a una distancia $b = 10^{-2} \text{ cm}$ de la inferior, se coloca una chapa conductora similar a las placas, de espesor $e = 10^{-2} \text{ cm}$, como se muestra en la figura 5.6. Calculemos la capacidad de la configuración.



La chapa conductora transforma al capacitor original en dos capacitores conectados en serie (obsérvese que los capacitores resultantes interconectan entre sí a través de la placa).

Si llamamos C_1 y C_2 a los capacitores resultantes en serie, siendo que son planos paralelos podemos calcular sus capacidades a partir de la identidad (5.21) como

Fig. 5.6: configuración de las placas del ejemplo 5.2

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d - b - e} \tag{5.39}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{b} \tag{5.40}$$

De esta manera, la capacidad de la configuración, en términos de la expresión (5.28), será

$$C_{eq,s} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 A}{d - e} \tag{5.41}$$

Obsérvese que la posición de la chapa resulta irrelevante, porque el conjunto se comporta en total como un capacitor con menor distancia interplacas. Resolviendo para los valores propuestos resulta

$$C_{eq} = 2,21 \times 10^{-12} F \equiv 2,21 \text{ pF} \tag{5.42}$$

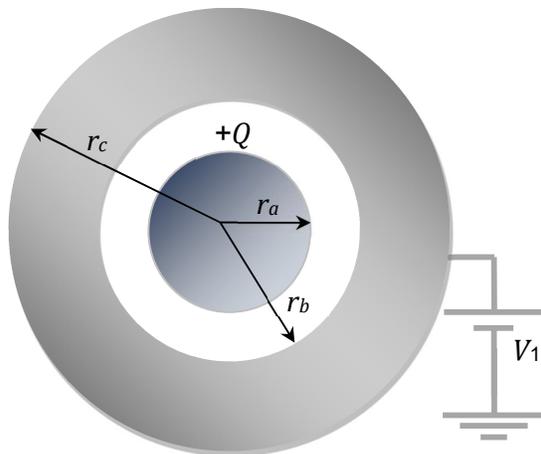
Ejemplo 5.3: La figura 5.7 muestra dos conductores esféricos, el interior de radio $r_a = 0,1m$ con carga $Q = -10^{-6} C \equiv -1\mu C$, y el exterior, de radios $r_b = 0,45 m$ y $r_c = 0,5 m$, a potencial V_1 respecto de tierra. Calculemos:

- a) el valor del potencial V_1 y el campo eléctrico de la superficie externa sabiendo que a una distancia $r_p = 1m$ del centro de simetría el potencial vale $V_p =$

$$1000 \text{ V} \equiv 1 \text{ kV};$$

- b) la diferencia de potencial entre ambas esferas;

- c) la capacidad entre las superficies de radios $r = r_a$ y $r = r_b$.



Como no hay cargas en infinito, podemos tomar $V(\infty) = 0$ como potencial de referencia, de manera tal que en la región $r > r_c$ el potencial de los puntos $r = r_p$ y $r = r_c$ sean

$$V_p = \frac{kQ_{EXT}}{r_p} \tag{5.43}$$

$$V_c \equiv V_1 = \frac{kQ_{EXT}}{r_c} \tag{5.44}$$

Fig. 5.7: el casquete esférico exterior se halla a potencial V_1 respecto de tierra. Esta condición fija el valor de la carga en la superficie exterior.

respectivamente, siendo Q_{EXT} la cantidad de carga de la superficie $r = r_c$. Obsérvese que en la superficie $r = r_b$ habrá de inducirse necesariamente una cantidad de carga de igual valor y de signo contrario a la carga de la superficie $r = r_a$, porque el campo eléctrico en el interior del casquete ($r_b < r < r_c$) es nulo. Pero la carga en la superficie $r = r_c$, a diferencia del ejemplo 5.1, queda ahora fijada por el potencial de referencia V_1 . De hecho, de la expresión (5.38) resulta

$$Q_{EXT} = \frac{V_P r_P}{k} = 1,11 \times 10^{-7} C \equiv 0,111 \mu C \quad (5.45)$$

Reemplazando en la igualdad (5.44) resulta inmediatamente

$$V_1 = \frac{kQ_{EXT}}{r_c} = V_P \frac{r_P}{r_c} = 2000 V \quad (5.46)$$

Obsérvese por otro lado que el potencial externo no afecta la simetría esférica de la configuración, de manera tal que el campo eléctrico es esféricamente simétrico y, a partir del teorema de Gauss, en la región $r > r_c$ resulta

$$\vec{E} = \frac{kQ_{EXT}}{r^2} \hat{e}_r \quad (5.47)$$

de manera tal que en $r = r_c$ tiene un valor $\vec{E}(r_c) = 4 \times 10^3 V/m \hat{e}_r$.

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre ambas esferas teniendo en cuenta que el campo eléctrico en la región $r_a < r < r_b$ queda determinado por la carga de la superficie $r = r_a$. Como la carga Q es negativa, en esta zona resulta

$$\vec{E}(r) = \frac{k|Q|}{r^2} (-\hat{e}_r) \quad (5.48)$$

de forma tal que

$$\int_{r_a}^{r_b} dV = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{k|Q|}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dr \Rightarrow V_b - V_a = k|Q| \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (5.49)$$

Teniendo en cuenta que el potencial en un conductor es constante, de manera tal que $V_b = V_1$, resulta en consecuencia

$$V_b - V_a = 70 kV \quad (5.50)$$

Obsérvese que el potencial de la esfera de radio $r = r_a$ vale $V_a = V_1 - 70 \text{ kV} = -68 \text{ kV}$. Este no es un valor que en sí mismo sea importante, como sí lo es la diferencia de potencial $V_1 - V_a$, que indica que para transportar una carga unidad desde los puntos $r = r_a$ hasta $r = r_b$ debe realizarse un trabajo de 70 kJ . Y el trabajo es positivo porque hay que “tirar” de la carga en el sentido del desplazamiento, en contra de la atracción que ejerce la carga negativa de la esfera de radio $r = r_a$.

Finalmente, calculemos la capacidad entre las superficies de radios $r = r_a$ y $r = r_b$. Ya hemos dicho que la carga de la superficie de radio $r = r_b$ debe ser la misma que la de la superficie $r = r_a$ para que se anule el campo eléctrico en el interior de la cáscara esférica. Esto es equivalente a tener dos armaduras con carga de módulo $|Q| = 1 \mu\text{C}$ a una diferencia de potencial 70 kV . Luego, la capacidad del sistema resulta

$$C = \frac{|Q|}{\Delta V} = 1,43 \times 10^{-11} \text{ F} \equiv 14,3 \text{ pF} \tag{5.51}$$

Ejemplo 5.4: Sea la disposición de capacitores de la figura 5.8. Suponiendo $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 12,6 \mu\text{F}$, $C_4 = 2 \mu\text{F}$, $C_5 = 8 \mu\text{F}$, $V_{AB} = 50 \text{ V}$, calculemos

- a) la capacidad equivalente del circuito;
- b) la carga en las armaduras y la diferencia de potencial entre ellas para cada capacitor.

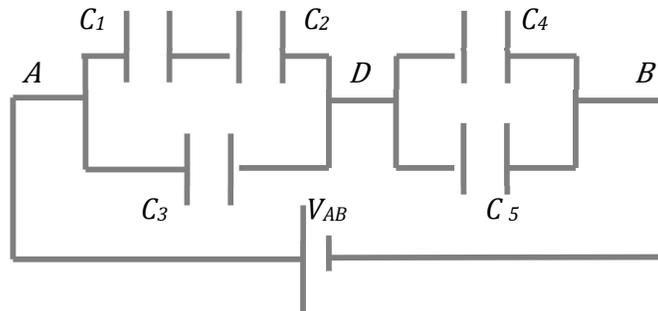


Fig. 5.8: disposición circuital de los capacitores del ejemplo 5.4.

Para calcular la capacidad equivalente llamemos C_{12} a la capacidad equivalente de la conexión en serie entre C_1 y C_2 , C_{123} a la capacidad equivalente del paralelo C_{12} con C_3 , y C_{45} a la capacidad equivalente del paralelo C_4 con C_5 .

A partir de las expresiones (5.29) y (5.34) resultan

$$C_{12} = 2,4\mu F \quad C_{123} = 15\mu F \quad C_{45} = 10\mu F \quad (5.52)$$

Luego, C_{eq} resulta de la serie C_{123} con C_{45} , y aplicando el resultado (5.29) obtenemos finalmente

$$C_{eq} = 6\mu F \quad (5.53)$$

Tomando los tramos AD y DB , resulta (véase la sección 5.4.a) $V_{AB} = V_{AD} + V_{DB}$. Pero

$$V_{AB} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} \quad (5.54)$$

$$V_{AD} = \frac{Q_{123}}{C_{123}} \quad (5.55)$$

$$V_{DB} = \frac{Q_{45}}{C_{45}} \quad (5.56)$$

y como C_{123} y C_{45} están en serie, las cantidades de carga Q_{123} y Q_{45} son las mismas, pues fluiría carga hasta alcanzar el equilibrio (véase la sección 5.4.a). De la igualdad (5.54) se desprende el valor de Q_{eq} que es el valor de las cargas Q_{123} y Q_{45} , esto es

$$Q_{eq} = C_{eq}V_{AB} = 300\mu C = Q_{123} = Q_{45} \quad (5.57)$$

Luego, a partir de las identidades (5.52), (5.55) y (5.56) se obtienen los valores

$$V_{AD} = 20V \quad V_{DB} = 30V \quad (5.58)$$

La diferencia de potencial V_{AD} está aplicada tanto a C_{12} como a C_3 . Luego, resultan

$$Q_{12} = C_{12}V_{AD} = 48\mu C \quad Q_3 = C_3V_{AD} = 252\mu C \quad (5.59)$$

Obsérvese que por estar en serie, los capacitores C_1 y C_2 tienen la misma carga en sus armaduras, esto es, $Q_1 = Q_2 = 48\mu F$.

Por otro lado, los capacitores C_4 y C_5 están ambos al mismo potencial, de manera tal que valen las ecuaciones

$$\frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_5}{C_5} \tag{5.60}$$

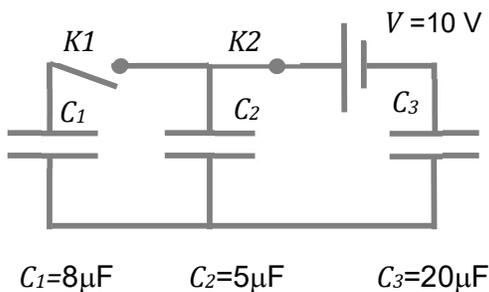
$$Q_4 + Q_5 = 300\mu F \tag{5.61}$$

Resolviendo por último el sistema de ecuaciones (5.60) - (5.61) resultan los valores

$$Q_4 = 60\mu F \quad Q_5 = 240\mu F \tag{5.62}$$

Ejemplo 5.5: Los capacitores que hemos denominado C_2 y C_3 en la figura 5.9 se hallan conectados a una batería de $10V$. Una vez alcanzado el estado estacionario se abre la llave $K2$ y se cierra la llave $K1$, de manera tal que los capacitores C_1 y C_2 quedan conectados y aislados. Para los valores de capacidad propuestos, calculemos la carga en cada uno de los capacitores C_1 y C_2 luego de modificar la posición inicial de las llaves.

Obsérvese que mientras la llave $K1$ permanece abierta y la llave $K2$ cerrada, los capacitores C_2 y C_3 están en serie. Es casi inmediato que la capacidad equivalente C_{23} entre estos dos capacitores vale



$$C_{23} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 4\mu F \tag{5.63}$$

de manera tal que la carga asociada al conjunto (y alojada en cada uno de los capacitores) vale

Fig. 5.9: capacitores del ejemplo 5.5. La llave $K2$ se abre recién cuando los capacitores C_2 y C_3 quedaron completamente cargados.

$$Q_{eq} = Q_2 = Q_3 = C_{23}V = 40\mu C \tag{5.64}$$

Cuando cerramos la llave $K1$ y abrimos la llave $K2$ conectamos los capacitores C_1 y C_2 entre sí y los aislamos (porque no hay ninguna fuente conectada). Parece evidente que habrá de fluir carga entre las armaduras de los capacitores hasta alcanzar alguna forma de equilibrio,

y este se logra sólo cuando se iguale la diferencia de potencial sobre cada capacitor (porque en tal caso ya no fluye carga). Matemáticamente, expresamos esta condición como

$$V_1' = V_2' \Rightarrow \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \quad (5.65)$$

Por otro lado, como no hay conectada fuente alguna, la carga total debe ser igual a la carga original que aporta el capacitor C_2 , es decir

$$Q_1' + Q_2' = Q_2 = 40\mu\text{C} \quad (5.66)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (5.65) y (5.66) conduce inmediatamente a la solución $Q_1' = 24,61\mu\text{C}$ y $Q_2' = 15,39\mu\text{C}$. Obsérvese que era de esperar que la carga del capacitor C_1 fuera mayor que la del capacitor C_2 porque al equilibrio se llega recién cuando ya no fluye carga entre las armaduras, y esto significa que la diferencia de potencial entre las armaduras de los dos capacitores es la misma y, más aún, quedan conectadas entre sí las placas de igual polaridad.

5.5 – Procesos a carga constante y a potencial constante

Imaginemos una configuración de capacitores y baterías en régimen estacionario.

La modificación de las capacidades de un arreglo de capacitores puede realizarse con las fuentes conectadas (en cuyo caso la entrega de trabajo garantiza la reacomodación y modificación de cargas) o con las fuentes desconectadas (sistema aislado), en cuyo caso, necesariamente, la carga permanecerá constante y sólo se reacomodará.

Esto significa que el sistema alcanzó el equilibrio, y esto ocurre una vez que los capacitores se cargaron por completo. Para pensarlo de otra forma, podemos imaginar a las baterías como “fuentes” de cargas, que habrán de fluir hasta que el campo eléctrico generado entre las placas de cada capacitor represente una batería en oposición que inhibe el posterior flujo de cargas.

Supongamos que queremos modificar la configuración del sistema. Esto podemos hacerlo de manera arbitraria, sea cambiando la disposición de las fuentes, de los capacitores o, incluso, variando la geometría de los mismos. Desde ya que el trabajo intercambiado entre el sistema y el

medio externo no puede ser nulo, porque un proceso general de este tipo requiere de una cierta cantidad de energía para poder progresar.

El trabajo intercambiado, con todo, debe estar asociado a la variación de energía de la configuración de capacitores que, como adelantamos en la sección 5.3, se halla ligada al tipo de proceso que se efectúe. En principio, todo proceso puede efectuarse desconectando las baterías, en cuyo caso (si aceptamos la imagen de las baterías como elementos que simplemente suministran carga) se realizan a carga constante, y las cargas se redistribuyen entre las placas hasta alcanzar un nuevo equilibrio, compatible con la cantidad de carga disponible. En caso contrario, el proceso será a potencial constante, y las cargas habrán de redistribuirse entre los capacitores hasta el nuevo estado de equilibrio, compatible en este caso con la diferencia de potencial aplicada. La diferencia esencial entre un proceso y otro es que si las fuentes permanecen conectadas, el trabajo necesario para el reacomodamiento de cargas lo suministran precisamente las fuentes, en tanto que si el sistema queda aislado de las baterías el trabajo (de acuerdo al primer principio de la Termodinámica que discutimos en el capítulo 1) debe realizarse a expensas de la energía interna. Con los siguientes ejemplos pretendemos cuantificar estas ideas.

Ejemplo 5.6: Sea la disposición circuital de la figura 5.10, en la que K es una llave simple y los capacitores son de capacidad variable (indicado por la flecha que los atraviesa). El ajuste del valor de la capacidad se logra modificando la geometría de las placas. Supongamos que una vez alcanzado el equilibrio, se abre la llave (de manera que no es posible flujo alguno de cargas) y se modifican las distancias interplacas de los dos capacitores. Calculemos la variación de energía del sistema.

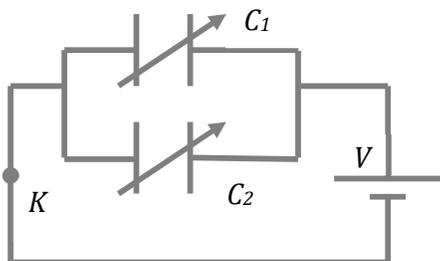


Fig. 5.10: la llave K se abre una vez que los capacitores están cargados. De esta manera las cargas sólo pueden reacomodarse, porque la carga total no varía.

Como quedó dicho líneas arriba, la cantidad de carga del sistema habrá de permanecer invariante una vez que se abra la llave, simplemente porque no existen ni fuentes ni sumideros de carga (implícitamente, estamos aceptando la ley de conservación de la carga eléctrica). Por su lado, esa cantidad de carga es fácil de evaluar a partir de las identidades (5.32) y (5.33), y llamando Q_1 y Q_2 a las cantidades de carga de cada capacitor resulta

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 = C_{eq}V = (C_1 + C_2)V \quad (5.67)$$

porque los capacitores están conectados en paralelo. Digamos que los capacitores son planos y que sus capacidades respectivas valen

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A_1}{d_1} \quad (5.68)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 A_2}{d_2} \quad (5.69)$$

Para simplificar el tratamiento estamos suponiendo que las capacidades C_1 y C_2 se modifican variando sólo la distancia entre las placas, pero manteniendo constante el área de las mismas en todo momento. Supongamos además, sin pérdida alguna de generalidad, que todas las placas involucradas tienen igual área, de manera tal que la capacidad equivalente después de modificar las distancias interplacas será

$$C'_{eq} = C'_1 + C'_2 = \varepsilon_0 A \left(\frac{d'_1 + d'_2}{d'_1 d'_2} \right) \quad (5.70)$$

Como la carga del conjunto se mantuvo constante, es fácil calcular la variación de la energía ΔU del sistema a partir de la expresión (5.22) como

$$\Delta U = U' - U_0 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C'_{eq}} - \frac{1}{C_{eq}} \right) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \left(\frac{d'_1 d'_2}{d'_1 + d'_2} - \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \right) \quad (5.71)$$

donde hemos designado con U' y U_0 las energía final e inicial del sistema, respectivamente. Parece evidente que la variación es positiva (se almacena más energía por unidad de volumen) si la capacidad equivalente disminuye, lo que a su vez ocurre si el efecto neto de la variación de la geometría de la configuración se traduce en un *incremento* de la distancia entre las placas de los capacitores. Obsérvese que el incremento de la densidad de energía proviene del trabajo que debe realizarse (entregarse al sistema) en contra de la fuerza eléctrica entre las placas, que es atractiva. Desde ya que si se reduce la distancia entre las placas, aumentando de esta manera la capacidad equivalente C'_{eq} , la variación de energía es negativa y esto se explica por el trabajo que el sistema entrega al medio externo o, dicho de otra forma, porque debemos realizar trabajo negativo, en contra de la fuerza eléctrica, mientras “frenamos” la placa y la mantenemos moviéndose a velocidad constante.

Ejemplo 5.7: Regresemos a la disposición circuital de la figura 5.10. Supongamos que una vez alcanzado el equilibrio se modifican las distancias interplacas de los dos capacitores, pero manteniendo la llave cerrada en todo momento (de manera que el potencial en los extremos de los capacitores permanece constante). Calculemos la variación de energía del sistema en estas condiciones.

Para analizar el problema no es necesario realizar todo el tratamiento formal del ejemplo anterior, pues sencillamente podríamos partir de la expresión (5.70) y reescribir la ecuación (5.71) teniendo en cuenta que ahora la carga debe variar al modificar la geometría de los capacitores, porque debido al vínculo externo (el potencial constante) el nuevo estado de equilibrio sólo puede alcanzarse con flujo neto de carga. Dicho de otra forma, la fuente suministra la carga necesaria que permite reacomodar el potencial de cada capacitor a medida que se varía su capacidad.

Sin embargo, puede ser ilustrativo pensar en el contenido energético del campo eléctrico entre las placas de los capacitores. Para ello, volvamos por el momento a la expresión (4.62) y llamemos u a la densidad de energía, esto es, la energía acumulada por unidad de volumen, $u \equiv U / \mathcal{V}$. De su propia definición resulta

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad (5.72)$$

y en nuestro caso la energía de cada capacitor se escribe sencillamente como

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{x} \right)^2 \quad (5.73)$$

donde x representa la coordenada a lo largo de la cual se desplaza la placa móvil, esto es, mide la distancia (variable) entre las placas del capacitor. Parece evidente que una disminución en la distancia interplacas acarrea un incremento de la energía del sistema, y de hecho podemos calcular el valor del incremento de energía de cada capacitor como

$$du = -\epsilon_0 \frac{V^2}{x^3} dx \quad (5.74)$$

que es positivo si dx es negativo, esto es, si una placa se mueve hacia la otra o, lo que es lo mismo, si se incrementa la capacidad (recordemos que estamos pensando en capacitores de placas planas de área constante). Desde otro punto de vista, podemos pensar el problema de esta forma: si escribimos la energía almacenada en cada capacitor en la forma

$$U = \frac{1}{2} V^2 C \quad (5.75)$$

inmediatamente podemos calcular la variación de energía como

$$dU = \frac{1}{2} V^2 dC \quad (5.76)$$

y, de nuevo, a potencial constante se concluye que en el caso que estamos analizando el incremento de energía ocurre con el incremento de capacidad. La variación del contenido energético podemos escribirla a partir de la expresión (5.20) como

$$\Delta U = U' - U_0 = \frac{V^2}{2} (C'_{eq} - C_{eq}) = \frac{V^2 \epsilon_0 A}{2} \left(\frac{d'_1 + d'_2}{d'_1 d'_2} - \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right) \quad (5.77)$$

donde, recordemos, V es el valor del potencial constante de la fuente. Es casi evidente que la energía se incrementa si disminuimos la distancia entre las placas de los capacitores. Sin pérdida de generalidad, para verlo alcanza con pensar que la distancia entre placas es la misma en los dos capacitores; es casi evidente que para $d' < d$ el paréntesis del último miembro de la forma (5.77) es positivo.

Obsérvese que, a diferencia del caso planteado en el ejemplo anterior, hay ahora dos trabajos a realizar: uno, negativo, es el que debemos efectuar en contra de la fuerza eléctrica para “frenar” la placa y permitir que se mueva a velocidad constante (para evitar que el trabajo realizado por el campo se transforme en energía cinética) y otro, positivo, para transportar cargas desde la fuente hasta las placas (para que el cociente Q/C permanezca constante frente al incremento de la capacidad). Es casi evidente que al trabajar con la fuente permanentemente conectada y a valor de potencial constante, el trabajo lo hace la fuente.

Ejemplo 5.8: Una vez cargados los capacitores de la figura 5.11 se desconecta la fuente y se invierte la conexión del capacitor C_2 , es decir, la placa de polaridad positiva se conecta con la de polaridad negativa del capacitor C_1 . Calculemos la variación de energía del sistema

La capacidad equivalente original del sistema es sencillamente la capacidad del arreglo paralelo, esto es,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (5.78)$$

La carga de cada capacitor será

$$Q_1 = C_1 V \tag{5.79}$$

$$Q_2 = C_2 V \tag{5.80}$$

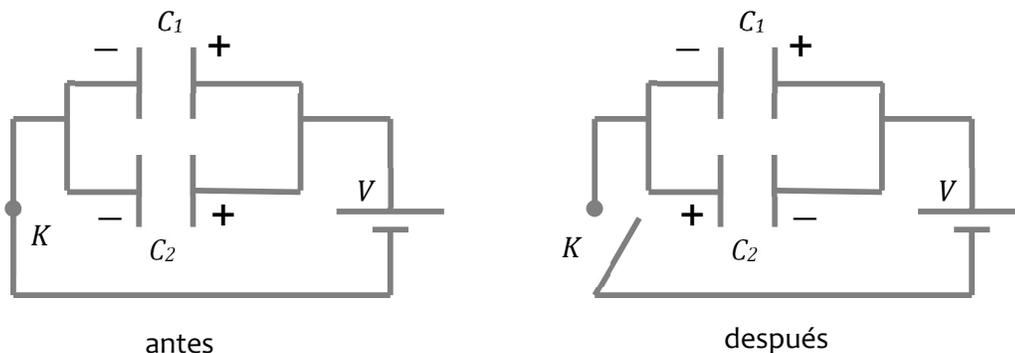


Fig. 5.11: una vez que los capacitores están cargados se abre la llave K y se desconecta el capacitor C₂. Las cargas deben reacomodarse para encontrar un nuevo potencial de equilibrio.

de manera tal que la carga total original acumulada en el arreglo valdrá

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 = C_{eq}V \tag{5.81}$$

Obsérvese que antes de desconectar el capacitor C₂ y reconectarlo con la polaridad invertida la carga total presente en el sistema viene dada por la identidad (5.81). Después de reconectarlo, la carga total ya no puede ser la misma porque en el medio hay un proceso de redistribución de carga (debido a que los dos capacitores están cargados) necesario para mantener el equilibrio del sistema.

Pensémoslo de este modo: en el ejemplo 5.5 desconectamos un sistema de capacitores y conectamos un capacitor cargado a uno completamente descargado. En tal situación no había mucho que discutir porque al segundo capacitor sólo le cabe aceptar carga. Y como nuestros capacitores no tienen polaridad definida, distribuirán la carga de modo de adoptar la configuración más estable, esto es, las placas quedan a igual potencial y se conectan entre sí a través de las placas de igual polaridad.

¿Qué ocurriría si el capacitor C₁ hubiera estado cargado? Claramente, la carga a distribuir ya no sería la misma, y de manera casi evidente el valor de la carga neta a distribuir entre los dos capacitores dependerá de la polaridad de las placas que se conecten, porque de modo alguno puede ser irrelevante conectar entre sí placas de igual polaridad o placas de polaridad opuesta. Observemos que el capacitor C₂ del ejemplo 5.5 tiene su placa superior a potencial positivo, de manera tal que si el capacitor C₁ (al que ahora habremos de asignarle carga inicial Q₁) tiene su placa superior a potencial positivo el potencial total será

mayor que con el capacitor C_1 descargado, y esto se logra sólo si se suman las cargas iniciales, es decir, si los capacitores se conectan entre sí a través de las placas de igual polaridad, la carga total a redistribuir resulta ser la suma de las cargas iniciales.

En nuestro caso del ejemplo 5.7, naturalmente, el equilibrio habrá de conseguirse después que los capacitores aniquilen parte de sus cargas. De esta manera, resulta

$$|Q'| = |Q_1 - Q_2| = Q'_1 + Q'_2 \quad (5.82)$$

y

$$V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \quad (5.83)$$

Específicamente supongamos que el capacitor C_1 es de $8\mu F$ y el capacitor C_2 es de $5\mu F$, conectados a una diferencia de potencial de $50V$. De las expresiones (5.74) y (5.75) resultan inmediatamente los valores de las cargas de cada capacitor, $Q_1=400\mu C$ y $Q_2=250\mu C$. La expresión (5.77) nos asegura que la carga neta, luego de la reconexión, es de $150\mu C$, de manera tal que debemos resolver ahora el sistema de ecuaciones

$$Q'_1 + Q'_2 = 150\mu C \quad (5.84)$$

$$\frac{Q'_1}{8} = \frac{Q'_2}{5} \quad (5.85)$$

que inmediatamente resulta en las soluciones

$$Q'_1 = 57,7\mu C \quad (5.86. a)$$

$$Q'_2 = 92,3\mu C \quad (5.86. b)$$

Ahora podemos plantear el problema de la variación de energía del sistema. Notemos que la energía inicial se calcula fácilmente como

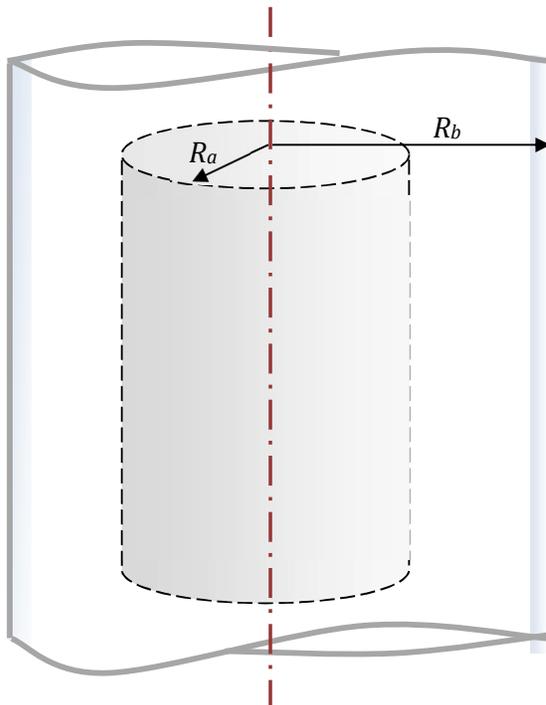
$$U_0 = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = 1,625 \times 10^{-2} J \quad (5.87)$$

en tanto que la única manera que tenemos de calcular la energía final es como la suma de las energías de cada capacitor porque en este caso no tiene sentido plantear la “capacidad equivalente” de un sistema que no está ni en serie ni en paralelo. Por lo pronto, resulta

$$U' = \frac{Q_1'^2}{2C_1} + \frac{Q_2'^2}{2C_2} = 0,106 \times 10^{-2} J \quad (5.88)$$

Como puede verse, la energía ha decrecido en un factor 16. La razón inmediata es la disminución de la carga neta disponible, pero ¿dónde está la energía perdida? Se ha transformado parte en calor y parte se empleó para aumentar la energía potencial de los átomos que han recibido las cargas recombinadas.

Ejemplo 5.9: Hemos discutido hasta aquí con algún detalle las propiedades de los capacitores con geometría plana y esférica. Otra geometría muy frecuente es la cilíndrica, básicamente asociada a cables coaxiales (si usted está abonado a una empresa de servicios de televisión por cable habrá visto este tipo de cable en la entrada de la señal al



televisor), que consisten en dos conductores cilíndricos, coaxiales, el interno generalmente rígido y el externo en forma de malla, separados por un cilindro aislante, generalmente de plástico. La presencia del aislante entre los conductores modifica sustancialmente las propiedades del capacitor, cambios que habremos de discutir en el próximo capítulo. Y por lo demás, este tipo de cables se utiliza para la transmisión de datos en forma de corriente eléctrica de alta frecuencia, un tema que pospondremos hasta el capítulo 10. Sin embargo, podemos ir adelantando algunas propiedades de estos sistemas analizando un capacitor cilíndrico, como el de la figura 5.12.

Fig. 5.12: cilindros coaxiales, de radio R_a el interno y R_b el externo. Si los cilindros son infinitos puede calcularse la capacidad por unidad de longitud.

Por lo pronto, habremos de suponer que la superficie del conductor interior se halla a potencial V_a y que el externo está a potencial V_b . Sabemos que si el

conductor interior tiene carga positiva el campo eléctrico estará dirigido hacia afuera, es decir, en la dirección radial saliente (véase la ecuación (3.26)). Si la densidad de carga

superficial del conductor interno vale σ , cada cilindro gaussiano de radio $R > R_a$ y altura h encerrará una carga Q

$$Q = 2\pi R_a h \quad (5.89)$$

de modo tal que el campo eléctrico (que tiene simetría cilíndrica), de acuerdo al teorema de Gauss (3.6) es de la forma

$$E(R)2\pi R h = \frac{\sigma 2\pi R_a h}{\epsilon_0} \quad (5.90)$$

y debido a su simetría podemos escribir como

$$\vec{E}(R) = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0 R} \hat{e}_R \quad (5.91)$$

de modo tal que la diferencia de potencial entre las superficies de los cilindros resulta en consecuencia

$$\int_{R_a}^{R_b} dV = - \int_{R_a}^{R_b} \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0 R} \hat{e}_R \cdot \hat{e}_R dR \quad (5.92)$$

Recordemos que V_a y V_b son los potenciales en las superficies de radios R_a y R_b , respectivamente, de manera tal que la ecuación (5.92), después de una sencilla manipulación algebraica, se reduce a la forma

$$V_a - V_b = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \quad (5.93)$$

Obsérvese que la ecuación (5.93) es coherente con el hecho de que la superficie interna se halla a potencial mayor que la superficie externa, pues el miembro derecho es positivo (recordemos que hemos tomado $\sigma > 0$). Por lo demás, si multiplicamos ambos miembros por $2\pi L$ resulta

$$V_a - V_b = \frac{\sigma 2\pi R_a L}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \quad (5.94)$$

Ahora bien, la cantidad $2\pi\sigma R_a L$ es la cantidad de carga Q contenida en un segmento de longitud L de cilindro interior, de modo tal que de acuerdo a nuestra definición (5.6) de capacidad resulta

$$C = \frac{\sigma 2\pi R_a L}{V_a - V_b} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)} \quad (5.95)$$

Aclaremos rápidamente que este resultado es sólo aproximado porque el campo eléctrico (5.91) es válido si los cilindros son infinitos, de modo tal que la es más adecuado calcular la capacidad por de la configuración unidad de longitud, esto es

$$\frac{C}{L} = \frac{\sigma 2\pi R_a}{V_a - V_b} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)} \quad (5.96)$$

Resumen del capítulo

Desde un punto de vista formal, hemos visto que la capacidad de un arreglo de conductores no es otra cosa que una constante de proporcionalidad que relaciona las variaciones de carga de los conductores con las del potencial electrostático asociado. Esta interpretación, además de útil, es por demás sencilla y elegante, porque por un lado recuerda que la variación de cargas modifica el campo eléctrico (y en consecuencia el potencial) y por el otro reafirma que los campos se hallan ligados a la geometría de la distribución de cargas.

Luego de introducir el concepto de capacidad, a lo largo del capítulo hemos desarrollado las ideas básicas de las aplicaciones relacionadas con los capacitores. Así, no sólo discutimos diferentes arreglos posibles sino también la posibilidad de usar un capacitor como “almacenador” de energía. De hecho, en la parte final del capítulo hemos visto diferentes maneras de variar la energía almacenada en el conjunto de conductores, sea manteniendo la carga constante o manteniendo constante el potencial.

Sin embargo, en todo momento resaltamos que la capacidad de un arreglo de conductores es un factor meramente geométrico, y que sólo tiene valor en caso que trabajemos con conductores aislados. Por ese motivo hemos desarrollado las ideas generales pensando en arreglos que nos permitieran asumir como válida tal suposición. En el caso particular de los capacitores de placas plano-paralelas la suposición es válida en el caso en que las placas sean infinitas, una situación por cierto irrealizable. Sin embargo, nuestro argumento es que si trabajamos con placas separadas una distancia mucho menor que la longitud característica de cada placa en particular y suficientemente lejos de los bordes, el campo eléctrico se ve esencialmente constante.

Complementos del capítulo

Capacitores de muy alta capacidad

Al principio del capítulo calculamos, a modo de ejemplo, la capacidad de una esfera de radio R , y concluimos en que un cuerpo del tamaño de la Tierra posee una capacidad del orden de $10^{-4} F$. Hasta aquí no hemos ofrecido ningún argumento que nos permita pensar que en las aplicaciones prácticas se requieran valores muy altos de capacidad. Sin embargo, si la energía almacenada por un capacitor (una vez conectado a una batería) depende de su capacidad, parece razonable desear y poder contar con capacitores de muy alta capacidad.

La expresión (5.16) nos permite calcular la capacidad de un capacitor de placas plano paralelas; es evidente que las tres maneras alternativas de aumentar la capacidad se reducen a aumentar el valor de la permitividad (que, como estudiaremos en el capítulo próximo, se consigue introduciendo entre las placas un material aislante diferente al aire), a incrementar el área de las placas y/o a reducir la distancia entre ellas.

Ahora bien, un capacitor de los más comunes, de los que se utilizan normalmente en una radio de bolsillo, tiene el tamaño de un botón de camisa. En aplicaciones circuitales los hay más grandes y más pequeños, como puede verse en la figura 5.13, en la que las flechas muestran tres capacitores contenidos en un sector de un circuito montado sobre una plaqueta. Este sector tiene aproximadamente 10 cm de lado.

Aquí estamos haciendo referencia a un capacitor tipo, como el que se encuentra a la derecha de la figura 5.12, y no a los capacitores que forman parte de un circuito integrado (comúnmente llamado *chip*) que se fabrican junto con el resto de los elementos circuitales sobre una única pieza de silicio de unos pocos centímetros cuadrados de área. La figura 5.14 muestra un microprocesador Pentium, aproximadamente del mismo tamaño que el sector de la placa de la figura 5.13. La comparación entre los dos circuitos puede hacerse por el número de transistores que contiene: en la figura 5.13 son los elementos con forma de casquete plateado; contando los dos que se encuentran semiocultos en la parte inferior derecha son seis. Un microprocesador Pentium contiene 3,1 millones.

Regresemos a nuestro cálculo, asumiendo que nuestro capacitor tiene dos placas circulares de 1cm de diámetro, separadas 0,01 mm. Con estos valores (y suponiendo que el espacio interplacas es aire) resulta una capacidad del orden de $10^{-8} F$. Si en el espacio entre las placas se colocara un aislante que tuviera una permitividad 100 veces superior a la del aire la capacidad sería del orden de $1\mu F$. Para un capacitor como el que estamos proponiendo, estos son valores típicos.

Lo que se hace para incrementar el valor de la capacidad es separar dos tiras de papel metalizado con una tira de papel aislante y arrollarlas. De esta forma se consigue simultáneamente incrementar el área de las placas y la permitividad del medio aislante, y disminuir la distancia interplacas. Obsérvese que dos tiras de papel de $2\mu m$ (2 micrones) de espesor, 1cm de ancho y 1m de longitud, separadas por un aislante de $1\mu m$ de espesor, enrolladas sobre sí mismas forman un cilindro de alrededor de 1,5 cm de diámetro por

1cm de altura; asumiendo que el papel aislante tiene una permitividad 100 veces superior a la del aire, la capacidad alcanza un valor 10 veces mayor que en el caso anterior.

En algunas aplicaciones (típicamente circuitos estabilizadores de tensión donde operan redes de computadoras) se requiere sin embargo de capacitores con capacidades del orden del faradio. Rápidamente podemos imaginar que, aun si fuera este el único problema (y de hecho no lo es, porque las placas así arrolladas se alejan del comportamiento de los capacitores ideales que estamos estudiando) el método de enrollar papel metalizado es inaplicable porque requeriríamos de tiras del orden del kilómetro, y eso si el ancho de cada tira fuera del orden de un metro. Aun aceptando un arrollamiento compacto, tendríamos un cilindro de aproximadamente 15m de diámetro por 1m de altura.

La tecnología moderna fabrica capacitores con otros criterios. Los de carbón activado utilizan como aislante interplacas una capa molecular de dieléctrico y alcanzan capacidades del orden del faradio en tamaños del orden del centímetro. Los que forman parte de circuitos integrados se producen difundiendo una capa metálica sobre un óxido (que actúa como dieléctrico) apoyado sobre un semiconductor. Esta configuración regular metal-óxido-semiconductor, designada por su sigla MOS, tiene la estructura de un capacitor plano en el cual una placa es una fina película de aluminio depositada sobre una capa de óxido de silicio de alrededor de 500 Å (500 angstrom; $1 \text{ \AA} = 10^{-10}m$) que descansa sobre una juntura electrónica de características especiales y cuya descripción escapa por completo a las posibilidades de este texto.



Fig. 5.13: una placa circuital con diversos componentes electrónicos. Las flechas muestran tres condensadores.

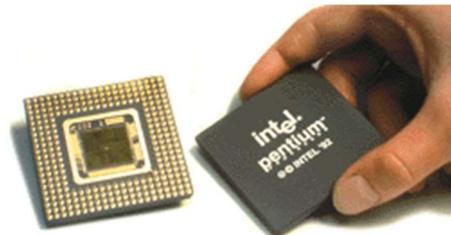


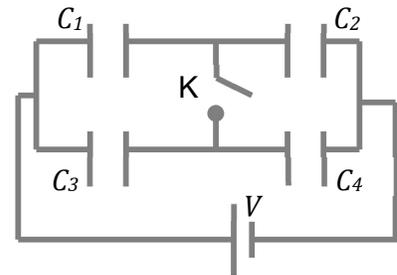
Fig. 5.14: microprocesador Pentium.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Una placa metálica de área $A=1\text{m}^2$ y masa $m=0,1\text{kg}$ se halla en reposo, suspendida de un resorte de constante elástica $k_{el} = 4.000 \text{ N/m}$. Paralela a esta placa y 5cm por debajo se coloca una placa idéntica, y se le entrega una carga $q= 20\mu\text{C}$. Calcule la capacidad del conjunto y la diferencia de potencial electrostático entre las placas.

Ejercicio 2: Sea la disposición de capacitores de la figura, en la que K es una llave simple. Suponiendo $C_n = n \mu\text{F}$ y $V = 10\text{V}$, calcule la capacidad equivalente y la carga en cada capacitor en las siguientes situaciones:

- a) K abierta;
- b) K cerrada.

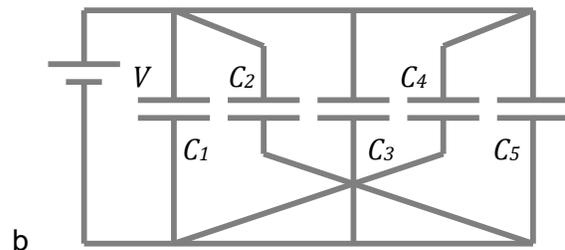
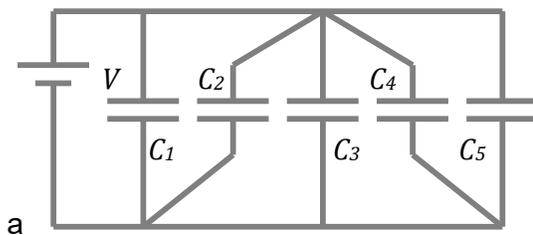


Ejercicio 3: Se dispone de varios capacitores de $2\mu\text{F}$, $4\mu\text{F}$ y $10 \mu\text{F}$. Discuta los posibles arreglos para conseguir una capacidad equivalente de

- a) $16 \mu\text{F}$;
- b) $1\mu\text{F}$;
- c) $19 \mu\text{F}$;
- d) $75,5 \mu\text{F}$.

En cada caso calcule la carga en cada capacitor si se conecta el arreglo a una batería de 50V .

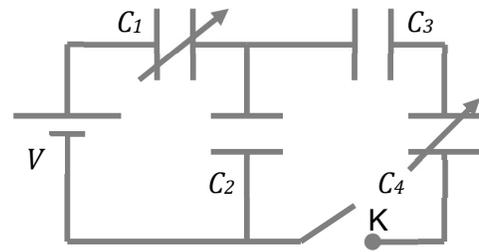
Ejercicio 4: Sea la disposición circuital de la figura a , en la que los capacitores tienen capacidad $C_n=j \mu\text{F}$. Para $V =100\text{V}$, calcule la capacidad equivalente y la carga sobre cada capacitor ¿Podría repetirse el dibujo indefinidamente y así incrementar arbitrariamente la carga del sistema? Demuestre que las configuraciones a y b son idénticas.



Ejercicio 5: Se conecta un capacitor de placas plano paralelas de área $A=1\text{m}^2$, separadas 1mm , a una fuente de 100V . Una vez cargado, se desconecta la fuente y se mueven las placas hasta que su separación es de 2mm .

- a) calcule la energía del capacitor antes y después de mover las placas, y justifique el origen de la diferencia de estos valores;
- b) repita el cálculo, pero ahora sin desconectar la fuente.

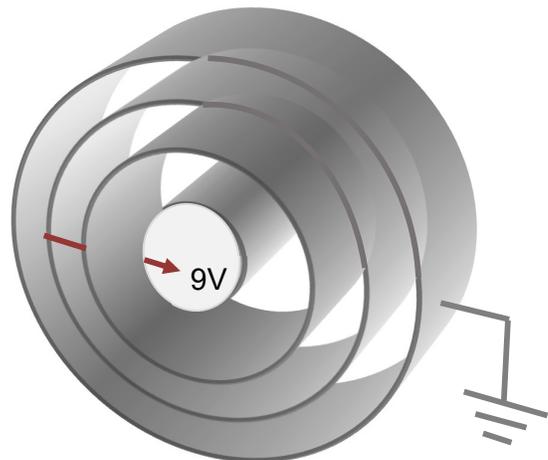
Ejercicio 6: Sea la disposición circuital de la figura, en la que C_1 y C_4 son capacitores plano-paralelos variables, con placas de área $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ cada uno, y K es una llave simple. Para $V = 10 \text{ V}$, $C_2 = 100 \text{ pF}$ y $C_3 = 50 \text{ pF}$



- con K abierta, calcule la distancia entre las placas de C_1 si la capacidad equivalente es de 60 pF ; calcule la carga y la diferencia de potencial sobre cada capacitor;
- con K cerrada y C_1 fijada en el valor obtenido en (a), calcule la distancia entre placas de C_2 sabiendo que la carga total es de $7,24 \times 10^{-10} \text{ C}$; calcule la carga y la diferencia de potencial en cada capacitor.

Ejercicio 7: Calcule la capacidad por unidad de longitud de un capacitor cilíndrico, que consiste en dos cilindros coaxiales “infinitos” de radios R_a y $R_b > R_a$, respectivamente.

Ejercicio 8: Se disponen cuatro superficies cilíndricas metálicas coaxiales de 1 m de longitud cada una, como indica la figura. El radio de la j -ésima superficie es $R_j = j \text{ cm}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). El cilindro interior se conecta a $+9 \text{ V}$, en tanto que el exterior se pone a tierra. Los dos cilindros intermedios se conectan a través de un hilo metálico. Calcule la capacidad del sistema y la carga en cada superficie.



Ejercicio 9: Demuestre que en el ejercicio anterior alcanza con colocar un único cilindro intermedio, coaxial, de espesor $e = R_3 - R_2$.

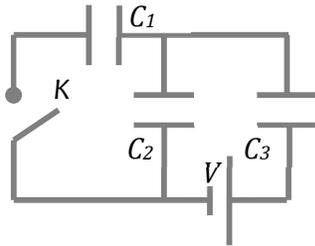
Ejercicio 10: Con una batería de 100 V se cargan por separado dos capacitores, uno de capacidad $C_1 = 2 \mu\text{F}$ y el otro de capacidad $C_2 = 5 \mu\text{F}$.

- calcule la carga y el potencial de cada uno de ellos si se los conecta uniendo los extremos positivos entre sí y los extremos negativos entre sí;
- repita el cálculo si se conecta ahora el extremo positivo de uno con el extremo negativo del otro;
- calcule la energía empleada en el proceso de carga de los capacitores;
- calcule la energía de cada uno de los arreglos (a) y (b).

Ejercicio 11: En los complementos del capítulo 3 hemos estudiado el potencial de Nernst, relacionándolo con la manera en que una célula intercambia iones con el medio extracelular.

Considere que la pared celular tiene un espesor de 10×10^{-9} m y una constante de permeabilidad 8 veces mayor que la del vacío, ϵ_0 . Para un potencial de Nernst de 70 mV,

- calcule la capacidad de la membrana por unidad de área (aproxime por un capacitor plano);
- el valor del campo eléctrico en el interior de la membrana;
- el trabajo para transportar desde el interior de la célula un ion Cl^- y un ion K^+ .



Ejercicio 12: Se sabe que la relación entre las capacidades del sistema de la figura es $C_1 > C_2 > C_3$. Si Q_C representa la carga en un capacitor, U_{SIST} la energía de todo el sistema y U_C la de un capacitor, marque las dos opciones correctas

Con K abierta, $C_{\text{eq}} > C_3$ y $U_{\text{SIST}} > U_{C2}$	Con K abierta, $Q_{C2} = Q_{C3}$ y $V_{C2} < V_{C3}$
Con K cerrada, $C_{\text{eq}} < C_3$ y $U_{\text{SIST}} > U_{C1}$	Con K cerrada, $C_{\text{eq}} > C_1$ y $U_{\text{SIST}} > U_{C1}$
Con K abierta, $Q_{C1} > Q_{C2}$ y $V_{C1} = V_{C2}$	Con K cerrada, $Q_{C1} = Q_{C2}$ y $V_{C1} = V_{C2}$

Respuestas a los ejercicios propuestos:

Ejercicio 1: $C=2,27 \cdot 10^{-10} \text{ F}$; $\Delta V = 8,81 \times 10^4 \text{ V}$

Ejercicio 2: a) $C_{eq}= 2,38 \mu\text{F}$; $Q_1=Q_2= 6,66 \mu\text{C}$ $Q_3=Q_4=17,14 \mu\text{C}$; b) $C_{eq}= 2,4 \mu\text{F}$; $Q_1=6 \mu\text{F}$, $Q_2= 18 \mu\text{F}$; $Q_3=8 \mu\text{F}$, $Q_4=16 \mu\text{F}$.

Ejercicio 3: a) un capacitor de cada valor, los tres en paralelo. $Q_{10}=500 \mu\text{C}$, $Q_4=200 \mu\text{C}$, $Q_2=100 \mu\text{C}$; b) dos capacitores, cada uno de $2 \mu\text{F}$, en serie. La carga sobre cada uno vale $50 \mu\text{C}$; c) uno de $10 \mu\text{F}$ en paralelo con dos de $4 \mu\text{F}$ y con la serie de dos de $2 \mu\text{F}$; la carga sobre el de $10 \mu\text{F}$ es $500 \mu\text{C}$, sobre cada uno de $4 \mu\text{F}$ es de $200 \mu\text{C}$ y sobre cada uno de $2 \mu\text{F}$ es de $50 \mu\text{C}$; d) siete de $10 \mu\text{F}$ en paralelo con uno de $4 \mu\text{F}$ y la serie de cuatro de $2 \mu\text{F}$. La carga en cada uno de los de $10 \mu\text{F}$ es $500 \mu\text{C}$, sobre el de $4 \mu\text{F}$ es de $200 \mu\text{C}$ y sobre cada uno de $2 \mu\text{F}$ es de $25 \mu\text{C}$.

Ejercicio 4: $C_{eq}= 15 \mu\text{F}$, $Q_n=100 \text{ j } \mu\text{C}$

Ejercicio 5: a) $4,4 \times 10^{-5} \text{ J}$ y $8,8 \times 10^{-5} \text{ J}$; b) $2,2 \times 10^{-5} \text{ J}$.

Ejercicio 6: a) $d_1= 0,59 \text{ mm}$; $Q_1=Q_2=600 \text{ pC}$, $Q_3=Q_4=0$; $V_1= 4 \text{ V}$, $V_2= 6 \text{ V}$; b) $d_2= 0,44 \text{ mm}$; $Q_1=724 \text{ pC}$, $Q_2= 517 \text{ pC}$, $Q_3= Q_4= 207 \text{ pC}$; $V_1= 4,827 \text{ V}$, $V_2= 5,173 \text{ V}$, $V_3= 4,14 \text{ V}$, $V_4= 1,035 \text{ V}$.

Ejercicio 7:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_b/R_a)}$$

Ejercicio 8: $C_{eq}= 56,83 \text{ pF}$, $Q= 511,54 \text{ pC}$.

Ejercicio 9: El potencial dentro del cilindro intermedio es constante e igual al del alambre que conecta las dos superficies.

Ejercicio 10: a) $V_1 = V_2 = 100 \text{ V}$, $Q_1=200 \mu\text{C}$, $Q_2= 500 \mu\text{C}$; b) $V_1 = V_2 = 43 \text{ V}$, $Q_1= 86 \mu\text{C}$, $Q_2=214 \mu\text{C}$; c) $U = 3,5 \times 10^{-2} \text{ J}$; d) $U = 3,5 \times 10^{-2} \text{ J}$ y $U = 0,64 \times 10^{-2} \text{ J}$, respectivamente.

Ejercicio 11: a) $7,1 \text{ mF/m}^2$; b) $7 \times 10^6 \text{ V/m}$, hacia el interior de la célula; c) $1,12 \times 10^{-20} \text{ J}$ y $-1,12 \times 10^{-20} \text{ J}$.

Ejercicio 12:

Con K abierta, $Q_{C2}=Q_{C3}$ y $V_{C2}<V_{C3}$

Con K cerrada, $C_{eq}<C_3$ y $U_{SIST} > U_{C1}$

Dieléctricos



6.1 – Introducción

En el capítulo 2 adelantamos que, en términos elementales, la característica saliente de una sustancia aislante (eléctrica) es la dificultad que existe para trasladar las cargas eléctricas de sus átomos. En realidad, lo que no pueden es desplazarse libremente y se requiere de un trabajo comparativamente elevado para hacerlo. En función de lo que hemos discutido hasta aquí, podemos decir que lo que distingue a un conductor de un dieléctrico es la magnitud de la diferencia de potencial (o el campo eléctrico, si se prefiere) que se requiere para desplazar sus cargas a nivel atómico.

Desde un punto de vista formal, la distinción entre conductores y dieléctricos es de origen cuántico. Aunque no habremos de detenernos en estos aspectos, simplemente recordemos que los electrones de un átomo aislado tienen energía negativa, es decir, es necesario entregarles energía para alejarlos del núcleo. En otras palabras, cuanto mayor es la energía de un electrón de un átomo aislado más alejado está del núcleo pero, y este aspecto es muy importante, de acuerdo a los postulados de la Mecánica Cuántica ningún electrón puede tener un valor de energía incompatible con los valores permitidos (determinados por el número cuántico principal, n). Por esta razón a las energías incompatibles se las llama *energías prohibidas*.

En los cuerpos extensos las formas de encarar el problema se complican porque deben tenerse en cuenta todas las interacciones entre los átomos. Sin embargo, podemos formarnos una idea somera del fenómeno de conducción en los sólidos recordando (véase la sección 1.3) que los sólidos cristalinos (puros) se caracterizan por una marcada regularidad estructural, de manera tal que las propiedades asociadas a una región de una muestra se traducen en las mismas propiedades extendidas estadísticamente a toda la muestra. Esta frecuencia estructural se debe a la particular disposición de los átomos de la red, que hace que los electrones de los átomos individuales se repartan (“compartan”) entre los átomos vecinos, superponiendo de esta forma los orbitales atómicos de energía equivalente con los átomos adyacentes. Energía equivalente no significa energía idéntica, de manera tal que los niveles permitidos al conjunto de electrones del sólido van formando un “continuo”, es decir, estados de energía muy próximos que hace que los electrones se acumulen dentro de un intervalo de valores de energía que se conoce como *banda de energía*. Las bandas de energía están separadas unas de otras por intervalos o *bandas de energía prohibida*.

La banda de mayor energía, tanto si está vacía o parcialmente llena, se llama *banda de conducción*, mientras que la siguiente de menor energía se denomina *banda de valencia*. La capacidad de conducción de cargas de un elemento queda determinada, entonces, por la energía necesaria para desplazar sus electrones de valencia (que, naturalmente, se hallan en la banda de valencia) desde su nivel normal de energía hasta el nivel más elevado, esto es, la banda de conducción. La energía que separa las bandas de conducción y de valencia (o sea, el ancho de la banda prohibida) en un material aislante es muy grande, y es muy difícil para un electrón de valencia alcanzar la banda de conducción salvo, por supuesto, que se le entregue la energía necesaria. En un conductor, por el contrario, las bandas de valencia y de conducción se hallan prácticamente solapadas.

La diferencia de potencial a partir de la cual un aislante se transforma en conductor se conoce como *potencial de ruptura*. A efectos comparativos puede ser más útil el valor de la *rigidez dieléctrica* del material, que es la intensidad de campo eléctrico para la cual el dieléctrico pasa a comportarse como conductor. Por ejemplo, la rigidez dieléctrica del papel es del orden de $14\text{MV}/\text{m}$ ($14.000.000\text{ V}/\text{m}$), el de la mica varía entre 10 y $100\text{MV}/\text{m}$, la del aire húmedo es de $1\text{ MV}/\text{m}$ y la rigidez dieléctrica del aire seco alcanza los $3\text{MV}/\text{m}$. Para poner en contexto estos valores, tengamos en cuenta que con una diferencia de potencial de 3V hacemos circular una corriente y encendemos la lámpara de una linterna (que al cabo es un elemento conductor).

En lo que sigue de este capítulo abandonaremos la visión cuántica (microscópica) y encararemos el análisis de los fenómenos que ocurren en el seno de un dieléctrico sumergido en un campo eléctrico desde un punto de vista macroscópico y fenomenológico, una manera más adecuada a nuestros propósitos y necesidades. En particular, es de nuestro mayor interés analizar cómo cambia el contenido energético de un sistema aislado cuando el campo eléctrico interno debe atravesar un dieléctrico, esto es, cuando el medio aislante entre las placas de un capacitor deja de ser aire. Este análisis lo dejaremos para el final del capítulo, donde además discutiremos las importantes consecuencias que se derivan.

6.2 – Polarización de un aislante en un campo eléctrico

Hemos anticipado que por debajo del potencial de ruptura, es decir, para un campo eléctrico por debajo del mínimo necesario para provocar la conducción, un dieléctrico es incapaz de transportar cargas. Pero que no se desplacen no significa que permanezcan estáticas. En presencia de cualquier campo eléctrico, incluso con valor por debajo del de ruptura, las cargas del dieléctrico no pueden no enterarse de la existencia del campo, sencillamente porque el campo provoca la aparición de una fuerza exterior. La estructura del material podrá resistir el desplazamiento, pero difícilmente inhiba la rotación que produce ese campo externo intentando orientar a los átomos, sencillamente porque no puede hacerlo.

Las moléculas de los elementos dieléctricos son de dos tipos, polares y no polares. Una molécula es polar cuando, producto de una distribución espacial diferenciada, los centros de carga positiva y negativa se hallan desplazados uno respecto al otro (el centro de carga tiene un significado esencialmente similar al centro de masa de un cuerpo cuando la propiedad relevante es la carga másica). Una molécula polar típica es la de agua, a la que representamos crudamente en la figura 6.1. Como los átomos de hidrógeno se localizan de

Dado cualquier material, se requiere un potencial mínimo para mover sus cargas eléctricas. En un dieléctrico (aislante) ese umbral es comparativamente elevado. Pero las moléculas de un dieléctrico, aun sin trasladarse, habrán de orientarse frente a un campo eléctrico externo, las polares de manera inmediata y las no polares polarizándose previamente por inducción.

una manera muy particular (al estilo de las orejas de un ratón) el centro de carga positivo se halla desplazado hacia ellos, en tanto que el centro de carga negativo se desplaza hacia el átomo de oxígeno, conformando un dipolo equivalente como el que también se muestra en la figura.

Recordemos rápidamente que un dipolo es una particular distribución de dos cargas puntuales, una positiva y la otra negativa, separadas una distancia λ , tal que

$$\vec{p} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} q\lambda \hat{e}_{\mp} \quad (6.1)$$

en donde el límite (tomado en sentido físico) significa que la distancia λ se hace “muy pequeña” pero no es nula (pues en ese caso sería inevitable una singularidad) y el versor \hat{e}_{\mp} indica que el vector \vec{p} va de la carga negativa a la positiva. Hemos escrito el valor del campo eléctrico de un dipolo en la expresión (2.31) y en la identidad (4.116) definimos el potencial generado por una tal distribución.

En la molécula de agua que hemos puesto como ejemplo la distancia media entre los centros de carga es del orden de 1\AA ($10^{-10} m$), en tanto que el valor de la carga neta de cada centro es del orden del valor de la carga electrónica, de forma tal que considerar a una molécula de agua como un dipolo es una aproximación excelente.

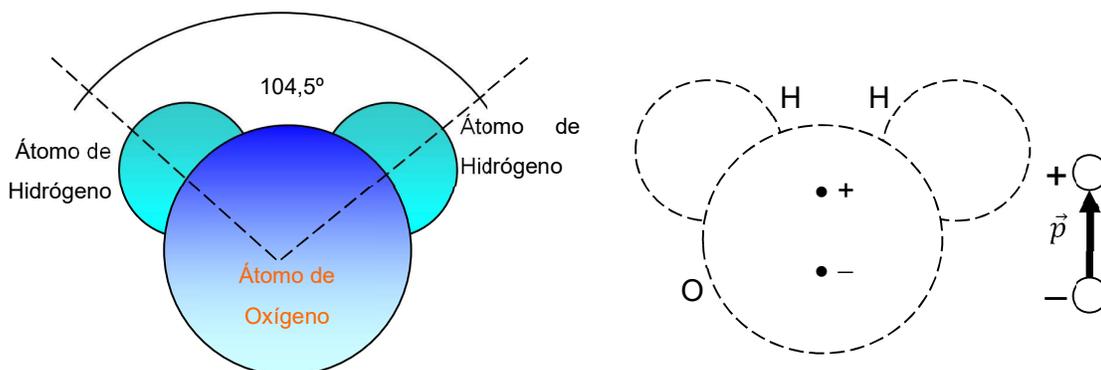


Fig. 6.1: un esquema sobresimplificado de una molécula de agua y la localización relativa de los centros de cargas positivo y negativo. A la derecha se muestra un dipolo equivalente.

A diferencia de las moléculas polares, en una molécula no polar los centros de carga positiva y negativa coinciden debido a su disposición espacialmente simétrica, de manera tal que en ausencia de un campo eléctrico externo es imposible asociar un dipolo a cada molécula. Pero un campo externo, digamos positivo, atrae a las cargas negativas y repele a las positivas, provocando de esta manera una ligera deformación de la molécula, una pequeña separación de los centros de carga, que se traduce en la aparición de un momento dipolar. Por esta razón se lo llama *momento dipolar inducido*.

Se dice entonces que en presencia de un campo eléctrico los dieléctricos se *polarizan*, esto es, se genera una distribución de dipolos orientados, sea que los dipolos ya existían o fueron previamente inducidos por el campo eléctrico externo[†].

Conviene definir la densidad volumétrica de momento dipolar, o simplemente vector polarización \vec{P} , como la medida estadística de la cantidad de dipolos elementales orientados (en la dirección del campo eléctrico) que existe por unidad de volumen. Para ello tomemos un pequeño elemento de volumen $\mathcal{V}^{\dagger\dagger}$ en el que el campo exterior orienta una cantidad $\sum \vec{p}$ de dipolos, de manera tal que resulte

$$\vec{P} = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\mathcal{V}} \equiv \frac{d\vec{p}}{d\mathcal{V}} \tag{6.2}$$

En ausencia de un campo externo los dipolos se orientan al azar porque la agitación térmica, incluso a temperatura ambiente, es en general suficiente para inhibir cualquier tipo de regularidad estadística. En una tal situación el número de dipolos estadísticamente orientados es nulo y, en consecuencia, es nulo el vector polarización.

Cuando se enciende un campo eléctrico la situación cambia porque el campo tiende a orientar dipolos compitiendo con la agitación térmica. Un esquema sencillo de la situación que se plantea se muestra en la figura 6.2, en la que estamos proponiendo tratar el problema como si se tratara de un gas de dipolos. Parece evidente que cuanto mayor sea la intensidad del campo eléctrico y menor la temperatura mayor será el número de dipolos orientados, esto es, mayor la intensidad del vector polarización \vec{P} .

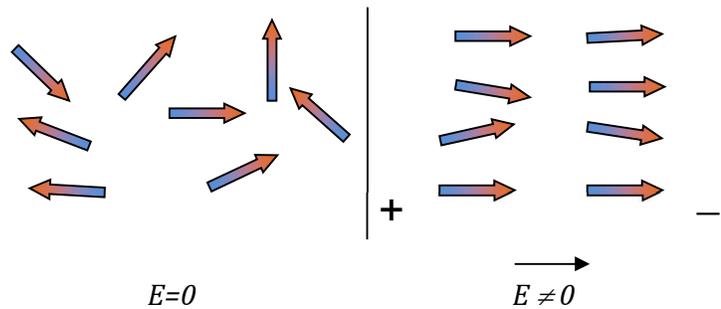


Fig. 6.2: a una dada temperatura, en presencia de un campo eléctrico los dipolos se orientan estadísticamente (con rojo se ha marcado el extremo de carga positiva del dipolo, y con azul su extremo de carga negativa).

[†] No discutiremos aquí los fenómenos asociados a los electretos (o electretes), que son materiales que presentan regiones de dipolos orientados aun en ausencia de un campo eléctrico externo.

^{††} Debemos aclarar que $\Delta\mathcal{V}$ representa un límite que se toma en sentido físico, porque es un elemento que, aunque muy pequeño, aún contiene un gran número de moléculas o átomos como para que cualquier concepto estadístico tenga validez.

Podemos plantear la situación desde una perspectiva ligeramente diferente y más general. Para ello calculemos en primer lugar el valor de la energía de un dipolo orientado, que proviene del trabajo que debe realizar el campo externo para girarlo. Para simplificar el tratamiento supongamos que el campo eléctrico es uniforme, como el que existe entre dos placas plano paralelas, y observemos la figura 6.3

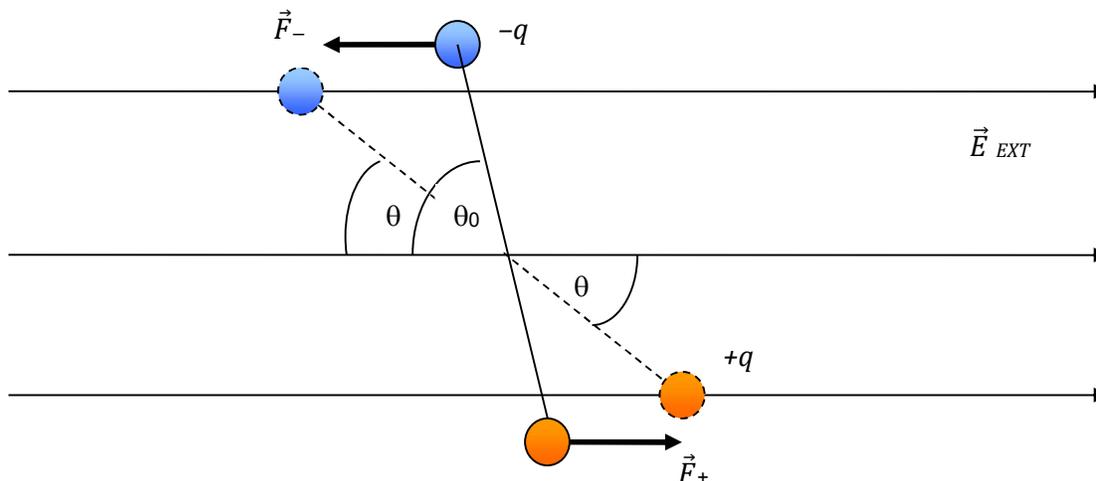


Fig. 6.3: el campo eléctrico exterior orienta al dipolo haciéndolo girar. Para llevarlo desde la posición inicial, que forma un ángulo θ_0 con la dirección del campo, hasta una posición que forma un ángulo genérico θ , se invierte un trabajo W_{EXT} .

Los momentos generados por las fuerzas \vec{F}_+ y \vec{F}_- (que actúan sobre las cargas $+q$ y $-q$, respectivamente) respecto del centro del dipolo son iguales, ya que tienen el mismo módulo y ambas hacen girar al dipolo en idéntico sentido. Recordemos que el momento $\vec{\tau}$ de una fuerza respecto a un punto C se define como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.3}$$

donde \vec{r} es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza desde el centro de giro. De la misma definición de producto vectorial (véase el apéndice) resulta que el módulo del momento de la fuerza \vec{F} vale

$$\tau = r F \text{ sen } \theta \tag{6.4}$$

En el caso de un dipolo, si llamamos λ a la distancia entre las dos cargas, el momento neto vale

$$\tau = |F_+| \frac{\lambda}{2} \text{sen}\theta_0 + |F_-| \frac{\lambda}{2} \text{sen}\theta_0 \quad (6.5)$$

y como el módulo de cada una de las fuerzas vale qE_{EXT} , resulta

$$\tau = qE_{EXT}\lambda \text{sen}\theta_0 = p E_{EX} \text{sen}\theta_0 \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_{EXT} \quad (6.6)$$

donde hemos aprovechado el hecho de que el producto $q\lambda$ es precisamente el módulo del momento dipolar p . El trabajo del campo externo necesario para orientar el dipolo desde la posición que forma un ángulo θ_0 hasta la posición genérica que forma un ángulo θ se evalúa como

$$dW_{EXT} = \tau(\theta) d\theta \quad (6.7)$$

de forma tal que resulta

$$W_{EXT} = \int dW_{EXT} = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta) d\theta = p E_{EXT} \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen}\theta d\theta = -p E_{EXT}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (6.8)$$

En la última identidad usamos el hecho que tanto el campo como el momento dipolar son constantes. Obsérvese que el trabajo neto se expresa como la diferencia de una misma cantidad evaluada en dos posiciones angulares distintas, de forma tal que vale la pena definir la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico externo como

$$U_{P,DIP} = -pE_{EXT}\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (6.9)$$

Por otro lado, si estamos tratando al dieléctrico como un gas (ideal) de dipolos, podemos evaluar su energía térmica a partir de la ecuación de los gases ideales (recuérdese que el producto $P\mathcal{V}$ representa precisamente una energía) de manera tal que para un mol de dipolos la energía térmica valdrá

$$U_{MOL} = Nk_B T \quad (6.10)$$

donde $N = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ es el número de Avogadro, y k_B la constante de Boltzmann introducida en la ecuación (1.159)

$$k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (6.11)$$

y la energía de origen térmico por dipolo, digamos $U_{T,DIP}$, será simplemente

$$U_{T,DIP} = k_B T \quad (6.12)$$

Si la orientación de dipolos resulta de la competencia entre la energía de origen eléctrico y la de origen térmico, parece razonable definir un coeficiente que mida el grado de polarización de un dieléctrico a partir del cociente entre estas dos energías. Como es usual medir las energías en términos de la energía térmica, optaremos por la forma

$$\xi = \frac{|U_{P,DIP}|}{|U_{T,DIP}|} = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{E}|}{k_B T} \quad (6.13)$$

de manera tal que si el coeficiente ξ es mucho mayor que la unidad el dieléctrico se halla polarizado en muy alto grado, en tanto que para $\xi \ll 1$ resulta que domina la agitación térmica y la polarización es muy pobre. Este es un detalle que debemos tener en cuenta, pues cada vez que deseemos polarizar un dieléctrico deberemos competir contra la agitación térmica, que por su naturaleza caotiza el sistema y evita que exista un orden preferencial. Para decirlo en otras palabras, la polarización (y todos los fenómenos asociados a alguna forma de orden) depende de la temperatura.

La agitación térmica hace que un sistema naturalmente tienda al desorden. El fenómeno de polarización, por el contrario, está relacionado con estructuras de orden, de manera tal que la dificultad para polarizar un dieléctrico aumenta con la temperatura.

6.3 – Dieléctrico en un campo eléctrico uniforme

Analicemos las modificaciones que ocurren en el espacio que ocupa un dieléctrico cuando se enciende un campo eléctrico externo uniforme, como por ejemplo el que existe (lejos de los bordes) entre dos placas plano paralelas cargadas con densidad de superficial $+\sigma$ una y $-\sigma$ la otra. Sabemos que la agitación térmica, aun en el caso $\xi \gg 1$, no permite en general que todos los dipolos se orienten de manera idéntica, pero no representa una pérdida de generalidad aceptar que, estadísticamente, el número de dipolos por unidad de volumen habrá de ser constante y la orientación global uniforme. Debemos recalcar que estamos suponiendo un campo eléctrico uniforme, nada garantiza que los resultados se

sostengan si abandonamos esta hipótesis, y de hecho analizaremos la situación de un campo no uniforme más adelante en este capítulo.

En cualquier caso, los dipolos habrán de girar hasta que la carga negativa se oriente hacia el polo positivo del campo externo y viceversa. Como consecuencia del momento dipolar neto que aparece, el campo eléctrico en el interior del dieléctrico difiere del que existiría en el vacío en su ausencia, fundamentalmente porque ahora el potencial se halla ligado además a la distribución de dipolos (véase la expresión (4.96)).

La figura 6.4 nos da una idea de lo que ocurre en este caso. En todas partes en el interior del dieléctrico las cargas positivas de los dipolos (las puntas de las flechas con los que los hemos representado) se compensan con las cargas negativas, salvo en la superficie de cada placa, donde no pueden ser compensadas.

Todo ocurre como si fueran dos cuerpos, uno con densidad de carga $+\sigma_p$ (el subíndice p indica que se origina en la polarización del dieléctrico, por efecto de la orientación de los dipolos) enfrentado a la placa con carga $-\sigma_L$ (el subíndice L indica que esta carga es libre, es decir, es la que se coloca externamente) y el otro, con densidad $-\sigma_p$, enfrentado a la placa con densidad de carga (externa) $+\sigma_L$. Obsérvese que en general $|\sigma_p| \neq |\sigma_L|$ porque se originan en procesos diferentes. Y dado que sin carga σ_L (de nuevo, se trata de la carga externa que colocamos en las placas y que por tal motivo se denomina *densidad de carga libre*) no hay carga de polarización, resulta que σ_p (que se denomina *densidad superficial de carga de polarización*) parece ser necesariamente menor que σ_L .

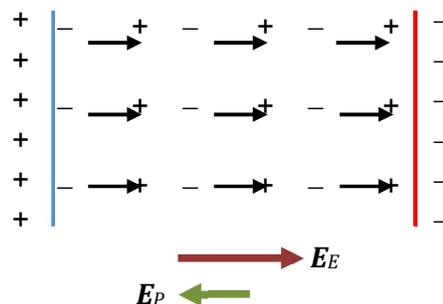


Fig. 6.4: dipolos orientados idealmente en presencia de un campo externo E_E . E_p representa el campo originado por la polarización del medio.

El campo eléctrico externo, en el interior de un dieléctrico, se ve disminuido porque en las superficies en contacto con las placas que originan el campo se inducen cargas eléctricas (de polarización) que tienen signo opuesto a las del campo original. Pero como el campo eléctrico inducido no existe sin un campo externo, parece natural que el campo de polarización sea siempre menor (en valor absoluto) al campo eléctrico externo.

La carga σ_p se encuentra naturalmente asociada al vector polarización \vec{P} introducido en la definición (6.2). Recordemos que el vector polarización representa la densidad volumétrica de dipolos o el momento dipolar por unidad de volumen. La carga total que puede aparecer como σ_p en una superficie depende entonces de la orientación del vector \vec{P} . A modo de ejemplo, piénsese en las superficies superior e inferior del dieléctrico de la figura 6.4: idealmente, allí \vec{P} es perpendicular a la normal \hat{n} a dicha superficie y σ_p es nula. De esta manera, parece razonable pensar en una relación del estilo

$$\sigma_p = \psi \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{6.14}$$

donde ψ es un factor de proporcionalidad por el momento adimensional e irrelevante (obsérvese a partir las definiciones (6.1) y (6.2) que el vector polarización tiene unidades de una densidad superficial de carga). Ahora bien, la expresión (6.14) es formalmente inobjetable pero de dudosa practicidad, porque nosotros queremos escribir la densidad superficial de carga dipolar en términos del campo eléctrico externo \vec{E}_E , porque al fin y al cabo la polarización tiene su origen en el campo eléctrico externo y es el parámetro que podemos gobernar.

Podemos entonces desarrollar el vector polarización en términos del vector campo eléctrico, es decir, escribir la relación formal

$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_0 + \bar{\alpha}_1 \vec{E} + \bar{\alpha}_2 \vec{E}\vec{E} + \dots \quad (6.15)$$

donde \vec{P}_0 representa la densidad de dipolos orientados en ausencia de campo eléctrico externo (electretos) y $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$ son tensores a determinar.

Una simplificación notable del tratamiento se logra si se considera un medio sin polarización permanente ($\vec{P}_0 = 0$), lineal ($\bar{\alpha}_n = 0 \forall n \geq 2$), isótropo ($\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es la matriz identidad) y homogéneo (α_1 es una constante). La linealidad indica que trabajamos el desarrollo (6.15) a primer orden, es decir, \vec{P} es una función lineal de \vec{E} , de manera tal que, dado que son vectores paralelos, en un medio lineal, isótropo y homogéneo α es una constante positiva y sólo es nula en el vacío. Luego, en este escenario escribiremos

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} \quad (6.16)$$

de manera tal que, tomando $\psi = 1$ en la expresión (6.14) (porque al cabo queda un coeficiente por determinar) podemos escribir

$$\sigma_p = \alpha \vec{E} \cdot \hat{n} \quad (6.17)$$

y la tarea se reduce a hallar el factor de proporcionalidad α . Algunas propiedades de este coeficiente son casi evidentes. Por un lado, como ya dijimos, necesariamente debe ser $\alpha > 0$ porque el vector polarización se orienta en el sentido del campo eléctrico. Por lo demás, sus unidades deben ser las de una densidad superficial de carga por unidad de campo eléctrico, esto es, $[\alpha] = C/Vm$. Y en principio, dado que parece razonable que haya menos carga de polarización que carga libre, deberíamos esperar que fuera $\alpha < 1$.

Para completar la idea observemos la figura 6.4. Si llamamos \vec{E}_E y \vec{E}_P a los campos externo y de polarización, respectivamente, la intensidad del campo neto \vec{E}_N dentro del dieléctrico será

$$\vec{E}_N = \vec{E}_E + \vec{E}_P \quad (6.18)$$

y como estamos tratando el caso ideal en el que los campos tienen toda la misma dirección, podemos cambiar la ecuación vectorial por una escalar, es decir

$$E_N = E_E - E_P \quad (6.19)$$

y de paso dejamos en evidencia que los campos del miembro derecho son opuestos.

Sin pérdida alguna de generalidad podemos escribir la expresión del campo externo como (véase la ecuación (5.8))

$$E_E = \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \quad (6.20)$$

porque al cabo está generado por las dos placas plano paralelas y el dieléctrico es ajeno a las cargas libres. De la misma manera, la densidad de carga de polarización (en situación ideal) genera dos superficies plano paralelas dentro del dieléctrico, de carga σ_p , y parece evidente que el campo E_p debe ser proporcional a la carga σ_p de la misma forma que el externo lo es a σ_L . Podemos pensar los efectos de la polarización del dieléctrico a partir de la disminución del campo eléctrico (libre) que habría en vacío debido a la presencia de un conjunto de cargas (también en vacío), que llamamos de polarización, que generan un campo eléctrico cuya intensidad será de la forma

$$E_P = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \quad (6.21)$$

La orientación de dipolos es estadística, es impensable un elemento de volumen en el que todos los dipolos estén idénticamente orientados. Este hecho (de nuevo, debido a la agitación térmica) no invalida el tratamiento de campos paralelos, que en todo caso debe pensarse en

Vale la pena recalcar que se trata de un campo idealizado en el que la polarización es uniforme y homogénea (los efectos de polarización en volumen los trataremos en la próxima sección). Por ahora digamos que, dentro de nuestra aproximación, el campo neto E_N dentro del dieléctrico habrá de ser proporcional al campo E_E , sencillamente porque el externo es independiente, es el que existe aún sin dieléctrico. La expresión (6.19) ya adelanta que el campo más intenso es el externo, de manera tal que en forma absolutamente general podemos escribir

$$E_E = \beta E_N \quad (6.22)$$

donde $\beta > 1$ es un coeficiente de proporcionalidad. Combinando las expresiones (6.19) a (6.22) resulta

$$E_N = \beta E_N - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_P = \epsilon_0(\beta - 1)E_N \quad (6.23)$$

La cantidad $\beta - 1$, que se denomina *susceptibilidad eléctrica* y se la denota como χ_E , representa una medida del grado de dificultad para polarizar a un dieléctrico. Parece evidente, luego de la discusión que llevó a la expresión (6.13), que es función de la temperatura y que se relaciona directamente con el parámetro ξ que definimos en esa ecuación. Obsérvese además que es una cantidad definida positiva porque por su misma definición es $\beta > 1$. A partir de la identidad (6.23) las expresiones (6.16) y (6.17) resultan entonces

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E} \quad (6.24)$$

$$\sigma_P = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E} \cdot \hat{n} \quad (6.25)$$

El vector polarización \vec{P} es proporcional al campo eléctrico externo sólo en un medio lineal (no depende de \vec{E} en forma de potencias superiores de la forma E^2 , E^3 , etc.), isotrópico (el medio no tiene direcciones privilegiadas) y homogéneo (todo elemento de volumen es igual a cualquier otro) y sin polarización permanente (electretes).

Vale la pena detenerse en un breve comentario acerca de la ecuación (6.24): su validez se halla limitada a los medios lineales sin polarización permanente (de manera que no haya que sumar una constante a la expresión (6.16)). Por lo demás, sólo si el medio es isotrópico las cantidades ε_0 y χ_E , son escalares, y sólo pueden considerarse constantes en las regiones en las que el medio es

homogéneo. En principio parecen limitaciones muy severas, pero como veremos en lo que resta del capítulo el modelo en realidad describe adecuadamente la gran mayoría de los fenómenos de interés práctico.

6.4 – Dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme

En la sección anterior tratamos el caso de un dieléctrico en un campo eléctrico uniforme. La situación está graficada en la figura 6.4, en la que puede verse que dados dos elementos iguales cualesquiera de volumen de dieléctrico hay tantas cargas de polarización positivas como negativas. Dicho de otra manera, la carga de polarización en volumen, llamémosla ρ_P , es nula.

Distinta es la situación en la figura 6.5, en la que el dieléctrico se halla inmerso en un campo eléctrico no uniforme. Puede verse que en volúmenes iguales no necesariamente existe el mismo número de cargas de polarización, o dicho de otro modo, ahora ρ_P no es nulo. O sea, si las líneas de campo no son uniformes tampoco lo es la distribución de dipolos y existirán elementos de volumen dentro de los cuales el momento dipolar no se anulará.

Sin embargo, la carga de polarización total debe ser nula, porque independientemente de los elementos de volumen, se inducen tantas cargas positivas como negativas. Algunas de esas cargas de polarización son superficiales, otras quedan dentro

del volumen. Si llamamos Q_P a la carga total de polarización, Q_{PS} y Q_{PV} a las cargas de polarización en superficie y volumen, respectivamente, nuestra afirmación se reduce a la forma

$$Q_P = Q_{PS} + Q_{PV} = 0 \tag{6.26}$$

de manera tal que, dado que por su propia definición ρ_p representa la densidad volumétrica de dipolos orientados, se cumple

$$Q_P = \oiint \sigma_p \, dS + \iiint \rho_p \, dV = 0 \tag{6.27}$$

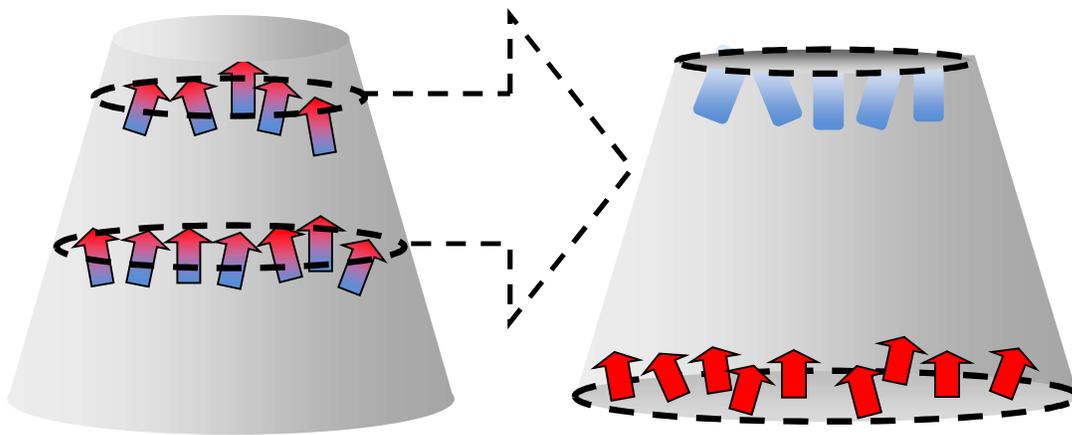


Fig. 6.5: un campo eléctrico no uniforme produce una distribución de dipolos que tampoco es uniforme. En la figura se ha recortado un elemento diferencial de volumen para mostrar que la densidad de cargas “rojas” no queda equilibrada por la de cargas “azules” y en cada región la distribución de dipolos por unidad de volumen

La superficie de integración es cerrada porque estamos trabajando en todo el dieléctrico y no sólo sobre alguna cara en particular. Lógicamente, el volumen de integración es todo el interior del dieléctrico. Dentro de este volumen la segunda integral debe ser asociada a la divergencia del vector polarización (una demostración formal puede hallarse en los complementos del capítulo) pues de la expresión (6.26), usando el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss, véase el apéndice), resulta inmediatamente

$$\iiint \rho_p \, dV = - \oiint \sigma_p \, dS = - \oiint \vec{P} \cdot \hat{n} \, dS = - \iiint \nabla \cdot \vec{P} \, dV \tag{6.28}$$

Como la identidad debe cumplirse en cualquier volumen, resulta evidente que, independientemente de que el campo eléctrico sea o no uniforme, vale la identidad

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (6.29)$$

Ahora bien, el mismo teorema de la divergencia vale para el campo eléctrico (véase la ecuación (3.41)) sólo que ahora el campo está asociado a toda la carga presente, a saber, la carga libre ρ_L y la de polarización, ρ_p , de modo tal que resulta

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_L - \nabla \cdot \vec{P}) \quad (6.30)$$

y en consecuencia

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_L \quad (6.31)$$

Podemos ahora escribir la ecuación (6.31) en forma integral, esto es,

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_L \quad (6.32)$$

y por simple comparación con el teorema de Gauss (ecuación (3.6)) puede verse que la que se halla asociada al campo eléctrico es la carga total, la carga libre menos la de polarización. La carga libre, la que suministra nuestra batería, se asocia a otra cantidad, que estudiamos en la próxima sección.

6.5 – El vector desplazamiento

Obsérvese que así como el teorema de Gauss en ausencia de medios dieléctricos asocia la carga encerrada por una superficie al flujo del campo eléctrico a través de esa superficie, la ecuación (6.32) asocia la carga libre encerrada por una superficie al flujo de una nueva cantidad, llamada *vector desplazamiento* \vec{D} y definida como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.33)$$

de manera tal que sea

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \quad (6.34)$$

Las expresiones (6.33) y (6.34) son siempre válidas en un medio lineal, isótropo y homogéneo, cualquiera sea el campo eléctrico (aun cuando no se dedujeron en el caso particular de un campo eléctrico exterior uniforme). Vale la pena mencionar que el vector desplazamiento representa una medida de la densidad de carga libre, porque a diferencia del caso que tratamos en el capítulo 3, ahora hay otras cargas presentes, a saber, las de polarización. Por esa razón se expresa como la suma (vectorial) de un vector proporcional a la densidad de carga en vacío ($\epsilon_0 \vec{E}$) y a la densidad de dipolos orientados en el seno del dieléctrico (el vector polarización).

Podemos reescribir la expresión (6.33) usando la identidad (6.24) para relacionar el desplazamiento \vec{D} sólo con el campo \vec{E} , en la forma

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_E \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (6.35)$$

donde ϵ es una constante relacionada al material y que se denomina *permitividad del dieléctrico*. De nuevo, es una cantidad escalar sólo en un medio isótropo y, en general, es una función de la temperatura. Obsérvese que la susceptibilidad es una cantidad adimensional, y por lo tanto la permitividad ϵ tiene las unidades de ϵ_0 , esto es, $C^2 / N m^2$ en el sistema MKSC. Por lo demás, la unidad MKSC del vector desplazamiento (y, luego, el de polarización) resulta el de una densidad superficial de carga, a saber, C^2 / m^2 . Finalmente, a la cantidad

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi_E) > 1 \quad (6.36)$$

se la denomina *constante dieléctrica relativa* del medio, y es un número adimensional mayor que la unidad, lo que ya adelanta que la permitividad más baja es la del vacío (medio para el cual es $\epsilon_r = 1$). En los siguientes ejemplos ponemos de manifiesto el significado de las nuevas cantidades introducidas y su utilidad como herramientas de cálculo.

Ejemplo 6.1: En la figura 6.5 mostramos un casquete esférico, similar al del ejemplo 5.1, con carga Q , pero ahora hemos agregado un dieléctrico de constante relativa ϵ_r que llene todo el espacio en la región $r_a < r < r_b$. Calculemos el campo eléctrico y el desplazamiento en todo punto del espacio.

Obsérvese que lo único que se conoce es la carga libre sobre la superficie de la esfera interior. Si el dieléctrico es homogéneo (y de hecho no habremos de tratar otros casos) la simetría esférica original de la configuración no se rompe y el campo \vec{D} tiene la misma simetría del campo \vec{E} . De la expresión (6.35) es inmediato que en las regiones donde el

campo eléctrico es nulo, a saber, en los interiores de los conductores, también es nulo el vector desplazamiento, en tanto que en la región externa $r > r_c$ resulta $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ porque el dieléctrico en esa región es el aire (y la constante dieléctrica del aire es prácticamente igual a la del vacío).

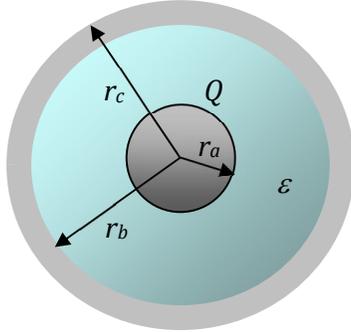


Fig. 6.6: entre la esfera con carga Q y el casquete esférico se introdujo un dieléctrico de constante relativa ϵ .

La única región donde el campo se ha modificado es en la región $r_a < r < r_b$. Y como lo único que conocemos es el valor de la carga libre, conviene partir de la ecuación (6.34) y escribir, teniendo en cuenta la simetría esférica de la configuración

$$D \, 4\pi r^2 = Q_L \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_L}{4\pi r^2} \hat{e}_r \quad (6.37)$$

y en consecuencia

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q_L}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{e}_r = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (6.38)$$

En la última expresión pusimos de manifiesto explícitamente que la intensidad del campo eléctrico en la región entre los dos conductores ha disminuido a una fracción $1/\epsilon_r$ de su valor en vacío. Ahora, a partir de la expresión (6.30) resulta

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{E}_0 \left[\epsilon_0 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \right] = \epsilon_0 \vec{E}_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] = \frac{Q_L}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] \hat{e}_r \quad (6.39)$$

Obsérvese que de la expresión (6.39) se deduce inmediatamente un resultado esperado: el vector polarización en vacío es nulo, porque la permitividad relativa del vacío vale 1. Por lo demás, la expresión (6.39) permite calcular la distribución completa de cargas de polarización. En efecto, si llamamos σ_a y σ_b a las densidades de carga de polarización sobre las superficies $r = r_a$ y $r = r_b$, a partir de la igualdad (6.14) resultan

$$\sigma_a = \vec{P}(r = r_a) \cdot \hat{n}_a = -\frac{Q_L}{4\pi r_a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (6.40)$$

$$\sigma_b = \vec{P}(r = r_b) \cdot \hat{n}_b = \frac{Q_L}{4\pi r_b^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (6.41)$$

donde $\hat{n}_a \equiv -\hat{e}_r$ y $\hat{n}_b \equiv \hat{e}_r$ son las normales salientes en cada una de las superficies del dieléctrico. Por esta razón la carga de polarización en la superficie interior del dieléctrico es

negativa. Obsérvese también que la carga libre Q_L se halla distribuida en la superficie de la esfera interior, de manera tal que es

$$\sigma_L = \frac{Q_L}{4\pi r_a^2} > \frac{Q_L}{4\pi r_a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad (6.42)$$

porque $\epsilon_r > 1$. Por otro lado, como el vector polarización sólo depende de la distancia radial, su divergencia se reduce a la derivada radial, esto es (véase en el apéndice la expresión de la divergencia de un vector en coordenadas esféricas, ecuación (A.18))

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{Q_L}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \right] = 0 \quad (6.43)$$

Este resultado puede parecer sorprendente, porque al cabo que el campo eléctrico no es uniforme y, en consecuencia, no lo es el vector polarización. Sin embargo, parece evidente a partir de la expresión de la divergencia que toda función puramente radial que decrezca como $1/r^2$ tendrá divergencia nula. Por otro lado, no parecía haber demasiadas alternativas toda vez que la suma de las expresiones (6.40) y (6.41) integradas en superficie es nula. En efecto, es casi inmediato que resulta

$$Q_{PS}|_a + Q_{PS}|_b = -4\pi r_a^2 \frac{Q_L}{4\pi r_a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) + 4\pi r_b^2 \frac{Q_L}{4\pi r_b^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = 0 \quad (6.44)$$

Por último, la expresión (6.38) muestra que el campo eléctrico ha cambiado su valor pero no su simetría. Si se redujo a una fracción $1/\epsilon_r$ de su valor sin dieléctrico, la diferencia de potencial entre los casquetes, que es directamente proporcional al campo, se redujo en la misma proporción. Y como la carga libre no ha variado, la capacidad del sistema debe haberse incrementado en una fracción ϵ_r . Analizaremos esta importante consecuencia en la sección 6.7.

Ejemplo 6.2: La figura 6.7 muestra un cilindro macizo no conductor de radio $r_a = 0,2m$ y longitud L , rodeado por un casquete cilíndrico, coaxial con el interno, de radios $r_a = 0,2m$ el interno (está “pegado” al cilindro macizo interior) y $r_b = 0,5m$ el externo, también de material no conductor. El material del cilindro interior tiene permitividad $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$ (esto es, $\epsilon_{r1} = 5$) y tiene distribuida homogéneamente una densidad de carga de valor $\rho_1 = 10^{-6} C/m^3$; el material del cilindro externo tiene una permitividad $\epsilon_2 = 8\epsilon_0$. En la aproximación de cilindros infinitos (esto es, midiendo los campos a distancias $d \ll L$, donde L representa la longitud de los cilindros, y alejados de los extremos de los mismos) calculemos los campos \vec{E} y \vec{D} en todo punto del espacio, el potencial V y las cargas de polarización en cada superficie.

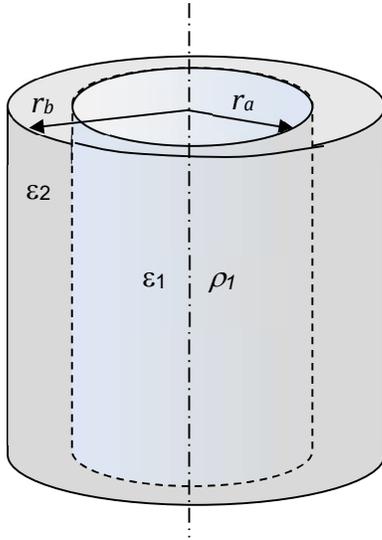


Fig. 6.7: vista parcial de dos cilindros coaxiales no conductores con diferente permitividad.

La distribución homogénea de cargas en el cilindro interior hace que la configuración posea simetría cilíndrica. De esta manera, los campos tendrán la misma simetría (véase la discusión en la sección 3.3). Como lo que conocemos es la distribución de cargas libres, comenzaremos por calcular el campo \vec{D} usando el teorema de Gauss. Obsérvese que la simetría impone que el flujo del vector \vec{D} sea nulo a través de las tapas de cualquier superficie gaussiana cilíndrica de radio R , en tanto que es máximo a través de la superficie lateral de altura h , esto es,

$$\Phi_D = 2\pi h R D(R) \tag{6.45}$$

Analicemos el problema en cada una de las regiones definidas por los cilindros

a) cilindro interior ($R < r_a$)

La cantidad de carga (libre) que encierra la superficie gaussiana de radio R , llamémosla Q_{ENC} , equivale a la densidad volumétrica de carga ρ_1 multiplicada por el volumen interior de la superficie gaussiana, esto es,

$$Q_{ENC} = \rho_1 \pi R^2 h \tag{6.46}$$

Entre las igualdades (6.45) y (6.46), teniendo en cuenta la simetría cilíndrica, resulta

$$\vec{D}_1(R) = \frac{1}{2} \rho_1 R \hat{e}_R = \left(5 \times 10^{-7} \frac{C}{m^3} \right) R \hat{e}_R \tag{6.47}$$

donde hemos llamado \vec{D}_1 al vector desplazamiento en la región $0 < R < r_a$.

b) región $r_a < R < r_b$

La simetría del vector \vec{D} sigue siendo cilíndrica, sólo que ahora toda superficie gaussiana cilíndrica de radio $R > r_a$ encierra toda la carga libre del cilindro interior, esto es,

$$Q_{ENC} = \rho_1 \pi r_a^2 h \tag{6.48}$$

A partir de las identidades (6.33) y (6.35), llamando $\vec{D}_2(R)$ al desplazamiento en esta zona, obtenemos

$$\vec{D}_2(R) = \rho_1 \frac{r_a^2}{2R} \hat{e}_R = \left(2 \times 10^{-8} \frac{C}{m}\right) \frac{1}{R} \hat{e}_R \quad (6.49)$$

c) región $R > r_b$

Si llamamos $\vec{D}_3(R)$ al vector desplazamiento en esta zona, resulta $\vec{D}_3(R) = \vec{D}_2(R)$ porque las fuentes de \vec{D} son las cargas libres, y las únicas cargas que aparecen en la región $r_a < R < r_b$ son cargas de polarización, en tanto que en la región exterior no hay ningún tipo de carga, ni de polarización ni libre. Luego, debe ser

$$\vec{D}_3(R) = \rho_1 \frac{r_a^2}{2R} \hat{e}_R = \left(2 \times 10^{-8} \frac{C}{m}\right) \frac{1}{R} \hat{e}_R \quad (6.50)$$

El cálculo del campo eléctrico en cada región es ahora inmediato a partir de la relación (6.35). De hecho, resulta $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ y en cada región vale

$$\vec{E}_1(R) = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_1}{5 \varepsilon_0} = \left(1,13 \times 10^4 \frac{V}{m^2}\right) R \hat{e}_R \quad R < r_a \quad (6.51)$$

$$\vec{E}_2(R) = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{\vec{D}_2}{8 \varepsilon_0} = (2,82 \times 10^2 V) \frac{1}{R} \hat{e}_R \quad r_a < R < r_b \quad (6.52)$$

$$\vec{E}_3(R) = \frac{\vec{D}_3}{\varepsilon_3} = \frac{\vec{D}_3}{\varepsilon_0} = (2,26 \times 10^3 V) \frac{1}{R} \hat{e}_R \quad R > r_b \quad (6.53)$$

En la figura 6.8 graficamos los vectores \vec{D} y de \vec{E} en todo el espacio. Obsérvese que el comportamiento de los vectores es muy diferente al pasar de una región a otra: los valores del vector desplazamiento son continuos, pero el campo eléctrico tiene discontinuidades (debido a la presencia de cargas de polarización en esas superficies). Esta es una característica de fundamental importancia que habremos de discutir en detalle en la sección próxima. pero podemos adelantar que no es esta una propiedad que valga en todos los casos en que el vector desplazamiento pasa de un medio dieléctrico a otro, sino que vale siempre que el vector desplazamiento sea perpendicular a esa superficie de separación (y, como veremos, no haya carga libre depositada en la frontera entre dieléctricos).

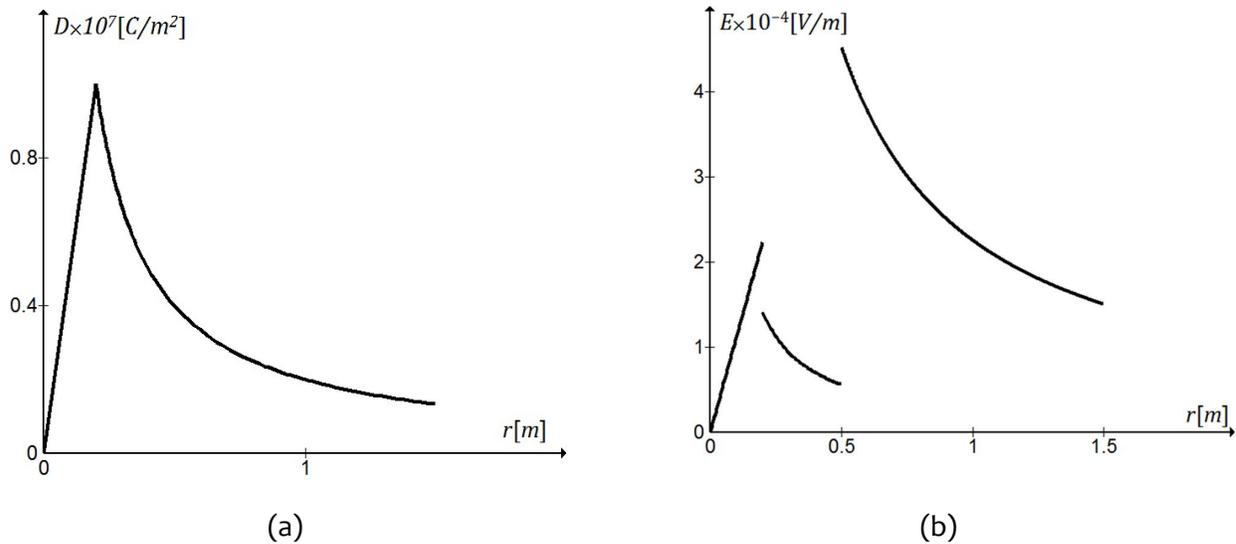


Fig.6.8: el panel (a) muestra la marcha del vector polarización a través de los dieléctricos, en tanto que la gráfica (b) corresponde a la forma en que varía el campo eléctrico. Obsérvese que el vector desplazamiento es continuo y que los saltos en el valor del campo eléctrico corresponden a la manera en que se inducen cargas de polarización en las superficies.

Ahora, a partir de las expresiones para el campo eléctrico (6.51) - (6.53) podemos calcular por integración directa el potencial electrostático y la diferencia de potencial entre las superficies límites en cada región.

a) región $R < r_a$

$$\int_R^0 dV = - \int_R^0 \left(1,12 \times 10^4 \frac{V}{m^2} \right) (-1) R dR \Rightarrow V(R) - V(0) = \left(5,62 \times 10^3 \frac{V}{m^2} \right) R^2 \quad (6.54)$$

Podemos tomar $V(0) = 0$ porque en el eje de simetría $R = 0$ no hay cargas, de manera tal que resulta

$$V(R) = \left(5,62 \times 10^3 \frac{V}{m^2} \right) R^2 \quad (6.55)$$

y

$$V_a = V(R = r_a) = 224,81 V \quad (6.56)$$

b) región $r_a < R < r_b$

$$\int_R^{r_a} dV = - \int_R^{r_a} (2,82 \times 10^2 V)(-1) \frac{1}{R} dR \Rightarrow V(R) - V_a = (2,82 \times 10^2 V) \ln\left(\frac{R}{r_a}\right) \quad (6.57)$$

Obsérvese que el potencial de la superficie $R = r_b$ resulta

$$V_b \equiv V(R = r_b) = V_a + (2,82 \times 10^2 V) \ln\left(\frac{0,5}{0,2}\right) = 485,94 V \quad (6.58)$$

y

$$V_b - V_a = 258,85 V \quad (6.59)$$

c) región $R > r_b$

Obsérvese que lo único que cambia respecto de la región anterior es el valor de la constante, de manera tal que resulta

$$V(R) = V_b + (2,26 \times 10^3 V) \ln\left(\frac{R}{r_b}\right) \quad (6.60)$$

Finalmente, para evaluar las cargas de polarización sobre las superficies $R = r_a$ y $R = r_b$ podemos calcular el vector polarización en cada región. Para ello podemos partir de la expresión (6.35) y calcular $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ entre las expresiones (6.47) y (6.49) - (6.53). Una manera alternativa es partir de la ecuación (6.24) y usar la ecuación (6.36) para escribir

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} = \epsilon_0 \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right] \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (6.61)$$

Así, resulta

$$\vec{P}_1(R) = \left(4 \times 10^{-7} \frac{C}{m^3}\right) R \hat{e}_R \quad R < r_a \quad (6.62)$$

$$\vec{P}_2(R) = \left(1,75 \times 10^{-8} \frac{C}{m}\right) \frac{1}{R} \hat{e}_R \quad r_a < R < r_b \quad (6.63)$$

$$\vec{P}_3(R) = 0 \quad R > r_b \quad (6.64)$$

Podemos calcular ahora los valores de las cargas de polarización. Las superficiales van como $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ recordando que la normal es la exterior a la superficie que se considera.

Obsérvese que en la superficie $R = r_a$ el valor de la densidad de cargas de polarización es diferente a un lado y al otro, formando una capa infinitesimal de momento dipolar que provoca el salto en el valor del campo eléctrico. De hecho, a partir de los valores (6.62) - (6.64) resultan

$$\sigma_{P_1}(R = r_a) = 8 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2} \quad (6.65)$$

$$\sigma_{P_2}(R = r_a) = -8,75 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2} \quad (6.66)$$

$$\sigma_{P_2}(R = r_b) = 3,50 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2} \quad (6.67)$$

$$\sigma_{P_3}(R = r_b) = 0 \quad (6.68)$$

El cálculo de la densidad volumétrica de carga de polarización lo realizamos a partir de la expresión (6.29) teniendo en cuenta que el vector polarización sólo tienen componente en la dirección radial. Dado que en coordenadas cilíndricas es

$$\rho_p = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RP) \quad (6.69)$$

parece evidente a partir de las expresiones (6.62) - (6.64) que la única región en la que aparecen cargas de polarización en volumen es la zona interna $R < r_a$. En efecto

$$\rho_p = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R\alpha R) = -2\alpha \quad (6.70)$$

donde $\alpha = 4 \times 10^{-7} C/m^3$ es el coeficiente que aparece en la expresión (6.62). Es fácil ver que la suma de todas las cargas de polarización es nula, esto es

$$2\pi L[(\sigma_{P_1} + \sigma_{P_2}|_{R=r_a})r_a + \sigma_{P_2}|_{R=r_b} r_b] + \pi L r_a^2 \rho_p = 0 \quad (6.71)$$

Ejemplo 6.3: Supongamos una esfera dieléctrica polarizada en la forma $\vec{P}(r) = P_0 (r_e/r) \hat{e}_r$, donde r_e es el radio de la esfera y P_0 una constante positiva. Halle las expresiones de las cargas de polarización en superficie y volumen, de la carga libre, y de los vectores campo eléctrico y desplazamiento.

Lo más sencillo parece ser comenzar por el cálculo de las cargas de polarización, pues a partir de las expresiones (6.14) y (6.29) resulta inmediatamente

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=r_e} = P_0 \quad (6.72)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 P_0 (r_e/r)] = -P_0 \left(\frac{r_e}{r^2} \right) \quad (6.73)$$

Ahora bien, hemos asociado la carga libre al vector desplazamiento en la expresión (6.34). Desde ya que podemos usar el teorema de la divergencia (que sin decirlo ya utilizamos en la expresión (6.31)) para escribir

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \equiv \iiint \nabla \cdot \vec{D} \, d\mathcal{V} = \iiint \rho_L \, d\mathcal{V} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_L \quad (6.74)$$

y como además valen las ecuaciones (6.33) y (6.35) escribimos

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \frac{\vec{P}}{\varepsilon - \varepsilon_0} + \vec{P} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \vec{P} \quad (6.75)$$

y en consecuencia resulta

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} P_0 \left(\frac{r_e}{r^2} \right) \quad (6.76)$$

Utilizando los resultados (6.73) y (6.74) obtenemos finalmente

$$\rho_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} P_0 \left(\frac{r_e}{r^2} \right) \quad (6.77)$$

La carga libre total se obtiene integrando en volumen, esto es,

$$Q_L = 4\pi \int_0^{r_e} dr \, r^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} P_0 \left(\frac{r_e}{r^2} \right) = 4\pi r_e^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} P_0 \quad (6.78)$$

Las expresiones de los vectores desplazamiento y campo eléctrico en la región $r < r_e$ son inmediatas a partir de la expresión (6.75). En efecto, resultan

$$\vec{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} P_0 \frac{r_e}{r} \hat{e}_r \quad r < r_e \quad (6.78)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{r_e}{r} \hat{e}_r \quad r < r_e \quad (6.79)$$

En la región externa a la esfera debemos apelar al teorema de Gauss para el vector desplazamiento, teniendo en cuenta que la simetría de la configuración hace que el vector \vec{D} no dependa de las variables (angulares) de integración, de modo tal que es inmediata la forma

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \times 4\pi r^2 = Q_L \Rightarrow \vec{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} P_0 \frac{r_e^2}{r^2} \hat{e}_r \quad r > r_e \quad (6.80)$$

y en consecuencia

$$\vec{E} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)} P_0 \frac{r_e^2}{r^2} \hat{e}_r \quad r > r_e \quad (6.81)$$

Ejemplo 6.4: El dieléctrico de la figura 6.9 no es uniforme, y se halla entre dos placas cuadradas de lado L , separadas una distancia d , y cuya diferencia de potencial es V . La permitividad varía como $\epsilon(y) = 5\epsilon_0(2y/L + 1)$. Hallemos las expresiones de los diferentes vectores y cargas en el seno del dieléctrico.

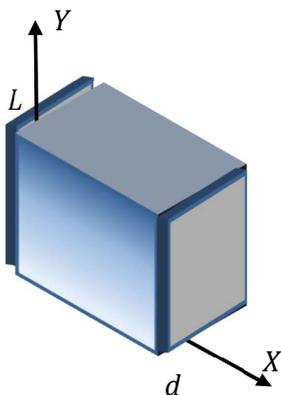


Fig.6.9: el dieléctrico no es uniforme, sino que varía su valor uniformemente con la altura. El valor mínimo es en la base, $y=0$.

Notemos ante todo que el problema puede ser pensado como una serie infinita de capacitores en paralelo, todos ellos de altura dy , ancho L , separación d entre placas, y con un dieléctrico que varía infinitesimalmente de uno a otro. Y que estén en paralelo se debe al hecho de que están todos al mismo potencial, a saber, V (véase el capítulo 5). Si bien recién en la sección 6.8 analizaremos los cambios que se dan en la capacidad de un capacitor cuando se lo rellena, total o parcialmente, con un dieléctrico distinto del vacío, podemos inferir que las capacidades de cada uno de los capacitores habrá de ser diferente (porque son diferentes los valores de las permitividades de cada dieléctrico). Siendo que están todos a la misma diferencia de potencial, la expresión

(5.6) nos asegura que la carga en la porción de placa que le corresponde a cada uno de ellos debe ser diferente, de manera tal que parece complicado tratar de avanzar a partir del teorema de Gauss para el vector desplazamiento. Sin embargo, el valor del campo eléctrico de cada capacitor diferencial queda completamente definido por la diferencia de potencial entre las placas y la distancia entre ellas, de manera tal que es inmediato argumentar que el campo eléctrico debe ser el mismo para todos los capacitores diferenciales. Luego, resulta

$$\vec{E} = \frac{V}{d} \hat{e}_x \quad (6.82)$$

y en consecuencia

$$\vec{D}(y) = 5\epsilon_0 \left(\frac{2y}{L} + 1 \right) \frac{V}{d} \hat{e}_x \quad (6.83)$$

A su vez, el vector polarización se escribe como

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{V}{d} \epsilon_0 \left(\frac{10y}{L} + 4 \right) \hat{e}_x \quad (6.84)$$

Los valores de las cargas de polarización son inmediatos, y resultan

$$\sigma_p(x=0) = \vec{P} \cdot (-\hat{e}_x) = -\frac{V}{d} \epsilon_0 \left(\frac{10y}{L} + 4 \right) \quad (6.85)$$

$$\sigma_p(x=d) = \vec{P} \cdot \hat{e}_x = \frac{V}{d} \epsilon_0 \left(\frac{10y}{L} + 4 \right) \quad (6.86)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (6.87)$$

En principio podría parecer sorprendente que la densidad de volumétrica de carga de polarización sea nula, toda vez que el vector polarización depende de la altura. Sin embargo, aunque varía en la coordenada y , \vec{P} es un vector que tiene sólo componente en x .

Obsérvese además que el vector campo eléctrico es constante y no cambia su valor al pasar de un medio dieléctrico al otro. De hecho, el comportamiento de los vectores es diferente respecto del ejemplo 6.2: ahora es el vector \vec{E} el que permanece inalterado, en tanto que el vector desplazamiento tiene discontinuidades (debido a la diferencia en las cargas libres en cada región diferencial de placa). Esta es una característica de fundamental

importancia que habremos de discutir en detalle en la próxima sección, pero podemos adelantar que no es esta una propiedad que valga en todos los casos en que el vector campo eléctrico pasa de un medio dieléctrico a otro, sino que vale siempre que el vector campo eléctrico sea paralelo a esa superficie de separación.

Por otro lado, es posible calcular la carga libre total que se aloja en las placas apelando a las expresiones (6.34) y (6.83). En efecto

$$Q_L = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_0^L dz \int_0^L dy 5\epsilon_0 \left(\frac{2y}{L} + 1\right) \frac{V}{d} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = 10 \frac{L^2 V \epsilon_0}{d} \quad (6.88)$$

de manera tal que, a partir de la definición (5.6), es fácil ver que la capacidad del capacitor vale

$$C = \frac{Q_L}{V} = 10\epsilon_0 \frac{L^2}{d} \quad (6.89)$$

6.6 – Los campos \vec{E} y \vec{D} en la superficie límite de un dieléctrico

En los ejemplos 6.2 – 6.4 vimos que el valor de los vectores electrostático y desplazamiento pueden ser discontinuos al pasar de un medio dieléctrico a otro. En verdad, por la simetría de las configuraciones de esos ejemplos, los vectores son normales o paralelos a la superficie de separación, y justificamos esas discontinuidades en la existencia o bien de una capa infinitesimal de momento dipolar no nulo (en el caso del campo eléctrico) o bien de una distribución no uniforme de cargas libres (en el caso del vector desplazamiento).

Por ejemplo, en el ejemplo 6.2 la componente normal del vector desplazamiento se mantiene inalterada al pasar de un medio a otro, como puede corroborarse fácilmente a partir de las expresiones (6.47), (6.49) y (6.50) reemplazando la variable R por el valor correspondiente al radio límite. Parece también evidente, a partir de su definición y de las expresiones (6.51)–(6.53), que el valor de la componente normal (a la superficie de separación de los dieléctricos) del campo eléctrico cambia al pasar de un medio a otro, pero no lo hacen ni su dirección ni su sentido. Y más aún, los valores de un lado y otro de la superficie están en relación inversa a la razón entre las permitividades

En la superficie que separa dos medios dieléctricos de diferente permitividad los vectores campo eléctrico y desplazamiento en general cambian. Pero sin importar cuáles sean esos medios ni el valor de la carga libre en la superficie de separación, la componente tangencial de \vec{E} no sufre alteraciones, y de un lado y otro de la superficie de separación vale lo mismo.

(de nuevo, el cálculo puede efectuarse a partir de las ecuaciones (6.51) - (6.53)). Cálculos similares pueden hacerse en los otros dos ejemplos mencionados.

Vamos a demostrar que se trata de propiedades generales de los campos al pasar de un medio a otro, y que no dependen de la particular geometría o simetría de la configuración. Para ello, pensemos en una superficie S que separa dos medios con diferente permitividad, digamos ϵ_1 y ϵ_2 , y sean $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{D}_1$ y \vec{D}_2 los campos eléctricos y desplazamientos correspondientes a cada lado de la superficie de separación. Supongamos que a cada lado de la superficie S hay una cantidad de carga Q , y sea σ_L la carga libre sobre la superficie de separación, como se muestra en la figura 6.10.

El flujo del vector \vec{D} a través de la superficie S lo calculamos con la ayuda del cilindro gaussiano de altura $2\delta r$ y área de las tapas δS . En el límite $\delta r \rightarrow 0$ la expresión (6.34)

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L$$

se reduce a la forma

$$\vec{D} \cdot \hat{n}_1 + \vec{D} \cdot \hat{n}_2 = \sigma_L \tag{6.90}$$

porque el flujo lateral se anula y $Q_L/\delta S \rightarrow \sigma_L$.

Ahora bien, \hat{n}_1 y \hat{n}_2 tienen signos opuestos, de manera tal que la expresión (6.90), llamando D_N a la proyección del vector \vec{D} sobre \hat{n} (véase la figura 6.8) resulta

$$D_{N1} - D_{N2} = \sigma_L \tag{6.91}$$

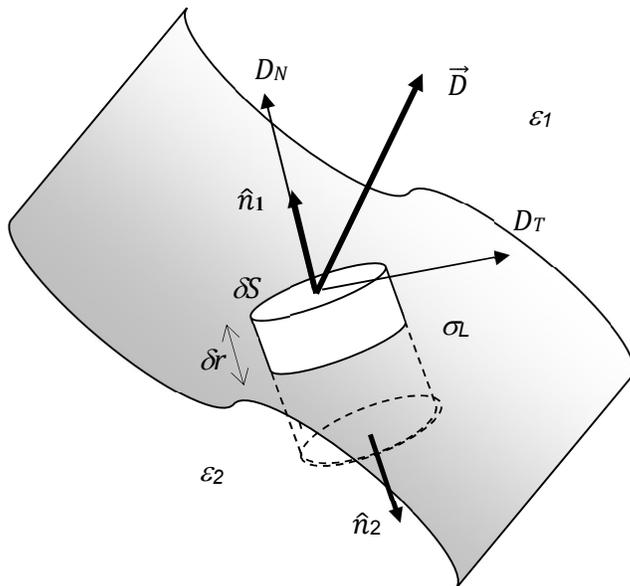


Fig. 6.10: la superficie S separa dos medios con distintas propiedades dieléctricas. Se ha marcado el vector D de un solo lado de la superficie, pero del otro lado tiene igual dirección y sentido.

Es inmediato que si no hay cargas libres en la superficie de separación (como de hecho ocurre en los ejemplos 6.2 y 6.3) la componente normal del vector desplazamiento se conserva (esto es, permanece constante).

Podemos deducir el comportamiento de la componente normal del campo eléctrico a partir de la relación (6.30) entre el vector campo eléctrico y el vector desplazamiento, que por ser una identidad vectorial vale componente a componente. Luego, a partir de la identidad (6.91) resulta

$$\epsilon_1 E_{N1} - \epsilon_2 E_{N2} = \sigma_L \tag{6.92}$$

que muestra que la componente normal del campo eléctrico sobre la superficie de separación de los dos medios no se conserva ni siquiera en ausencia de cargas libres. Lo que sí es invariante es la componente transversal del campo eléctrico. Para demostrarlo recordemos la ecuación (4.24)

$$\oint_C \vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

que asegura que la circulación del campo eléctrico a lo largo de una curva cerrada C es nula. Recordemos que esta propiedad se asocia al hecho de que el trabajo neto que debe realizarse para mover una carga q por todo un camino cerrado es nulo porque el campo electrostático es conservativo. Lo que aquí nos interesa es que el camino es arbitrario, a condición de que sea cerrado, como el camino $abcda$ de la figura 6.11.

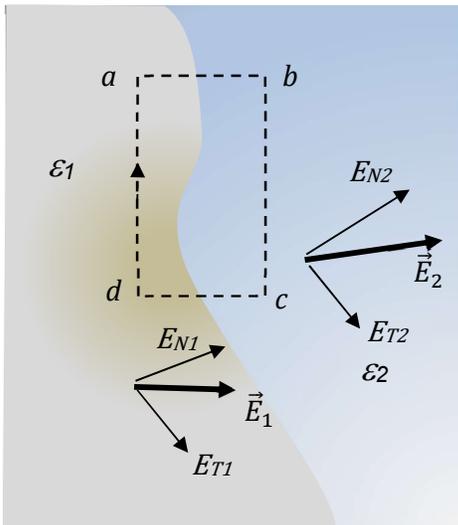


Fig. 6.11: el campo eléctrico, en tanto vector, se difracta al pasar de un medio a otro (en la figura, distinguidos por color y por permitividad) pero la componente tangencial es invariante.

En el límite $\ell_{ab} \rightarrow 0$, $\ell_{cd} \rightarrow 0$ (porque sólo nos interesan los cambios en la superficie de separación) los dos lados tienen contribución nula. Luego, resulta

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_2 = 0 \tag{6.93}$$

o sea

$$\int E_{T1} d\ell_1 + \int E_{T2} d\ell_2 = 0 \tag{6.94}$$

porque las proyecciones del vector campo eléctrico sobre los elementos de longitud son de signo contrario. Luego, si llamamos L a la longitud (infinitesimal) de los segmentos bc y ad , de manera tal que sobre cualquiera de estos elementos infinitesimales podamos considerar constante a los campos E_{T1} y E_{T2} , resulta

$$L(E_{T1} - E_{T2}) = 0 \tag{6.95}$$

y, en consecuencia

$$E_{T1} = E_{T2} \tag{6.96}$$

A partir de la relación (6.35) resulta inmediatamente

$$\frac{D_{T1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{T2}}{\varepsilon_2} \quad (6.97)$$

que muestra que bajo condiciones absolutamente generales la componente tangencial del vector desplazamiento sufre una discontinuidad al pasar de un medio dieléctrico a otro.

6.6 – Energía en los dieléctricos inmersos en un campo eléctrico

Regresemos por un momento a la expresión (4.58) que determina la energía contenida en una distribución de cargas

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(R)V(R) d\mathcal{V} \quad (6.98)$$

en la que V designa el potencial eléctrico y $d\mathcal{V}$ un elemento de volumen. Notemos que la densidad de carga que aparece es la carga libre, porque llegamos a esa expresión sin considerar la presencia de un medio dieléctrico. Ahora bien, al escribir la energía en términos del campo electrostático usamos el teorema de Gauss, pero en presencia de un dieléctrico las cargas libres se hallan asociadas al vector desplazamiento. De nuevo, sin pretender una demostración rigurosa, podemos pensar que la expresión (4.62) que relaciona la energía con el campo eléctrico en el vacío debe valer en cualquier medio de permitividad ε , y escribir

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \iiint |\vec{E}|^2 d\mathcal{V} \quad (6.99)$$

y utilizar la expresión (6.35) para obtener finalmente

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \iiint |\vec{E}|^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (6.100)$$

Obsérvese que a partir de la definición (6.28) del vector desplazamiento, podemos escribir la última expresión en la forma

$$U = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint (\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \vec{P} \cdot \vec{E}) d\mathcal{V} \quad (6.101)$$

Polarizar un dieléctrico requiere de una cierta cantidad de trabajo, que de alguna manera debe verse reflejado en el contenido energético del capacitor. La manera en que se modifica la energía depende del agente que realiza el trabajo de polarización (la batería, o las cargas de las placas si se desconecta la fuente).

en la que el primer sumando del miembro de la derecha representa la energía contenida en el campo eléctrico (sin dieléctrico, porque aparece ϵ_0) y el segundo sumando se relaciona con la energía que es necesario invertir para polarizar el dieléctrico. El trabajo de polarización, de alguna manera, debe reflejarse en la energía contenida en cualquier medio dieléctrico en el que se enciende un campo eléctrico o, de manera más general, en toda región del espacio en la que se modifica la relación entre el campo y el dieléctrico. En la siguiente sección analizamos con algún detalle esta

afirmación en el caso concreto de los capacitores.

6.7 – Capacidad de un condensador con dieléctrico

De acuerdo a lo discutido en la sección 6.2, el dieléctrico modifica sustancialmente el campo eléctrico uniforme entre las placas que lo generan. Pensadas como un condensador plano paralelo, podemos evaluar el nuevo valor de la capacidad de una manera muy simple. Si el dieléctrico es isótropo y homogéneo el campo eléctrico sigue siendo unidireccional, de manera tal que la diferencia de potencial $\Delta V'$ entre las placas vale

$$\Delta V' = E d \quad (6.102)$$

donde E designa al campo neto definido en la ecuación (6.17) (por simplicidad le hemos suprimido el subíndice N , de manera tal que estamos reescribiendo esa ecuación en la forma $E = E_E - E_P$) y d es la distancia interplacas. Usando la expresión (6.19) podemos ahora escribir

$$\Delta V' = \frac{E_E}{\beta} d \quad \beta > 1 \quad (6.103)$$

y calcular el nuevo valor de capacidad que tendrá un capacitor plano paralelo si el espacio interplacas se llena con un dieléctrico de permitividad ϵ . Si llamamos C_0 a la capacidad del capacitor en vacío y C a la capacidad del capacitor con dieléctrico, a partir de la definición de capacidad (5.6) escribimos

$$C = \frac{Q}{\Delta V'} = \beta \frac{Q}{E_E d} = \beta C > C_0 \quad (6.104)$$

porque $\beta > 1$. Pero en la expresión (6.31) vimos que el coeficiente auxiliar β se relaciona con la susceptibilidad a través de la relación

$$\beta - 1 = \chi_E \Rightarrow \beta = 1 + \chi_E = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r \quad (6.105)$$

de manera tal que la capacidad de un capacitor con dieléctrico de permitividad ε entre sus placas se transforma en

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad (6.106)$$

Obsérvese que al variar la capacidad del condensador también varía su contenido de energía. De hecho, podemos calcular esta variación suponiendo que el dieléctrico se introduce manteniendo constante el potencial de sus placas (esto significa que la batería no se desconecta) de manera tal de inyectar cargas que mantengan constante el campo eléctrico entre las placas (recuérdese que habrán de aparecer cargas de polarización que tienden a debilitar el campo dentro del dieléctrico). Sabemos que si el medio interplacas es el vacío la cantidad de energía contenida por el capacitor de capacidad C_0 vale (véase la expresión (5.20))

Un capacitor con dieléctrico (distinto de aire) entre sus placas tiene mayor capacidad que uno en el que el dieléctrico sea vacío. Esto se debe a que la permitividad más baja es la del vacío (similar a la del aire). Una vez conectado a una fuente, el capacitor con dieléctrico tiene la capacidad de almacenar mayor energía que el de vacío.

$$U = \frac{C_0(\Delta V)^2}{2} \quad (6.107)$$

y de acuerdo al resultado (6.106), en presencia de un medio de permitividad ε se transforma en

$$U' = \frac{\varepsilon_r C_0(\Delta V)^2}{2} = \varepsilon_r U \quad (6.108)$$

y la diferencia de energía $U' - U$ resulta ser

$$U' - U = (\varepsilon_r - 1)U = \chi_E U \quad (6.109)$$

que representa precisamente la energía que debe gastarse en la polarización del dieléctrico, energía que proviene del trabajo que realiza el medio externo (la batería) y

queda como energía del capacitor. En el ejemplo 6.5 analizamos el caso en que el trabajo de polarización lo hacen las cargas del condensador aislado.

Ejemplo 6.5: Se tiene el condensador de placas plano paralelas de la figura 6.12. El área de cada placa es $A = 20 \text{ cm}^2$, y la distancia entre ellas es $d = 6 \text{ mm}$. Se lo aísla (es decir, se desconecta la batería) y se llena completamente el espacio entre las placas de esta manera: 4 mm con un dieléctrico de constante $\epsilon_{r1} = 25$, y 2 mm con otro dieléctrico de constante $\epsilon_{r2} = 60$. Calculemos: a) la capacidad y la carga en cada placa antes de ser llenado con los dieléctricos; b) la capacidad y la diferencia de potencial entre sus placas después de ser llenado; c) los valores de los vectores \vec{E} y \vec{D} antes y después de llenar el capacitor; d) los valores de las energías inicial y final del capacitor.

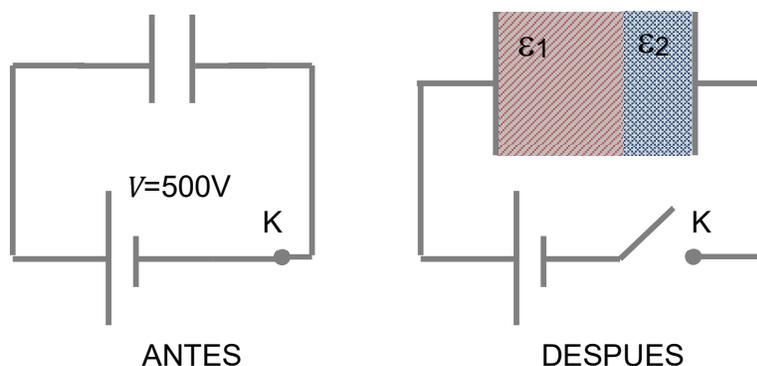


Fig. 6.12: una vez cargado, el capacitor es aislado (levantando la llave K) para llenarlo con dos dieléctricos (en la figura se han exagerado las dimensiones para que la geometría se distinga sin dificultades). La configuración final resulta en un arreglo en serie.

- a) la capacidad del condensador plano paralelo, a la que llamaremos C_0 , de acuerdo a lo discutido en el capítulo 5 (véase la ecuación (5.16)) vale

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 2,95 \times 10^{-12} \text{ F} \quad (6.110)$$

en tanto que la carga inicial de las placas, digamos Q_0 , será

$$Q_0 = C \Delta V = 1,47 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (6.111)$$

Es muy importante notar que la carga neta del capacitor es de $1,47 \times 10^{-9} \text{ C}$ y no el doble (como sería dable esperar si pensáramos que por cada carga que la batería cede a la placa derecha cede otra de igual valor a la placa izquierda). O sea, la expresión (6.111) es el valor

de toda la carga disponible en el sistema en estas condiciones, valor que no podrá modificarse porque habremos de desconectar la batería.

b) al llenar el condensador de la manera indicada se obtiene un arreglo en serie, de manera tal que la capacidad equivalente se calcula a partir de la identidad (5.23) para el caso de sólo dos capacitores como

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.112)$$

donde C_1 y C_2 se refieren a los condensadores con permitividades relativas ϵ_{r1} y ϵ_{r2} , respectivamente. Estas capacidades valen

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A}{d_1} = \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 A}{d_1} = \frac{25 \epsilon_0 A}{4 \times 10^{-3} m} = 1,77 \times 10^{-11} F \quad (6.113)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A}{d_2} = \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 A}{d_2} = \frac{60 \epsilon_0 A}{2 \times 10^{-3} m} = 5,31 \times 10^{-10} F \quad (6.114)$$

de manera tal que la capacidad equivalente C_{eq} resulta

$$C_{eq} = 1,71 \times 10^{-11} F \quad (6.115)$$

Obsérvese que la capacidad equivalente es menor que la menor de las capacidades individuales, y su valor es muy próximo al valor C_1 porque $C_1 \ll C_2$. Pero aun así el valor de la capacidad equivalente es del orden de 6 veces superior al de la capacidad sin dieléctricos. En el ejemplo 6.6 se discute la configuración con los dos dieléctricos en paralelo.

Para calcular la diferencia de potencial entre las placas luego de introducir los dieléctricos, digamos $\Delta V'$, tengamos en cuenta que aislar al condensador cuando se lo llena con los dieléctricos significa que la carga permanece constante, de modo tal que resulta

$$\Delta V' = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{1,47 \times 10^{-9} C}{1,71 \times 10^{-11} F} = 85,96 V \quad (6.116)$$

c) mientras no hay dieléctricos en el espacio entre las placas, el módulo del campo eléctrico en vacío, E_0 , se evalúa sencillamente como

$$E_0 = \frac{\Delta V}{d} = 8,33 \times 10^4 \frac{V}{m} \quad (6.117)$$

donde ΔV es la tensión de la fuente *antes* de ser desconectada. Obsérvese que el campo es constante y está dirigido de la placa positiva a la negativa (precisamente, por ser

unidimensionales trataremos a los vectores $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}$ como escalares). Por lo demás, el vector desplazamiento es paralelo al campo eléctrico y de módulo

$$D = \varepsilon_0 E = 7,37 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \quad (6.118)$$

Una vez que se introducen los dieléctricos, el campo eléctrico cambia porque se inducen cargas de polarización que lo debilitan. Por el contrario, el vector desplazamiento permanece constante porque el proceso se realiza a carga constante, lo que supone que la carga libre es constante. En consecuencia, si llamamos D' y E' a las intensidades de los campos con dieléctrico, resultan

$$D' = D \quad (6.119)$$

$$E'_1 = \frac{D'}{\varepsilon_1} = \frac{D}{25\varepsilon_0} = \frac{E}{25} = 3.332 \frac{V}{m} \quad (6.120)$$

$$E'_2 = \frac{D'}{\varepsilon_2} = \frac{D}{60\varepsilon_0} = \frac{E}{60} = 1.388,33 \frac{V}{m} \quad (6.121)$$

d) para evaluar la energía invertida en el proceso de rellenar el condensador con dieléctrico, observemos que al permanecer constante el valor de la carga e incrementarse en aproximadamente seis veces el valor de la capacidad, a partir de la ecuación (5.22) se deduce que la energía debe haber disminuido en un factor igual al incremento de la capacidad. De hecho

$$U = \frac{Q^2}{2C} = 3,55 \times 10^{-7} J \quad (6.122)$$

$$U' = \frac{Q^2}{2C_{eq}} = 6,31 \times 10^{-8} J \quad (6.123)$$

y la variación de energía es negativa porque U' es 6 veces menor que U . Esto se debe a que el trabajo de reordenamiento de los dipolos del dieléctrico lo realizan las cargas, a expensas de la energía interna del sistema.

Desde ya que se llega al mismo resultado si calculamos la variación ΔU usando el nuevo valor de la diferencia de potencial entre las placas que obtuvimos en (b). La razón es que si bien la capacidad aumenta un factor 6, la diferencia de potencial disminuye en esa proporción, de manera tal que el cuadrado de la diferencia de potencial representa un decremento de la energía en un factor 36, y a partir de la ecuación (5.20) es inmediato que la energía disminuye seis veces.

Ejemplo 6.6: los dieléctricos del ejemplo 6.5 se colocan ahora como muestra la figura 6.11. En estas condiciones, el dieléctrico ϵ_1 ocupa el 70 % del volumen entre placas, que tienen las dimensiones y el espaciamiento del ejemplo anterior. Calculemos la capacidad equivalente y las intensidades de los campos \vec{E} y \vec{D} de la nueva configuración.



Fig. 6.13: los dieléctricos dispuestos de esta manera conforman un arreglo en paralelo.

Observemos ante todo que si uno de los dieléctricos ocupa el 70% del volumen entonces ocupa el 70% del área de las placas, porque la distancia entre placas es la misma para los dos materiales. Por otro lado, ambos dieléctricos están al mismo potencial, de manera tal que conforman un arreglo en paralelo. Si llamamos C_1 y C_2 a las capacidades de los condensadores con dieléctricos de permitividades ϵ_{r1} y ϵ_{r2} , respectivamente, resulta

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (6.124)$$

Teniendo en cuenta que el área de cada placa es $A = 20 \text{ cm}^2$ y la distancia entre ellas es $d = 6 \text{ mm}$, resultan

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} = \frac{25\epsilon_0 \times 0,7 \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{6 \times 10^{-3} \text{ m}} = 5,16 \times 10^{-11} \text{ F} \quad (6.125)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A_2}{d} = \frac{60\epsilon_0 \times 0,3 \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{6 \times 10^{-3} \text{ m}} = 5,31 \times 10^{-11} \text{ F} \quad (6.126)$$

de donde resulta de manera inmediata

$$C_{eq} = 1,04 \times 10^{-10} \text{ F} \quad (6.127)$$

Obsérvese que con esta configuración C_{eq} es del orden de 35 veces la capacidad sin dieléctrico. Por lo tanto, como el sistema está aislado, la diferencia de potencial entre las placas debe haber disminuido en una proporción similar. El valor de la carga que hay en las placas antes de colocar los dieléctricos lo obtuvimos en el ejemplo anterior, y para los valores propuestos resulta $Q = 1,47 \times 10^{-9} \text{ C}$. Recordemos que al desconectar la batería la carga libre total permanece constante porque no hay ningún elemento que pueda realizar trabajo para transportarla de una placa a la otra, de manera tal que lo que debe variar es el potencial entre las placas, digamos $\Delta V'$, que en este caso resulta

$$\Delta V' = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{1,47 \times 10^{-9} \text{ C}}{1,04 \times 10^{-10} \text{ F}} = 14,31 \text{ V} \quad (6.128)$$

Que la carga libre neta, total, permanezca constante no significa que no pueda redistribuirse sobre cada placa, y está bien, porque como la diferencia de potencial es la misma para los dos dieléctricos y las capacidades no, se deduce inmediatamente que las cargas se han reconfigurado. De hecho, con los valores de C_1 y C_2 obtenidos en las expresiones (6.125) – (6.126) resultan de inmediato

$$Q_1 = C_1 \Delta V' = 7,29 \times 10^{-1} \text{ C} \quad (6.129)$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V' = 7,50 \times 10^{-10} \text{ C} \quad (6.130)$$

El hecho de que las cargas deban redistribuirse sobre la superficie de las placas puede deducirse de otra manera. Ya adelantamos en la sección 6.7 que la componente del campo eléctrico tangente a la superficie de separación de dos medios es invariante, esto es, vale lo mismo a ambos lados de la superficie. Ahora bien, el campo eléctrico de la configuración que estamos analizando está dirigido de una placa a la otra, de manera tal que es tangente a la superficie límite entre los dos dieléctricos (si usted dibuja el vector campo eléctrico en esta superficie de separación debe hacerlo paralelo a la superficie, es decir, el vector es tangente a dicha superficie) y en consecuencia, tiene el mismo valor en ambos dieléctricos. Pero en los dieléctricos entonces se inducen diferentes cantidades de carga de polarización (porque es el mismo campo eléctrico en dos dieléctricos diferentes), de manera tal que la carga libre que sustenta idéntico campo eléctrico en ambos dieléctricos debe ser también diferente (porque es el mismo campo eléctrico generado por áreas diferentes) lo que se traduce en una redistribución no homogénea de carga en las placas.

Como el campo eléctrico es el mismo a ambos lados de la superficie de separación de los dieléctricos, sólo puede depender de la diferencia de potencial y de la distancia entre las placas, de manera tal que su intensidad vale

$$E = \frac{\Delta V'}{d} = \frac{14,13 \text{ V}}{0,006 \text{ m}} = 2.350 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6.131)$$

y el módulo del vector desplazamiento en cada dieléctrico resulta en consecuencia

$$D_1 = \varepsilon_1 E = 5,20 \times 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (6.132)$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E = 1,24 \times 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (6.133)$$

Obsérvese que en cada región el valor absoluto del vector polarización vale

$$P_1 = |D_1 - \varepsilon_0 E| = 4,99 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \quad (6.134)$$

$$P_2 = |D_2 - \varepsilon_0 E| = 1,22 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \quad (6.135)$$

La densidad de carga de polarización σ_p sobre las placas tiene el valor de P_1 en la región del dieléctrico de permitividad ε_1 , y P_2 en el otro dieléctrico. Por otro lado, los valores de densidad de carga libre podemos calcularlos a partir de los valores de las cargas Q_1 y Q_2

$$\sigma_{L1} = \frac{Q_1}{A_1} = D_1 = \frac{7,29 \times 10^{-10} C}{0,7 \times 20 \times 10^{-4} m^2} = 5,20 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \quad (6.136)$$

$$\sigma_{L2} = \frac{Q_2}{A_2} = D_2 = \frac{7,50 \times 10^{-1} C}{0,3 \times 20 \times 10^{-4} m^2} = 1,24 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2} \quad (6.137)$$

y las cargas netas resultan ser $\sigma_{N1} = |\sigma_1 - \sigma_{P1}|$ y $\sigma_{N2} = |\sigma_2 - \sigma_{P2}|$. Estas cargas netas, como es fácil demostrar a partir de que el campo entre dos placas en vacío vale $E = \sigma/\varepsilon_0$, generan el mismo campo eléctrico equivalente (sin dieléctrico) al que generan las cargas libres y las de polarización en presencia del dieléctrico.

Resumen del capítulo

En este capítulo hemos analizado con algún detalle los fenómenos relacionados a la polarización, que de alguna manera – bastante burda, por cierto – podemos interpretar como la orientación de la estructura dipolar de un dieléctrico en presencia de un campo eléctrico externo. Hemos definido una nueva cantidad, el vector polarización, como una medida de la densidad volumétrica de dipolos orientados por unidad de volumen, en un medio lineal.

Vale la pena aclarar este punto: sólo en un medio lineal y sin polarización permanente el vector polarización tiene la forma de la expresión (6.16); y sólo si es isótropo y homogéneo los parámetros que multiplican al vector campo eléctrico son escalares y constantes.

A partir del vector polarización definimos (criterio de plausibilidad mediante) la densidad superficial de carga dipolar. El hecho de que aparezcan estas cargas en superficie, con signo contrario al de las cargas que originan el campo externo (la carga libre) hace que el campo eléctrico en el seno del dieléctrico sea de intensidad menor a la del campo que existe fuera del mismo. Precisamente fue a partir de la observación de que el

campo eléctrico en el seno del dieléctrico es generado por la totalidad de la carga (libre más polarización) que introdujimos una nueva cantidad, el vector desplazamiento, reconociendo como sus fuentes sólo a la carga libre. Así, pudimos extender el teorema de Gauss al vector desplazamiento y encontramos una poderosa herramienta de cálculo cuyo significado preciso recién discutiremos en el capítulo 9.

Finalmente, hemos analizado la posibilidad de incrementar la capacidad de un capacitor introduciendo un dieléctrico entre sus armaduras, discutiendo con algún detalle la variación que se produce en el contenido de energía asociada a la configuración.

Complementos del capítulo

Campos eléctricos no uniformes. Polarización en volumen

Formalicemos el resultado (6.29). Para ello, imaginemos una región del espacio ocupada por un dieléctrico con una determinada densidad de dipolos. Si sólo un dipolo \vec{p} existiera en esa región, digamos en la posición \vec{r}' , el potencial que produciría en un punto genérico \vec{r} vendría dado por la expresión (4.116)

$$V = k \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.138)$$

Si en lugar de un único dipolo fuera una región con densidad de dipolos $d\vec{p}$, el potencial sería de la forma

$$dV = k \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.139)$$

que en virtud de su propia definición (6.2) escribimos como

$$dV = k d\mathcal{V} \frac{\vec{P}(r') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.140)$$

En la última expresión hemos puesto de manifiesto explícitamente que el vector polarización depende de los puntos r' donde están las fuentes, precisamente los dipolos. Ahora bien, el vector \vec{P} podría no ser uniforme, de manera que para calcular el potencial total generado por la distribución tendremos que integrar en volumen y escribir

$$V = k \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(r') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\mathcal{V} \quad (6.141)$$

Para simplificar el cálculo operaremos de manera análoga a como lo hicimos para llegar a la expresión (4.12) del potencial electrostático; para ello, notemos que el integrando de la ecuación (6.141) se escribe como

$$\frac{\vec{P}(r') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{P_x (x - x') + P_y (y - y') + P_z (z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (6.142)$$

Los tres sumandos de esta expresión son funcionalmente idénticos, de manera tal que alcanza con trabajar con uno y luego extender el resultado. Analicemos el primero, para lo cual tendremos en cuenta la expresión (4.7) que aquí repetimos

$$\frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (6.143)$$

Ahora bien, podemos escribir el primer sumando de la expresión (6.142) en la forma

$$\frac{P_x (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -P_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (6.144)$$

o, usando elementales propiedades de derivación, como

$$\begin{aligned} -P_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} &= P_x \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{P_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial P_x}{\partial x'} \end{aligned} \quad (6.145)$$

Obsérvese un detalle de importancia: a partir del segundo miembro hemos anulado el signo negativo porque tomamos la derivada respecto a x' . Visto como una operación matemática no representa nada, porque la igualdad se mantiene. Pero conceptualmente es importante porque cuando derivamos las componentes del vector polarización debemos hacerlo respecto de las variables primadas, que representan los puntos donde se localizan las fuentes de \vec{P} . De una forma u otra, es casi evidente que sumando las tres contribuciones del miembro derecho de (6.132) se obtiene la expresión

$$\frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.146)$$

donde el primado en los operadores recuerda que estamos derivando respecto a las variables primadas. Reconstruyamos ahora la expresión (6.141), recordando la expresión que relaciona el flujo de un campo vectorial \vec{A} cualquiera con su divergencia (véase el apéndice),

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} \, d\mathcal{V} = \oiint_{S(\mathcal{V})} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (6.147)$$

Resulta de esta forma

$$V = k \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} d\mathcal{V}' = k \oiint_{S(\mathcal{V})} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - k \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}' \quad (6.148)$$

Analicemos esta última expresión: la cantidad $\vec{P} \cdot \hat{n}$ representa la densidad superficial de carga dipolar (véase la ecuación (6.14)), de manera tal que el primer sumando del último miembro representa el potencial electrostático generado por esta densidad de carga. Por otro lado, la cantidad $\nabla \cdot \vec{P}$ tiene unidades de C/m^3 , esto es, de una densidad volumétrica de carga, que está de acuerdo con el hecho de que el último término representa el potencial electrostático generado por una distribución de cargas en volumen. Luego, es razonable asociar las cantidades

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (6.149)$$

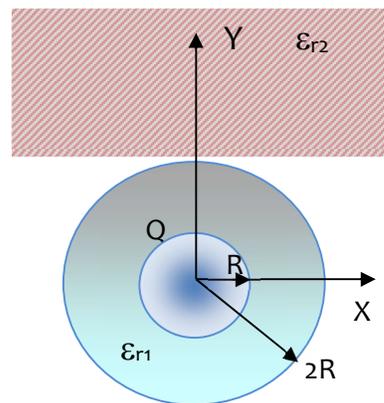
y definir la densidad volumétrica de carga dipolar a partir de la identidad (6.149). Recordemos (véase el capítulo 3) que el concepto de flujo de una cantidad vectorial se halla asociado a la variación de esa cantidad al pasar de un punto a otro del espacio. Dado que una cantidad vectorial varía al pasar de un punto al otro del espacio si existen singularidades (fuentes o sumideros) el flujo de la cantidad vectorial es una medida del balance entre las singularidades. Dado un campo vectorial \vec{P} , este balance puede escribirse entonces como $\nabla \cdot \vec{P}$.

Ahora bien, en la superficie de la región que ocupa el dieléctrico ya de por sí, necesariamente, existen fuentes del vector \vec{P} , porque la orientación de los dipolos impone la existencia de cargas de signo opuesto en caras opuestas del material. A esta cantidad la hemos denotado σ_p . Podrían existir también fuentes dentro del volumen del dieléctrico. Que la divergencia del vector polarización sea nula no significa necesariamente que no existen cargas de polarización en volumen, significa en todo caso que su densidad es uniforme.

En los ejemplos 6.1, 6.2 y 6.3 estos aspectos quedaron en evidencia. En los tres casos el vector polarización existe, pero sólo en uno su divergencia es nula.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Sea una esfera conductora de radio R y carga Q , rodeada de una cáscara dieléctrica de constante relativa ϵ_{r1} y espesor R . Por encima de la esfera y en contacto con ella hay una región dieléctrica de constante relativa ϵ_{r2} , de espesor $L \gg 2R$, como se muestra en la figura. Calcule

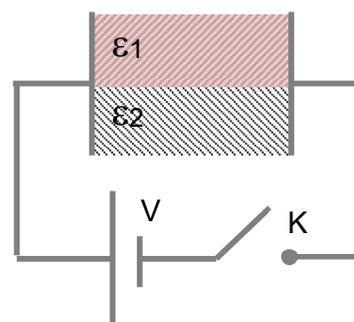


- el vector desplazamiento en todo punto del eje X y del eje Y;
- el vector campo eléctrico en todo punto del eje X y del eje Y;
- el vector polarización en todo punto del eje X y del eje Y;
- el campo eléctrico en el punto $A = (3R; 2R)$, a un lado y otro de la superficie de separación esfera-dieléctrico.

Ejercicio 2: Un capacitor plano de placas de área $A = 500\text{cm}^2$ y separación interplacas $d=4\text{mm}$, está lleno con un dieléctrico de 3mm de espesor y constante relativa $\epsilon_r = 7$. El resto está lleno de aire.

- calcule el valor del campo eléctrico en el dieléctrico y en la capa de aire cuando se conecta el capacitor a una fuente de 100V ;
- calcule la capacidad del condensador;
- discuta si cambian los valores obtenidos si en lugar de una capa de aire fueran dos, una arriba y otra abajo del dieléctrico, cada una de $0,5\text{ mm}$ de espesor.

Ejercicio 3: Dos placas plano paralelas de área $A=0,2\text{m}^2$ se hallan separadas una distancia $d=4\text{mm}$, y conectadas a un potencial $V=50\text{ V}$. Se desconecta la fuente y se llena la mitad del espacio interplacas con un dieléctrico de constante relativa $\epsilon_{r1} = 10$ y la otra mitad con otro dieléctrico, de constante $\epsilon_{r2} = 30$, como muestra la figura.



- calcule el valor de la capacidad final de la configuración;
- calcule los campos $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}$ en todo punto del espacio dentro del capacitor;
- calcule el valor de la carga libre y de la carga de polarización en cada superficie;
- calcule la energía final de la configuración.

Ejercicio 4: Dos condensadores idénticos de capacidad C están conectados en paralelo a una fuente de tensión V . Se desconecta la fuente y uno de los condensadores se rellena completamente con un dieléctrico de constante relativa ϵ_r . Calcule:

- la diferencia de potencial V' entre los condensadores;

- b) la cantidad de carga que pasa de un condensador a otro;
- c) la energía almacenada en la configuración final.

Ejercicio 5: Un capacitor plano de capacidad $C = 100\text{pF}$ y placas de área $A = 0,02\text{ m}^2$, relleno completamente con un dieléctrico de constante relativa $\epsilon_r = 5$, está conectado a una batería de 100V de diferencia de potencial. Se desconecta la batería y se retira la mitad del dieléctrico, de manera tal que la mitad de cada placa queda en contacto con aire. Calcule:

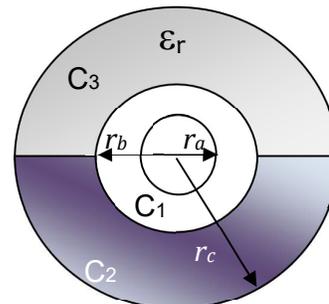
- a) la carga del capacitor y el campo eléctrico en su interior con la batería conectada;
- b) la diferencia de potencial entre las armaduras cuando se retira la mitad del dieléctrico;
- c) la distribución de cargas en las armaduras una vez que se retiró la mitad del dieléctrico.

Ejercicio 6: Un condensador plano paralelo de placas de área A y distancia interplacas d se rellena por completo con un dieléctrico de constante relativa ϵ_r y se lo conecta a una batería cuya diferencia de potencial vale V . Una vez cargadas con carga Q , y con la fuente desconectada, las placas se separan una cantidad δx y el volumen adicional se llena de aire.

- a) calcule la variación de energía del condensador cuando se separan las placas;
- b) calcule la fuerza que se ejercen las placas luego de separarlas;
- c) repita el punto (a) suponiendo que la batería no se desconecta.

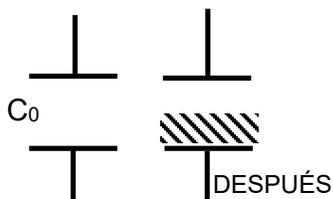
Ejercicio 7: Sea el arreglo de la figura, que consiste en tres esferas concéntricas de radios $r_c > r_b > r_a$.

La diferencia de potencial entre las esferas interior y exterior vale V y la mitad del casquete externo está rellena de un dieléctrico de constante relativa ϵ_r . Denominando C_1, C_2, C_3 a las capacidades de los capacitores interno, externo con aire y externo con dieléctrico, respectivamente, calcule:



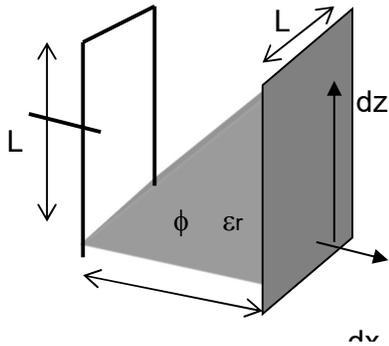
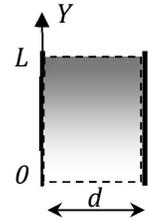
- a) la capacidad equivalente del sistema;
- b) la carga sobre las placas de cada condensador;
- c) el vector desplazamiento en cada región del arreglo.

Ejercicio 8: Se dispone de un capacitor de placas de área A separadas una distancia d . El medio entre placas es vacío y su capacidad vale C_0 . Se desea trabajar con una capacidad igual a $8/5$ de C_0 , y para ello, sin desconectar la batería de valor V , se coloca un dieléctrico que ocupa la mitad de la distancia entre placas, como muestra la figura.



- a) justifique cuál debe ser el valor de la permitividad relativa (ϵ_r) del dieléctrico con el que se debe rellenar la mitad del espacio interplacas para lograr el objetivo;
- b) calcule el módulo del vector desplazamiento en cada mitad del capacitor modificado en términos de Q_0 y A , la carga original del capacitor y el área de las placas.

Ejercicio 9: El espacio interplacas del capacitor de la figura está lleno completamente con un dieléctrico de permitividad variable, de la forma $\varepsilon(y) = \varepsilon_0[5 + (y^2/L^2)]$. Las placas son cuadradas, de lado $L=1\text{cm}$, y la distancia entre las placas vale $d=0,2\text{mm}$. Calcule la capacidad del capacitor.



Ejercicio 10: Un condensador de placas plano paralelas cuadradas de lado L , separadas una distancia D , tiene un dieléctrico en forma de cuña triangular como muestra la figura. Teniendo en cuenta que en este caso vale la relación $dz = dx \operatorname{tg} \phi \equiv dx L/D$, halle la capacidad del condensador.

Ejercicio 11: Un capacitor plano tiene placas de área A separadas una distancia d . Entre las placas hay vacío. Una vez cargado a potencial V se desconecta la batería, se reduce a la mitad el área de las placas y se introduce un dieléctrico de permeabilidad relativa ε_R en todo el espacio interplacas de modo tal de duplicar la capacidad original. Si U representa la energía inicial, U' la energía final de la configuración, P el módulo del vector polarización y D el del vector desplazamiento, entonces la opción correcta es

$\varepsilon_R=4$	$U'=U$	$P<D$	$\varepsilon_R=4$	$U'=2U$	$P<D$
$\varepsilon_R=1/2$	$U'=2U$	$P=0$	$\varepsilon_R=2$	$U'=2U$	$P=2D$
$\varepsilon_R=2$	$U'=U/2$	$P<D$	$\varepsilon_R=4$	$U'=U/2$	$P < D$

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

	D_x	D_y	E_x	E_y	P_x	P_y
$r < R$	0	0	0	0	0	0
$R < r < 2R$	$Q/4\pi r^2$	$Q/4\pi r^2$	$Q/4\pi \epsilon_{r1}\epsilon_0 r^2$	$Q/4\pi \epsilon_{r1}\epsilon_0 r^2$	$Q/4\pi^2(1-(1/\epsilon_{r1}))$	$Q/4\pi r^2(1-(1/\epsilon_{r1}))$
$r > 2R$	$Q/4\pi r^2$	$Q/4\pi r^2$	$Q/4\pi \epsilon_0 r^2$	$Q/4\pi \epsilon_{r2}\epsilon_0 r^2$	0	$Q/4\pi r^2(1-(1/\epsilon_{r2}))$

d) $\vec{E}_{INF}(3R, 2R) = (Q/52\pi \epsilon_0) (\cos 33,7^\circ; \sin 33,7^\circ)$
 $\vec{E}_{SUP}(3R, 2R) = (Q/52\pi \epsilon_0) (\cos 33,7^\circ; (\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2})\sin 33,7^\circ)$

Ejercicio 2: a) $E_{DIEL} = 10^4 \text{ V/m}$ $E_{AIRE} = 7 \times 10^4 \text{ V/m}$; b) $C = 309,75 \text{ pF}$; c) la capacidad cambia porque ahora hay dos capacitores de aire en serie; de hecho, $C' = 182,2 \text{ pF}$.

Ejercicio 3: a) $C_{eq} = 8 \times 10^{-9} \text{ F}$;

b) $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = 6,875 \times 10^2 \text{ V/m } \hat{e}_x$; $\vec{D}_1 = 5,5 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \hat{e}_x$;
 $\vec{D}_2 = 1,667 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \hat{e}_x$; $\vec{P}_1 = 4,97 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \hat{e}_x$; $\vec{P}_2 = 1,6 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \hat{e}_x$;

c) $Q_{L1} = 6 \times 10^{-9} \text{ C}$;

$Q_{L2} = 1,6 \times 10^{-8} \text{ C}$; $\sigma_{P1} = 4,97 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$; $\sigma_{P2} = 1,6 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$;

d) $U' = 5,51 \times 10^{-7} \text{ J}$.

Ejercicio 4: a) $V' = 2V / (1 + \epsilon_r)$;

b) $q = CV (\epsilon_r - 1) / (1 + \epsilon_r)$;

c) $U' = CV^2 / (1 + \epsilon_r)$.

Ejercicio 5: a) $Q = 10^{-8} \text{ C}$ $E = 1,12 \times 10^4 \text{ V/m}$; b) $V' = 166,67 \text{ V}$;

d) $Q_{DIEL} = 8,33 \times 10^{-9} \text{ C}$ $Q_{AIRE} = 1,67 \times 10^{-9} \text{ C}$.

Ejercicio 6: a) $\Delta U = Q^2 \delta x / (2 \epsilon_0 A)$; b) $F = -Q^2 / (2 \epsilon_0 A)$; c) $\Delta U = -\frac{V^2 \epsilon_r^2 \epsilon_0 A}{2} \frac{\delta x}{d(\epsilon_r \delta x + d)}$

Ejercicio 7: a)

$$C_{eq} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_1 = 4\pi \epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a) \quad C_2 = 2\pi \epsilon_0 r_c r_b / (r_c - r_b) \quad C_3 = 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r_b r_c / (r_c - r_b)$$

$$b) Q_1 = V C_{eq} \quad Q_2 = V C_{eq} C_2 / (C_2 + C_3) \quad Q_3 = V C_{eq} C_3 / (C_2 + C_3)$$

$$c) \vec{D}_1 = Q_1 \hat{e}_r / 4\pi r^2 \quad \vec{D}_2 = \{(Q_1 / 4\pi r^2) + (Q_2 / 2\pi r_b^2)\} \hat{e}_r \quad \vec{D}_3 = \{(Q_1 / 4\pi r^2) + (Q_3 / 2\pi r_b^2)\} \hat{e}_r$$

Ejercicio 8: a) $\epsilon_r = 4$; b) $D_1 = D_2 = 2\epsilon_r Q_0 / A(1 + \epsilon_r)$

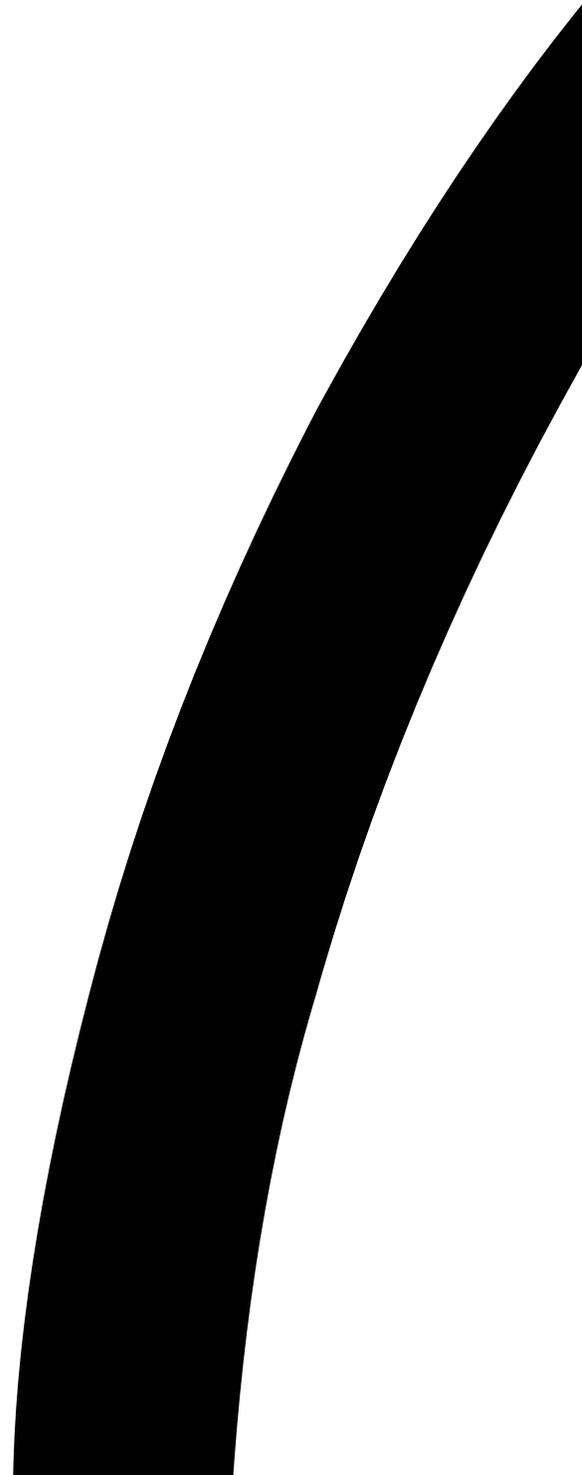
Ejercicio 9: $C = 23,6 \text{ pF}$

Ejercicio 10:

$$C = \int_0^D \frac{\epsilon_r \epsilon_0 L}{D + x(\epsilon_r - 1)} \frac{L}{D} dx$$

Ejercicio 11: $\epsilon_R = 4 \quad U' = U/2 \quad P < D$

Elementos de corriente continua



7.1 – Introducción

En los capítulos anteriores hemos desarrollado un andamiaje matemático sólido y formal que nos permitió analizar las propiedades eléctricas de diversas configuraciones de cargas en equilibrio estático. De hecho, ignoramos la dinámica de las cargas en los problemas de conductores inmersos en campos eléctricos externos o puestos a algún potencial de referencia, que tienden al equilibrio a expensas de los movimientos que redistribuyen aquellas cargas. Por ejemplo, al colocar una carga en el centro de una cáscara esférica conductora las cargas de la cáscara se redistribuyen hasta que el campo eléctrico en su interior se anula. Normalmente, el equilibrio se alcanza en tiempos lo suficientemente breves y a este nivel podemos simplemente ignorarlos.

Nos interesaremos ahora por los movimientos *estacionarios* de cargas en los conductores, abandonando de aquí en más la hipótesis electrostática. Recordemos que la diferencia entre un conductor y un aislante puede pensarse de manera elemental pensando en términos de la facilidad de arrastrar sus cargas, y esa facilidad a su vez puede cuantificarse en términos de la diferencia de potencial necesaria (o del trabajo requerido) para desplazarlas. De alguna manera pretendemos que antes de hablar de conductores o aislantes determinemos a qué nivel de energía nos referimos. Como quedó dicho en la introducción del capítulo 5, con $3V$ podemos provocar un flujo de electrones por un pequeño alambre de tungsteno (el filamento de una lámpara de linterna) y, por ejemplo, se requiere una diferencia de potencial del orden del millón de volt para hacer circular cargas por el aire (este es el orden de magnitud de la diferencia de potencial entre tierra y una nube cuando cae un rayo). En principio, hasta podríamos obviar la energía necesaria para transportar las cargas y referirnos a los conductores como cualquier material por el que se transportan las cargas eléctricas.

El problema de una formulación tan amplia es que el flujo de cargas que se establece depende de todo un conjunto de factores estructurales y termodinámicos que hacen al modo de transportar las cargas eléctricas. Por ejemplo, los metales y las sales diluidas son “buenos” conductores, pero en los metales las cargas eléctricas que se desplazan son los electrones, y en las soluciones (al igual que en los gases) son iones. Por lo demás, ambas especies se transportan simultáneamente cuando la materia se halla en estado de plasma.

En consecuencia, y a pesar de un amplio conjunto de propiedades que les son comunes, parece conveniente analizar cada familia de conductores por separado. En lo que sigue habremos de concentrarnos en el fenómeno de circulación de cargas en los conductores sólidos, particularmente los metales y, salvo indicación en contrario, cuando hagamos referencia a un conductor lo haremos en el sentido de conductor metálico. Estableceremos las leyes básicas que rigen el flujo estacionario de cargas a nivel macroscópico y discutiremos las consecuencias que se derivan de suponer (de manera por demás razonable) que el movimiento se desarrolla con conservación de la carga (a través del principio de conservación de la masa) y de la energía. Para ello, en la próxima sección definiremos los parámetros esenciales para nuestro estudio, en particular, aquellos asociados al flujo de carga eléctrica.

7.2 – El concepto de corriente eléctrica

Cuando un movimiento de cargas eléctricas en un determinado medio conductor es continuado y *coherente* decimos que se ha establecido en el conductor una *corriente eléctrica*.

La de continuidad es, a este nivel, un vínculo bastante débil, porque no estamos en condiciones de determinar (ni nos interesa) durante cuánto tiempo debe establecerse un flujo de cargas para ser considerado una corriente. Por el contrario, la condición de coherencia es central. El hecho de que impongamos esta condición se debe a que los electrones no se encuentran inmóviles en los átomos que constituyen el conductor (no está de más recordar que nos referimos conductores metálicos, sólidos) sino por el contrario están en movimiento permanente dentro de los límites impuestos por el reticulado que conforma la estructura metálica.

En el capítulo 6 decíamos que la particular disposición de los átomos de una red cristalina hace que los átomos vecinos compartan electrones de átomos individuales a condición de que estos electrones tengan energías próximas. Esta peculiar forma de agruparse hace que los electrones se “acumulen” en bandas de energía. La que nos interesa ahora es la banda de conducción, en la que los electrones se mueven sujetos a las limitaciones que impone la dinámica de la estructura cristalina. En un esquema sobresimplificado podemos pensar a la banda de energía como un particular recinto en el que existe un conjunto de compartimentos en cada uno de los cuales puede haber un electrón.

La idea de reticulado que acabamos de introducir tiene un significado bien preciso en Mecánica Cuántica, aunque aquí apelamos a la imagen casi intuitiva de un entramado, de una disposición simétrica y regular de casilleros, como si se tratara de un piso embaldosado en el que cada baldosa es una región del retículo cristalino, y en cada región pudiera haber, a lo sumo, un electrón. Esta imagen es igualmente válida para pensar la estructura de un aislante y la de un conductor.

Los electrones habrán de desplazarse cada vez que encuentren un casillero vacío. Pero estos movimientos son estadísticamente iguales en cualquier lugar de la estructura del conductor, y en principio se desarrolla en todas las direcciones posibles con igual probabilidad, de forma tal que en condiciones normales no se privilegia ninguna dirección y no hay transporte neto de carga.

A este nivel, un aislante puede pensarse como un material en el cual las regiones del retículo están mayoritariamente ocupadas con electrones. En tal caso, casi el único movimiento que le cabe a cada electrón es un intercambio de posición con algún electrón vecino (después de todo los electrones son indistinguibles y el intercambio de electrones

La diferencia entre un conductor y un aislante puede definirse de varias maneras, apelando siempre a alguna característica física propia. Desde el punto de vista de la Física del estado sólido, la diferencia radica en el salto energético entre las bandas de valencia y de conducción. Cuando esa diferencia es relativamente alta, el material es aislante; si prácticamente se solapan, es conductor.

no provoca ningún cambio en la estructura). Pero este movimiento de intercambio es incapaz de producir un flujo neto, sencillamente porque si una de las cargas se ha movido, digamos, hacia la derecha, la otra se ha desplazado necesariamente hacia la izquierda. Si en una fila de automóviles detenidos en una carretera se intercambiaran de a pares las posiciones de los vehículos, claramente habría movimiento, pero no un desplazamiento neto de la fila.

Siguiendo esta idea, un conductor puede pensarse como un material en el que el reticulado contiene un número “grande” de electrones libres pero que dista mucho de estar completo. De esta forma las cargas pueden desplazarse con una cierta facilidad por el reticulado sin encontrar un casillero ocupado. La movilidad habrá de depender naturalmente de la temperatura a la que se halla el material, y puede cuantificarse a través de una velocidad media, digamos $\langle u \rangle$. Claro que en principio cualquier sentido de movimiento es posible y no existe todavía un desplazamiento colectivo en una dirección determinada.

Pero si se aplica un campo eléctrico externo las fuerzas que aparecen desplazan a los electrones con velocidad media adicional, que denotaremos $\langle v \rangle$, y provocan un flujo de cargas neto en la dirección del espacio que fija el campo externo. Parece evidente, por otro lado, que la intensidad de campo necesaria para arrastrar electrones libres en un metal es mucho menor que la que se requiere para desplazarlos en un aislante.

Sin necesidad de una demostración rigurosa podemos profundizar esta idea imaginando un conductor (sólido) cualquiera. Los electrones en su interior se mueven con velocidad térmica media $\langle u \rangle$ (que es función de la temperatura y de la masa de la carga, en este caso el electrón) en direcciones completamente al azar. Producto de estos movimientos al azar los electrones colisionan entre sí, intercambian impulso y se reorientan. Si en un momento determinado pudiéramos tomar una foto de todos los vectores velocidad, estadísticamente sería de esperar que en cada elemento de volumen haya igual cantidad de vectores velocidad en todas las direcciones, tantos vectores velocidad en un sentido como en el contrario. Así, si calculamos el valor estadístico promedio de la velocidad del conjunto de electrones, parece evidente que resultará nulo.

La velocidad media $\langle v \rangle$ es de origen externo, y se superpone a la velocidad $\langle u \rangle$, de manera tal que, en promedio estadístico, la única velocidad que siempre va estar orientada en un único sentido es precisamente $\langle v \rangle$, la que otorga al conjunto carácter coherente y determina la corriente eléctrica.

Las cargas eléctricas siempre están en movimiento en el interior de un átomo, y la velocidad estadística media de este movimiento (que depende de la temperatura) es comparativamente alta. Pero para que se establezca una corriente eléctrica es necesario que exista un movimiento colectivo de cargas, y esto sólo ocurre si se aplica un campo eléctrico externo capaz de orientar las velocidades (caóticas) de las cargas eléctricas.

Los electrones en su interior se mueven con velocidad térmica media $\langle u \rangle$ (que es función de la temperatura y de la masa de la carga, en este caso el electrón) en direcciones completamente al azar. Producto de estos movimientos al azar los electrones colisionan entre sí, intercambian impulso y se reorientan. Si en un momento determinado pudiéramos tomar una foto de todos los vectores velocidad, estadísticamente sería de esperar que en cada elemento de volumen haya igual cantidad de vectores velocidad en todas las direcciones, tantos vectores velocidad en un sentido como en el contrario. Así, si calculamos el valor estadístico promedio de la velocidad del conjunto de electrones, parece evidente que resultará nulo.

7.3 – Ley de Ohm

De acuerdo a lo que acabamos de discutir, parece evidente que la corriente eléctrica que puede fluir por un conductor debe ser función del campo eléctrico aplicado y de la estructura del material. Tenemos una idea muy concreta del resultado que podemos esperar porque al fin y al cabo estamos pensando que tenemos un conductor cuya sección transversal es S y queremos contar la cantidad de carga que atraviesa esa superficie por unidad de tiempo, es decir, queremos medir la densidad del flujo de carga ϕ_q/S (o, si se prefiere, $\delta\phi_q$).

En esa tarea nos bastan las expresiones (1.55) y (1.56). La primera nos recuerda que el flujo de cualquier magnitud a través de un medio se relaciona inversamente con la resistencia que ese medio ofrece a la circulación de la magnitud (o de manera directa a la conductividad) y es directamente proporcional al gradiente de la magnitud que provoca el flujo. La identidad (1.56) es la forma general que adopta la resistencia al flujo como función de una variable intensiva (la conductividad σ o la resistividad ρ) y de los diferentes parámetros geométricos característicos del sistema de conducción. Recordemos que, en términos absolutamente generales, la densidad de flujo ϕ_G de la magnitud G a través de una superficie S , provocado por el gradiente de una magnitud M , $\nabla M \sim \Delta M / L$, es de la forma

$$\frac{\phi_G}{S} = \sigma \frac{\Delta M}{L} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta M}{L} \equiv \phi_G = \frac{1}{R} \Delta M \quad (7.1)$$

donde

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho L}{S} \quad (7.2)$$

define la resistencia que el material ofrece al flujo de magnitud en términos de la conductividad σ o de la resistividad ρ (variables intensivas que, recordemos, son función de la temperatura), la longitud del conductor y su área transversal. Nosotros estamos interesados en el flujo de cargas eléctricas (en este caso electrones) que es provocado por la existencia de un gradiente de potencial eléctrico, que podemos considerar como la diferencia de potencial ΔV en los extremos de un conductor, dividida por la longitud del conductor. Si llamamos *intensidad de corriente eléctrica*, i , a la medida del flujo de carga eléctrica (cantidad de carga por unidad de tiempo) escribimos la expresión (7.1) como

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \Delta V \quad (7.3)$$

donde R se llama, naturalmente, resistencia eléctrica. Tal vez sea necesario recalcar que el parámetro ρ depende de las mismas variables que la conductividad, de manera tal que es función de la temperatura. Luego, la resistencia R también es función de la temperatura

(además de depender de las características geométricas del conductor, a saber, su longitud L y su sección S).

En la próxima sección habremos de asociar la intensidad de corriente eléctrica a los parámetros propios del sistema. Por ahora digamos que de su misma definición como cantidad de carga por unidad de tiempo se desprende que la unidad MKS de la intensidad de corriente i es

$$[i] = \frac{C}{seg}$$

A la cantidad C/seg se la denomina amperio (aunque tradicionalmente se la nombra como ampere) y se la denota como A . En consecuencia la unidad de resistencia eléctrica resulta ser V/A , a la que se denomina ohm, y se denota con el símbolo Ω . A partir de la expresión (7.2) parece evidente que la unidad de resistividad eléctrica es Ωm , en tanto que la de conductividad σ es $1/\Omega m$ (a la inversa del ohm se la denomina mho, y su símbolo es la letra griega Ω invertida, Υ). Así, $[\sigma] = \Upsilon/m$.

Existen dos o tres aspectos importantes que vale la pena mencionar antes de seguir adelante. En primer lugar, digamos que la velocidad $\langle v \rangle$ impuesta por el campo eléctrico externo es varios órdenes de magnitud menor que la velocidad caótica $\langle u \rangle$ de origen térmico. De hecho, con diferencias de potencial del orden del volt las velocidades $\langle v \rangle$ son del orden del mm/seg , en tanto que las térmicas son del orden de algunos miles de km/seg , o sea, un millón de veces mayor. Lo que sí se propaga a velocidad cercana a la de la luz es el campo eléctrico aplicado (fenómeno este que estudiaremos con algún detalle en el capítulo 11) lo que genera la percepción de movimiento “instantáneo” de cargas en todo el conductor.

Por otro lado, es necesario decir que las cargas que se mueven son los electrones. Históricamente, se pensó que las cargas que se

transportan son las cargas positivas, de manera tal que se estableció el sentido positivo de circulación de una corriente desde el polo positivo de la batería hacia el polo negativo. Como veremos a lo largo de este capítulo, fijar el sentido de circulación de una corriente eléctrica es en general irrelevante, aunque por tradición se adopte como sentido positivo el histórico.

En este capítulo estudiaremos el flujo de cargas provocado por una pila. Como los electrones se mueven siempre en un mismo sentido a este tipo de corriente se la denomina continua, para diferenciarla de la que habremos de analizar en el capítulo 10, que se mueve alternadamente en un sentido y otro (corriente alterna).

Una pila elemental genera la diferencia de potencial necesaria para mover cargas a partir de particulares reacciones químicas en dos electrodos sumergidos en un electrolito.

La densidad de corriente eléctrica es una medida del número de cargas que atraviesan la superficie unidad en la unidad de tiempo, es decir, es una medida de la densidad de flujo de carga eléctrica. La intensidad de corriente eléctrica es una medida del flujo de carga, es decir, de la rapidez con que las cargas atraviesan la superficie transversal de un conductor.

Sin pretender un análisis exhaustivo (una introducción al funcionamiento de una pila elemental puede hallarse en los complementos del capítulo 4) digamos aquí que en las pilas más comunes uno de los electrodos es de zinc y el otro de carbono mezclado con óxido de manganeso, todo el conjunto sumergido en una solución de cloruro de amonio. En contacto con el electrolito el zinc libera iones Zn^{++} dejando “desnudos” dos electrones en el electrodo, que queda así con carga negativa. Los iones positivos son colectados sobre la superficie del electrodo de carbón que libera electrones y queda con carga neta positiva. La aparición de una diferencia de potencial entre los electrodos provoca la migración de electrones desde el electrodo negativo (el de zinc) hacia el positivo una vez que se lo permite alguna conexión externa, típicamente el circuito por el que se pretende hacer circular la corriente.

7.4 – Ley de Ohm microscópica

Parece necesario asociar el flujo de carga eléctrica a la velocidad estadística media $\langle v \rangle$, la componente establecida externamente. La carga que fluye en nuestro caso es de signo negativo porque se trata de un flujo de electrones. En la figura 7.1 hemos dibujado sólo un electrón dentro de un volumen elemental (en color gris), pero digamos que hay n_e electrones por cada unidad de volumen. Así, llamando q_e al valor de la carga de cada electrón, la cantidad de carga q dentro del volumen marcado es

$$q = n_e q_e S L \quad (7.4)$$

donde S y L representan el área de la sección transversal del cilindro y su longitud, respectivamente.

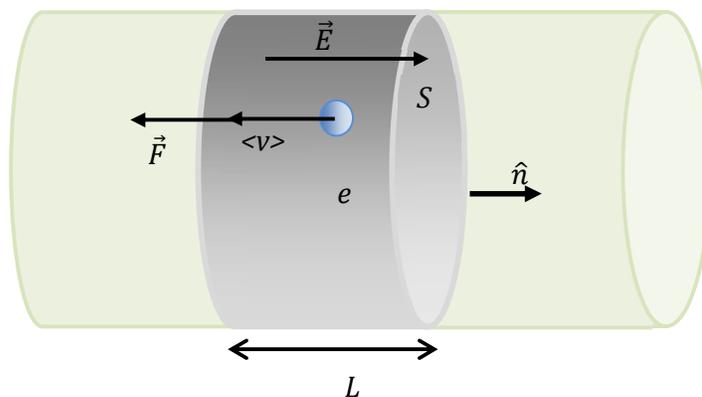


Fig. 7.1: la cantidad de carga que estadísticamente puede atravesar la superficie S en una unidad de tiempo es la que está contenida en el volumen marcado y no está más allá de una distancia L . Si todas las cargas tuvieran la misma velocidad, el cálculo sería rigurosamente cierto. Obsérvese que el campo eléctrico \vec{E} tiene sentido contrario a la velocidad estadística del electrón, porque la carga en juego es negativa.

Supongamos que se enciende un campo eléctrico \vec{E} , de intensidad E . Este campo eléctrico externo habrá de orientar en el mismo sentido a todos los electrones, ejerciendo sobre cada uno de ellos una fuerza \vec{F} de módulo

$$|\vec{F}| \equiv F = q_e E \quad (7.5)$$

que los acelera con aceleración a de valor

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{q_e E}{m_e} \quad (7.6)$$

donde m_e representa la masa del electrón. Esta aceleración es externa, se origina en el campo eléctrico externo, y si este campo es uniforme los será también esta aceleración. Vale la pena recalcar que no es esta necesariamente la aceleración de cada uno de los electrones, porque el campo eléctrico sobre cada carga individual depende además de las interacciones con el resto del conjunto de cargas. Estadísticamente, habrá una aceleración \tilde{a} que será la del conjunto, pero no es esta la aceleración que figura en la ecuación (7.6). En lo que al movimiento coherente se refiere, antes de aplicar un campo eléctrico externo los electrones están en reposo, esto es, con velocidad coherente estadística media $\langle v \rangle = 0$. Una vez establecido el campo exterior, los electrones habrán de orientarse en el mismo sentido, y las desviaciones estadísticas en sus direcciones tendrán que ver con las interacciones con el resto de las cargas, esto es, se aceleran con aceleraciones que dependen de las condiciones en las que se encuentra cada electrón. Sin embargo, a primer orden podemos plantear que la aceleración estadística \tilde{a} es la misma para todas las cargas, y tratar al conjunto de cargas como un sistema de n_e partículas, todas en reposo (porque $\langle v \rangle = 0$), aceleradas por la misma fuerza \vec{F} , comportándose de idéntica manera.

En esta aproximación, una carga cualquiera que se halle en reposo sólo puede atravesar la superficie lateral derecha del cilindro grisado de la figura 7.1, en un intervalo Δt , si se encuentra, a lo sumo, a una distancia L definida cinemáticamente por

$$L = \frac{1}{2} \tilde{a} \Delta t^2 = \frac{1}{2} \frac{e E}{m_e} \Delta t^2 \quad (7.7)$$

En realidad, el electrón se desplaza con esta aceleración sólo durante un cierto lapso de tiempo. Si hubiera un único electrón el movimiento sería rectilíneo y uniforme. Pero habiendo otras cargas este tiempo necesariamente habrá de reducirse, porque más tarde o más temprano el electrón habrá de colisionar. Claramente, el lapso $\langle \tau \rangle$ que media entre dos colisiones consecutivas con el resto de las cargas[†] (producto de su velocidad caótica $\langle u \rangle$) depende de la densidad de cargas. Luego, si tomamos el tiempo medio

[†] El tiempo entre colisiones puede estimarse como $\langle \tau \rangle = \langle \lambda \rangle / \langle u \rangle$, donde $\langle \lambda \rangle$ es una medida estadística de la distancia que recorre una carga entre dos colisiones y se denomina recorrido libre medio. Como los otros dos parámetros de la ecuación (6.4), depende de la temperatura y de la densidad de cargas, pero aquí no nos interesan los detalles de su cálculo.

entre colisiones $\langle \tau \rangle$ como una estimación de Δt , la cantidad de carga que atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo, digamos j , tendrá una intensidad

$$j = \frac{q}{S\langle \tau \rangle} = \frac{n_e q_e}{\langle \tau \rangle} L = n_e q_e \langle v \rangle = \left(\frac{n_e q_e^2}{2m_e} \langle \tau \rangle \right) E \quad (7.8)$$

La cantidad j se denomina *densidad de corriente*[†] (en este caso se trata de un valor medio) y su unidad, según se desprende inmediatamente de su definición, es $C/(m^2seg)$.

Desde un punto de vista fenomenológico, la diferencia entre conductores puede plantearse cualitativamente en términos de la conductividad (un parámetro intrínseco) porque la diferencia en los valores de la conductividad entre conductores y aislantes llega a ser de 15 a 25 órdenes de magnitud.

Un par de comentarios se hacen necesarios: en primer lugar, es inmediato que la densidad de corriente es una magnitud vectorial, porque el término entre paréntesis en el miembro derecho de la expresión (7.8) contiene sólo magnitudes escalares, y el campo eléctrico es una magnitud vectorial. Como además las cantidades escalares que figuran son todas positivas, resulta que el vector densidad de corriente tiene la dirección y el sentido del campo eléctrico, porque al cabo es el campo el que define la velocidad coherente $\langle v \rangle$.

En segundo lugar, es de notar que el término entre paréntesis de la expresión (7.8) define una cantidad característica del material que es función de la temperatura. Obsérvese que depende de una propiedad intrínseca del material (la densidad de electrones) y de la temperatura (porque el tiempo medio entre colisiones $\langle \tau \rangle$ depende de la temperatura). A temperatura constante este término es estadísticamente constante y, una vez establecido un campo eléctrico estacionario, la medida de la densidad de flujo estadístico de cargas es también estacionaria. Así, la cantidad entre paréntesis de la expresión (7.8) define una propiedad escalar del material que, es necesario recalcar, es función de la temperatura, a la que se denomina *conductividad*, σ . La ecuación (7.8), escrita en la forma

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (7.9)$$

representa la ley de Ohm, uno de los resultados fundamentales en el estudio de los fenómenos de transporte de cargas eléctricas.

Sin embargo, así escrita la expresión (7.9) (a la que se conoce como ley de Ohm microscópica) parece por un lado poco práctica (porque relaciona parámetros atómicos con campos eléctricos) y por el otro bastante diferente a la identidad (7.3). Sin embargo sabemos que la conductividad es la inversa de la resistividad y que el campo eléctrico es

[†] La que figura en la expresión (7.8) es la densidad media de corriente. Si queremos expresar la densidad de corriente debemos integrar sobre la superficie completa que atraviesan las cargas, esto es, el flujo de carga dq/dt se asocia al flujo de la densidad de corriente a través de toda la superficie grisada de la figura 7.1, o sea, debe ser $dq/dt = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

(en valor absoluto) la medida del gradiente de potencial. Nuestra intención es escribir la ecuación (7.9) en términos de parámetros más familiares y medibles. Para ello integremos la ecuación (7.9) a lo largo de un elemento de conductor $d\ell$, como se muestra en la figura 7.2.

$$\int_A^B \vec{j} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \sigma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \tag{7.10}$$

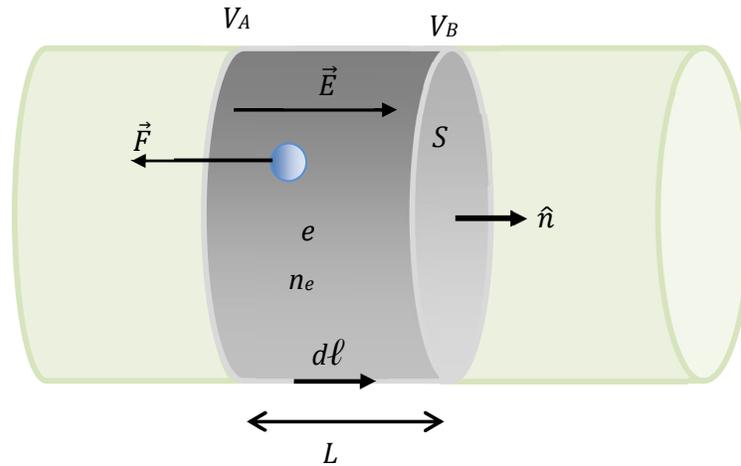


Fig. 7.2: El campo eléctrico y la fuerza tienen sentidos opuestos porque la carga del electrón es negativa. El trabajo para arrastrar al electrón desde la superficie a potencial V_A hasta la superficie a potencial V_B se mide por la diferencia de potencial entre esas superficies.

Ahora bien, si el conductor es homogéneo, ni la conductividad σ ni la densidad de corriente j dependen de la posición, de manera tal que pueden salir de las integrales porque se trata de integrales espaciales. Además, podemos relacionar la integral del campo eléctrico con la diferencia de potencial entre los puntos A y B , de manera tal que resulta

$$\vec{j} \cdot \int_A^B d\vec{\ell} = \sigma \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\sigma \int_A^B dV \implies jL = \sigma(V_A - V_B) \tag{7.11}$$

Asociemos ahora la intensidad de corriente i a la densidad de corriente \vec{j} como

$$i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{7.12}$$

donde la integral de superficie la realizamos sobre la sección orientada S de la figura 7.2, y escribamos la resistividad eléctrica ρ como la inversa de la conductividad, esto es,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (7.13)$$

Observemos que por ser la densidad de corriente \vec{j} un vector paralelo a la normal \hat{n} (es decir, paralelo a la superficie orientada S , la superficie de salida del volumen grisado de la figura 7.2) y, por hipótesis, uniforme (no depende de las coordenadas espaciales) la integral (7.12) sencillamente vale $j S$, de manera tal que la igualdad (7.11) puede escribirse como

$$\frac{\rho L}{S} i \equiv Ri = V_A - V_B \quad (7.14)$$

que coincide completamente con nuestra ley (7.3), salvo que aquella la obtuvimos de manera práctica sin pensar en los fenómenos involucrados.

Tal vez sea necesario recalcar que el parámetro ρ depende de las mismas variables que la conductividad, de manera tal que es función de la temperatura. Luego, la resistencia R también es función de la temperatura (además de depender de la longitud L del conductor y de su sección S).

No está de más mencionar que la intensidad de corriente i es una medida estadística y macroscópica de la densidad de corriente j que atraviesa una superficie, y que es j la variable que tiene significado físico. Por lo demás, teniendo en cuenta las identidades (7.8) y (7.12) la intensidad de corriente puede escribirse como

La resistividad de un material depende de la temperatura (de hecho, es una función creciente de la temperatura). Podemos formarnos una imagen pensando en una carga que debe ir de un punto a otro. Cuanto mayor sea el número de colisiones que sufra más le costará arribar (o sea, mayor es la resistencia a su movimiento) y el número de colisiones crece con la temperatura.

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} \Delta S = \frac{dq}{dt} \quad (7.15)$$

que coincide con nuestra definición fenomenológica de lo que representa el flujo de carga eléctrica (7.3).

7.5 – Resistores

Hemos insistido en todo momento en que carece de sentido hablar de conductores y aislantes en términos absolutos. Sin embargo, la resistividad de un material nos permite

una clasificación al menos estandarizada, porque a temperatura ambiente los metales tienen resistividades del orden de $10^{-8} - 10^{-6} \Omega m$, en tanto que la de los aislantes como la mica o la goma oscila en el rango $10^8 - 10^{18} \Omega m$. A modo de ejemplo digamos que a temperatura ambiente la resistividad del cobre vale $1,7 \times 10^{-8} \Omega m$ y la del cuarzo vale $7,5 \times 10^{17} \Omega m$.

También hemos mencionado reiteradamente que la resistividad, y con ella la resistencia, depende de la temperatura. De hecho, varía linealmente con esta en un amplio rango. La razón es la siguiente: de acuerdo a la ecuación (7.8) y la nota al pie de la página 355, resulta que la conductividad es proporcional al cociente $\langle \lambda \rangle / \langle u \rangle$, de manera tal que la resistividad varía como $\langle u \rangle / \langle \lambda \rangle$. A su vez, a velocidad térmica $\langle u \rangle$ es proporcional a $T^{1/2}$ en tanto que $\langle \lambda \rangle$ es proporcional a $T^{-1/2}$ (porque a mayor temperatura mayor es el desorden y mayor la probabilidad que tiene una carga de colisionar con otra, disminuyendo así el camino que puede andar sin chocar). Luego, el factor $\langle u \rangle / \langle \lambda \rangle$ es proporcional a T .

Sin embargo, a “altas” temperaturas es de esperar que esta aproximación no sea válida porque las propiedades de los materiales varían cerca de su punto de fusión. Con

Por encima de un valor crítico de temperatura (que depende de cada material y que generalmente está por debajo de 30K) la resistividad eléctrica de un material (y en consecuencia la resistencia eléctrica) crece moderadamente con la temperatura. Pero por debajo de esa temperatura crítica dominan los efectos cuánticos y el fenómeno cambia drásticamente.

todo, el cambio más drástico ocurre a muy bajas temperaturas, donde los efectos cuánticos prevalecen y provocan una caída brusca de la resistividad a valores muy bajos, básicamente nulos, en un régimen que se conoce como *superconductividad*. La temperatura crítica a partir de la cual se entra en régimen superconductor depende del material; normalmente, los metales y las aleaciones lo hacen por debajo de 10K (cerca de $-263^\circ C$) en tanto que algunas cerámicas basadas en óxidos de lantano, bario y cobre muestran propiedades superconductoras a temperaturas más altas, del orden de 30K, en lo que se conoce como superconductividad de altas

temperaturas. La figura 7.3 es una representación apenas esquemática de la resistividad en función de la temperatura.

En la zona lineal la variación de la resistividad con la temperatura puede expresarse de manera más que satisfactoria a través de la expresión

$$\rho(T) = \rho_{20}[1 + \alpha(T - 20)] \quad (7.16)$$

donde ρ_{20} es la resistividad del elemento a $20^\circ C$ y la temperatura T se escribe en $^\circ C$. A su vez, α es un coeficiente que depende del material, aunque para la mayoría de los metales es del orden de $4 \times 10^{-3} \text{ }^\circ C^{-1}$, lo que indica que las variaciones de las resistividades metálicas son del orden del 40% por cada 100 $^\circ C$ de variación de la temperatura.

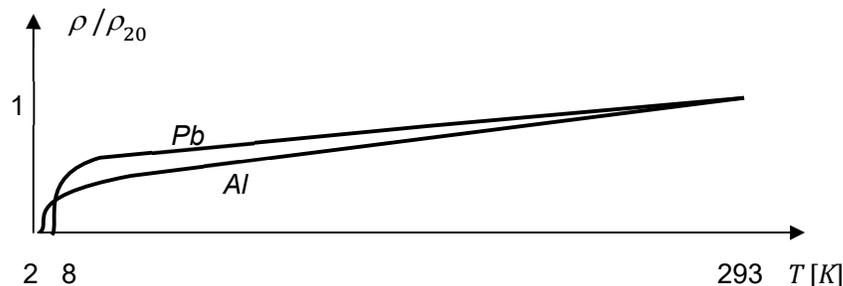


Fig. 7.3: resistividad específica del plomo y el aluminio en función de la temperatura. El régimen de variación lineal se extiende prácticamente hasta las temperaturas de fusión.

Ejemplo 7.1: el cobre tiene, a temperatura $T = 20^{\circ}\text{C}$, una resistividad $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$. Un alambre de cobre de 3,5 m de longitud y sección circular de $0,07 \text{ mm}^2$ (aproximadamente 0,15 mm de radio) tiene una resistencia eléctrica de valor

$$R = \rho \frac{L}{S} = 0,85 \Omega \quad (7.17)$$

A partir de la ecuación (7.2) parece evidente que la forma funcional (7.16) vale tanto para la resistividad como para la resistencia asociada, de manera tal que a $T = 70^{\circ}\text{C}$ ese mismo alambre tiene una resistencia

$$R = R_{20} [1 + 4 \times 10^{-3} \text{C}^{-1} (70^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C})] = 1,02 \Omega \quad (7.18)$$

Un alambre como el del ejemplo es el que se usa como calentador de agua sumergible, que consiste en un alambre arrollado en forma helicoidal alrededor de su eje y luego alrededor de una pieza aislante, por el que circula una corriente eléctrica. Como veremos en la sección 7.7 la circulación de corriente provoca que parte del trabajo entregado para transportar las cargas se transforme en calor cedido al medio externo (en este caso el agua) que va aumentando su temperatura. Pero el agua es precisamente el medio en el que está sumergido el alambre de cobre, de manera tal que la cantidad de calorías que cede al agua para calentarla va variando junto con la resistencia.

De alguna manera, la resistencia eléctrica de un cuerpo puede pensarse como una medida de su oposición a la circulación de una corriente eléctrica. Los elementos pasivos (esto es, los que no realizan trabajo, aquellos que no son fuentes ni de corriente ni de potencial) que limitan en un sentido macroscópico el paso de una corriente eléctrica se denominan *resistores* (o simplemente *resistencias*). A partir de la ley de Ohm, parece claro

que el trabajo entregado por una batería se emplea en el transporte de las cargas a través de un circuito en contra de la resistencia eléctrica del mismo, que entonces constituye un elemento disipativo, esto es, si asumimos que a lo largo de un circuito con pilas y resistores la energía se conserva, parece evidente que el trabajo neto intercambiado por las fuentes de potencial debe corresponderse idénticamente con la energía que los resistores disipan en forma de calor.

Como ya adelantáramos, con movimiento de cargas nos referimos a movimiento de los electrones (y ni siquiera todos los que conforman los átomos de un metal) y no tenemos en cuenta a los núcleos o, más precisamente, a los protones. Ocurre que un protón es 1.840 veces más pesado que un electrón y por eso no consideramos su movilidad (pero este conocimiento se adquirió mucho tiempo después de suponer que la corriente eléctrica era un flujo de cargas positivas).

7.6 – Asociaciones de resistores

En la sección 1.11.1 hemos analizado con algún detalle el flujo de calor a través de diferentes medios. A condición de no pensar en el calor como un fluido mecánico, podríamos asociar sin más el flujo ϕ definido en la ecuación (1.52) con la corriente eléctrica, y a la cantidad de calor Q con la carga eléctrica. En la ecuación (1.56) definimos la resistencia térmica R_T que un material ofrece al flujo de calor en términos de la resistividad térmica (vale la pena compararla con la ecuación (7.2)) y en la expresión (1.57) establecimos la relación que existe entre el flujo, la resistencia y la diferencia de temperatura que provoca el flujo de calor, o sea, el equivalente térmico de la ley de Ohm (7.14). Obsérvese que así como la ecuación (1.57) asegura que para que fluya calor debe haber una diferencia de temperatura ΔT , de la misma forma en que la ley de Ohm asegura que para que fluya carga debe haber una diferencia de potencial ΔV .

La asociación de resistencias eléctricas es en un todo análoga a la asociación de resistencias térmicas, por eso son idénticas las expresiones resultantes.

Dado que la analogía es completa, las ecuaciones deben ser las mismas, de forma tal que podemos extender sin más la formulación térmica al caso de resistencias eléctricas y asegurar que las ecuaciones (1.60) y (1.64) halladas en el caso de un arreglo en paralelo y un arreglo en serie, respectivamente, siguen valiendo en el caso eléctrico, es decir, se cumple que

1 – Dado un conjunto de N resistencias R_1, R_2, \dots, R_N en paralelo resulta en una resistencia equivalente

$$R_{eq//} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (7.19)$$

2 – Dado un conjunto de N resistencias R_1, R_2, \dots, R_N en serie resulta una resistencia equivalente

$$R_{eq,s} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (7.20)$$

Desde ya que podemos hallar los mismos resultados partiendo de un punto de vista puramente eléctrico. Formalmente, y a modo de corroboración, lo hacemos a continuación

7.6.1 – Arreglo en serie

En la figura 7.4 mostramos dos resistores en serie, introduciendo al mismo tiempo el símbolo circuital de una resistencia. Obsérvese que están en serie si el flujo de cargas por el camino elegido se interrumpe cuando se quita una de las resistencias. Nuestro objetivo es encontrar el valor de una única resistencia $R_{eq,s}$ que podamos colocar en lugar del arreglo sin que cambien los parámetros del circuito.

Para ello, notemos que el trabajo para transportar una carga desde A hasta B, realizado por la batería, es la suma de los trabajos requeridos para ir desde A hasta D más el trabajo para ir desde D hasta B, y como el trabajo eléctrico (por unidad de carga) está representado por la diferencia de potencial podemos escribir

$$V_{AB} = V_{AD} + V_{DB} \quad (7.21)$$

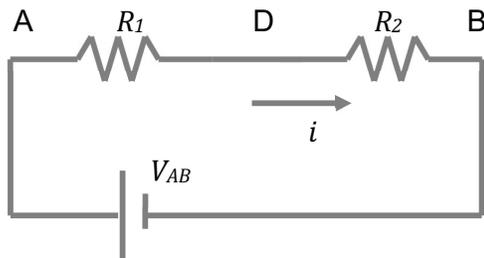


Fig. 7.4: dos resistores en serie; obsérvese que tienen sólo uno de sus extremos en común.

Al transportar las cargas se realiza trabajo en contra de las resistencias, pero la carga misma no se crea (no hay fuentes) ni se destruye (no hay sumideros), de manera tal que la conservación de la carga impone que la corriente eléctrica i que pasa por la resistencia R_1 sea la misma que pasa por la resistencia R_2 . Entonces, a partir de la ley de Ohm (expresión (7.14)) podemos escribir (7.21) en función de las resistencias

$$V_{AB} = iR_{eq,s} = iR_1 + iR_2 \quad (7.22)$$

de donde se desprende de inmediato

$$R_{eq,s} = R_1 + R_2 \quad (7.23)$$

y la extensión al caso de N resistencias en serie es inmediata y se recupera sin más la expresión (7.20)

$$R_{eq,s} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

7.6.2 – Arreglo en paralelo

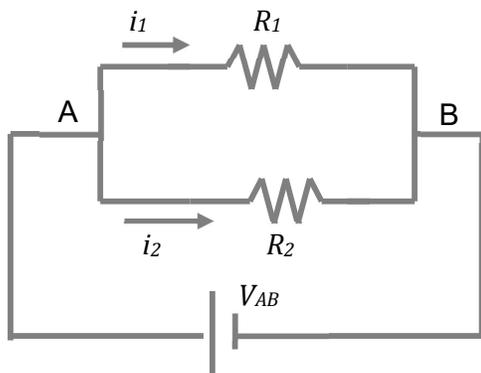
La figura 7.5 muestra dos resistores en paralelo. Obsérvese que en esta disposición conectan entre sí sus dos extremos y están al mismo potencial. Otra forma de decirlo es que están en paralelo si la corriente puede encontrar un camino alternativo si se elimina una de las resistencias.

Al conectarse la batería se transportan cargas a través de los resistores, pero para ir entre B y A no es necesario pasar a través de las dos resistencias. Si el trabajo para pasar por un resistor es igual al trabajo requerido para pasar por el otro, la ley de Ohm impone que, salvo en el caso que los dos resistores sean iguales, las corrientes que los circulan no pueden ser las mismas.

La conservación de la carga por otro lado impone que la corriente i que circule por el resistor equivalente sea igual a la suma de las corrientes que circulan por cada uno de los resistores, porque de otra forma habría o fuentes o sumideros de carga en el circuito, en contra de la hipótesis de carga estacionaria. En términos matemáticos la hipótesis de conservación de la carga se traduce en la expresión

$$i = i_1 + i_2 \tag{7.24}$$

Pero la ley de Ohm impone las condiciones



$$i_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \tag{7.25. a}$$

$$i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \tag{7.25. b}$$

de manera tal que la expresión (7.23) resulta

$$i_1 = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{7.26}$$

Fig. 7.5: las dos resistencias en paralelo R_1 y R_2 están a la misma diferencia de potencial, de manera tal que, salvo que sean de igual valor, las corrientes que las circulan, i_1 e i_2 , son diferentes.

A partir de la ecuación (7.26) es inmediato que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo resulta

$$\frac{1}{R_{eq//}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq//} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (7.27)$$

La generalización al caso de N resistores en paralelo es casi inmediata a partir del razonamiento que nos llevó a la ecuación (7.27) y obtenemos nuevamente la expresión (7.19)

$$R_{eq//} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$$

Ejemplo 7.2: Sea la disposición circuital de la figura 7.6. Calculemos la resistencia equivalente del sistema, la corriente que circula por cada resistencia y la diferencia de potencial entre sus extremos.

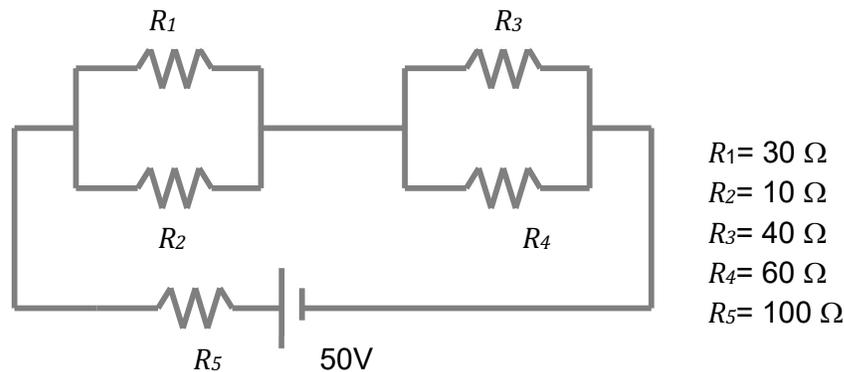
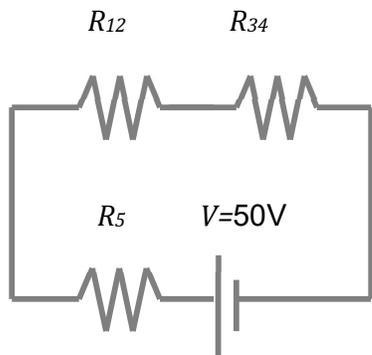


Fig. 7.6: arreglo circuital del ejemplo 7.2

De acuerdo a lo discutido en la sección 7.6, la resistencia equivalente del circuito será la serie de R_5 con el paralelo R_1R_2 y con el paralelo R_3R_4 . Llamemos R_{12} a la resistencia equivalente del paralelo R_1R_2 , y R_{34} a la resistencia equivalente del paralelo R_3R_4 (véase la figura 7.7). A partir de la expresión general (7.20) resultan

$$R_{12} = 7,5 \Omega \quad R_{34} = 24 \Omega$$



y teniendo en cuenta que el arreglo general es serie, a través de la expresión (7.20) obtenemos

$$R_{eq} = R_{12} + R_{34} + R_5 = 131,5 \Omega \quad (7.28)$$

Con este valor R_{eq} de resistencia equivalente la corriente que circula vale

$$i_{CIRC} = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{50V}{131,5\Omega} = 0,38 \text{ A} \quad (7.29)$$

Fig. 7.7: disposición de las resistencias equivalentes parciales del circuito de la figura 7.6.

Obsérvese que i_{CIRC} es el valor de la intensidad de corriente que circula por R_5 , R_{12} y R_{34} , es decir, por el circuito completo, no necesariamente por cada

resistencia, de manera tal que las diferencias de potencial (llamadas caídas de potencial) sobre cada conjunto parcial de resistencias valen

$$V_{12} = i_{CIRC} R_{12} = 0,38A \times 7,5\Omega = 2,85V \quad (7.30)$$

$$V_{34} = i_{CIRC} R_{34} = 0,38A \times 24\Omega = 9,12V \quad (7.31)$$

$$V_5 = i_{CIRC} R_5 = 0,38A \times 100\Omega = 38V \quad (7.32)$$

La suma de las caídas de potencial debe ser igual al potencial de la batería, porque de otra manera la energía no se conservaría. La diferencia que se observa tiene sólo que ver con la aproximación de dos decimales que hicimos en el valor de la corriente.

Obsérvese finalmente que V_{12} es la diferencia de potencial entre los extremos tanto de R_1 como de R_2 , V_{34} es la diferencia de potencial sobre R_3 y R_4 , y V_5 es la caída de potencial sobre R_5 . A partir de la ley de Ohm es inmediato que las corrientes que circulan por cada resistor valen entonces

$$i_{R1} = \frac{V_{12}}{R_1} = \frac{2,85V}{30 \Omega} = 0,095 \text{ A} \quad (7.33)$$

$$i_{R2} = \frac{V_{12}}{R_2} = \frac{2,85V}{10 \Omega} = 0,285 \text{ A} \quad (7.34)$$

$$i_{R3} = \frac{V_{34}}{R_3} = \frac{9,12 \text{ V}}{40 \Omega} = 0,228 \text{ A} \quad (7.35)$$

$$i_{R4} = \frac{V_{34}}{R_4} = \frac{9,12 \text{ V}}{60 \Omega} = 0,153 \text{ A} \quad (7.36)$$

$$i_{R5} = \frac{V_5}{R_5} = \frac{38 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,38 \text{ A} \quad (7.37)$$

En la figura 7.8 se muestran todos los valores que acabamos de calcular. Obsérvese que la corriente i_{R5} es la que circula por todo el circuito, como era de esperar porque se halla en serie con el resto de los arreglos parciales. También es evidente que la corriente que circula por el paralelo R_{12} , digamos i_{R12} ,

$$i_{R12} = \frac{V_{12}}{R_{12}} = \frac{2,85 \text{ V}}{7,5 \Omega} = 0,38\text{A} \quad (7.38)$$

es igual a la corriente que circula por el circuito con el conjunto de resistencias reemplazado por su resistencia equivalente R_{eq} , pero también es la suma de las corrientes $i_{R1} + i_{R2}$, como puede verificarse rápidamente con los valores obtenidos en las igualdades (7.33) y (7.34). Similarmente, resulta $i_{R34} = i_{R3} + i_{R4} = i_{CIRC}$ porque al cabo hemos impuesto que la carga debe conservar su valor constante. En síntesis, la condición de que se conserve la energía lleva a que la suma de las caídas de potencial recorriendo el circuito debe ser igual al potencial (o tensión) de la fuente, en tanto que la condición de que la carga se conserve ha llevado a que la suma de las corrientes en cada arreglo parcial debe ser igual a la corriente que circula por el circuito como si existiera un único resistor equivalente. Estas parecen ser leyes de validez general, y la próxima sección habremos de dedicarla a analizar estos resultados con alguna profundidad.

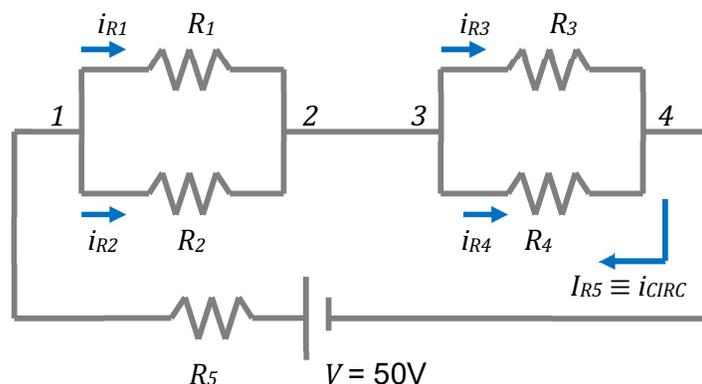


Fig. 7.8: se muestran las corrientes sobre cada resistencia y las caídas de potencial sobre cada arreglo parcial de resistores. Se han diferenciado los puntos 2 y 3 aunque es $V_2=V_3$.

7.7 – Leyes de conservación (leyes de Kirchhoff)

Por lo que hemos discutido hasta aquí, es de esperar que una vez establecido un arreglo circuital cualquiera (o simplemente circuito eléctrico), con fuentes de tensión y elementos pasivos en alguna particular disposición, bajo circunstancias absolutamente

generales se establezca algún régimen de corriente eléctrica. La pregunta es cuánto vale esa corriente eléctrica (su intensidad) y cómo circula (su sentido).

De hecho, aunque no es necesario es sin embargo posible que en diferentes puntos del circuito las corrientes difieran en valor y en sentido de circulación. Por lo demás, es de esperar que independientemente de la parte del circuito que se trate, se respete un conjunto de postulados básicos, tales como la conservación de la carga y de la energía, y que sigan valiendo leyes generales como la ley de Ohm.

Una vez establecidas las fuentes y resistencias del circuito, es razonable postular que la corriente que se establezca en el circuito habrá de ser estacionaria, es decir, si partimos de la validez del principio de conservación de la carga eléctrica debemos aceptar que en todo instante, en cualquier punto del circuito que analicemos, tendremos que tener tanta carga que entra a ese punto como carga que sale. Y esos valores deben permanecer inalterados en el tiempo. De manera absolutamente general estamos asegurando que vale el principio de conservación de la carga (reflejo del principio de conservación de la masa) y que se conoce como primera ley de Kirchhoff:

Primera ley circuital: en todo punto de un circuito donde se unen tres o más elementos (lo que se conoce como un nodo principal) la suma de las corrientes entrantes debe ser igual a la suma de las corrientes que salen.

En tanto el circuito consista en un único lazo sin derivaciones (una única *malla*) como el de la figura 7.7, la determinación de la corriente que circula no ofrece mayores dificultades. Para analizar el problema partimos de la premisa de que algún elemento debe realizar el trabajo para transportar las cargas; y de acuerdo a lo que hemos discutido en relación al significado del potencial electrostático, concluimos que no puede haber circulación de cargas (esto es, corrientes) sin una diferencia de potencial aplicada.

Recordemos nuevamente que el potencial electrostático tiene el mismo significado que el potencial gravitatorio: ninguno. Pero sí tiene significado la variación (o diferencia) de potencial, porque representa el trabajo necesario para mover un sistema (bloque o electrón) a velocidad constante. La idea básica que subyace en nuestra analogía mecánico-eléctrica es que algún elemento debe entregar el trabajo necesario para mover el sistema en contra de las fuerzas resistivas. Consideremos a modo de ejemplo el esquema de la figura 7.9, en el que un bloque se desplaza en el seno de un fluido viscoso arrastrado por la fuerza F (supondremos que el plano horizontal no ofrece resistencia adicional al deslizamiento). Llamemos W_{VIS} y W_F a los trabajos de la fuerza viscosa y de la fuerza F , respectivamente. Es evidente que si v es la velocidad del bloque y E_C su energía cinética, entonces las implicaciones

$$W_F = -W_{VIS} \Rightarrow E_C = \text{constante} \Rightarrow v = \text{constante} \quad (7.39)$$

son inmediatas. A nivel dinámico, teniendo en cuenta que las fuerzas viscosas son proporcionales a la velocidad, esto es, son de la forma $F_{VIS} = \zeta v$, donde ζ es un coeficiente de valor constante, obtenemos el mismo resultado, porque

$$F = -F_{VIS} \equiv F - \zeta v = 0 \Rightarrow v = \frac{F}{\zeta} = \text{constante} \quad (7.40)$$

Podemos realizar un equivalente eléctrico sencillo con solo tomar

$$x \rightarrow q \quad \zeta \rightarrow R \quad F \rightarrow V$$



Fig. 7.9: el bloque se mueve por acción de la fuerza F en contra de la fuerza viscosa. Por simplicidad no marcamos el peso del bloque ni la fuerza del plano sobre el bloque porque en dirección perpendicular al movimiento la aceleración y la velocidad son nulas.

de manera tal que la expresión (7.40) se transforma inmediatamente en

$$F - \zeta \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow V - R \frac{dq}{dt} = 0 \quad (7.41)$$

que no es otra cosa que la ley de Ohm para una resistencia sometida a una diferencia de potencial V .

La expresión (7.41) postula que a nivel de circuitos eléctricos la validez de las leyes de conservación de la energía (o la ley de Ohm) puede enunciarse en la forma de un principio (conocido como segunda ley de Kirchhoff) en la forma:

Segunda ley circuital: La suma de las tensiones aplicadas en una malla es igual a la suma de las caídas de potencial sobre cada elemento pasivo de esa malla.

Un análisis un poco más profundo de la expresión (7.41) permite por un lado la conceptualización de la ley de Ohm en términos de la interpretación del producto $R i$ como una caída de potencial. Y por otro lado sugiere que la analogía mecánico - eléctrica debe extenderse al nivel de la potencia desarrollada por el sistema, punto sobre el que volveremos en la próxima sección.

Veamos cómo el análisis de un circuito puede realizarse en términos de las leyes de conservación (en la forma de las leyes de Kirchhoff).

Ejemplo 7.3: Sea el circuito de la figura 7.10. Calculemos los valores de las corrientes que circulan por cada resistor a partir de la segunda ley de Kirchoff, usando lo que se conoce como método de las corrientes de malla.

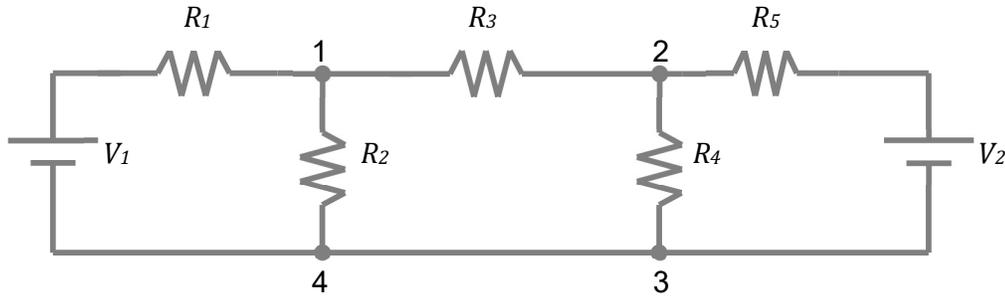


Fig. 7.10: un circuito con tres mallas independientes. Los puntos marcados con números son posibles nodos principales, pero si el punto 3 es un nodo principal, 4 no lo es porque se trata del mismo punto (en el sentido de que están a idéntico potencial).

Obsérvese que el postulado de Kirchoff habla de la conservación de la energía en una malla, pero nada dice de cómo elegir las mallas ni cuántas mallas independientes hay. Sabemos, sí, que debemos plantear una ecuación por cada malla independiente porque exigimos que la energía se conserve en cada camino cerrado.

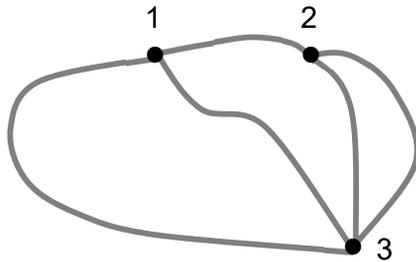


Fig. 7.11: esquema simplificado del circuito de la figura 7.10, que muestra sus nodos y sus ramas.

Recordemos que una malla es un lazo cerrado que contiene elementos pasivos y fuentes, en tanto que un nodo principal es cualquier punto del circuito al que confluyen tres o más elementos, activos (fuentes) o pasivos (resistores en este caso). Toda conexión simple con elementos pasivos y/o activos entre dos nodos es una rama. La figura 7.11 muestra un esquema simplificado del circuito, mostrando sus nodos y sus ramas.

Obsérvese que sólo hay 3 nodos, que en la figura 7.10 han sido numerados. Si tomamos como nodo el punto 3, el punto que hemos marcado

con un 4 no es un nodo principal porque representa la confluencia de las mismas ramas (el segmento 4-3 es simplemente un conductor)

Si ahora llamamos M al número de mallas independientes, N al número de nodos principales y r al número de ramas, el número de mallas viene dado por la expresión

$$M = r - (N - 1) \tag{7.42}$$

En nuestro caso, como es ya evidente de la figura 7.11, hay 5 ramas, 3 nodos y, luego, 3 mallas independientes. De nuevo, cuáles son esas tres mallas independientes no queda dicho porque en el circuito de la figura 7.10 hay seis caminos cerrados posibles. La manera

de elegir las tres mallas no es única, y en la figura 7.12 mostramos dos de las posibles elecciones

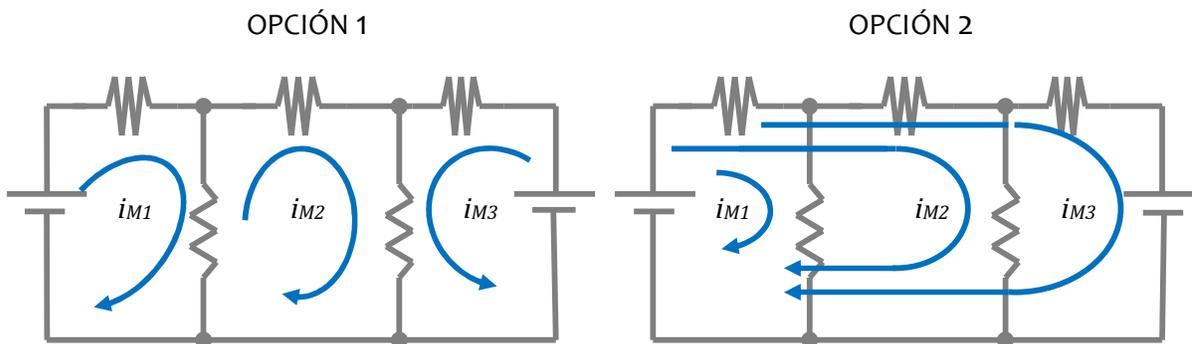


Fig. 7.12: El circuito de la figura tiene tres mallas independientes, pero son seis los lazos cerrados que pueden dibujarse. Luego, no hay una única manera de elegir las mallas independientes ni los sentidos de circulación. Aquí se muestran dos alternativas.

Para resolver el problema elijamos la opción 1. Hemos subindicado con letra mayúscula M las corrientes de malla para distinguirlas de las corrientes sobre cada resistencia (obsérvese que no necesariamente habrán de ser iguales). Así, por ejemplo, i_{M1} indica la corriente que

Es muy importante tener en cuenta que las corrientes de malla no tienen existencia real. Reflejan, sí, la conservación de la energía al circular por un circuito, pero las corrientes reales son las que circulan por los resistores. No basta entonces con hallar los valores de las corrientes de malla, debe además escribirse la relación que existe entre esas corrientes y las que circulan por cada resistor.

circula por la malla 1, en tanto que i_{R2} , por ejemplo, es la corriente sobre la resistencia R_2 . Es muy importante notar que en el caso del ejemplo que estamos planteando la corriente i_{M1} es la misma que i_{R1} , es decir, es la que circula por la resistencia R_1 (porque es la única corriente que atraviesa esa resistencia) pero no es necesariamente la corriente que circula por R_2 porque por esta resistencia circula, además, la corriente de malla i_{M2} . Debemos decir además que si bien el sentido de circulación de las corrientes de malla i_{M1} e i_{M3} están sugeridas por las baterías, no hay ninguna razón particular para elegir el sentido de la corriente de malla i_{M2} . Y de hecho no hay ninguna garantía de que las corrientes circulen como están

marcadas; en el peor de los casos, si circulan al revés, obtendremos un valor de intensidad de corriente de malla negativo, indicando que el valor absoluto es el calculado pero el sentido de circulación (de la corriente de malla) es el opuesto.

Planteemos ahora las ecuaciones de malla, observando que una batería circulada internamente desde el borne negativo al positivo representa un incremento del potencial. Por otro lado, si por un resistor circulan dos corrientes, los potenciales provocados por las corrientes se suman si las corrientes avanzan por el resistor en el mismo sentido (porque

realizan trabajo de transporte en el mismo sentido, como las corrientes i_{M2} e i_{M3} sobre R_4) y se restan en caso contrario (como las corrientes i_{M1} e i_{M2} sobre R_2).

Pensemos en la malla 1: la batería, recorrida como indica la circulación elegida, representa una subida de potencial (o subida de tensión), en tanto que la corriente i_{M1} circulando por las resistencias R_1 y R_2 representa una caída de potencial. Pero si esta corriente circulando por R_2 representa una caída, la circulación de i_{M2} (arbitraria, es cierto) en sentido contrario a i_{M1} por R_2 representa una subida de potencial. La segunda ley de Kirchhoff se puede enunciar diciendo que en una malla la suma de las caídas de tensión debe ser igual a la suma de las caídas de tensión (de manera tal que no haya ni pérdida ni incremento de energía). Para la malla 1, por ejemplo, con las corrientes de malla elegidas la segunda ley de Kirchhoff se escribe como

$$i_{M1}(R_1 + R_2) = V_1 + i_{M2}R_2 \quad (7.43)$$

En total, el conjunto de ecuaciones de malla se escribe como

$$\text{Malla 1:} \quad i_{M1}(R_1 + R_2) - i_{M2}R_2 = V_1 \quad (7.44)$$

$$\text{Malla 2:} \quad -i_{M1}R_2 + i_{M2}(R_2 + R_3 + R_4) + i_{M3}R_4 = 0 \quad (7.45)$$

$$\text{Malla 3:} \quad i_{M2}R_4 + i_{M3}(R_4 + R_5) = V_2 \quad (7.46)$$

que junto con las relaciones

$$i_{R1} = i_{M1} \quad (7.47)$$

$$i_{R2} = i_{M1} - i_{M2} \quad (7.48)$$

$$i_{R3} = i_{M2} \quad (7.49)$$

$$i_{R4} = i_{M2} + i_{M3} \quad (7.50)$$

$$i_{R5} = i_{M3} \quad (7.51)$$

completan la solución del problema. El método de las corrientes de malla redujo el problema a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a saber, las corrientes de malla i_{M1} , i_{M2} e i_{M3} . Las ecuaciones (7.44) – (7.46) pueden resumirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & R_4 \\ 0 & R_4 & R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{M1} \\ i_{M2} \\ i_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

Para resolverlo, llamemos $\|\Delta\|$ al determinante de la matriz de las resistencias, esto es,

$$\|\Delta\| = (R_1 + R_2) \times [(R_4 + R_5) \times (R_2 + R_3 + R_4) - R_4^2] - R_2^2 \times (R_4 + R_5) \quad (7.53)$$

de manera tal que, usando los métodos usuales de resolución, resultan

$$i_{M1} = \frac{V_1[(R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_4) - R_4^2] + R_2(-V_2R_4)}{\|\Delta\|} \quad (7.54)$$

$$i_{M2} = \frac{(R_1 + R_2)(-V_2R_4) - V_1[(R_4 + R_5)(-R_2)]}{\|\Delta\|} \quad (7.55)$$

$$i_{M3} = \frac{V_2[(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)] - V_1R_4R_2 - V_2R_2^2}{\|\Delta\|} \quad (7.56)$$

Las corrientes de malla dependen ahora de los particulares valores que hayamos elegido para las resistencias y las tensiones de las fuentes. En función de esos valores podrán resultar positivas, negativas o nulas, tanto da, porque el hecho es que podemos calcularlas y a partir de esos valores calcular los de las corrientes por cada resistencia a partir de las relaciones (7.43)-(7.51), que es al cabo lo que tiene sentido. Este es un detalle de importancia, porque no estamos postulando que existen corrientes de malla, apelamos a la conservación de la energía como método de cálculo para calcular a posteriori las corrientes por cada resistencia.

Observemos que por la particular manera en que hemos elegido las corrientes de malla, parece evidente que por la resistencia R_1 circula la corriente $i_1 = i_{M1}$, por la resistencia R_2 circula la corriente $i_2 = i_{M1} - i_{M2}$, por la resistencia R_3 circula la corriente $i_3 = i_{M2}$, por la resistencia R_4 circula $i_4 = i_{M2} + i_{M3}$, y por la resistencia R_5 circula la corriente $i_5 = i_{M3}$, como mostramos en el circuito superior de la figura 7.13.

Por ejemplo, si tomamos $R_c = 10 \text{ } \Omega$ (o sea, $R_1 = 10 \text{ } \Omega$, $R_2 = 20 \text{ } \Omega$, y así siguiendo), $V_1 = 10 \text{ V}$ y $V_2 = 20 \text{ V}$, las ecuaciones (7.44) – (7.56) resultan en los valores

$$\|\Delta\| = 159.000 \text{ } \Omega^3 \quad (7.57)$$

$$i_{M1} = 0,308 \text{ A} \quad (7.58)$$

$$i_{M2} = -0,038 \text{ A} \quad (7.59)$$

$$i_{M3} = 0,239 \text{ A} \quad (7.60)$$

Con estos valores, en base a los comentarios realizados líneas arriba, las corrientes por las resistencias resultan

$$i_{R1} = i_{M1} = 0,308 \text{ A} \quad (7.61)$$

$$i_{R2} = i_{M1} - i_{M2} = 0,308 \text{ A} - (-0,038 \text{ A}) = 0,346 \text{ A} \quad (7.62)$$

$$i_{R3} = i_{M2} = -0,038 \text{ A} \quad (7.63)$$

$$i_{R4} = i_{M2} + i_{M3} = -0,038 \text{ A} + 0,239 \text{ A} = 0,201 \text{ A} \quad (7.64)$$

$$i_{R5} = i_{M3} = 0,239 \text{ A} \quad (7.65)$$

De nuevo, es importante recalcar que el sentido en que se elija la circulación de una corriente de malla es irrelevante porque estamos pretendiendo que se conserva la energía, un fenómeno que de ninguna manera puede depender del sentido de circulación. Pero vale la pena aclarar algunos aspectos respecto de los valores de las corrientes por las resistencias. En primer lugar, la ecuación (7.58) indica que la corriente de malla i_{M2} es negativa, lo que significa que su valor es ese pero que circula al revés del sentido elegido. Con la corriente i_{R2} no hay problemas porque ahora las corrientes de malla se suman; en todo caso, podría haber algún conflicto con la corriente i_{R4} , porque parecería que no queda definido el sentido de circulación. Sin embargo, es fácil ver (e intuitivamente esperable) que el sentido de la corriente queda definido por la corriente de malla de mayor valor, en este caso i_{M3} . En el circuito inferior de la figura 7.13 hemos marcado las corrientes “verdaderas” para ser comparadas con las arbitrarias que elegimos al principio.

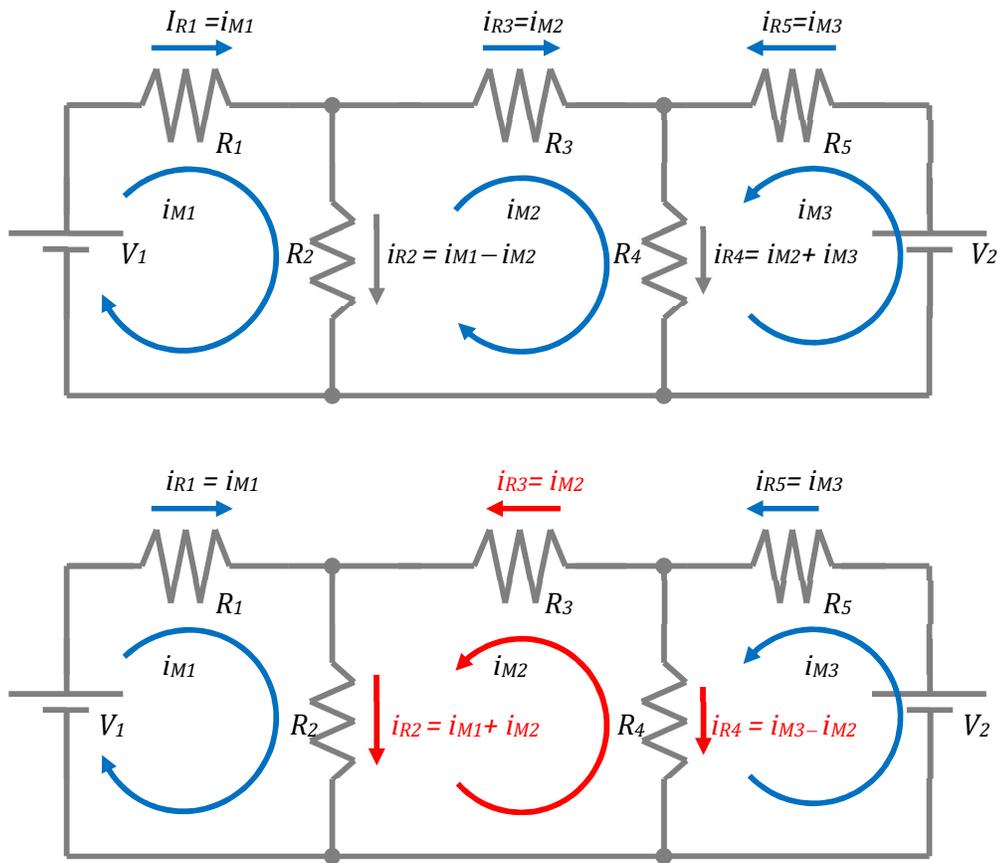


Fig. 7.13: En la figura superior se muestran las corrientes de malla tal como han sido elegidas (de manera arbitraria). Si con los valores de resistencia y tensión propios del circuito resultaran corrientes de malla positivas, los sentidos se conservan. Caso contrario, deben invertirse. En la figura inferior repetimos el circuito, pero ahora con las direcciones que resultan de resolver las ecuaciones. Obsérvese que el cambio de sentido de i_{M2} cambia los valores de las corrientes i_2 e i_4 y el sentido de circulación de i_3 .

Ejemplo 7.4: Calculemos los valores de las corrientes que circulan por cada resistor del circuito de la figura 7.10 a partir de la primera ley circuital, usando lo que se conoce como método de las tensiones en los nodos (o simplemente método de nodos).

De nuevo, la ley no estipula el número de ecuaciones linealmente independientes, pero es fácil ver que alcanza con calcular el potencial en $N-1$ nodos tomando el potencial del nodo restante como referencia, y calcular luego las corrientes correspondientes. De manera arbitraria usaremos el nodo 3 como referencia, tomando $V_3 = 0$.

Comencemos por el nodo 1, y sea V_{N1} el potencial de este nodo, como se indica en la figura 7.14.a. Hemos indicado con i_k a las corrientes que tocan al nodo para evitar confundirlas

con las corrientes propias de las resistencias (en este ejemplo coinciden unas y otras, pero no tiene por qué ser el caso general). Obsérvese que hemos tomado todas las corrientes salientes, al solo efecto de mostrar que el sentido elegido es por completo arbitrario. Desde ya que sabemos que al menos una de las intensidades habrá de ser negativa. Luego, como en el nodo la carga se conserva, debe ser

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \Rightarrow \frac{V_{N1} - V_1}{R_1} + \frac{V_{N1}}{R_2} + \frac{V_{N1} - V_{N2}}{R_3} = 0 \quad (7.66)$$

En el nodo 2, siguiendo los mismos argumentos que antes y de acuerdo a la figura 7.14.b, debe ser

$$i_3 + i_4 + i_5 = 0 \Rightarrow \frac{V_{N2} - V_{N1}}{R_3} + \frac{V_{N2}}{R_4} + \frac{V_{N2} - V_2}{R_5} = 0 \quad (7.67)$$

Obsérvese el último sumando del miembro derecho de la expresión (7.67): es $V_{N2} - V_2$ porque el sentido que impusimos a la corriente i_5 va en contra de la subida de potencial. Reordenando las expresiones (7.66) y (7.67) obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a saber, V_{N1} y V_{N2} , en la forma

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_{N1} - \frac{V_{N2}}{R_3} = \frac{V_1}{R_1} \quad (7.68)$$

$$-\frac{V_{N1}}{R_3} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_{N2} = \frac{V_2}{R_5} \quad (7.69)$$

Obsérvese que una vez calculadas las tensiones en los nodos las corrientes en cada resistencia se siguen casi automáticamente. Por ejemplo, la corriente que circula por la resistencia R_4 es $i_{R4} = V_{N2}/R_4$, la corriente que circula por la resistencia R_1 resulta ser $i_{R1} = (V_{N1} - V_1)/R_1$ y así siguiendo para el resto. Además está decir, los resultados que se obtienen son idénticos a los del ejemplo anterior. Dicho sea de paso, en la figura 7.13 inferior ya se ve que resulta $i_2 = i_1 + |i_3|$, que es muy fácil de verificar con las ecuaciones (7.61) – (7.65).

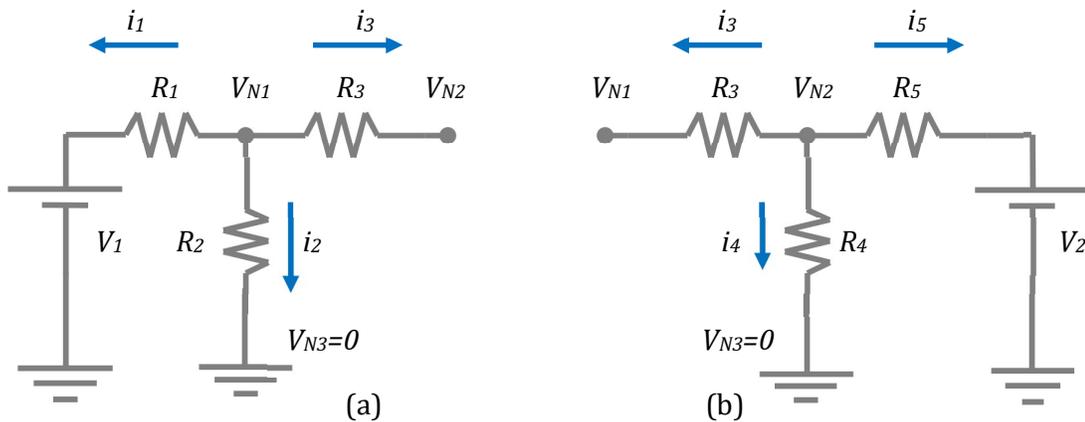


Fig. 7.14: Las corrientes en el nodo se toman con sentido arbitrario, porque lo que importa es que su suma debe ser nula. Es evidente la imposibilidad física de que todas las corrientes sean salientes en ausencia de una fuente de corriente en cada nodo. En este caso las corrientes de nodo coinciden con las de las resistencias, pero para evitar confusiones en el caso general hemos indicado con mayúsculas a las corrientes de nodo.

Ejemplo 7.5: Sea el circuito de la figura 7.15.a. Calculemos la corriente por cada resistencia y la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* por el método de conservación de la energía y por el método de las tensiones en los nodos.

a) resolución por el método de conservación de la energía (mallas)

En este caso sencillo es casi evidente que hay sólo dos mallas independientes, que se eligen como muestra en el esquema de la figura 7.15.b, en la que también se han dibujado los sentidos (arbitrarios) de las corrientes de malla y los nodos principales *A* y *D*. El punto *B* ni siquiera es un nodo porque a él no confluyen más de dos ramas.

Obsérvese que se han elegido los sentidos de las corrientes de malla de forma tal que las baterías representen una subida de potencial cuando se recorre la malla. De manera casi inmediata se obtiene el sistema de ecuaciones

$$i_{M1}(R_1 + R_2) - i_{M2}R_2 = V_1 \tag{7.70}$$

$$-i_{M1}R_2 + i_{M2}(R_2 + R_3) = V_2 \tag{7.71}$$

Para resolver numéricamente el ejemplo adoptemos los siguientes valores: las dos fuentes que sean de $100V$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$. Resolviendo las ecuaciones (7.70) y (7.71) para estos valores es casi inmediato que resulta $i_{M1} = 8A$, $i_{M2} = 6A$. A partir de estos valores, la corriente que circula por cada resistor es

$$i_{R1} = i_{M1} = 8 \text{ A} \tag{7.72}$$

$$i_{R2} = i_{M1} - i_{M2} = 2 \text{ A} \tag{7.73}$$

$$i_{R3} = i_{M2} = 6 \text{ A} \tag{7.74}$$

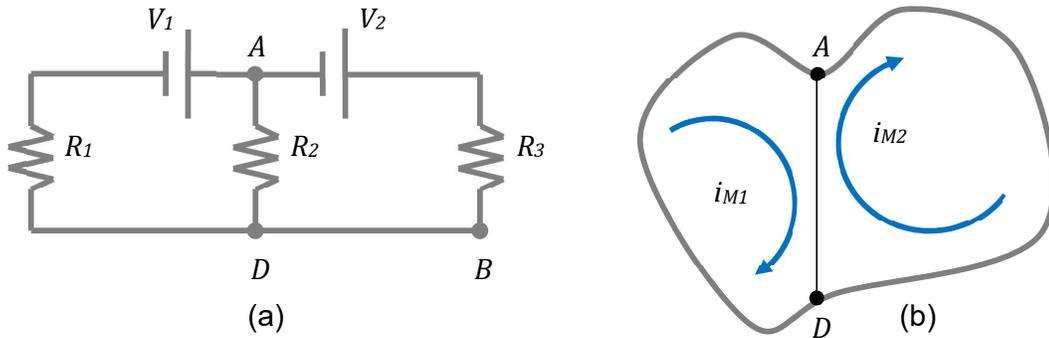


Fig. 7.15: (a) circuito del ejemplo 7.5. (b) circuito esquemático para mostrar que hay sólo dos mallas y dos nodos independientes.

Por su parte, la diferencia de potencial $V_{BA} = V_A - V_B$ podemos obtenerla realizando el balance energético circulando por la malla 2 en el sentido de la corriente. De esta forma resulta

$$V_A + V_2 - i_{R3}R_3 = V_B \tag{7.75}$$

de donde resulta inmediatamente

$$V_A - V_B = i_{R3}R_3 - V_2 = 20 \text{ V} \tag{7.76}$$

Obsérvese que se arriba al mismo resultado si se calcula la diferencia de potencial

$$V_A - V_D = i_{R2}R_2 = 20 \text{ V} \tag{7.77}$$

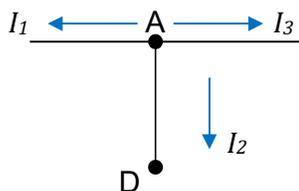
y es casi obvio que así debe ser porque el nodo D está al mismo potencial que el punto B (están conectados por un conductor).

b) resolución por el método de nodos

Tomaremos como referencia el potencial del nodo D poniéndolo a tierra ($V_D = 0$) y supondremos que todas las corrientes salen del nodo (véase la figura 7.16). De esta forma, la ecuación que resulta para el único nodo restante, a partir de la ley de la conservación de la carga $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ es

$$\frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A + V_2}{R_3} = 0 \tag{7.78}$$

Obsérvese que en el último sumando el potencial del nodo A se suma con el de la batería porque en el sentido indicado por la corriente la batería representa un incremento del potencial. Resolviendo la ecuación (7.69) para la tensión en el nodo A resulta



$$V_A = 20 \text{ V} \tag{7.79}$$

Fig. 7.16: se muestran las corrientes en el nodo A. El nodo D está a tierra.

e inmediatamente se obtienen los valores

$$i_{R1} = i_1 = \frac{V_A - V_1}{R_1} = -8\text{A} \tag{7.80}$$

$$i_{R2} = i_2 = \frac{V_A}{R_2} = 2\text{A} \tag{7.81}$$

$$i_{R3} = i_3 = \frac{V_A + V_2}{R_3} = 6\text{A} \tag{7.82}$$

Obsérvese que la intensidad de la corriente i_1 es de 8 A pero circula en sentido contrario al que hemos supuesto en el esquema de la figura 7.16, algo que además esperábamos porque todas las corrientes no pueden ser salientes, una al menos debe resultar negativa. Por lo demás, la diferencia de potencial entre los puntos A y B de la figura 7.15 es precisamente el potencial del punto A , porque se trata del potencial de A respecto del punto D , que está al mismo potencial que el punto B .

Ejemplo 7.6: Sea el circuito de la figura 7.17a, en el que se conocen los valores de las resistencias y de las fuentes. En función de estos datos hallemos los valores de las corrientes que circulan por cada resistencia utilizando el método de las tensiones en los nodos (conservación de la carga).

En el panel derecho de la figura mostramos los nodos principales del circuito. Hemos tomado el nodo 4 como referencia, poniéndolo a tierra. De esta forma, el potencial del nodo 2 es el de la pila superior, es decir, V_1 .

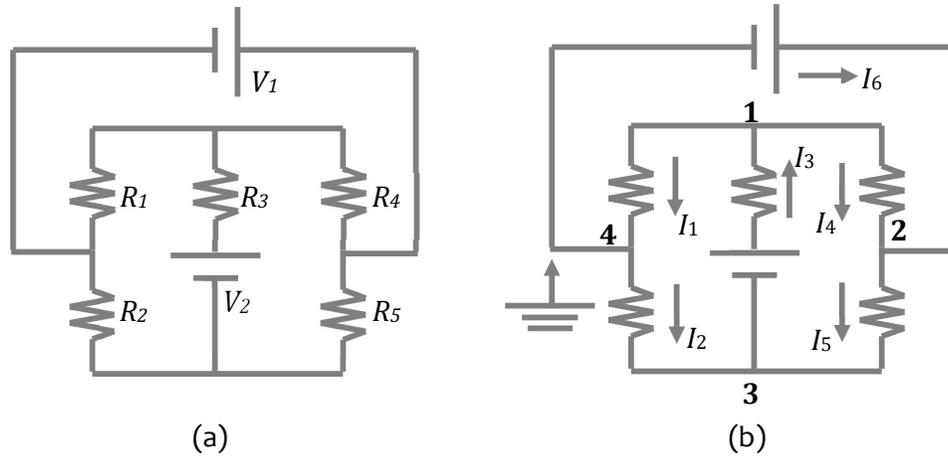


Fig. 7.17: (a) circuito del ejemplo 7.6. (b) Esquema de corrientes y nodos elegido. El nodo 4 se ha tomado (arbitrariamente) como referencia, es decir, todos los potenciales estarán referidos a tierra. Obsérvese que automáticamente el potencial del nodo 2 es V_1 .

Los sentidos que le hemos dado a las corrientes son completamente arbitrarios, pero debemos escribir las ecuaciones con esos sentidos. De esta manera, resultan

$$\text{Nodo 1:} \quad -i_1 + i_3 - i_4 = 0 \quad (7.83)$$

$$\text{Nodo 2:} \quad i - i_5 + i_6 = 0 \quad (7.84)$$

$$\text{Nodo 3:} \quad i_2 - i_3 + i_5 = 0 \quad (7.85)$$

Por otro lado, las corrientes i_1 a i_6 se relacionan con las tensiones en los nodos V_N y las tensiones de las fuentes (V_1 y V_2) en las formas

$$i_1 = \frac{V_{N1} - V_{N4}}{R_1} \equiv \frac{V_{N1}}{R_1} \quad (7.86)$$

$$i_2 = \frac{V_{N4} - V_{N3}}{R_2} \equiv \frac{-V_{N3}}{R_2} \quad (7.87)$$

$$i_3 = \frac{V_{N3} + V_2 - V_{N1}}{R_3} \quad (7.88)$$

$$i_4 = \frac{V_{N1} - V_{N2}}{R_4} \quad (7.89)$$

$$i_5 = \frac{V_{N2} - V_{N3}}{R_5} \quad (7.90)$$

Recordemos que V_{N2} es dato, es la tensión V_1 , de manera tal que las expresiones (7.83) – (7.85), en términos de las ecuaciones (7.86) - (7.90) resultan

$$-\frac{V_{N1}}{R_1} + \frac{V_{N3} + V_2 - V_{N1}}{R_3} - \frac{V_{N1} - V_1}{R_4} = 0 \quad (7.91)$$

$$\frac{V_{N1} - V_1}{R_4} - \frac{V_1 - V_{N3}}{R_5} + I_6 = 0 \quad (7.92)$$

$$-\frac{V_{N3}}{R_2} - \frac{V_{N3} + V_2 - V_{N1}}{R_3} + \frac{V_1 - V_{N3}}{R_5} = 0 \quad (7.93)$$

Observemos cuáles son las incógnitas: las tensiones en los nodos 1 y 3, y la corriente i_6 . Claramente, el sistema tiene solución única. De hecho, resulta

$$V_{N1} = \frac{1}{F(R)} \left\{ V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - V_1 \left[\frac{R_3}{R_4} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{1}{R_5} \right] \right\} \quad (7.94)$$

$$F(R) = R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \times \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) \quad (7.95)$$

$$V_{N3} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}} \left[V_{N1} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_2}{R_3} - \frac{V_1}{R_5} \right] \quad (7.96)$$

$$i_6 = V_1 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_{N1}}{R_4} - \frac{V_{N3}}{R_5} \quad (7.97)$$

Por ejemplo, supongamos $V_1 = 10V$, $V_2 = 15V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = R_4 = 25\Omega$, $R_5 = 50\Omega$. En tal caso resultan

$$F(R) = 0,4625 \Omega^{-1} \quad (7.98)$$

$$V_{N1} = 0,3243 V \quad (7.99)$$

$$V_{N3} = -8,46 V \quad (7.100)$$

y en consecuencia

$$i_1 = 0,0324 A \equiv 32,4 mA \quad (7.101)$$

$$i_2 = 423 mA \quad (7.102)$$

$$i_3 = 248,6 mA \quad (7.103)$$

$$i_4 = -387 \text{ mA} \quad (7.104)$$

$$i_5 = 369,2 \text{ mA} \quad (7.105)$$

$$i_6 = 417,8 \text{ mA} \quad (7.106)$$

Obsérvese que la corriente i_4 resulta negativa. Significa que por esa resistencia circula ese valor de corriente pero en sentido inverso al que habíamos fijado, esto es, va del nodo 2 al nodo 1.

7.8 – Potencia

Regresemos por un momento a la expresión (7.41), en la que planteamos la ley de Ohm como un equivalente eléctrico de un problema mecánico

$$F - \zeta \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \rightarrow V \\ \zeta \rightarrow R \\ x \rightarrow q \end{array} \right\} \rightarrow V - R \frac{dq}{dt} = 0 \quad (7.107)$$

En la expresión (7.107) hicimos explícita la conversión de variables. Ahora bien, una propiedad casi inmediata de esta clase de isomorfismos es que las soluciones de una ecuación (por caso, la mecánica) deben ser las soluciones de la otra (por caso, la eléctrica). Y todavía más, parece razonable que la equivalencia se extienda al nivel energético, porque al cabo la potencia mecánica se expresa en términos de las mismas variables que se transforman en la equivalencia mecánico-eléctrica. Obsérvese que la potencia mecánica es por definición

El trabajo de transporte de cargas por un circuito eléctrico lo hacen las baterías. La potencia eléctrica es una medida de la cantidad de trabajo que cada fuente entrega en la unidad de tiempo.

$$P = F \frac{dx}{dt} \quad (7.108)$$

de manera tal que, términos de la equivalencia mecánico - eléctrica que planteamos en la expresión (7.96), la potencia eléctrica se escribe como

$$P = V \frac{dq}{dt} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad (7.109)$$

Obsérvese que al mismo resultado debe arribarse si partimos desde la formulación energética en términos de la fuerza eléctrica, porque son problemas equivalentes. Por lo demás, el trabajo para transportar las cargas en contra de la resistencia eléctrica se pierde

en forma de calor, de manera tal que la identidad (7.109) representa formalmente además el calor que por segundo se disipa (en joule) en un circuito cerrado circulado por una corriente eléctrica i .

Ejemplo 7.7: Calculemos la energía que por unidad de tiempo se disipa en forma de calor en los resistores del ejemplo 7.5. De acuerdo a los valores de corriente en cada resistor y la expresión (7.109), llamando P_R a la potencia que disipa una resistencia, resultan

$$P_{R1} = R_1 i_1^2 = 640 \text{ W} \quad (7.110)$$

$$P_{R2} = R_2 i_2^2 = 40 \text{ W} \quad (7.111)$$

$$P_{R3} = R_3 i_3^2 = 720 \text{ W} \quad (7.112)$$

y la potencia total disipada resulta

$$P = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 1.400 \text{ W} \quad (7.113)$$

Para hacernos una idea de esta potencia, recordemos que 1.400 W representan 1.400 J por cada segundo. Teniendo en mente que el equivalente mecánico del calor es $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ resulta que la potencia disipada en el circuito representa $334,92 \text{ cal/seg}$. De acuerdo a lo discutido en el capítulo 1, esta cantidad de calor cedida es suficiente para llevar $334,92$ gramos de agua (algo así como 335 cm^3) de $19,5 \text{ }^\circ\text{C}$ a $20,5 \text{ }^\circ\text{C}$ en un tiempo de un segundo. Ahora bien, la potencia disipada en las resistencias debe ser suministrada por las baterías, porque al cabo son las baterías las que realizan el trabajo de transporte de cargas. Por la batería V_1 circula la corriente i_1 , en tanto que por la fuente V_2 circula i_2 (véase el circuito de la figura 7.15: ambas corrientes circulan en el sentido de la subida de potencial) de manera tal que si llamamos P_F a la potencia entregada por las fuentes resulta de manera inmediata

$$P_{F1} = V_1 I_1 = 100 \text{ V } 8 \text{ A} = 800 \text{ W} \quad (7.114)$$

$$P_{F2} = V_2 I_2 = 100 \text{ V } 6 \text{ A} = 600 \text{ W} \quad (7.115)$$

y la suma de las potencias entregadas por las fuentes del ejemplo es precisamente 1.400 W , como era de esperar.

Ejemplo 7.8: En el circuito de la figura 7.18, se sabe que la resistencia R_1 disipa una potencia de $4W$. Sabiendo que el voltímetro marca $10V$, y que el valor de la j -ésima resistencia es de $100 j\Omega$, calculemos el valor de corriente que indica el amperímetro y el valor de la potencia que disipa la resistencia R_4 .

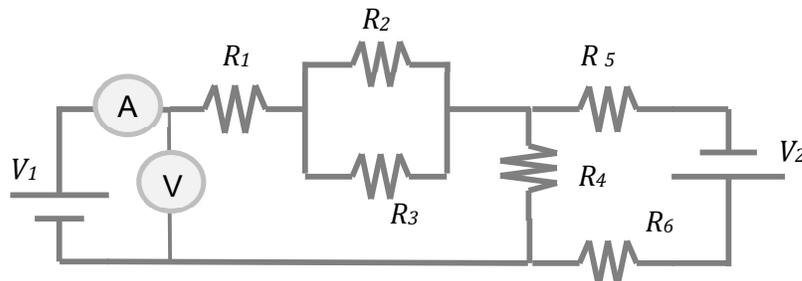


Fig. 7.18: arreglo circuital del ejemplo 7.8. Los elementos marcados con A y V corresponden a un amperímetro y a un voltímetro, respectivamente.

Ante todo, digamos que un amperímetro, como su nombre lo indica, es un instrumento que se utiliza para medir intensidades de corriente. Dado que dos elementos en serie son circulados por la misma corriente, para medir la corriente que circula por un elemento se lo conecta en serie con este. Pero todo amperímetro posee una resistencia interna que se procura sea lo más pequeña posible (idealmente es nula) de manera tal de no cambiar el valor de la resistencia de la rama a la que se lo conecta. El amperímetro (ideal) de la figura 7.18 indica que por la resistencia R_1 circula una corriente de $0,2A$.

Por otro lado, un voltímetro es un dispositivo que se emplea para medir diferencias de potencial (tensiones). Dado que dos elementos en paralelo están al mismo potencial, el voltímetro se conecta en paralelo. Pero para evitar que derive corriente y, en consecuencia, modifique la diferencia de potencial a que se halla el elemento que se mide, se procura que su resistencia sea muy alta (idealmente infinita). El voltímetro (ideal) de la figura 7.18 indica que la fuente V_1 es de $10V$.

Dicho esto, calculemos primero la corriente que circula por la resistencia R_1 empleando la expresión (7.109) en la forma

$$i_{R1} = \sqrt{\frac{P_{R1}}{R_1}} = \sqrt{\frac{4 W}{100 \Omega}} = 0,2 A \quad (7.116)$$

donde i_{R1} designa el valor de la intensidad de corriente que circula por la resistencia $R_1 = 100 \Omega$. Esta es precisamente la lectura del amperímetro, y es también la intensidad de corriente que circula por el paralelo entre R_2 y R_3 , pero no es la corriente que circula ni por R_2 ni por R_3 . Reemplacemos las resistencias R_2 y R_3 por su equivalente $R_{23} = R_2 // R_3$, es decir

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{200\Omega \times 300\Omega}{500\Omega} = 120\Omega \quad (7.117)$$

de manera tal que resulte un circuito equivalente como el de la figura 7.19, en el que hemos introducido directamente la resistencia equivalente R_{123} que resulta de la conexión en serie de R_1 con el paralelo R_{23} , esto es

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 100\Omega + 120\Omega = 220\Omega \quad (7.118)$$

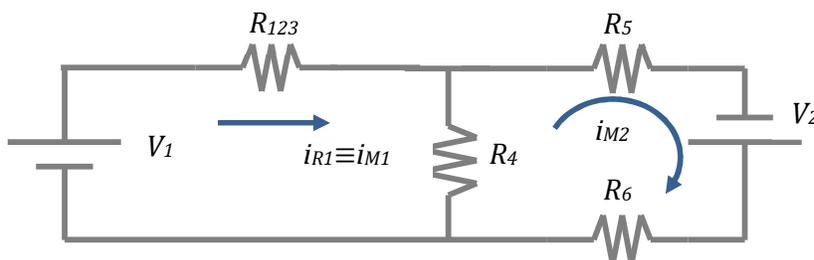


Fig. 7.19: circuito equivalente al de la figura 7.18 en el que R_{123} es la resistencia equivalente entre R_1 , R_2 y R_3 . También se indican las corrientes de malla. Obsérvese que la corriente i_{R1} , en este caso, es una de ellas.

Completaremos el ejemplo usando el método de mallas. Parece evidente que hay sólo dos mallas independientes. Si tomamos como mallas independientes las que se conectan a través de la resistencia R_4 , como hemos indicado en la figura 7.19, tendremos que plantear el problema para dos corrientes. Una de ellas es la corriente i_{M1} que, siendo que circula por R_{123} , es la corriente de la malla que contiene a R_1 , R_2 y R_3 . La otra está indicada como i_{M2} en la figura 7.19. Con estas consideraciones resultan las ecuaciones

$$i_{M1}(R_{123} + R_4) - i_{M2}R_4 = V_1 \quad (7.119)$$

$$-i_{M1}R_4 + i_{M2}(R_4 + R_5 + R_6) = V_2 \quad (7.120)$$

Obsérvese que las dos incógnitas que admite el sistema de ecuaciones (7.119) - (7.120) son el valor de la corriente i_{M2} y la tensión V_2 . Resolviendo la ecuación (7.119) se obtiene de manera casi inmediata el valor $i_{M2} = 0,285\text{ A}$. Obsérvese ahora que la corriente que circula por la resistencia R_4 es

$$i_{R4} = i_{M1} - i_{M2} = 0,085\text{ A} \quad (7.121)$$

y, en consecuencia, la potencia que disipa esta resistencia vale

$$P_{R4} = R_4 i_{R4}^2 = 2,89 \text{ W} \tag{7.122}$$

Ejemplo 7.9: Sea el circuito del ejemplo 7.5 al que ahora le agregamos una fuente en serie con la resistencia R_2 , como mostramos en la figura 7.20. Calculemos la corriente por cada resistencia y la potencia entregada por el conjunto de todas las fuentes.

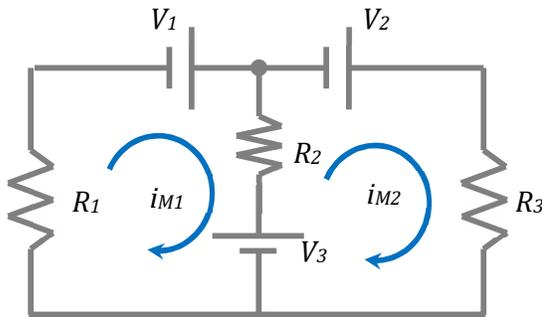


Fig. 7.20: circuito correspondiente al ejemplo 7.9. Debe notarse que la batería en serie con R_2 está en oposición a V_1 .

Aunque en realidad hay tres elecciones posibles de malla apelaremos al “primer golpe de vista” y elegiremos como mallas independientes las que se muestran en la figura 7.20. Obsérvese que las ecuaciones de malla (7.70) y (7.71) son absolutamente similares, salvo por el hecho de que debemos incluir ahora la batería V_3 . Para ello notemos que al recorrer la malla de la izquierda en el sentido elegido la batería aparece como una caída de potencial, en tanto que se ve como una subida de potencial recorriendo la malla derecha. En consecuencia resulta

$$i_{M1}(R_1 + R_2) - i_{M2}R_2 = V_1 - V_3 \tag{7.123}$$

$$-i_{M1}R_2 + i_{M2}(R_2 + R_3) = V_2 + V_3 \tag{7.124}$$

Adoptemos los mismos valores del ejemplo 7.5 para las resistencias involucradas ($R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20\Omega$), $10V$ para las fuentes V_1 y V_2 , y $15 V$ para la fuente V_3 . Es fácil ver que a partir de estos valores las corrientes de malla resultan $i_{M1} = 0,2A$, $i_{M2} = 0,9A$, de manera tal que las corrientes por cada resistencia resultan ser

$$i_{R1} = i_{M1} = 0,2A \tag{7.125}$$

$$i_{R2} = i_{M2} - i_{M1} = 0,7 \text{ A} \quad (\text{en el sentido de } i_{M2}) \tag{7.126}$$

$$i_{R3} = i_{M2} = 0,9A \tag{7.127}$$

Ya hemos dicho que los valores de las corrientes que atraviesan las resistencias no dependen de la elección de las mallas, aunque no deja de ser cierto que las corrientes de malla sí dependen de esa elección. Por ejemplo, para resolver este problema tomemos ahora las dos mallas de la figura 7.20

Parece evidente que las ecuaciones de malla serán ahora

$$i_{M2}(R_2 + R_3) + i_{M3}R_3 = V_2 + V_3 \tag{7.128}$$

$$i_{M2}R_3 + i_{M3}(R_1 + R_3) = V_1 + V_2 \tag{7.129}$$

de donde se obtienen de inmediato los valores $i_{M2} = 0,7A$ e $i_{M3} = 0,2A$. Las mallas elegidas son diferentes (por lo menos lo es una de ellas) y los valores de las corrientes de malla son diferentes, pero las intensidades de las corrientes que circulan por las resistencias no varían. En efecto, es fácil ver que en este caso es

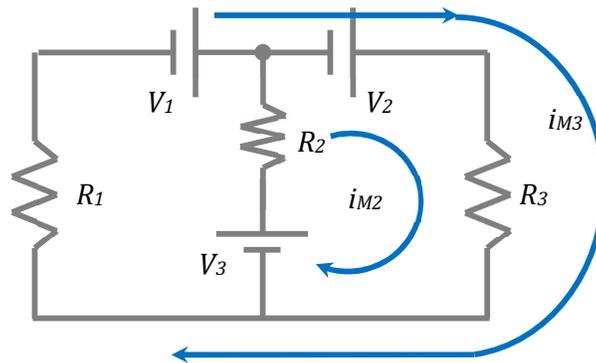


Fig. 7.21: Las corrientes de malla son ahora i_{M2} e i_{M3} , que circula por el contorno exterior del circuito.

$$i_{R1} = i_{M3} = 0,2A \tag{7.130}$$

$$i_{R2} = i_{M2} = 0,7 A \tag{7.131}$$

$$i_{R3} = i_{M2} + i_{M3} = 0,9A \tag{7.132}$$

Regresemos al cálculo de las potencias. La suma de las potencias disipadas en cada resistencia resulta por simple aplicación de la expresión (7.109) teniendo en cuenta los valores (7.130) – (7.132). De manera casi inmediata obtenemos

$$P_{R1} = R_1 i_{R1}^2 = 0,4 W \tag{7.133}$$

$$P_{R2} = R_2 i_{R2}^2 = 4,9 W \tag{7.134}$$

$$P_{R3} = R_3 i_{R3}^2 = 16,2 W \tag{7.135}$$

y su suma es $21,5W$. Esta es la potencia que en total entregan las tres fuentes del problema, que evaluamos a partir de la misma expresión (7.109) pero considerando las corrientes de las ramas en las que se halla cada batería. Resulta

$$P_{F1} = V_1 i_1 = 2 W \tag{7.136}$$

$$P_{F2} = V_2 i_3 = 9 \text{ W} \quad (7.137)$$

$$P_{F3} = V_3 i_2 = 10,5 \text{ W} \quad (7.138)$$

cuya suma, por supuesto, coincide con la potencia disipada por las resistencias. En todos estos ejemplos las baterías entregan potencia, pero este no debería tomarse como el caso general. En el ejemplo 7.11 modificaremos los valores de las fuentes para analizar la situación más general posible.

Ejemplo 7.10: Es casi evidente que los valores de las corrientes de malla dependen de las tensiones de las fuentes. Por caso, si en el ejemplo anterior hubiéramos tomado $V_3 = 20 \text{ V}$ en lugar de $V_3 = 15 \text{ V}$ resultaría inmediatamente $i_{M1} = 0 \text{ A}$ con la primera elección de mallas, o $i_{M3} = 0 \text{ A}$ con la segunda elección de mallas, pero esto no significa que no circule corriente por R_3 , pues de hecho en este caso sería $i_{R2} = i_{R3} = 1 \text{ A}$. Analicemos con un poco de detenimiento estos valores.

En principio los valores que indicamos son correctos. Para corroborarlo basta recalculer las expresiones (7.129) a (7.132) con $V_3 = 20 \text{ V}$. Ciertamente es que los valores obtenidos podrían parecer sospechosos, toda vez que no parece inmediato que por la malla derecha circule corriente mientras que por la malla izquierda no. La razón está en la diferencia de potencial entre los nodos del circuito, que hemos marcado como A y B en la figura 7.22. Circulando por cualquiera de las tres ramas, la diferencia de potencial $V_B - V_A$ debe ser la misma. Vayamos por cada rama en el sentido indicado de las corrientes, y dejando V_3 como una variable más del problema (poniendo los valores de resistencia en Ω y los potenciales en V , de manera que las corrientes resulten en A)

$$\text{Rama de } i_1: \quad V_B - 10i_1 + 10 = V_A \quad (7.139)$$

$$\text{Rama de } i_2: \quad V_B + V_3 - 10i_2 = V_A \quad (7.140)$$

$$\text{Rama de } i_3: \quad V_A + 10 - 20i_3 = V_B \quad (7.141)$$

Además, si postulamos que la carga se conserva, con las corrientes indicadas en la figura 7.22 debe ser

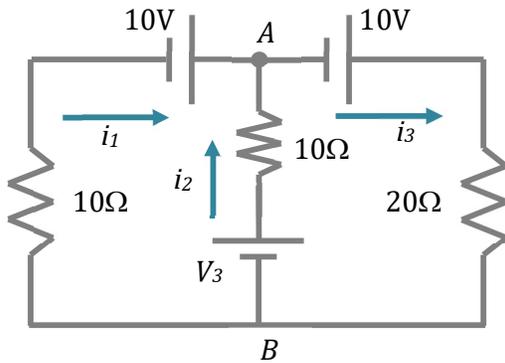


Fig. 7.22: se indican las corrientes de rama i_1 , i_2 e i_3 . Su suma debe ser nula para que la carga se conserve.

$$i_3 = i_1 + i_2 \quad (7.142)$$

Igualando la diferencia de potencial $V_B - V_A$ entre las expresiones (7.139) y (7.140) obtenemos

$$10i_1 - 10 = 10i_2 - V_3 \quad (7.143)$$

en tanto que entre las identidades (7.139) y (7.141), teniendo en cuenta la igualdad (7.142) resulta

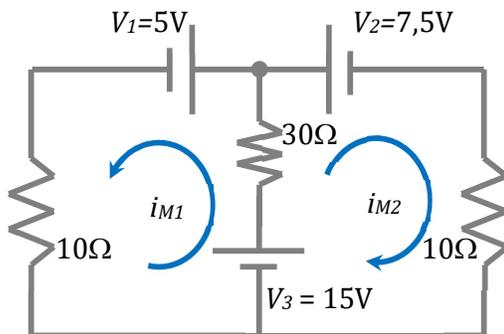
$$10i_1 - 10 = 10 - 20(i_1 + i_2) \quad (7.144)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (7.143) y (7.144) resulta el campo de valores de la corriente i_1 en términos de V_3

$$i_1 = \frac{2}{5} \left(2 - \frac{V_3}{10} \right) \quad (7.145)$$

Resulta casi inmediato que para $V_3 = 20 V$ la corriente se anula, en tanto que para $V_3 = 15 V$ se reobtiene su valor (7.130).

Ejemplo 7.11: Regresemos al circuito de la figura 7.22, en el que modificamos los valores de las resistencias y pilas e invertimos la polaridad de V_2 . Tomando las corrientes de malla como hemos indicado, es casi evidente que resultan las ecuaciones



$$40 i_{M1} + 30 i_{M2} = 10 \quad (7.146)$$

$$30 i_{M1} + 40 i_{M2} = 7,5 \quad (7.147)$$

Resolviendo estas ecuaciones, de manera casi inmediata resultan los valores

$$i_{M1} = 0,25A \quad (7.148)$$

$$i_{M2} = 0 \quad (7.149)$$

Fig. 7.23: circuito correspondiente al ejemplo 7.11. Debe notarse que ahora la batería en serie con R_2 está en oposición tanto con V_1 como con V_2 .

Ahora bien, que no circule corriente por la malla derecha significa que no circula corriente por la pila de potencial V_2 , esto es, ni entrega ni recibe potencia alguna. Siendo positiva, la corriente de malla i_{M1} es la que circula por las baterías de potenciales V_1 y V_3 , de manera tal que una entrega potencia y la otra la recibe, porque en una circula en el sentido de la subida de potencial y en la otra en contra. De hecho,

$$P_{R1} = R_1 i_{R1}^2 = R_1 i_{M1}^2 = 0,625 \text{ W} \quad (7.150)$$

$$P_{R2} = R_2 i_{R2}^2 = R_2 i_{M1}^2 = 1,875 \text{ W} \quad (7.151)$$

y las potencias intercambiadas por las fuentes valen

$$P_{F1} = V_1 i_{M1} = -1,25 \text{ W} \quad (7.152)$$

$$P_{F2} = 0 \quad (7.153)$$

$$P_{F3} = V_3 i_{M1} = 3,75 \text{ W} \quad (7.154)$$

y el balance de potencia resulta nulo, como era de esperar.

7.9 – Circuito RC en corriente continua

En el capítulo 5 tratamos con arreglos capacitivos en los que la pila sólo jugaba el rol de fuente de diferencia de potencial. De hecho lo es, pero es importante notar que en los casos reales los alambres y las baterías poseen una cierta resistencia eléctrica intrínseca que obliga a pensar en circuitos o arreglos ligeramente más sofisticados, que contengan simultáneamente pilas, resistencias y capacitores, como el de la figura 7.24, en el que K representa un interruptor. Un tal arreglo se denomina circuito RC serie. Analicemos su comportamiento.

Si llamamos V_R y V_C a las caídas de potencial en la resistencia y el capacitor, respectivamente, la condición de conservación de la energía (o su equivalente circuital, la segunda ley de Kirchhoff) se escribe

$$V_R + V_C = V \quad (7.155)$$

que en términos de la ley de Ohm y de la expresión (5.6), que establece la relación entre la carga y la diferencia de potencial entre las placas de un capacitor, podemos poner como

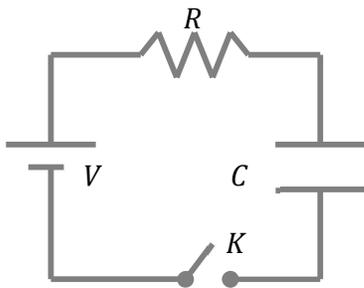


Fig. 7.24: circuito RC serie. La llave K permite desconectar la batería.

$$iR + \frac{q}{C} = V \quad (7.156)$$

y, a partir de la relación (7.15) entre la corriente y la carga, podemos escribir en la forma

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad (7.157)$$

La última es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, a coeficientes constantes y de primer orden en la variable $q(t)$, que nos permite calcular la carga presente en el circuito en cada instante, esto es, la forma en que va variando la carga en el tiempo una vez que se cierra la llave K y se conecta la fuente. Su solución general, como es fácil corroborar por reemplazo directo, es de la forma

$$q(t) = A_1 e^{-t/RC} + CV \quad (7.158)$$

donde A_1 es una constante que depende de las condiciones iniciales del circuito, esto es, de la particular configuración del sistema en el instante en que se cierra la llave. Por ejemplo, no es lo mismo que el capacitor hubiera estado cargado o descargado. En cualquier caso, la corriente se evalúa de manera inmediata como

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{A_1}{RC} e^{-t/RC} \quad (7.159)$$

Fijemos las condiciones iniciales de manera tal de dar un valor a la constante A_1 . De manera absolutamente general podemos pensar que la carga inicial del capacitor, esto es, el valor de la carga cuando se cierra la llave K , digamos $q(t = 0)$, vale q_0 , un valor que eventualmente podría ser nulo. Por simple reemplazo en la ecuación (7.158) resulta

$$A_1 = q_0 - CV \quad (7.160)$$

y las expresiones para la carga y la corriente en función del tiempo se escriben de inmediato como

$$q(t) = (q_0 - CV)e^{-t/RC} + CV \quad (7.161)$$

$$i(t) = \left(\frac{V}{R} - \frac{q_0}{RC} \right) e^{-t/RC} \quad (7.162)$$

En la figura 7.25 graficamos las expresiones temporales (7.161) y (7.162). Obsérvese que cuando el capacitor se halla inicialmente descargado, al conectar la fuente se establece una corriente cuyo valor es el que se corresponde con la ley de Ohm, $i = V / R$. En el

instante $t = 0$ la carga del capacitor es nula, pero a medida que el tiempo transcurre se va cargando, acumulando carga negativa en la placa conectada al borne negativo de la batería y carga positiva en el opuesto. De esta manera, a medida que el tiempo transcurre se va generando una diferencia de potencial entre sus placas, opuesta a la de la batería, que en el límite $t \rightarrow \infty$ alcanza el valor de la fuente. En consecuencia, la corriente con el tiempo disminuye y se extingue asintóticamente.

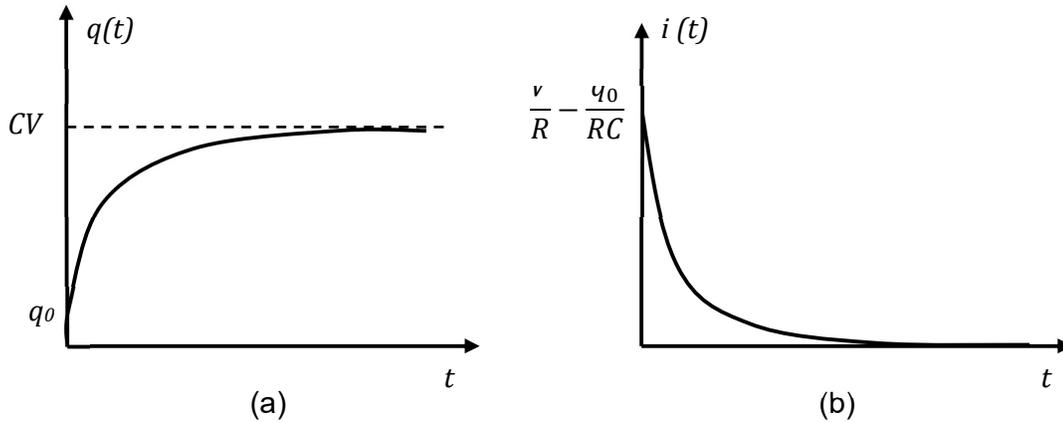


Fig. 7.25: carga del capacitor en función del tiempo (gráfico a) y corriente en función del tiempo (gráfico b) en un circuito serie RC con el capacitor inicialmente cargado con carga q_0 .

En términos prácticos, la corriente circula en el circuito sólo durante algún tiempo característico, que se conoce como *régimen transitorio*. En *régimen permanente* (o *estacionario*) la corriente que circula es nula, de manera tal que para la corriente continua un capacitor en régimen estacionario se comporta como una llave abierta (porque inhibe el paso de corriente). Obsérvese que el producto RC tiene unidades de tiempo (porque el exponente de una función trascendente como la exponencial debe ser adimensional) de manera tal que se define el *tiempo característico* de un circuito como el que estamos analizando como el factor

$$\tau = RC \tag{7.163}$$

Mencionemos que τ , conocida como *constante temporal del circuito*, representa el tiempo en el cual la carga en las placas del capacitor alcanza el 67% de su valor final (o el tiempo en que la corriente que se establece decrece al 37% de su valor inicial). Suele establecerse como norma que el tiempo que le lleva a un circuito RC serie alcanzar su régimen estacionario es $t = 5\tau$ (tiempo en el que la corriente decrece al 0,7% de su valor inicial).

En la figura 7.26 esquematizamos un circuito RC paralelo. Su análisis, a partir de los resultados obtenidos líneas arriba, es inmediato. Para ello, notemos que a partir de la ley de conservación de la carga, la corriente que circula por la pila, i_{CIRC} , es la suma de las corrientes por cada rama, esto es, a partir de las ecuaciones (7.3) y (7.162)

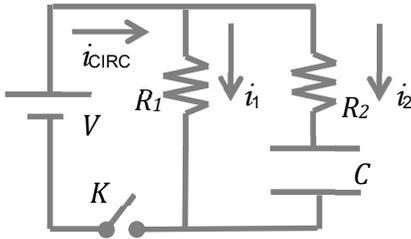


Fig. 7.26: circuito RC paralelo. Como en el caso anterior, la llave K permite desconectar la batería.

$$i_{CIRC} = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \left(\frac{V}{R_2} - \frac{q_0}{R_2 C} \right) e^{-t/R_2 C} \quad (7.164)$$

donde q_0 , como es usual, representa la carga inicial del capacitor. Naturalmente, una vez transcurrido el transitorio la corriente circuital es i_1 , pero como veremos en el capítulo 10, esto ya no es cierto si la tensión aplicada varía en el tiempo.

Resumen del capítulo

En el capítulo hemos tratado el flujo estacionario de cargas a través de conductores, al que llamamos corriente eléctrica, pensándolo formalmente desde un punto de vista macroscópico. Hemos visto que la misma dinámica del flujo impone una relación definida entre la intensidad de ese flujo, las características intrínsecas del material por donde ese flujo se desarrolla (que se resumen en lo que llamamos resistencia eléctrica) y el campo eléctrico externo que lo provoca. Esta relación concreta, definida en la ley de Ohm, es absolutamente similar a las que se hallan en el estudio del transporte de cualquier fluido o, como hemos visto en el capítulo 1, o el flujo de calor (nuevamente, no debe pensarse por esta analogía que el calor es un fluido mecánico).

La ley de Ohm es la relación fundamental que permite encarar los problemas de circuitos con baterías y resistencias eléctricas, y junto con las hipótesis de conservación de la carga y conservación de la energía (que habitualmente se denominan leyes de Kirchhoff) permite una elaboración rápida, contundente y efectiva de la gran mayoría de estos problemas.

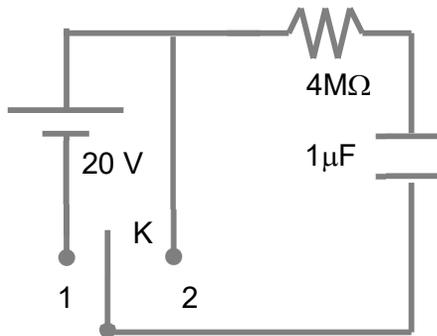
Hemos introducido la idea de los efectos puramente disipativos de una resistencia a través de un equivalente mecánico, porque al cabo la equivalencia entre todos los fenómenos de flujo, para ser completa, debe seguir valiendo a nivel energético. Obsérvese que así como un capacitor almacena energía (de origen eléctrico) una resistencia la disipa en forma de calor. Precisamente, una forma de pensar por qué una batería debe entregar potencia a un circuito eléctrico es comparando esa potencia con la disipada por la resistencia equivalente del circuito. Posiblemente esta idea nos ofrezca una nueva perspectiva para entender las ventajas del régimen superconductor, en el que, recordemos, la resistencia eléctrica de los materiales tiende a cero.

Complementos del capítulo

Capacitores parcialmente cargados

En la sección 7.6 hemos estudiado circuitos RC manteniendo la batería conectada hasta que se estableciera el régimen estacionario. Ahora queremos extender la idea de lo que representan las condiciones iniciales. Para ello, pensemos en el circuito de la figura 7.27, en el que inicialmente el capacitor se halla cargado con la cuarta parte de la carga que le es posible adquirir con la batería que se está utilizando. Se conecta la fuente (la llave en la posición 1) y tres segundos después se lleva el interruptor a la posición 2. Calculemos y grafiquemos la corriente que circula por la resistencia y la carga del capacitor como funciones del tiempo.

Si el capacitor está cargado a la cuarta parte de su valor máximo con la batería disponible, su carga inicial es



$$q_0 = \frac{1}{4} CV = 0,25 \times 10^{-6} F \times 20V = 5\mu C \quad (7.165)$$

Obsérvese que la constante del circuito vale

$$\tau = RC = 4 \times 10^6 \Omega \times 10^{-6} F = 4 \text{ seg} \quad (7.166)$$

La ecuación (7.158) para la carga del capacitor en este caso resulta

Fig. 7.27: Con la llave en la posición 1 la pila está conectada, en tanto que en la posición 2 sólo quedan conectados el capacitor y la resistencia.

$$q(t) = [A_1 e^{-t/4} + 2 \times 10^{-5}] C \quad (7.167)$$

El valor de la constante A_1 queda fijado por la condición inicial $q(t = 0) \equiv q_0$, de manera tal que resulta

$$A_1 = q_0 - CV = -1,5 \times 10^{-5} C \quad (7.168)$$

y la expresión de la carga del capacitor en función del tiempo durante los primeros tres segundos (hasta conmutar la llave) se expresa como

$$q(t) = [-1,5 e^{-t/4} + 2] 10^{-5} C \quad (7.169)$$

Mientras la llave permanece en la posición 1 la corriente que circula a través de la resistencia se expresa a partir de (7.148) como

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 3,75 \times 10^{-6} e^{-t/4} A \quad (t < 3\text{seg}) \quad (7.170)$$

Analicemos ahora el régimen luego de conmutar la llave. La ecuación diferencial que resulta para la carga es ahora ligeramente diferente porque no hay ninguna batería conectada al circuito. Luego, si llamamos $q(t \geq 3\text{seg})$ a la carga en este régimen y denotamos con A_2 la nueva constante, con $V = 0$ en la ecuación (7.147) resulta

$$q(t \geq 3\text{seg}) = A_2 e^{-t/4} \text{ C} \quad (7.171)$$

Obsérvese que la carga del capacitor en el instante $t = 3 \text{ seg}$, que obtenemos por cálculo simple a partir de la expresión (7.169), es el valor a tener en cuenta como condición inicial para $t > 3\text{seg}$. Si denotamos por q' a este valor, resulta

$$q' = q(t = 3\text{seg}) = 1,29 \times 10^{-5} \text{ C} \quad (7.172)$$

de manera tal que el valor de A_2 será

$$A_2 = \frac{q'}{e^{-3/4}} = 2,73 \times 10^{-5} \text{ C} \quad (7.173)$$

y la expresión de la carga en función del tiempo se reduce a

$$q(t \geq 3\text{seg}) = 2,73 \times 10^{-5} e^{-t/4} \text{ C} \quad (7.174)$$

Por su parte, la expresión de la corriente que circula por el resistor, a partir de la ecuación general (7.162), con $V = 0$, es de la forma

$$i(t \geq 3\text{seg}) = -\frac{A_2}{RC} e^{-t/4} \text{ A} = -6,83 \times 10^{-6} e^{-t/4} \text{ A} \quad (7.175)$$

Es necesario prestar atención al valor de la corriente para $t > 3\text{seg}$: no sólo creció en valor absoluto respecto de su valor para $t = 3\text{seg}$, sino que además cambió su sentido de circulación. Este resultado, con todo, no tendría que sorprendernos, porque al cabo la corriente a través de la resistencia se extingue a la par que aumenta la carga en el capacitor. Cuando se conmuta la llave, la corriente se alimenta de la descarga del capacitor a través del resistor, de manera tal que depende de la carga neta que el condensador, que hace las veces de batería, pudo haber acumulado. Pero como el capacitor se carga con la polaridad opuesta a la pila el sentido de circulación habrá de invertirse. En la figura 7.28 se grafican las funciones $q(t)$ e $i(t)$ para este ejemplo.

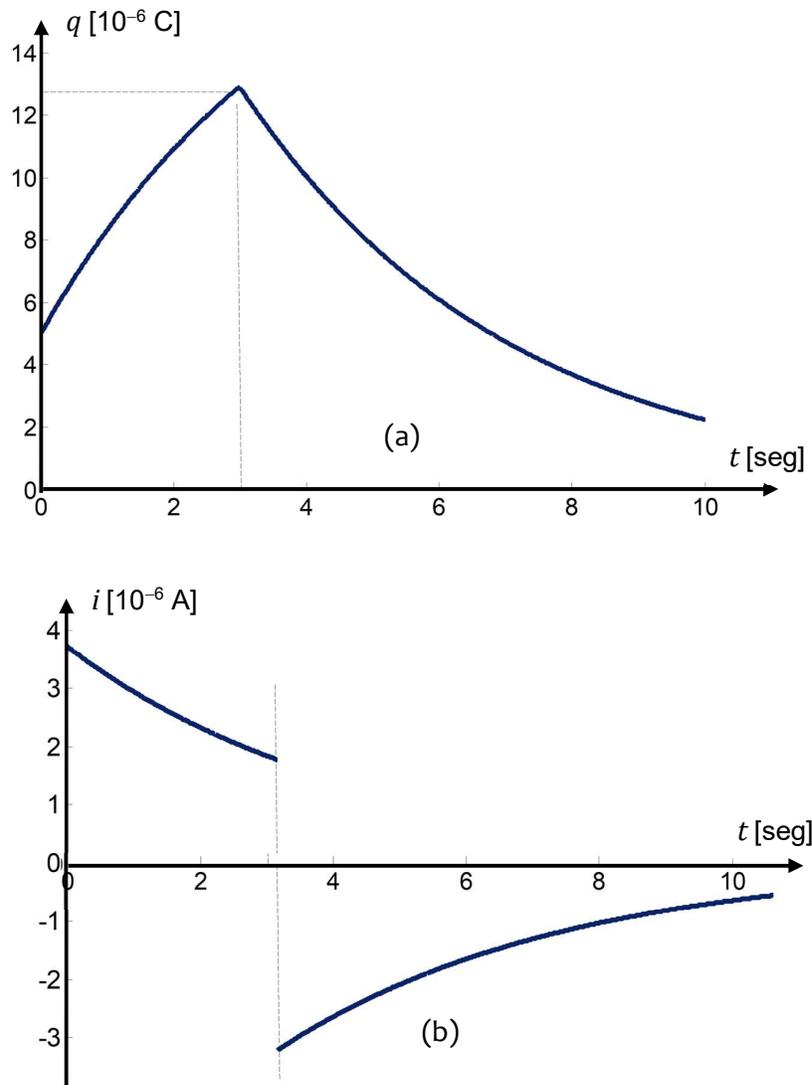
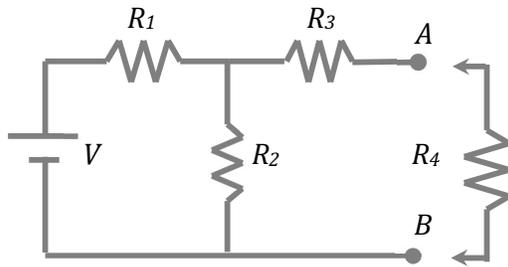


Fig. 7.28: (a) carga $q(t)$ y (b) corriente $i(t)$, de un capacitor inicialmente cargado. Obsérvese que durante los primeros 3 seg el capacitor sigue adquiriendo carga, y que a partir de $t=3$ seg comienza a descargarse. La razón del pico en la figura (a) es que el capacitor no estaba cargado por completo.

Teoremas de Thévenin y Norton

Supongamos que deseamos calcular la potencia que disipa la resistencia R_4 del circuito cuando se la conecta entre los terminales A y B del circuito de la figura 7.29. El



cálculo es considerablemente sencillo, y de hecho lo hicimos en reiteradas oportunidades a lo largo de este capítulo. En particular, debemos conocer la diferencia de potencial V_{AB} , esto es

$$V_{AB} = V_{R4} = i_{R4}R_4 \tag{7.176}$$

Fig. 7.29: calcular la potencia que disipa la resistencia R_4 conectada entre los terminales A y B es muy sencillo, pero cada vez que se cambia la resistencia hay que rehacer los cálculos. En estos casos, encontrar un equivalente circuital es de gran utilidad.

donde, como es habitual, i_{R4} y V_{R4} se refieren a la intensidad de corriente y a la caída de potencial en la resistencia R_4 . Recorriendo el circuito, es fácil ver que resulta

$$V_{AB} = \frac{V - \frac{V}{R_{eq}} R_1}{R_3 + R_4} R_4 \tag{7.177}$$

donde

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \tag{7.178}$$

es la resistencia equivalente del sistema. Luego, la diferencia de potencial sobre la resistencia R_4 vale

$$V_{AB} = \frac{VR_4}{R_3 + R_4} \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} \right] \tag{7.179}$$

Si ahora cambiamos la resistencia R_4 (a la que se denomina *resistencia de carga*) y queremos calcular la potencia que disipa la nueva resistencia debemos realizar nuevamente todo el cálculo (7.179). Una forma alternativa, y más sencilla, es encontrar un equivalente circuital visto desde los terminales A y B .

El teorema de Thévenin (Léon Charles Thévenin, 1883) postula que todo circuito lineal activo con terminales de salida (como los terminales A y B de la figura 7.29) puede ser reemplazado por una fuente de tensión de valor V_{TH} y una resistencia en serie R_{TH} , como mostramos en la figura 7.30. El valor de la fuente equivalente es el valor de la tensión medida a circuito abierto (V_{AB}) y la resistencia equivalente es la que se ve desde los terminales cortocircuitando las fuentes de tensión.

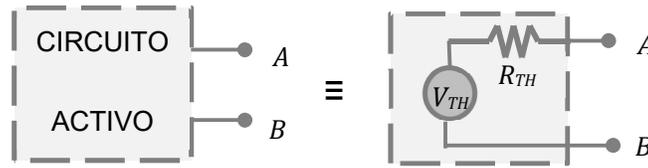


Fig. 7.30: todo circuito lineal activo puede reemplazarse por una fuente de tensión y una resistencia equivalente en serie, visto desde sus terminales de salida.

Regresemos a nuestro ejemplo. Al cortocircuitar la fuente, la resistencia R_1 queda en paralelo con R_2 . Vista desde los terminales de salida, la resistencia equivalente queda como

$$R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{7.180}$$

Por lo demás, la tensión equivalente es la tensión sobre la resistencia R_2 (porque a circuito abierto por R_3 no circula corriente), de manera tal que es

$$V_{TH} = i_{CIRC} R_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} R_2 \tag{7.181}$$

A modo de ejemplo, tomemos $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $V = 5V$. A partir de las expresiones (7.179) y (7.181) es fácil ver que en ambos casos resulta $V_{R4} \equiv V_{AB} \equiv V_{TH} = 1V$.

El teorema de Norton (Edward Lawry Norton, 1926) establece que todo circuito lineal activo con terminales de salida (como los terminales A y B de la figura 7.29) puede ser reemplazado por una fuente de corriente de valor I_N y una resistencia en paralelo R_N , como mostramos en la figura 7.31.

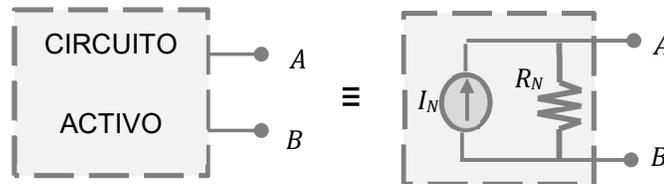


Fig. 7.31: todo circuito lineal activo puede reemplazarse por una fuente de corriente y una resistencia equivalente en paralelo, visto desde sus terminales de salida.

El valor de la corriente de Norton es la que se mide cortocircuitando los terminales de salida AB , en tanto que la resistencia equivalente se obtiene cortocircuitando las fuentes independientes.

Para que los equivalentes de Thévenin y Norton sean formalmente iguales, la corriente generada por la fuente de Norton debe tener el mismo sentido que la que circula por la resistencia R_{TH} . Luego, las igualdades

$$R_{TH} = R_N \tag{7.182}$$

$$V_{TH} = I_N R_N \tag{7.183}$$

se sostienen idénticamente. Por ejemplo, para los valores que propusimos debajo de la expresión (7.181) es lo mismo reemplazar el circuito de la figura 7.29 por su equivalente Thévenin (ecuaciones (7.180) y (7.181)) o por su equivalente Norton, en el cual resultan

$$R_N = 10\Omega \tag{7.184}$$

$$I_N = 0,1 A \tag{7.185}$$

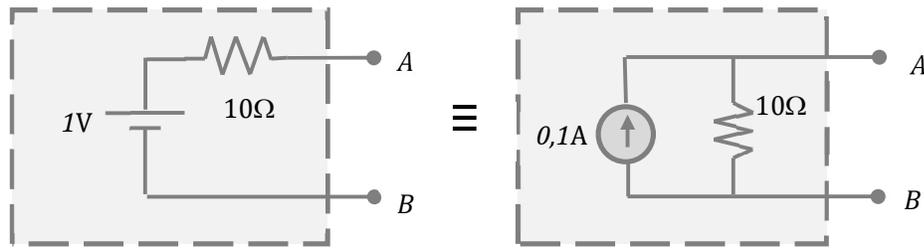


Fig. 7.32: equivalentes de Thévenin (a la izquierda) y Norton para un mismo circuito. Obsérvese que la tensión de salida V_{AB} es la misma en los dos circuitos.

Ejemplo 7.12: Calculemos el equivalente de Thévenin del puente de la figura 7.33 visto desde los terminales A y B que se indican.

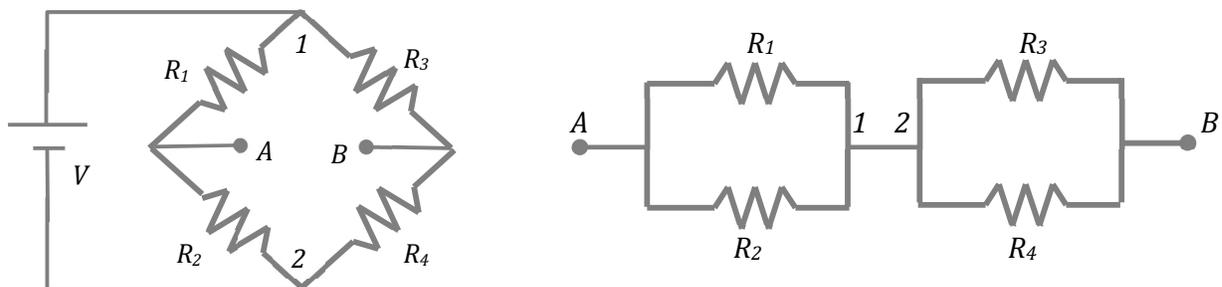


Fig. 7.33: a la izquierda se muestra el puente de resistencias, y a la derecha el circuito arreglado una vez que se cortocircuita la fuente. Los puntos 1 y 2 son de referencia.

Parece evidente que al cortocircuitar la fuente, las resistencias R_1 y R_2 quedan en paralelo, como así también lo hacen R_3 y R_4 . A su vez, los paralelos quedan en serie. Si adoptamos los valores $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $V = 10V$, la resistencia equivalente de Thévenin es

$$R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10\Omega \quad (7.186)$$

Por su lado, la tensión equivalente será

$$V_{TH} = V_{AB} = \frac{V}{R_1 + R_2} R_2 - \frac{V}{R_3 + R_4} R_4 = 2V \quad (7.187)$$

En la figura 7.34 mostramos los equivalentes de Thévenin y de Norton (cuyos valores obtuvimos a partir de las ecuaciones (7.182) y (7.183)) del circuito de la figura 7.33. Obsérvese que la polaridad de la batería es la que corresponde al caso que hemos tratado, pero de haber adoptado los valores de las resistencias intercambiados, esto es, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, la diferencia de potencial hubiera sido $V_{TH} = -2V$, de manera tal que la fuente de corriente del equivalente de Norton debería tener invertido el sentido.

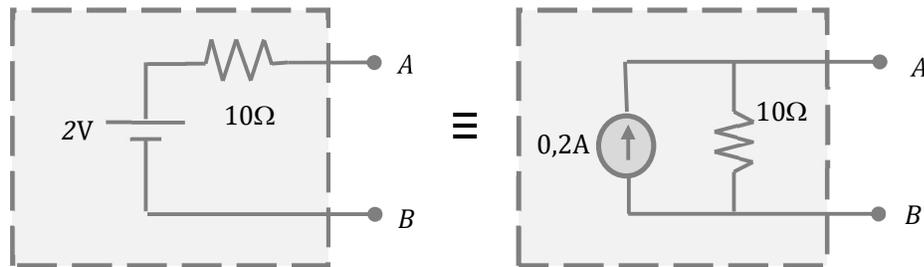


Fig. 7.34: equivalentes de Thévenin (a la izquierda) y Norton para el circuito del ejemplo 7.12. Si las resistencias R_1 R_2 intercambiaran valores con R_3 R_4 , la polaridad de la fuente de corriente debería invertirse.

Puente de Wheatstone

La expresión (7.187) puede ser interpretada de una manera alternativa: siempre será posible hallar una combinación de resistencias tal que la diferencia de potencial entre los terminales A y B sea nula. En tal caso debería cumplirse

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \equiv \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \frac{1}{\frac{R_3}{R_4} + 1} \quad (7.188)$$

y de manera casi evidente esto es posible sólo si se verifica

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (7.189)$$

Supongamos ahora que la resistencia R_2 fuese de valor desconocido. Podríamos medirla balanceando el puente, esto es, haciendo que una de las otras resistencias fuera variable, por ejemplo R_4 (señalado con una flecha atravesada en el símbolo circuital) y conectando un dispositivo para medir corriente entre los terminales A y B de manera tal de asegurarnos que efectivamente la diferencia de potencial V_{AB} fuera nula. Este es el principio de funcionamiento del puente de Wheatstone que mostramos en el gráfico 7.35.

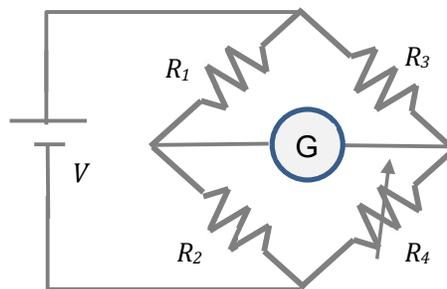


Fig. 7.35: puente de Wheatstone. El dispositivo marcado con G es un galvanómetro, utilizado para medir pequeñas corrientes. Una vez que el puente se estabiliza, variando el valor de la resistencia R_4 , el galvanómetro no marca nada.

Es casi evidente que resulta

$$R_2 = \frac{R_1}{R_3} R_4 \quad (7.190)$$

y si por comodidad elegimos $R_1 = R_3$ (al cabo sus valores son irrelevantes, como lo es el valor de la fuente) resulta que, una vez balanceado el puente, las resistencias R_2 y R_4 son iguales.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: En los extremos de un alambre de acero ($\rho=11,8 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) de 2 cm^2 de sección y $0,5 \text{ m}$ de longitud se aplica una diferencia de potencial de 10V . Sabiendo que la carga del electrón vale $e= 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$, calcule la cantidad de electrones que atraviesan la superficie transversal del conductor en un lapso de 1 minuto.

Ejercicio 2: En la expresión (7.8) introdujimos la densidad de corriente a través de la expresión

$$j = \frac{Q}{S\langle\tau\rangle} = \frac{n_e e}{\langle\tau\rangle} \Delta L$$

A la cantidad $\Delta L/\langle\tau\rangle$ se la conoce como velocidad de arrastre, $\langle v \rangle$. Calcule la velocidad de arrastre de las cargas que circulan por un alambre de cobre ($\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) de 1 mm^2 de sección y 38 m de largo cuando se le aplica una diferencia de potencial de 6 V sabiendo que la densidad de portadores es $n_{\text{Cu}}=1,1 \times 10^{23}/\text{cm}^3$.

Ejercicio 3: Se introduce un calentador eléctrico sumergible en un termo que contiene 1 litro de agua a temperatura ambiente (20°C) y se lo conecta a 220V . En 2 minutos el agua llega a 80°C . Calcule la potencia del calentador suponiendo que el 5% de la misma se pierde por la parte abierta del termo.

Ejercicio 4: Las lámparas incandescentes de 12 V que generalmente usan los mecánicos se conectan a la batería del auto. Discuta qué le pasa a esa lámpara si usted la conecta a la línea domiciliaria (220 V).

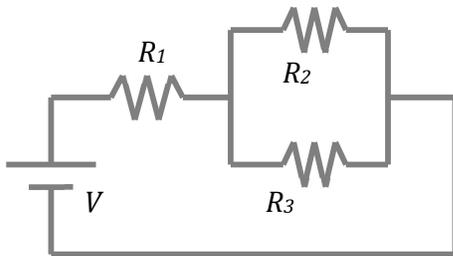
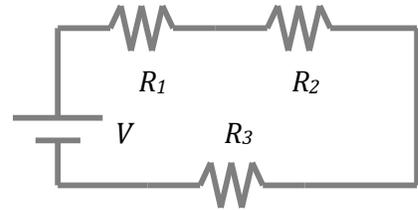
Calcule la relación L/S entre la longitud y la sección del filamento de una lámpara de tungsteno ($\rho_{\text{W}}=5,25 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) que opera a 12 V y disipa 60W .

Ejercicio 5: Se fabrica un conductor cilíndrico con alma de cobre ($\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) forrado en níquel ($\rho_{\text{Ni}} = 7,2 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$). Si el radio del conductor interno es de 1 mm y el externo tiene $0,2 \text{ mm}$ de espesor calcule la resistencia del alambre por cada metro de longitud. Si los valores de resistividad que se han dado son a 20°C calcule el valor de esa resistencia a 80°C .

Ejercicio 6: En su casa usted tiene conectados al mismo tiempo diversos aparatos eléctricos, cada uno con una determinada resistencia eléctrica interna ¿Están conectados en serie o están conectados en paralelo? La plancha, por ejemplo, “consume más” que el televisor ¿consume más corriente o más tensión?

Ejercicio 7: Usted conecta una plancha y una radio eléctrica en serie. Uno de los dos aparatos no habrá de funcionar. Justifique cuál de los dos es.

Ejercicio 8: En el circuito de la figura la tensión aplicada es de 58 V. Calcule el valor de la resistencia equivalente, la corriente que circula por cada resistencia, la caída de potencial en cada una de ellas y la potencia disipada en cada resistencia. Compare la potencia entregada por la fuente con la disipada por la resistencia equivalente. Estime la cantidad de electrones que la batería “bombee” por segundo. Asuma $R_1=4\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=15\Omega$



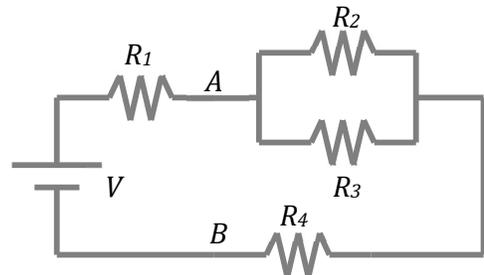
Ejercicio 9: La misma batería del ejercicio anterior y las mismas resistencias se redistribuyen como indica la figura. Calcule nuevamente las cantidades que se piden en el ejercicio 8. Discuta si existe algún valor de resistencia que pueda agregarse al circuito de manera tal que la potencia disipada sea igual a la del ejercicio anterior.

Ejercicio 10: En el circuito de la figura, la resistencia R_3 disipa 10 W. Calcule

- el valor de R_1 ;
- la potencia total que disipa el circuito;
- la diferencia de potencial V_{AB}

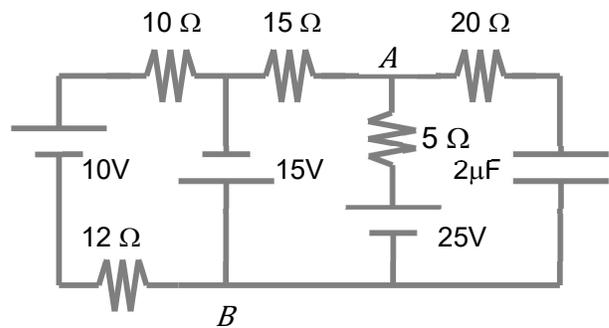
$$V = 133 \text{ V} \quad R_2 = 750 \Omega$$

$$R_3 = 250 \Omega \quad R_4 = 100 \Omega$$



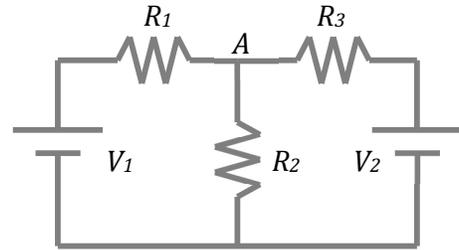
Ejercicio 11: Sea el circuito de la figura, en el que el capacitor está inicialmente descargado. Calcule:

- la potencia disipada por la resistencia de 5Ω en régimen estacionario;
- la diferencia de potencial entre los puntos A y B marcados en el circuito (en régimen estacionario).
- la potencia disipada por el circuito en régimen estacionario; compárela con la potencia entregada por las fuentes;
- la carga del capacitor en régimen estacionario.



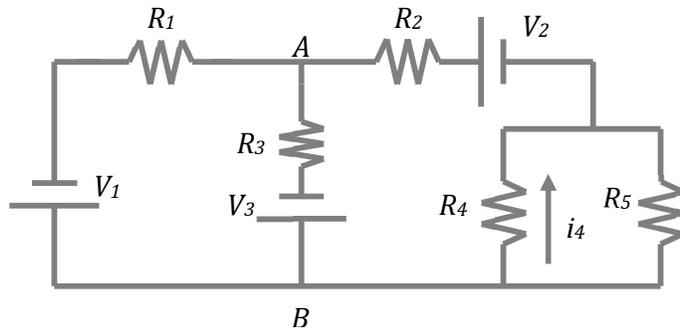
Ejercicio 12: La corriente que entra al nodo A del circuito de la figura vale $I=0,59A$. Calcule:

- a) el valor de la corriente que circula por la resistencia R_2 ;
- b) el valor de la fuente V_2 ;
- c) la potencia disipada por la resistencia R_3 .



Ejercicio 13: Se sabe que la corriente i_4 en el circuito de la figura vale $0,2 A$ y que la diferencia de potencial V_{AB} vale $15V$. Calcule:

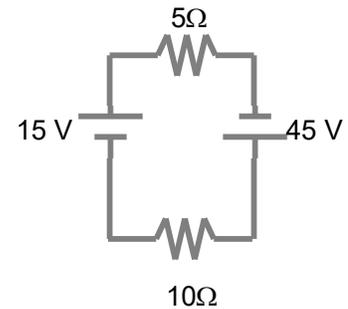
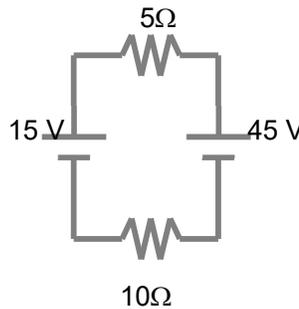
- a) el valor de la corriente i_5 que circula por la resistencia R_5 ;
- b) la potencia P_{R1} disipada por la resistencia R_1 .



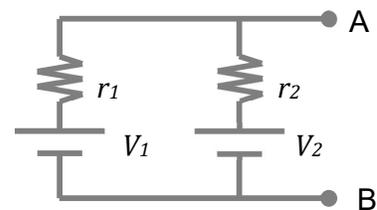
$$V_1= 20V \quad V_2= 30V \quad V_3=40V \quad R_1= R_2= 10\Omega \quad R_3= 30\Omega \quad R_4=50\Omega$$

Ejercicio 14: a) calcule la potencia disipada por cada una de las baterías en cada una de las configuraciones de la figura;

b) proponga un circuito equivalente de cada configuración, esto es, un circuito con una única pila y una única resistencia que energéticamente sea idéntico a la configuración dada.



Ejercicio 15: En el ejercicio anterior las pilas están en serie. Proponemos ahora dos pilas en paralelo, con resistencias internas r_1 y r_2 , respectivamente, como se muestra en la figura (usualmente las resistencias internas de las pilas se denotan con minúscula). Demuestre que la diferencia de potencial entre los extremos A y B vale

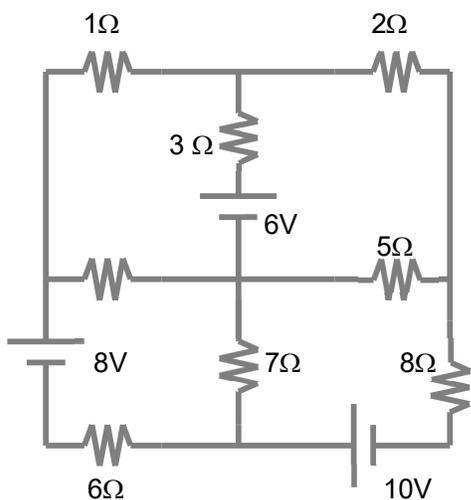
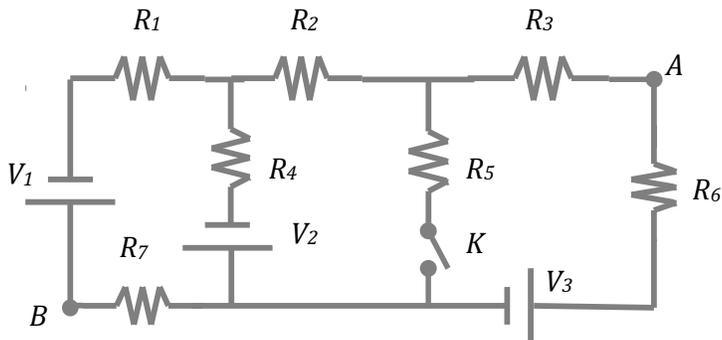


$$V_{AB} = r_{//} \left(\frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} \right)$$

donde $r_{//} = r_1 // r_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

Ejercicio 16: Sea el circuito de la figura, en el que las resistencias valen todas 5Ω y las fuentes valen todas $10V$. Calcule

- la potencia que entrega cada una de las fuentes con la llave K abierta;
- la potencia disipada por la resistencia R_4 con la llave K abierta;
- la caída de tensión en la resistencia R_5 con la llave K cerrada;
- la diferencia de potencial entre los puntos A y B con la llave K cerrada.

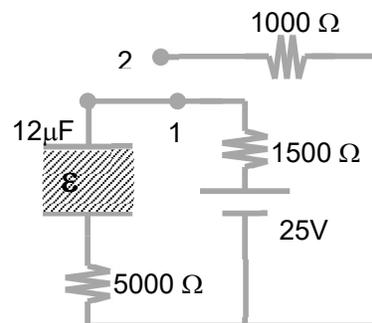


Ejercicio 17: Sea el circuito de la figura. Calcule:

- las corrientes de malla;
- la corriente que circula por la resistencia de 5Ω ;
- la potencia disipada por la resistencia de 7Ω

Ejercicio 18: En el circuito de la figura, una vez establecido el régimen estacionario, se conmuta la llave de la posición 1 a la posición 2. El capacitor está lleno de un dieléctrico de constante relativa $\epsilon_r=5$.

- estime el tiempo que le lleva al circuito alcanzar el régimen estacionario con la llave en la posición 1;
- estime el trabajo entregado por la batería hasta alcanzar el régimen estacionario;
- calcule la corriente que circula por el circuito con la llave en la posición 2;
- calcule el valor de la densidad de carga de polarización en el capacitor en régimen estacionario con la llave en la posición 1, sabiendo que es plano paralelo y que la distancia entre placas es de $0,4\text{ mm}$.



Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: $n \approx 1,27 \times 10^{25}$ electrones

Ejercicio 2: $\langle v \rangle \approx 1,5 \times 10^{-4}$ m/seg

Ejercicio 3: $P = 526,3$ W

Ejercicio 4: La lámpara literalmente explota. $L/S = 4,57 \times 10^7$ m⁻¹

Ejercicio 5: $R(20^\circ\text{C}) = R_{\text{Ni}} // R_{\text{Cu}} = 5,36 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ $R(80^\circ\text{C}) = 6,64 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$

Ejercicio 6: Están conectados en paralelo (todos los aparatos se hallan a idéntico potencial, 220V)

Ejercicio 7: La radio no funciona porque tiene resistencia mucho menor que la plancha y, en consecuencia, la diferencia de potencial entre sus extremos es mucho menor que 220V.

Ejercicio 8: $R_{\text{eq}} = 29 \Omega$ $i_{\text{CIRC}} = 2\text{A} = i_1 = i_2 = i_3$

$$V_{R1} = 8\text{V} \quad V_{R2} = 20\text{V} \quad V_{R3} = 30\text{V}$$

$$P_{R1} = 16\text{W} \quad P_{R2} = 40\text{W} \quad P_{R3} = 60\text{W}$$

$$P_{\text{FUENTE}} = 58\text{V} \times 2\text{A} = 116\text{W} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3}$$

$$n \approx 10^{19} \text{ electrones/seg}$$

Ejercicio 9: $R_{\text{eq}} = 10 \Omega$ $i_1 = 5,8\text{A}$ $i_2 = 3,48\text{A}$ $i_3 = 2,32\text{A}$

$$V_{R1} = 23,2\text{V} \quad V_{R2} = V_{R3} = 34,8\text{V}$$

$$P_{R1} = 134,56\text{W} \quad P_{R2} = 121,10\text{W} \quad P_{R3} = 80,74\text{W}$$

$$P_{\text{FUENTE}} = 58\text{V} \times 5,8\text{A} = 336,40\text{W} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3}$$

$$n \approx 10^{19} \text{ electrones/seg}$$

Se puede colocar una resistencia de 19Ω en serie con la batería.

Ejercicio 10: a) 211Ω ; b) $35,47\text{W}$; c) $76,67\text{V}$

Ejercicio 11: a) $P = 20\text{W}$; b) $V_{AB} = 15\text{V}$; c) $P_{\text{CIRC}} = 108,4\text{W}$; d) $Q = 30 \mu\text{C}$

Ejercicio 12: a) $i_2=0,59\text{ A}$; b) $V_2=20\text{V}$; c) $P_{R3}=2,187\text{ W}$.

Ejercicio 13: a) $i_5=0,3\text{A}$; b) $P_{R1}=0,156\text{W}$.

Ejercicio 14: a) $P_{15\text{V}}=-30\text{W}$ $P_{45\text{V}}=90\text{W}$; b) $P_{15\text{V}}=60\text{W}$ $P_{45\text{V}}=180\text{W}$.

En el primer caso una fuente de 30V con una resistencia en serie de 15Ω . En el segundo caso la fuente es de 60V .

Ejercicio 16: a) $P_{F1}=18,3\text{W}$ $P_{F2}=36,3\text{W}$ $P_{F3}=54,6\text{W}$: b) $P_{R4}=65,88\text{W}$

c) $V_{R5}=2,38\text{V}$; d) $V_{AB}=5,71\text{V}$

Ejercicio 17: a) $I_1=-0,217\text{A}$ (superior izquierda) $I_2=1,245\text{A}$ (superior derecha)

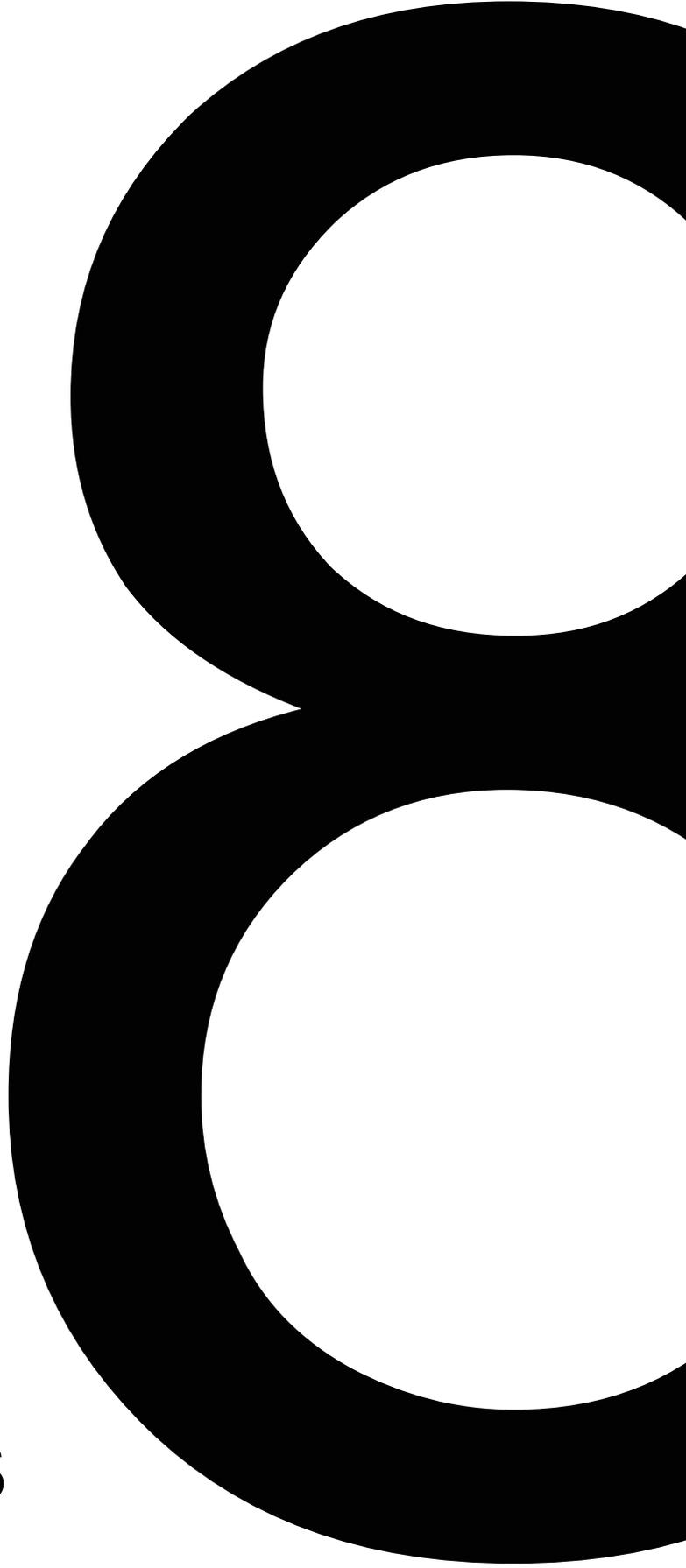
$I_3=1\text{A}$ (inferior izquierda) $I_4=1,16\text{A}$ (inferior derecha)

b) $i_{5\Omega}=0,085\text{A}$ c) $P_{7\Omega}=0,179\text{W}$

Ejercicio 18: a) $t \approx 5\tau = 0,39\text{ seg}$; b) $W_{\text{FUENTE}} \approx 15\text{ mJ}$;

c) $i(t)=4,167 \times 10^{-3} e^{-13,88 t}\text{ A.}$; d) $2,76\mu\text{C}$.

Fuerzas
y
campos
magnéticos



8.1 – Introducción

Es bastante bien conocida por toda la interacción entre los imanes. En líneas generales se parece bastante a la interacción entre cargas eléctricas, por lo menos en lo que se refiere a que pueden ser atractivas o repulsivas, y que la intensidad de la interacción decrece rápidamente con la separación de los cuerpos que interactúan (cargas o imanes).

De alguna manera estamos afirmando que los imanes modifican las propiedades del espacio y generan un campo de fuerzas, porque siempre podemos definir un imán de prueba (de la misma manera que teníamos una carga de prueba en el caso electrostático) y no sólo detectar la presencia del campo de fuerzas sino también cuantificar la medida de la interacción magnética. Desde ya que esto no resuelve el problema de fondo, relacionado con el origen de esta fuerza, a la que simplemente se la denomina *fuerza magnética*.

Por ejemplo, podría ser de origen eléctrico, por decir algo. Hasta aquí sólo conocemos fuerzas gravitatorias y fuerzas eléctricas, y en principio no tenemos argumentos para asegurar que el magnético no sea un fenómeno dependiente de los otros. Claro que el doble carácter atractivo-repulsivo de la fuerza magnética induce a pensar que no es una fuerza relacionada con la fuerza gravitatoria, que siempre es atractiva. Y de hecho no es difícil comprobar con un imán de pruebas que la fuerza entre imanes no depende de la masa de los mismos.

Tampoco parece que el origen del fenómeno magnético sea eléctrico, porque una carga eléctrica en reposo en presencia de un imán permanece en reposo. Recordemos que la fuerza eléctrica es independiente del estado de movimiento de la carga, pues de hecho vale

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} \quad (8.1)$$

Si la fuerza entre dos imanes fuera en realidad alguna variante de las interacciones de origen eléctrico, una carga inicialmente en reposo frente a un imán debería moverse, es decir, existiría al menos un punto a partir del cual la carga se pondría necesariamente en movimiento. Y este no es el caso, porque experimentalmente puede corroborarse que entre las armaduras de un imán no existe punto alguno a partir del cual una carga eléctrica en reposo comience a moverse.

Este es precisamente el punto a desarrollar. Si a este nivel aceptamos que estamos en presencia de un fenómeno en principio independiente de los fenómenos gravitatorios y eléctricos debemos formular una teoría consistente y autocontenida que sea capaz de dar cuenta de todas las observaciones relacionadas con la fuerza magnética, al menos, insistimos, a este nivel. Más adelante (en los capítulos 9 y 10) discutiremos las peculiares formas de interacción entre los fenómenos eléctricos y magnéticos y las particulares maneras en que un fenómeno genera al otro. Por ahora, y lo largo de esta unidad, estableceremos las bases conceptuales de los fenómenos magnéticos.

8.2 – El campo magnético

Lo que definitivamente revela que en presencia de un imán las propiedades del espacio han sido modificadas por un nuevo tipo de fenómeno es que los imanes sólo interactúan con cargas eléctricas en movimiento. Si la carga eléctrica está en reposo relativo respecto a un imán no hay posición del imán que sea capaz de ponerla en movimiento. Por el contrario, una carga en movimiento entre las armaduras de un imán en general se desvía de su trayectoria original entre ángulos de deflexión máxima y mínima (de hecho, nula) separados $\pi/2$ radianes. Y todavía más, en la dirección de deflexión nula la velocidad de la carga eléctrica permanece invariante (recuérdese que en el caso eléctrico una carga en movimiento también puede conservar la dirección, pero aún en este caso la velocidad de la carga varía).

Podemos sintetizar estas propiedades modificadas del espacio en presencia de un imán a través de un nuevo ente físico, al que llamaremos *campo magnético*, determinado por una dirección privilegiada del espacio, \vec{B} , que denominaremos *vector de inducción magnética*. La relación entre el vector \vec{B} y la velocidad \vec{v} de una carga eléctrica q , en ausencia de campo eléctrico externo, se resume en la fuerza magnética

$$\vec{F}_{MAG} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.2)$$

determinada por el producto vectorial entre los vectores \vec{v} y \vec{B} .

Algunas observaciones se hacen necesarias. En primer lugar, el producto vectorial tiene que ver con la existencia de un ángulo de deflexión máxima y uno de deflexión mínima; recuérdese que el producto vectorial es nulo si los vectores son paralelos y es máximo si los vectores son perpendiculares. De esta manera estamos definiendo el vector \vec{B} en una dirección del espacio tal que produce la máxima desviación de una carga eléctrica si es perpendicular a su velocidad. Por otro lado, si comparamos las expresiones (8.1) y (8.2) vemos que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ debe tener las unidades de un campo eléctrico; de hecho parece comportarse como tal, pero de ninguna manera lo es.

Por último, digamos que las unidades del vector inducción magnética dependen, como siempre, del sistema de unidades, pero en todo caso son unidades de campo eléctrico sobre unidades de velocidad. En el sistema MKS será

$$[B] = \frac{V/m}{m/seg} = \frac{N/C}{m/seg} = \frac{N}{Am}$$

Introducimos la idea de campo magnético pensando en los fenómenos que se producen sobre una carga eléctrica frente a un imán. Pero como no podemos decir que un campo magnético “es lo que provoca un imán”, postulamos que se trata de la dirección privilegiada del espacio \vec{B} que cumple con la ecuación (8.2).

unidad que se denomina tesla (T), en tanto que en el sistema cgs la unidad es el gauss (G). Por la equivalencia entre unidades, resulta $1 T = 10^4 G$.

Las intensidades de los campos magnéticos a los que estamos habituados son en general comparativamente muy pequeñas. De hecho, los valores de campo magnético en toda la naturaleza son relativamente pequeños. A modo de ejemplo digamos que el campo magnético terrestre (originado por mecanismos dinámicos que nada tienen que ver con los fenómenos que ocurren en un imán permanente como los de los parlantes o los que se adhieren comúnmente a las heladeras, por ejemplo) es del orden de $0,5G$, las estrellas normalmente poseen campos del orden de una decena de gauss y los imanes permanentes comerciales, en las proximidades de su superficie, rondan las centenas de gauss. En un resonador el campo es generado por dos grandes discos que generan un campo magnético de algunos miles de gauss (normalmente entre $0,25 T$ y $0,75 T$) en tanto que el imán analizador del acelerador de partículas del TANDAR ronda los $15 kG$ ($1,5 T$).

Por lo demás, las unidades de campo magnético indican que se trata de una fuerza por unidad de corriente y de longitud, de manera tal que es de esperar que un elemento cualquiera circulado por una corriente sienta los efectos de un campo magnético o eventualmente lo genere. En la próxima sección prestaremos atención a esta idea.

Ejemplo 8.1: Supongamos que una carga eléctrica de masa m y carga q ingresa con velocidad \vec{v} a una región del espacio donde existe un campo magnético \vec{B} perpendicular al plano de la velocidad. Determinemos la trayectoria de la partícula.

Observemos ante todo que al ser perpendiculares los vectores velocidad y campo, la aceleración sobre la carga eléctrica habrá de actuar en dirección perpendicular a la dirección del movimiento provocando así una trayectoria curvilínea en el mismo plano del vector velocidad. Y dado que $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ y $|\vec{v}|$ es constante, resulta que la carga describe un movimiento circular uniforme en el plano que contiene al vector velocidad.

También parece evidente que no es conveniente tratar el problema en coordenadas cartesianas sino en cilíndricas (polares en el plano de movimiento más la coordenada Z del vector inducción). Así, pensando el vector velocidad en el plano de la hoja y el campo magnético entrante a la hoja (la única restricción es que sean perpendiculares, si el campo fuera saliente la curva sólo iría en sentido opuesto, y la carga se desviaría en la dirección $-\hat{e}_\phi$) la velocidad y la inducción magnética se escriben

$$\vec{v} = v \hat{e}_\phi \quad (8.3)$$

$$\vec{B} = B(-\hat{e}_z) \quad (8.4)$$

de manera tal que la fuerza está dirigida en el sentido $-\hat{e}_r$, como es casi evidente a partir de la ecuación (8.2). En efecto,

$$\vec{F}_{MAG} = q \begin{bmatrix} \hat{e}_R & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{bmatrix} = -qvB\hat{e}_R \equiv qvB(-\hat{e}_R) \quad (8.5)$$

Como consecuencia inmediata, el módulo de la velocidad es constante, porque la aceleración (proporcional a la fuerza) tiene sólo componente centrípeta. De hecho, a partir del valor de la aceleración centrípeta en términos de la velocidad y el radio de giro R_L

$$a_c = \frac{v^2}{R_L} \quad (8.6)$$

es fácil calcular el radio de este movimiento circular como

$$R_L = \frac{mv^2}{F_{MAG}} = \frac{mv}{qB} \quad (8.7)$$

En tanto la partícula se mantenga en la región de campo magnético constante la trayectoria será una circunferencia. El radio R_L de esta circunferencia se denomina *radio de Larmor*, en tanto que la frecuencia del movimiento circular,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (8.8)$$

se conoce como frecuencia *de ciclotrón*. Obsérvese que la frecuencia de ciclotrón es independiente de la velocidad, de manera que es la misma para todas las partículas de una misma especie. Por lo demás, conocida la frecuencia de ciclotrón será siempre posible medir la relación q/m para una especie dada.

Ejemplo 8.2: Analicemos el movimiento de una partícula que ingresa a una región de campo magnético uniforme (esto es, de valor constante y en un sola y única dirección) con velocidad tal que puede escribirse como

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{//} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \hat{e}_\perp + v_0 \cos \alpha \hat{e}_{//} \quad (8.9)$$

donde los vectores componentes de la velocidad se refieren a sus partes perpendicular y paralela al campo magnético externo, respectivamente, α es el ángulo entre los vectores \vec{v} y \vec{B} , y v_0 se refiere al módulo de la velocidad de entrada a la región de campo magnético. Dado que la única fuerza que estamos considerando es la magnética (ecuación (8.2)) podemos sin más escribir

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} + m \frac{d\vec{v}_{//}}{dt} = q(\vec{v}_\perp + \vec{v}_{//}) \times \vec{B} \quad (8.10)$$

Claramente el segundo producto vectorial es nulo porque se trata de vectores paralelos, de manera tal que resultan las dos ecuaciones

$$m \frac{d\vec{v}_{//}}{dt} = 0 \quad (8.11)$$

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (8.12)$$

La ecuación (8.11) muestra que la componente de velocidad paralela al campo se mantiene constante, en tanto que la segunda ecuación resulta en un movimiento circular cuyo radio viene dado por la ecuación

$$R_L = \frac{m |\vec{v}_{\perp}|}{qB} = \frac{mv_0 \operatorname{sen} \alpha}{qB} \quad (8.13)$$

La composición de los dos movimientos resulta en una hélice regular de paso p dado por

$$p = |v_{//}| \tau = |v_{//}| \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \alpha \quad (8.14)$$

donde τ es el período del movimiento circular y $\omega / 2\pi$ la frecuencia de ciclotrón. La hélice que describe la partícula se desarrolla sobre una línea de campo, es decir, sobre las curvas que en todo punto son tangentes al vector \vec{B} , un concepto por completo análogo al que hemos introducido a propósito del campo eléctrico (véase la sección 2.7) y que en el caso específico del campo magnético discutiremos a partir de la sección 8.4. Digamos por ahora que en el caso de un campo magnético uniforme, las líneas de campo (o de fuerza, si se prefiere) son rectas, como se muestra en la figura 8.1.

La trayectoria conservará su forma helicoidal si la partícula no choca contra otras partículas o eventualmente contra límites físicos tales como paredes. En términos absolutamente generales podemos decir que si el camino libre medio de cada partícula es comparativamente alto la difusión lateral es muy lenta, y si el radio de Larmor es pequeño comparado con las dimensiones propias del sistema las partículas conservarán estadísticamente sus órbitas helicoidales siguiendo una línea de campo. Estas condiciones suelen darse en plasmas a muy altas temperaturas y/o muy baja densidad. Para hacernos una idea, pensemos que en un tokamak (una máquina que genera energía a partir de la fusión termonuclear de plasmas) se alcanzan temperaturas del orden de $10^8 K$ con campos del orden de los $5T$. En estas condiciones la velocidad térmica típica de un electrón es del orden

$$v \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = 3,9 \times \frac{10^7 m}{seg} \quad (8.15)$$

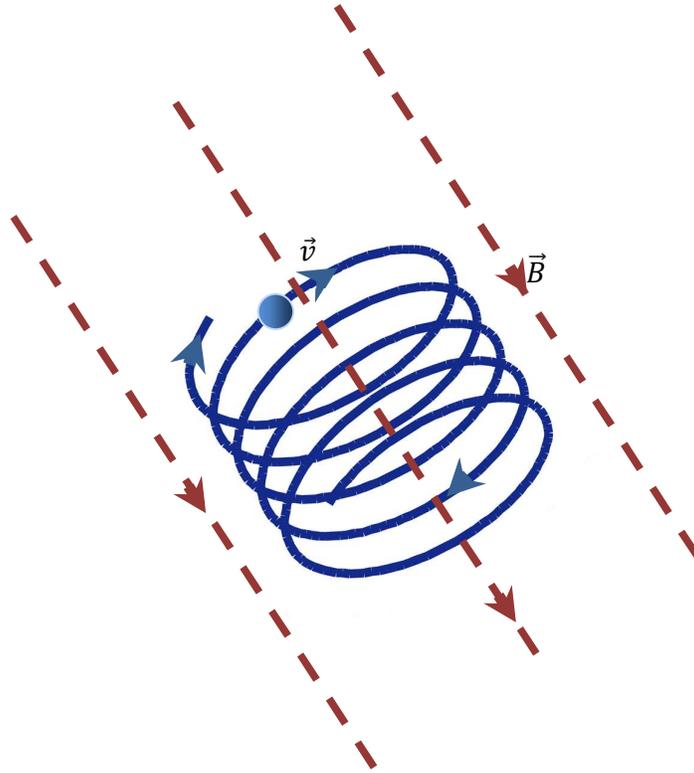


Fig. 8.1: una partícula cargada eléctricamente en un campo magnético uniforme describe una trayectoria helicoidal cuyo eje es una línea de campo. El radio de la hélice depende de la componente de velocidad perpendicular al campo, en tanto que el paso de la hélice es función de la componente de velocidad paralela a l campo magnético.

donde k_B es la constante de Boltzmann, el cociente entre la constante universal de los gases R y el número de Avogadro N_A . Luego, el radio de Larmor para un electrón típico resulta

$$R_L = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{m k_B T}}{qB} \approx 4mm \quad (8.16)$$

Un tokamak es una configuración toroidal (puede pensarse como un cilindro cerrado circularmente con sus extremos en contacto) cuyo radio medio es del orden del metro, de manera tal que la condición de que el radio de Larmor sea mucho menor que las dimensiones del sistema se cumplen sobradamente. De esta manera, se procura que el plasma quede autoconfinado, “enroscado” a las líneas de campo magnético (disposición que se conoce como *confinamiento magnético*) y evitar de esta forma que toque las paredes del dispositivo donde se enfriaría rápidamente.

Este tipo de confinamiento se da naturalmente, por ejemplo, en los arcos coronales del Sol y en el plasma de la alta atmósfera terrestre. De hecho, estos fenómenos están íntimamente relacionados. Muchas de las partículas de muy alta energía que el Sol libera en la expansión continua de su atmósfera exterior (y que se conoce como *viento solar*) alcanzan la alta atmósfera terrestre, donde quedan confinadas magnéticamente. La particular configuración del campo magnético terrestre (que presentaremos en la sección 8.7) hace que estas partículas se dirijan hacia regiones de mayor densidad de líneas, esto es, los polos geográficos norte y sur. Al alcanzar la región alta de la atmósfera terrestre colisionan con los gases presentes (básicamente oxígeno y nitrógeno) que ganan energía con las colisiones, se excitan y, al decaer a un estado de menor energía, emiten luz en los “colores” típicos de esos gases: verde y rojo el oxígeno, violáceo el nitrógeno. Estos fenómenos se conocen como auroras.



Fig. 8.2: a la izquierda se muestra un conjunto de arcos coronales en la superficie del Sol (imagen original tomada de http://upload.wikimedia.org/wikimedia/commons/thumb/b/bc/Sunspot_TRACE.jpeg) y a la derecha una aurora austral (imagen original en <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/AuroraAustralisDisplay.jpg>)

Ejemplo 8.3: Un haz de isótopos ${}^{26}_{55}\text{Fe}^{++}$ ingresa a una región del espacio donde existe un campo magnético de módulo $B = 1T$. La energía del haz está comprendida entre 10 keV y $10,5\text{ keV}$ ($1\text{ keV} = 1,6 \times 10^{-16}\text{ J}$). Suponiendo que la velocidad es perpendicular al campo, calculemos los radios de Larmor mínimo y máximo y la frecuencia de ciclotrón del haz.

Ante todo, el símbolo ${}^{26}_{55}\text{Fe}^{++}$ indica que se trata de isótopos de hierro cuyo núcleo posee 26 protones en un total de 55 nucleones (esto es, contiene $55-26= 29$ protones) y que se encuentra dos veces ionizado (ha perdido dos electrones y en consecuencia posee doble carga positiva debido a los dos protones que no tienen su carga compensada). Teniendo en cuenta que la masa de un protón (y que asumiremos como la masa de cada uno de los

55 nucleones) vale $m_p = 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y que su carga es de módulo igual a la del electrón, es decir, $p^+ = |e^-| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, estamos manejando haz de partículas de masa y carga

$$m = 55m_p = 8,8 \times 10^{-26} \text{ kg} \quad (8.17)$$

$$q = 2p^+ = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (8.18)$$

Por otro lado, el intervalo de velocidades viene dado por el intervalo de energías, esto es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \in [1,60; 1,68] \times 10^{-15} \text{ J} \equiv v \in [1,91; 1,95] \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \quad (8.19)$$

Por directa aplicación de la ecuación (8.7) obtenemos

$$R_{MAX} = \frac{mv_{MAX}}{qB} = 5,36 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (8.20)$$

$$R_{min} = \frac{mv_{min}}{qB} = 5,25 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (8.21)$$

Como es fácil ver, el radio depende de la velocidad. Pero la frecuencia de ciclotrón no. En efecto, es fácil ver a partir de la ecuación (8.8) que para toda partícula del haz vale

$$\omega = \frac{qB}{m} = 3,63 \times 10^6 \text{ seg}^{-1} \quad (8.22)$$

Normalmente, el fenómeno de deflexión magnética se usa en los espectrómetros de masa, que son dispositivos que miden con excelente precisión la relación carga–masa de las especies inyectadas, permitiendo de esta forma la identificación de los diversos iones que componen el haz.

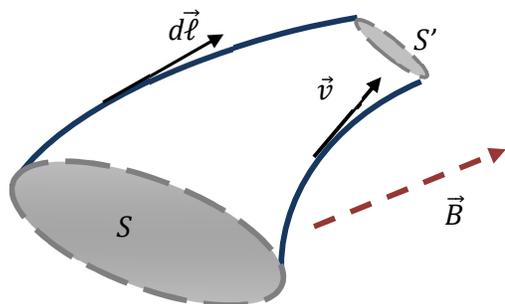
8.3 – Fuerza sobre un elemento de corriente

Consideremos una región del espacio con cargas con velocidad \vec{v} , como puede ser el caso de un conductor por el que circula una corriente i . Supongamos que en esa región existe además un campo magnético representado por su vector inducción \vec{B} .

En realidad la geometría del conductor es irrelevante, de manera tal que lo más general es pensar en un tubo de forma arbitraria cuyas paredes, punto a punto, sean tangentes a los vectores velocidad de las cargas en esa región, como el que mostramos en

la figura 8.3 (a esta construcción geométrica se la denomina *tubo de corriente*. Obsérvese que no se trata de una pared sólida sino que sus “paredes” son las líneas de corriente), con el objeto de que el diferencial de longitud $d\vec{\ell}$ sobre una línea de corriente coincida en dirección y sentido con el vector velocidad \vec{v} en cada punto. Por lo demás, las superficies S y S' son arbitrarias y están fijadas sólo por la geometría del conductor, pero requerimos que sean atravesadas por la misma cantidad de carga en la unidad de tiempo.

Queremos calcular la fuerza $d\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre cada elemento del tubo de corriente con carga dq . Para ello, notemos primero que si la carga que pasa a



través de la superficie S es la misma que pasa por S' , entonces la densidad de corriente \vec{j} es la misma en cualquier sector del tubo y la corriente i es estacionaria, de manera tal que podemos escribir el diferencial de carga dq en cualquier región como

$$dq = i dt \quad (8.23)$$

Fig. 8.3: tubo de corriente inmerso en un campo magnético exterior. Las superficies S y S' son arbitrarias.

Por otro lado, es casi evidente que cada carga se mueve una distancia $|d\vec{\ell}|$ a lo largo de una línea de corriente que equivale a $|\vec{v}| dt$, es decir, vale la igualdad

$$d\vec{\ell} = \vec{v} dt \quad (8.24)$$

de manera tal que entre las dos expresiones (8.23) y (8.24) obtenemos

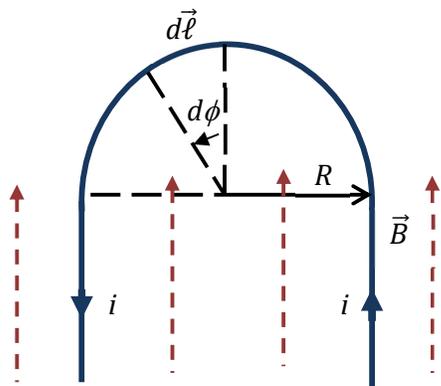
$$dq\vec{v} = i d\vec{\ell} \quad (8.25)$$

y la expresión (8.1) se escribe como

$$d\vec{F}_{MAG} = dq\vec{v} \times \vec{B} = i d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (8.26)$$

De aquí en más habremos de omitir el subíndice que indica que la fuerza es de origen magnético porque no habrá lugar a confusiones. Por otro lado, obsérvese que hasta aquí el campo magnético ha jugado el papel de un ente externo a las cargas y a las corrientes, aunque posiblemente las cargas en movimiento (las corrientes) generen su propio campo magnético. En las próximas secciones fundamentaremos la teoría de los fenómenos magnéticos desde una perspectiva ligeramente distinta y calcularemos explícitamente el campo magnético generado por una distribución de corriente.

Ejemplo 8.4: Sea el alambre de la figura 8.4, semi infinito, curvado en su parte media en forma de semicircunferencia de radio $R = 0,5\text{ m}$ y circulado por una corriente $i = 2\text{ A}$. El alambre se halla inmerso en una región del espacio en la que existe un campo magnético exterior uniforme representado por $\vec{B} = 50\text{ T } \hat{e}_y$. Calculemos la fuerza que el campo exterior ejerce sobre el alambre.



Ante todo, notemos que el campo magnético no ejerce fuerza alguna sobre los tramos rectos del alambre porque en esos tramos es paralelo a las corrientes. En la región curvada la situación es diferente. De hecho

$$d\vec{\ell} = R d\phi \hat{e}_\phi = R d\phi (-\text{sen}\phi \hat{e}_x + \text{cos}\phi \hat{e}_y) \quad (8.27)$$

Fig. 8.4: alambre curvado del ejemplo 8.4. Obsérvese que en la región curvada el sentido de circulación de la corriente es

de manera tal que la expresión (8.26) se escribe como

$$d\vec{F} = i \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -R \text{sen}\phi d\phi & R \text{cos}\phi d\phi & 0 \\ 0 & B & 0 \end{bmatrix} = iBR \text{sen}\phi d\phi (-\hat{e}_z) \quad (8.28)$$

y en total, en función de los valores propuestos para las diferentes variables, resulta una fuerza $\vec{F} = 100\text{ N } (-\hat{e}_z)$. Obsérvese que esta disposición de campo y corrientes provoca una fuerza sobre el alambre que lo “aplasta” sobre el plano de la hoja.

Ejemplo 8.5: Sea un alambre formado por un segmento curvo y uno recto, como el que se muestra en la figura 8.5. Este alambre se encuentra en una región del espacio en el que existe un campo magnético uniforme de intensidad 2 T formando un ángulo $\alpha = 37^\circ$ respecto del eje X , y es circulado por una corriente $i = 500\text{ mA}$ (los alambres que llevan y traen la corriente no se muestran, y a los efectos prácticos pueden considerarse paralelos al campo magnético). Calculemos la fuerza que el campo \vec{B} ejerce sobre el alambre.

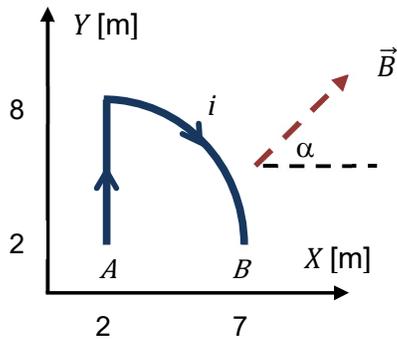


Fig. 8.5: alambre curvado del ejemplo 8.4. Lo que debe notarse es que el diferencial $d\vec{\ell}$ puede expresarse en términos de $d\vec{x}$.

En principio podemos seguir un procedimiento análogo al que desarrollamos en el ejemplo 8.3, esto es, escribir los diferenciales $i d\vec{\ell}$ en cada segmento, calcular la fuerza sobre cada uno de ellos empleando la expresión general (8.26) y luego sumar. El inconveniente es que el diferencial de arco podría lucir complicado, y lo que es más, en este problema ni siquiera conocemos su forma exacta (podría ser un arco de parábola, de circunferencia, etc.). Sin embargo, todavía podemos aprovechar la propiedad de que para calcular la integral

$$\int_A^B i d\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{8.29}$$

no se especifica el camino que debe seguirse, esto es, la integral es independiente del camino (los puntos A y B son los extremos de la curva que conforma el alambre y se explicitan en la figura 8.5). En cualquier caso, la forma del campo magnético en el sistema de referencia de la figura 8.5 es

$$\vec{B} = (B_0 \cos \alpha ; B_0 \sen \alpha) = 1,6T\hat{e}_x + 1,2T\hat{e}_y \tag{8.30}$$

Para ir de A a B empleamos el camino recto, paralelo al eje X , en el cual vale

$$i d\vec{\ell} = i dx \hat{e}_x \tag{8.31}$$

y la fuerza F viene dada por

$$\vec{F} = i B_0 \int_2^7 dx [\hat{e}_x \times (\cos \alpha \hat{e}_x + \sen \alpha \hat{e}_y)] = i B_0 \int_2^7 dx \sen \alpha \hat{e}_z \tag{8.32}$$

Para los valores propuestos es fácil corroborar que la fuerza vale

$$\vec{F} = 3N \hat{e}_z \tag{8.33}$$

8.4 – Primera ley de Ampere - Ley de Biot –Savart

En la unidad 2 introdujimos el concepto de campo eléctrico a partir de la fuerza que una carga elemental recibe de parte de una distribución de cargas fuente. Si quisiéramos pensar ahora un campo magnético a partir de la fuerza que recibe un elemento de corriente, nos tropezaríamos con la dificultad de que la definición de la fuerza magnética sólo permite calcular el módulo de la componente de la inducción que es perpendicular a la velocidad de una carga, y sólo si se conocen la fuerza que actúa sobre la carga y su velocidad.

De hecho, hasta aquí hemos calculado la fuerza sobre distribuciones de corriente inmersas en campos magnéticos externos, pero no calculamos el campo magnético que la misma distribución podría generar. La idea, entonces, es partir de la fuerza que se ejercen entre sí dos tubos de corriente arbitrarios, digamos dos cables circulares cada uno de ellos por una corriente eléctrica, y a partir de allí ordenar los distintos elementos que componen la expresión (8.26) para identificar el campo magnético en el que se halla sumergido cada cable. Este campo, en ausencia de otras fuentes, necesariamente tiene que haber sido generado por el otro cable.

La ley de fuerzas de Ampere se refiere a espiras cerradas (o eventualmente cables infinitos, que se cierran por el infinito). Si tratáramos con cables abiertos tendríamos que tener en cuenta fenómenos que nada tienen que ver con la hipótesis de estacionariedad que estamos asumiendo.

Para ello, imaginemos dos tubos de corriente como los de la figura 8.6, suponiendo de entrada que las dimensiones laterales del tubo son mucho menores que cualquier longitud característica del problema. De alguna manera, queremos decir que si se trata de corrientes circulando por cables cilíndricos, asumimos que el radio de los cables es mucho menor que, por ejemplo, la distancia entre los mismos, de manera tal que no debemos preocuparnos por la exacta distribución de las corrientes en el interior de los conductores.

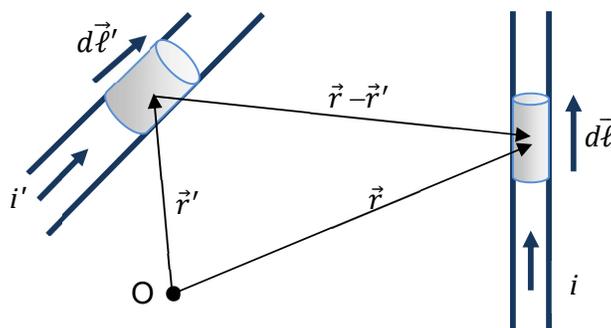


Fig. 8.6: Los conductores de la figura son alambres infinitos o bien una porción de espira. El punto O es el origen de un sistema de referencia arbitrario.

La intensidad de la interacción entre los dos elementos de corriente responde a una ley empírica presentada por el físico francés André Marie Ampere, y que postula que si las corrientes que circulan por los cables son estacionarias, la fuerza que el elemento diferencial de corriente $i' d\vec{\ell}'$ ejerce sobre el elemento diferencial $i d\vec{\ell}$ viene dada por la expresión

$$d\vec{F}' = \kappa \frac{i d\vec{\ell} \times [i' d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.34)$$

donde κ es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades en el

La ley de Ampere es una ley fundacional, no puede derivarse de otras leyes. Además, tiene una marcada similitud con la de Coulomb en el sentido de que ambas fuerzas son directamente proporcionales al producto de las fuentes (antes cargas, ahora elementos de corriente) e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa a esas fuentes.

que se mide la fuerza. La expresión (8.34), conocida como *ley de Ampere*, juega el mismo rol que la ley de Coulomb juega para la explicación de los fenómenos electrostáticos, en el sentido de que sienta las bases sobre las cuales puede fundamentarse la teoría de los fenómenos magnéticos desde un punto de vista puramente fenomenológico. Como la de Coulomb, la ley de Ampere es empírica, esto es, se obtuvo a partir de experimentos, y es fundacional porque no puede derivarse de otras leyes. Debe notarse también la marcada familiaridad que existe entre las dos ecuaciones, sólo que ahora el rol de las cargas eléctricas lo juegan los elementos de corriente, y el

producto ya no es entre escalares sino que es un producto vectorial. Pero el módulo de la fuerza sigue siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a las fuentes, en este caso los elementos de corriente, de manera tal que, como la coulombiana, la fuerza magnética tiene alcance infinito.

Desde ya que la fuerza $d\vec{F}$ que el elemento diferencial de corriente $i d\vec{\ell}$ ejerce sobre el elemento $i' d\vec{\ell}'$ se escribe de manera análoga, aunque no alcanza con permutar subíndices, porque intercambiar subíndices en presencia de productos vectoriales no es irrelevante, de manera tal que, para los elementos diferenciales de la ecuación (8.34), resultaría

$$d\vec{F} \neq -d\vec{F}' \quad (8.35)$$

Sabemos que esto no está bien, porque la ecuación (8.35) contradice el principio de interacción de Newton, de manera tal que debemos tener un poco de cuidado y considerar que las corrientes involucradas son estacionarias, de manera tal que o bien los elementos dibujados en la figura 8.6 son parte de una espira cerrada o bien son parte de alambres

infinitos, pero de ninguna manera pueden ser cables abiertos. En los complementos de este capítulo demostraremos que, en efecto, las cantidades

$$\vec{F}_{12} = \kappa i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times [d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (8.36)$$

y

$$\vec{F}_{21} = \kappa i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times [d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (8.37)$$

donde C_1 y C_2 son las curvas cerradas (las espiras o los alambres infinitos, que precisamente se cierran por el infinito) a lo largo de las cuales se realiza la integración, son iguales. Por ahora, y con el objeto de no perder de vista nuestro primer objetivo (hallar una expresión para el campo magnético generado por una distribución estacionaria de corrientes) reordenemos la ecuación (8.34) en la forma

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{\ell}_2 \times \left[\kappa \frac{[i_1 d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \quad (8.38)$$

Tengamos en cuenta que, aunque no lo explicitamos, el diferencial del miembro izquierdo es de segundo orden (es decir, deberíamos escribir $d^2\vec{F}_{12}$, pero por razones de brevedad habremos de omitir la notación) porque es el producto de dos cantidades diferenciales. De hecho, si comparamos las expresiones (8.38) y (8.26) vemos de inmediato que el término entre corchetes corresponde al diferencial de campo de inducción magnética $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ generado por el elemento de corriente $i_1 d\vec{\ell}_1$ (ubicado en la posición \vec{r}_1) en la posición \vec{r}_2 del elemento diferencial de corriente $i_2 d\vec{\ell}_2$. Para decirlo de otro modo, desde el punto de vista del alambre 2 el alambre 1 forma parte del medio externo, de manera tal que la cantidad que aparece entre corchetes en la ecuación (8.38), una vez integrada a lo largo de todo el alambre 1, debe ser el campo magnético externo que aparece en la expresión (8.26), esto es, se trata de una cantidad vectorial que representa a la inducción del campo magnético generado por el alambre que (arbitrariamente) hemos denominado 1 en la posición del elemento diferencial $i_2 d\vec{\ell}_2$. Si

Uno de los resultados más inmediatos de la ley de Ampere es que la fuerza magnética entre dos corrientes paralelas es atractiva si las corrientes tienen igual sentido y es repulsiva si los sentidos son opuestos. De alguna manera ocurre al revés de los fenómenos electrostáticos, en los que cargas de igual signo se repelen y de signo opuesto se atraen.

convenimos en llamar *corrientes fuente* a las que producen el campo magnético (y como en electrostática anotarlas con variables primadas) y *puntos campo* a los puntos en los que se mide ese campo magnético (y como en electrostática anotarlas con variables sin primar), en general podremos escribir

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \kappa \frac{[i' d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.39)$$

de manera tal que, formalmente, la inducción magnética en todo punto \vec{r} del espacio, generado por una distribución de corriente estacionaria i , la escribiremos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa \oint_C \frac{[i' d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.40)$$

que se conoce como la ley de Biot y Savart. Obsérvese, de paso, que estamos postulando

Jean Baptiste Biot y Félix Savart estudiaron el campo magnético de las corrientes y cerca de 1820 publicaron el resultado que conocemos como ley de Biot-Savart, nacida a partir de la ley de Ampere que permite calcular la fuerza que dos cables circulares por sendas corrientes se ejercen entre sí.

que el campo magnético es un vector que se extiende sobre todo el espacio (el integrando es del orden de r^{-2} , que se anula sólo para $r \rightarrow \infty$), independientemente de que haya o no otro circuito con el que pueda interactuar. De nuevo, la integración debe realizarse sobre una espira cerrada porque de otra manera la corriente no podría ser estacionaria (podríamos, como ya se dijo, integrar sobre alambres infinitos, pero la formulación parece más cercana a nuestra percepción intuitiva cuando hablamos de espiras).

Obsérvese también que de inmediato podemos combinar las expresiones (8.25) y (8.40) para calcular el campo magnético generado por una carga que se mueve con velocidad constante como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa \frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}') }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.41)$$

donde, como es habitual, \vec{r} se refiere punto en el que se mide el campo y \vec{r}' denota el vector posición de la carga q . Es necesario recalcar que la identidad (8.41) es válida sólo si el vector velocidad es constante, esto es, si se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. La razón es que si la carga se acelerara deberíamos tener en cuenta el campo de radiación que se genera, un tópico que está mucho más allá de los alcances de este libro. Por lo demás, tampoco tendremos en cuenta efectos relativistas, de manera tal que la velocidad

implícitamente estamos suponiendo que la velocidad de la expresión (8.41) es mucho menor que la velocidad de la luz.

Antes de finalizar, recordemos que el valor de la constante κ depende del sistema de unidades que su vaya a usar. En particular, en el sistema MKS se toma

$$\kappa = \frac{\mu}{4\pi} \tag{8.41}$$

donde μ es una constante llamada *permeabilidad del medio*. En el vacío se denota μ_0 y su valor

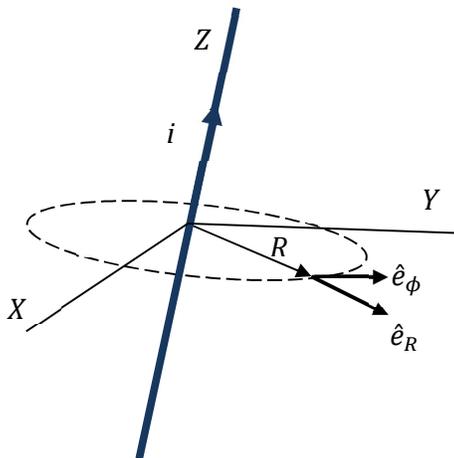
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \tag{8.42}$$

hace que resulte

$$\kappa_0 = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \tag{8.43}$$

Ejemplo 8.5: calculemos el campo magnético generado por una corriente estacionaria de valor i circulando por el alambre recto e infinito de la figura 8.7.

Recordemos que la ley de Biot y Savart se aplica tanto a espiras como a alambres infinitos (porque podemos considerarlos como partes de espiras de longitud infinita). Sólo por comodidad hemos elegido hacer coincidir el alambre con el eje Z . De acuerdo a la ley de Biot-Savart, ecuación (8.35), debe ser



$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[i d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{8.44}$$

donde explícitamente indicamos que la integral se realiza sobre un camino infinito. Obsérvese que la simetría cilíndrica de la configuración sugiere plantear el problema en coordenadas cilíndricas, de manera que las cantidades que figuran en la expresión (8.39) se calculan como

$$i d\vec{\ell}' = i dz' \hat{e}_z \tag{8.45}$$

Fig. 8.7: el alambre infinito coincide con el eje Z . Se indican sólo los versores en las direcciones \hat{e}_R y \hat{e}_ϕ .

(porque el elemento diferencial de corriente se toma sobre el alambre, que se extiende a lo largo del eje Z)

$$\vec{r} = (R; 0; 0) \quad (8.46)$$

(porque estamos interesados en el valor del campo magnético a una distancia R del alambre y, dado que es infinito, lo hacemos en el plano $z = 0$, en una dirección que arbitrariamente tomamos formando un ángulo nulo)

$$\vec{r}' = (0; 0; z') \quad (8.47)$$

(porque las fuentes del campo son las corrientes, que se localizan a lo largo del eje Z , es decir, sobre el alambre). Luego

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R; 0; -z') \quad (8.48)$$

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{bmatrix} \hat{e}_R & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & dz' \\ R & 0 & -z' \end{bmatrix} = R dz' \hat{e}_\phi \quad (8.49)$$

Observemos que cada elemento de corriente $i dz'$ contribuye al campo (en un punto a distancia R del alambre) con una cantidad diferencial

$$d\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R dz'}{(R^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_\phi \quad (8.50)$$

Un par de consideraciones se hacen necesarias. En primer lugar, y aunque parezca evidente, recalquemos que la distancia R se mide en dirección perpendicular al alambre, no es la distancia del elemento de corriente al punto campo. En segundo lugar, el elemento diferencial de campo magnético expresado por la ecuación (8.50) es un vector que en el punto en el que los estamos evaluando (en nuestro caso en un punto sobre el plano de la hoja) tiene la dirección del versor \hat{e}_ϕ . Pero por la simetría cilíndrica del problema, parece evidente que, sin importar cuál sea el punto en el que evaluemos el campo magnético, todos los elementos del alambre contribuyen con una cantidad vectorial (diferencial) en la dirección \hat{e}_ϕ (que es siempre normal a los planos que contienen al alambre).

De hecho, el campo total debido a las contribuciones de todos los elementos será

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\frac{z'}{(R^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\phi =$$

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{z'}{|z'|} \left[\frac{1}{\left(1 + \left[R^2/z'^2\right]\right)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \operatorname{sg}(z') \left[\frac{1}{\left(1 + \left[R^2/z'^2\right]\right)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\phi \quad (8.51)$$

Pero es fácil ver que

$$\operatorname{sg}(z') \left[\frac{1}{\left(1 + \left[R^2/z'^2\right]\right)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2 \quad (8.52)$$

de manera tal que en síntesis resulta

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (8.53)$$

Obsérvese que de la superposición de todas las contribuciones, las líneas del campo \vec{B} se ven “enroscadas” alrededor del alambre y dependen sólo de la distancia R al mismo, de forma tal que se ven como circunferencias contenidas en planos paralelos. En consecuencia, sobre cualquier circunferencia de radio R centrada en el alambre el campo magnético vale lo mismo.

De nuevo, esta propiedad se debe a que el campo magnético tiene en este caso simetría cilíndrica porque no depende ni de la coordenada z ni del ángulo ϕ . Obsérvese también que si se invierte el sentido de la corriente se invierte el sentido del campo magnético. Para un observador mirando desde arriba del plano XY definido en la figura 8.7 el campo magnético gira en sentido antihorario cuando la corriente se dirige “hacia arriba” (esto es, en la dirección positiva del eje Z), y gira en sentido horario cuando la corriente se dirige “hacia abajo”. Todo ocurre como si el conjunto campo magnético-corriente formara un tornillo de rosca derecha: moviéndonos en el sentido del campo por una circunferencia de radio R cualquiera centrada en el alambre, la corriente se mueve en el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha (o un sacacorchos de los comunes, o una canilla, o una lámpara en el portalámparas, tanto da) como se muestra en la figura 8.8.

Esta propiedad no debería llamar a confusión. Que las líneas de campo de un alambre infinito sean circunferencias cerradas concéntricas, contenidas en planos paralelos, no significa que el campo magnético en un punto esté generado solamente por el elemento diferencial de corriente que atraviesa ese plano. De hecho, hemos integrado sobre todo el alambre, de manera tal que las contribuciones provienen de todos los elementos de

corriente. En los ejemplos siguientes tendremos oportunidad de echar un poco de luz sobre estos aspectos.

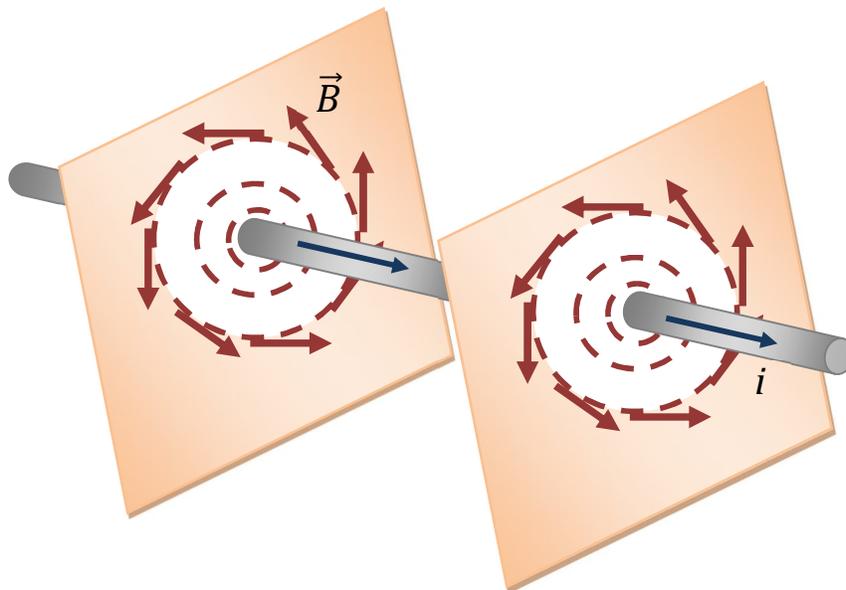


Fig. 8.8: esquema de las líneas de campo magnético generadas por la corriente (estacionaria) que circula por un alambre infinito: Obsérvese que las líneas son circunferencias coaxiales, contenidas en un mismo plano para cada sección de alambre.

Ejemplo 8.6: remarquemos la propiedad a la que hicimos referencia en los últimos comentarios del ejemplo anterior.

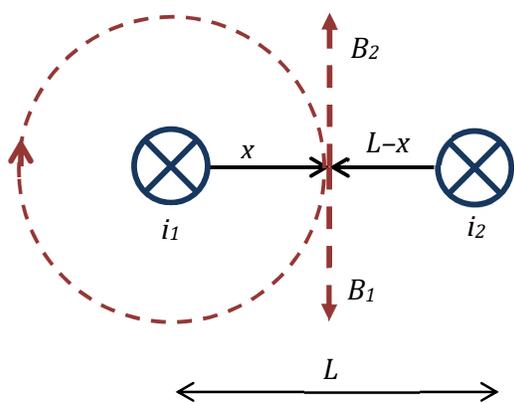


Fig. 8.9: las corrientes entran al plano del papel. Para avanzar en ese sentido, un tornillo de rosca derecha debe girar en el sentido indicado por la flecha que se indica en la línea de campo de la izquierda. Obsérvese que los campos, en todo punto intermedio a los alambres, tienen sentidos opuestos.

Decíamos que una corriente circulando por un alambre infinito genera un campo magnético cuyas líneas (circunferencias concéntricas) están contenidas en planos paralelos. Luego, parece sencillo hallar los puntos del espacio en el que puede anularse el campo generado por dos (o más) corrientes circulando por cables infinitos, rectos y paralelos. En este sentido, pensemos en dos alambres infinitos y paralelos, como los de la figura 8.9, por los que circulan corrientes i_1 e $i_2 = p i_1$, ($p \in \mathbb{R} > 0$), en el mismo sentido. Sabiendo que los cables se hallan separados una distancia L , calculemos la posición en la que se anula el campo magnético entre los alambres.

Obsérvese que al circular en el mismo sentido, en la región entre los alambres las corrientes generan campos magnéticos que son opuestos (véase la figura 8.9), en tanto que en la región externa a los alambres los campos (sobre la línea que une sus centros) tienen igual sentido. Para decirlo en otras palabras, en cada punto sobre la recta que une los centros de los cables los campos magnéticos generados por las corrientes que circulan por los alambres son vectores paralelos en la región externa y antiparalelos en la región interna. Si en algún punto habrá de anularse el campo neto debe ser entonces en la región interior. Y esto sólo si las corrientes son paralelas, porque de ser antiparalelas, el campo magnético se anularía en un punto externo a la región entre los alambres.

Hemos elegido las corrientes de manera tal que entran al plano de la hoja, lo que se indica con el círculo y una cruz (la parte posterior de una flecha). Llamemos x al punto en el que los campos se anulan. Por simples consideraciones de simetría intuimos que si las corrientes son de igual intensidad el campo se anula en el punto medio, de manera tal que la distancia x debe ser proporcional a p . Como en el punto donde el campo total se anula los campos son vectores opuestos, podemos escribir sus valores absolutos y restarlos. A partir de la expresión (8.52) calculamos la intensidad del campo generado por cada corriente en este punto como

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \quad (8.54)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(L-x)} = \frac{\mu_0 p i_1}{2\pi(L-x)} \quad (8.55)$$

y luego

$$B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{p}{L-x} \right) = 0 \implies x = \frac{L}{p+1} \quad (8.56)$$

Debe notarse que el resultado obtenido coincide con nuestra primera apreciación. En efecto, para $p = 1$ (corrientes de igual intensidad) el campo magnético de la configuración se anula en el punto medio entre los alambres. Por otro lado, para $p \rightarrow \infty$ el campo se anula cada vez más cerca del alambre de menor corriente.

Ejemplo 8.7: el cálculo del campo magnético generado por el alambre del ejemplo 8.5 en parte se simplifica porque al ser infinito posee simetría de traslación. Dicho de otro modo, cualquier punto, fuera del cable, que se elija para calcular el campo magnético está enfrentado al cable. Los alambres finitos y semiinfinitos ya no poseen esta ventaja, de manera tal que conviene analizar con algún detalle estas situaciones. Veamos primero cómo se modifican los resultados cuando el alambre es semiinfinito.

En primer lugar, la ausencia de simetría de traslación implica que habrá dos regiones del espacio bien diferenciadas, una de las cuales contiene cable y la otra está vacía. En la

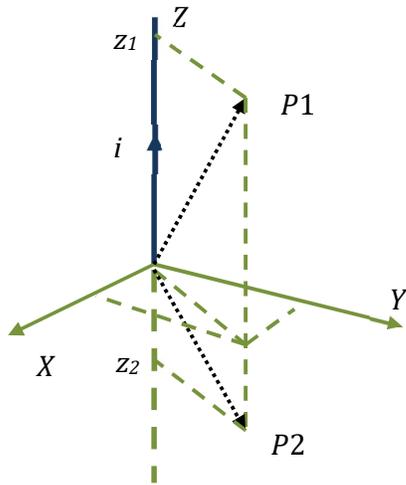


figura 8.10 mostramos el alambre semiinfinito a lo largo del semieje positivo $Z > 0$. Vale la pena recalcar que sólo se muestra la parte del circuito bajo estudio, esto es, la parte recta semiinfinita, pero debe notarse que de alguna manera la corriente debe fluir hacia o desde el alambre semiinfinito al resto del circuito para que la corriente sea estacionaria. Hemos elegido dos puntos, $P1$ y $P2$, de coordenadas por completo arbitrarias, salvo que el primero de los puntos está enfrente al cable y el otro no. Esto significa que en nuestro esquema la coordenada z_1 es positiva y la coordenada z_2 es negativa. Como sea, para ambos puntos sigue valiendo

Fig. 8.10: el alambre semiinfinito se extiende a lo largo del eje $Z > 0$, y transporta una corriente i . A diferencia del punto $P1$, el punto $P2$ no está enfrente a sector alguno del cable que aquí estudiamos. No se muestran los cables que transportan la corriente y permiten

$$i d\vec{\ell}' = i dz' \hat{e}_z \tag{8.57}$$

(porque el elemento diferencial de corriente se toma sobre el alambre, que se extiende a lo largo del eje Z) Podemos escribir el vector posición sucintamente en la forma

$$\vec{r} = (R; 0; (-1)^{m+1} z_m) \quad (m = 1; 2) \tag{8.58}$$

donde hemos escrito $(-1)^{m+1} z_m$ para indicar que se trata de las coordenadas $+z_1$ y $-z_2$. A diferencia del caso del alambre infinito ahora debemos especificar una “altura” porque el plano $z = 0$ queda perfectamente definido como el plano sobre el que se apoya uno de los extremos del cable bajo estudio. Las fuentes se localizan en los puntos

$$\vec{r}' = (0; 0; z') \tag{8.59}$$

de manera tal que resulta

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R; 0; (-1)^{m+1} z_m - z') \tag{8.60}$$

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{bmatrix} \hat{e}_R & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & dz' \\ R & 0 & (-1)^{m+1}z_m - z' \end{bmatrix} = R dz' \hat{e}_\phi \quad (8.61)$$

Cada elemento de corriente $i dz'$ contribuye al campo con una cantidad diferencial

$$d\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R dz'}{[R^2 + ((-1)^{m+1}z_m - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_\phi \quad (8.62)$$

de manera tal que el campo total será

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^\infty \frac{R dz'}{[R^2 + ((-1)^{m+1}z_m - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_\phi \quad (8.63)$$

Trabajemos ahora con la coordenada (positiva) z_1 y hagamos el cambio de variables

$$u = z_1 - z'$$

de manera tal que la expresión (8.63) se transforma en

$$\vec{B}(R) = -\frac{\mu_0}{4\pi} i R \int_{z_1}^{-\infty} \frac{du}{[R^2 + u^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_\phi \quad (8.64)$$

y su solución es inmediata en la forma

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left\{ sg(u) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{u^2}}} \Big|_{-\infty}^0 + sg(u) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{u^2}}} \Big|_0^{z_1} \right\} \hat{e}_\phi \quad (8.65)$$

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z_1^2}}} \right) \hat{e}_\phi \quad (8.66)$$

Un cambio de variables análogo nos permite calcular el campo generado en la región sin cable, para obtener

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{|z_2|^2}}} \right) \hat{e}_\phi \quad (8.67)$$

donde explicitamos que estamos trabajando con el módulo de la coordenada z_2 (que, recordemos, es negativa). De manera sucinta, escribimos la expresión del campo magnético en cualquier punto z_0 como

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(1 + \frac{sg(z_0)}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z_0^2}}} \right) \hat{e}_\phi \quad (8.68)$$

En la figura 8.11 mostramos el comportamiento del campo magnético (8.68) para un valor arbitrario de distancia al cable (o a su prolongación) que hemos tomado como $R = 1$. Obsérvese que en $z = 0$ el campo vale

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \hat{e}_\phi \quad (8.69)$$

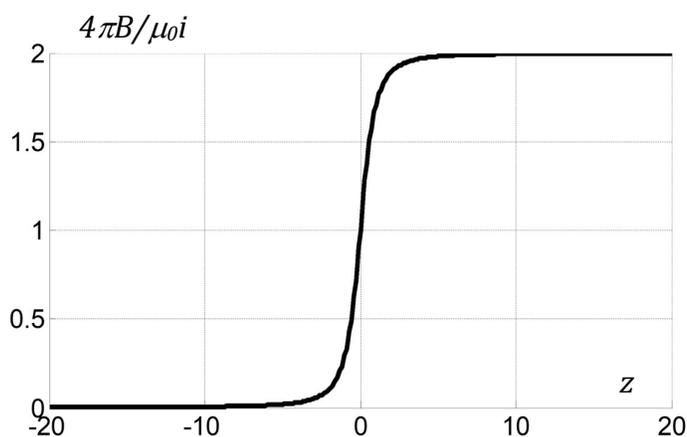


Fig. 8.11: comportamiento del campo magnético generado por un alambre semiinfinito. La curva se construyó para $R=1$. Obsérvese que el campo vale $\mu_0 i / 4\pi R$ en $z=0$ y que tiende a duplicarse para $z \gg R$, en tanto que tiende a cero para $z \rightarrow -\infty$.

en tanto que para $z_0 > 0$ y $z_0 \gg R$ la expresión del campo (8.68) tiende a la forma (8.53) (precisamente, la que corresponde al campo en un punto enfrente a un alambre infinito).

Por el contrario, en el límite $z_0 \rightarrow -\infty$ el campo converge a cero, de manera tal que el paréntesis de la ecuación (8.68) es siempre positivo (lo que indica que el campo apunta siempre en la misma dirección y sentido).

Ejemplo 8.8: en los dos ejemplos anteriores hemos analizado con alguna profundidad las propiedades del campo magnético generado por alambres infinitos y semiinfinitos. Veamos cómo se modifican estas propiedades en el caso de que el alambre sea recto y finito (digamos, que se trate de una parte recta de una espira arbitraria).

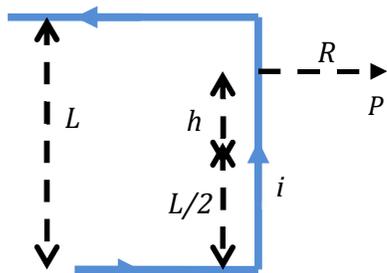


Fig. 8.12: el alambre recto forma parte de una espira arbitraria. La altura h se toma desde el centro del cable recto.

Escribamos los elementos necesarios para calcular el campo magnético generado por el alambre vertical de la figura 8.12 en el punto P . Posiblemente valga la pena recalcar que estamos calculando el campo generado sólo por la parte vertical de la espira de la figura. En primer lugar, como en el caso del alambre infinito, el elemento de corriente se escribe como

$$i d\vec{\ell}' = i dz' \hat{e}_z \tag{8.70}$$

(el elemento diferencial de corriente se extiende a lo largo del eje Z y es independiente de la longitud del cable, lo que habrá de cambiar en todo caso son los

límites de integración). Ahora, el punto campo será

$$\vec{r} = (R; 0; h) \tag{8.71}$$

y los puntos fuentes (aquellos en los que localizamos las fuentes de campo magnético, esto es, las corrientes) se localizan en

$$\vec{r}' = (0; 0; z') \tag{8.72}$$

Luego

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R; 0; h - z') \tag{8.73}$$

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{bmatrix} \hat{e}_R & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & dz' \\ R & 0 & h - z' \end{bmatrix} = R dz' \hat{e}_\phi \tag{8.74}$$

y en total se obtiene

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R dz'}{(R^2 + (h - z')^2)^{3/2}} \hat{e}_\phi =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\frac{h + \left(\frac{L}{2}\right)}{\left(R^2 + \left(h + \frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{h - \left(\frac{L}{2}\right)}{\left(R^2 + \left(h - \frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \right] \hat{e}_\phi \quad (8.75)$$

Observemos que el segundo sumando del corchete de la expresión (8.75), esto es,

$$\frac{\left(\frac{L}{2}\right) - h}{\left(R^2 + \left(h - \frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}}$$

define el coseno del ángulo que en la figura 8.13 hemos llamado ϕ_{SUP} , en tanto que el primer sumando en el corchete de la ecuación (8.75) representa el coseno del ángulo que hemos denominado ϕ_{INF} . En consecuencia, podemos expresar la ecuación (8.75) de una manera alternativa como

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} [\cos \phi_{SUP} + \cos \phi_{INF}] \hat{e}_\phi \quad (8.76)$$

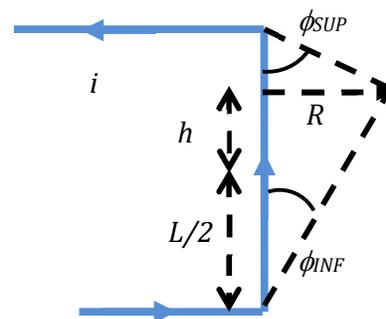


Fig. 8.13: la distancia del punto campo al alambre y las alturas por sobre el centro del mismo definen dos ángulos, que hemos llamado ϕ_{SUP} el de arriba y ϕ_{INF} el de abajo. Los elementos entre corchetes de la ecuación (8.75) son los cosenos de estos ángulos.

La expresión (8.75) (o su equivalente (8.76)) expresa el valor del campo magnético generado por el sector recto vertical de la espira de la figura 8.12 en todo punto intermedio entre sus extremos superior e inferior. Ahora bien, no hay nada en nuestra formulación (específicamente la ecuación (8.75)) que sostenga que el cálculo deba estar restringido a estos límites, esto es, nada dice que no sea válido para valores arbitrarios de la altura h , salvo que posiblemente debamos tener un poco de cuidado con el signo negativo del segundo término del miembro derecho de la ecuación (8.75).

Observemos que para $h \leq L/2$ el corchete de la ecuación (8.75) es definido positivo, de manera tal que el campo magnético es una función que decrece monótonamente con R . Específicamente, para $h = L/2$ el campo magnético se reduce a la forma

$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} \hat{e}_\phi \quad (8.77)$$

y, como es casi evidente, diverge en el límite $R \rightarrow 0$ (como lo hace para todo $h \leq L/2$). En cambio, para $h > L/2$ el campo magnético tiende a cero para $R \rightarrow 0$. En la figura 8.14 mostramos este comportamiento para un valor arbitrario de longitud del cable y dos valores diferentes de h , a saber, $h = L/4$ a la izquierda y $h = 3L/2$ a la derecha.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que el campo magnético generado por el alambre a lo largo de su prolongación es nulo. Esto es, para $R = 0$ y $h > L/2$ el campo magnético generado por el segmento vertical vale cero. Debe notarse que la función $B(R)$ presenta un máximo, como era de esperar para una función que no es constante y tiende a cero para $R \rightarrow 0$ y para $R \rightarrow \infty$.

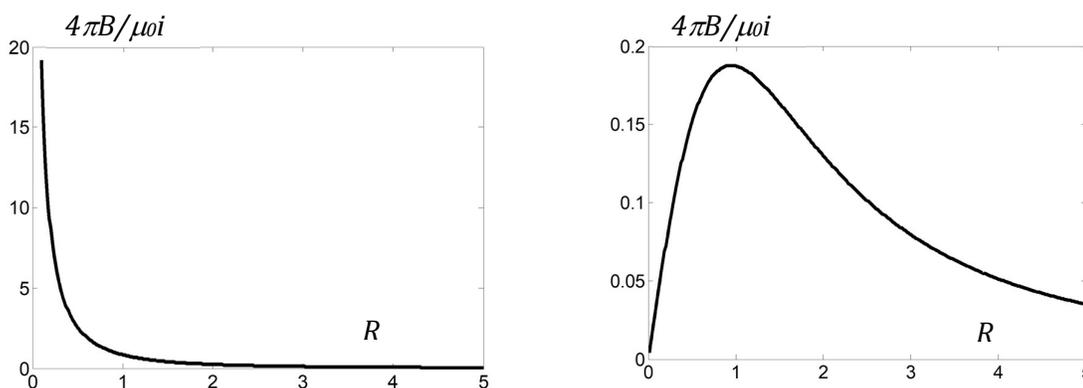


Fig. 8.14: a la izquierda se muestra el campo magnético generado por el alambre vertical de la figura 8.12, para $h=L/4$. A la derecha, el campo para $h=3L/2$. En ambos casos se ha graficado para $L=1\text{m}$. Obsérvese que en la región propia del alambre el campo diverge para $R \rightarrow 0$, en tanto que en la región externa el campo converge.

Ejemplo 8.9: Calculemos el campo magnético generado por la espira circular de radio r_a de la figura 8.15, por la que circula una corriente de intensidad i , en todo punto del eje de simetría perpendicular a su plano. En la figura no se muestran los cables que conectan la espira a la fuente que genera la corriente.

Siguiendo los pasos del método que ya utilizamos en el ejemplo 8.5, determinemos primero las coordenadas genéricas de los puntos campo y fuente, respectivamente. Es casi evidente que resultan

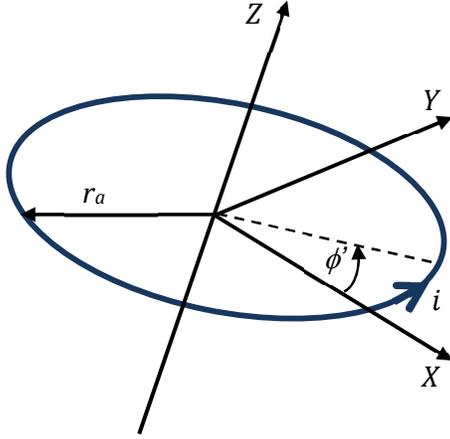


Fig. 8.15: vista en perspectiva de la espira circular de radio r_a del ejemplo 8.5. El eje de simetría al que se hace referencia es el eje Z del sistema de ejes coordenados.

$$\vec{r} = (0; 0; z) \quad (8.78)$$

$$\vec{r}' = (r_a \cos \phi'; r_a \sen \phi'; 0) \quad (8.79)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-r_a \cos \phi'; -r_a \sen \phi'; z) \quad (8.80)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r_a^2 + z^2)^{3/2} \quad (8.81)$$

Tengamos en cuenta que la corriente circula en el sentido \hat{e}_ϕ , de manera tal que los elementos de longitud (en este caso elementos de arco de circunferencia) se escriben como

$$d\vec{\ell}' = r_a d\phi' \hat{e}_\phi = r_a d\phi' (-\sen \phi'; \cos \phi'; 0) \quad (8.82)$$

y el producto vectorial $d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$, teniendo en cuenta las expresiones (8.80) y (8.82), resulta

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = (r_a z \cos \phi'; r_a z \sen \phi'; r_a^2) \quad (8.83)$$

La expresión del vector inducción magnética es ahora inmediata. Usando la definición (8.44) y las expresiones (8.80) y (8.83) obtenemos

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_a z \cos \phi'; r_a z \sen \phi'; r_a^2)}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \hat{e}_z = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (8.84)$$

Obsérvese que, como era de esperar, por su dependencia cuadrática en la variable z el valor del campo magnético \vec{B} es el mismo a ambos lados del plano XY , ya que una espira plana no tiene lado de “arriba” o de “abajo”, de manera tal que el resultado obtenido no hace más que reflejar esta sencilla simetría.

Ejemplo 8.10: Sea la configuración de la figura 8.16, que consiste en una espira plana doblada como dos semicircunferencias de radios mayor r_a y menor r_b , unidas por tramos rectos. Calculemos el campo magnético en el centro de la configuración, marcado con C , cuando por ella circula una corriente de intensidad i .

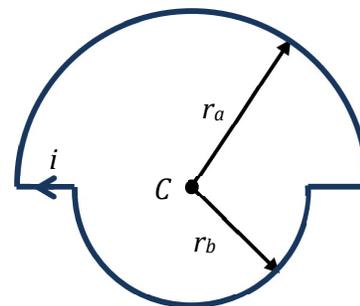


Fig. 8.16: Los campos de cada sector se suman por la particular configuración. Esto tiene que ver con la forma de las líneas de campo magnético, que son circunferencias con centro en cada punto del alambre, y cuyo plano es perpendicular al mismo.

La expresión (8.75) garantiza que el campo magnético en el punto C generado por los sectores rectos de la espira será nulo, de manera tal que sólo debemos calcular las contribuciones de los sectores curvos. Para ello, calculemos el campo generado por media espira de radio R , a lo largo del eje que pasa por el centro (de la espira entera) y es perpendicular a su plano. Llamaremos Z a ese eje. De la expresión (8.84), teniendo en cuenta que en este caso los extremos de integración son $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, resulta

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^\pi \frac{(R z \cos \phi'; R z \sin \phi'; R^2)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \hat{e}_z = \frac{\mu_0 i}{4(R^2 + z^2)^{3/2}} (2 R z \hat{e}_y + R^2 \hat{e}_z) \quad (8.85)$$

Obsérvese que, como era de esperar, el campo ya no apunta sólo en la dirección Z . En el caso de una espira circular completa las contribuciones en las direcciones X e Y provenientes de cada hemisferio son iguales y opuestas y por eso se cancelan. En la figura 8.17 ilustramos esta situación mostrando un corte de la espira de diámetro AD y las contribuciones de esos puntos, B_A y B_D . También se muestran las proyecciones sobre el plano XY de esas contribuciones, que por ser perpendiculares al eje Z hemos denotado como B_\perp .

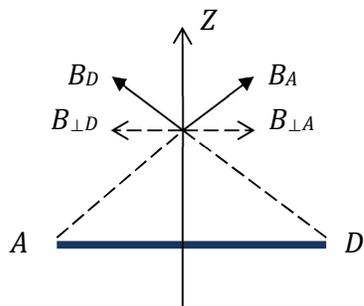


Fig. 8.17: corte de una espira, de diámetro AD .

Al girar 360° alrededor del eje Z todas las contribuciones B_\perp se cancelan mutuamente entre sí, pero las contribuciones B_z se suman todas.

Imaginemos ahora que el diámetro AD de la media espira coincide con el eje X del sistema de referencia en el que se miden las posiciones de los puntos fuente y campo. Esta elección es por completo arbitraria, aunque siempre puede rotarse el sistema de referencia de manera que eje y diámetro coincidan; pero debe tenerse en cuenta que para llegar a la expresión (8.85) el ángulo ϕ' se midió, como es usual, desde el eje X en sentido antihorario.

Cuando se toma sólo media espira las contribuciones sobre el diámetro AD (las únicas sobre el eje X) son iguales y contrarias y se cancelan. En

cambio, las proyecciones sobre el eje Y ahora sólo provienen de un solo hemisferio y su suma no es nula.

De cualquier manera, en el “centro” (esto es, en $z = 0$) de acuerdo a la ecuación (8.85) la única contribución es en la dirección Z . Esto se debe a que la inducción \vec{B} es tangente a las líneas de campo magnético (que, reiteramos, basta decir que tienen el mismo significado que las de campo eléctrico) que son circunferencias cuyo plano es perpendicular en cada punto al alambre. Luego, todas estas circunferencias pasan por el centro y el campo \vec{B} en ese punto tiene la dirección del eje Z .

Regresemos ahora a la configuración de la figura 8.16. Ya hemos adelantado que los alambres rectos no contribuyen al campo en el punto C . El campo generado tanto por la semicircunferencia de radio r_b como por la semicircunferencia de radio r_a tienen en el punto C sentido entrante al papel. Sin necesidad de recurrir al detalle algebraico, basta girar un tornillo de rosca derecha para que avance con la corriente y observar si nuestra mano, al girar el tornillo, entra al (o sale del) plano en el punto C .

En conclusión, la intensidad del campo \vec{B} en el punto C es la suma de los campos que en ese punto generan de las dos semicircunferencias, esto es, recordando que hemos denotado por Z al eje perpendicular al plano de las semiespiras, será

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0 i}{4} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \hat{e}_z \quad (8.86)$$

8.5 – Campo magnético uniforme: solenoides y toroides

La ecuación (8.84) permite evaluar el campo \vec{B} en todo punto del eje de una espira. Por el principio de superposición sabemos que N espiras idénticas, alineadas con un eje

Dos espiras iguales, circunferencias por igual corriente, infinitesimalmente próximas, generan en todo punto de su eje común de simetría un campo magnético que es el doble del que genera una única espira. La superposición de espiras, sin embargo, no puede ser indefinida, porque en algún momento la aproximación de que todas las espiras están a igual distancia del punto deja de ser válida.

común de simetría (al que por comodidad seguiremos llamando Z) y circunferencias por la misma corriente generan un campo N veces más intenso si la distancia al punto en cuestión puede considerarse mucho mayor que la longitud de la superposición de las espiras.

Para decirlo de otra manera, si el arrollado de N espiras tiene longitud ℓ y la distancia al punto en el que se mide el campo es z , la aproximación de que el campo total es N veces el de una espira podrá considerarse aceptable si $z \gg \ell$. Si este no fuera el caso, tendríamos que considerar las diferentes contribuciones de las diferentes espiras situadas a diferentes distancias del punto campo.

A una tal configuración general se la denomina *solenoides*, y consiste en un arrollado de longitud ℓ con n vueltas por unidad de longitud, esto es, en un elemento de longitud dz hay $n \times dz = N \times dz / \ell$ espiras que, circuladas por una corriente i , a lo largo de su eje común de simetría generan un campo

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} n dz \hat{e}_z \quad (8.87)$$

donde r_a es el radio de cada una de las espiras del solenoide, esto es, es el radio del cilindro sobre el que se arrolla el devanado.

Si queremos calcular el valor del campo en un punto interior del solenoide, como por ejemplo el punto el punto z que hemos marcado en la figura 8.18, debemos tener en cuenta la contribución al campo de los lados que quedan a la derecha y a la izquierda del punto, porque las espiras a ambos lados contribuyen de igual manera (véase el comentario al final del ejemplo 8.9). Lo que varía es la distancia al centro de cada espira, de manera tal que si tomamos el origen del eje Z en el extremo izquierdo del solenoide la integral se extiende entre 0 y la coordenada z (suma las contribuciones de las $N \times z / \ell$ espiras de la izquierda) y entre z y ℓ (suma las contribuciones de las $N \times (\ell - z) / \ell$ espiras del lado derecho). Pero sumar entre z y ℓ es lo mismo que sumar entre 0 y $\ell - z$ porque en el fondo se trata de la misma longitud. Obsérvese que de una forma u otra en total sumamos N espiras, pero por cuestiones prácticas elegiremos sumar a la derecha del punto genérico z entre 0 y $\ell - z$. En total, resulta

Para efectuar el cálculo del campo magnético en el interior del solenoide estamos partiendo del campo a lo largo del eje de simetría de una espira circular. De manera tal que el campo calculado sólo es exacto en el eje de simetría axial del solenoide, aunque si $\ell_{\text{SOL}} \gg R_{\text{SOL}}$ suponer que el campo es uniforme en todo el interior es una buena aproximación.

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\frac{z}{(r_a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{L - z}{(r_a^2 + (L - z)^2)^{1/2}} \right) \hat{e}_z \quad (8.88)$$

Obsérvese que el miembro izquierdo del corchete de la ecuación (8.88) es el coseno del ángulo ϕ_{IZQ} en la figura 8.18, en tanto que el miembro derecho es el coseno del ángulo que en la figura 8.18 hemos denominado ϕ_{DER} , de manera tal que el campo se puede escribir como

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_{IZQ} + \cos \phi_{DER}) \hat{e}_z \quad (8.89)$$

Vale la pena mencionar que si bien obtuvimos la expresión (8.89) pensando en un punto dentro del solenoide el resultado es válido para cualquier punto fuera del mismo, porque la única condición que impusimos es que el punto esté sobre el eje de simetría axial

de la configuración de espiras. Para un punto fuera del solenoide los ángulos se toman como en la figura 8.19. Obsérvese que si medimos la coordenada z a partir del extremo derecho del solenoide son inmediatas las relaciones

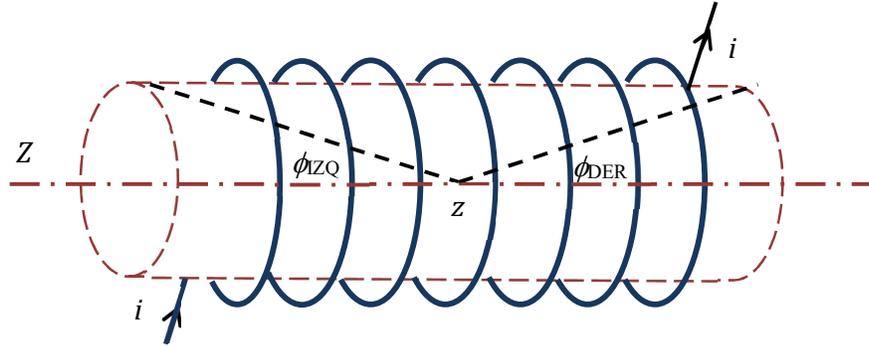


Fig. 8.18: sección de un solenoide de longitud ℓ y n vueltas por unidad de longitud. El radio de cada espira vale r_a y el eje Z es el eje de simetría axial de la configuración. Los ángulos ϕ_{IZQ} y ϕ_{DER} son los que quedan a izquierda y derecha del punto z , respectivamente.

$$\cos \phi_{DER} = \frac{z}{(r_a^2 + z^2)^{1/2}} \tag{8.90}$$

$$\cos \phi_{IZQ} = \frac{L + z}{(r_a^2 + (L + z)^2)^{1/2}} \tag{8.91}$$

Es casi inmediato que en el caso de un solenoide infinito los ángulos ϕ_{IZQ} y ϕ_{DER} que figuran en la expresión (8.89) tienden a cero, de manera tal que el campo de inducción \vec{B} en el eje el un solenoide infinito vale

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{e}_z \tag{8.92}$$

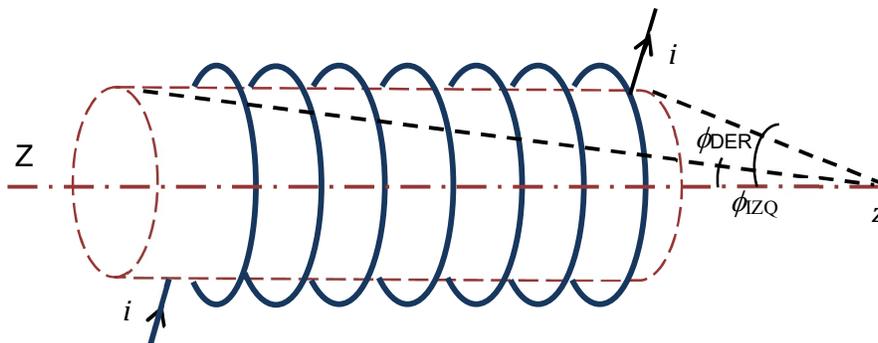


Fig. 8.19: el campo magnético en el punto z , externo al solenoide, tiene la misma forma dada por la expresión (8.62), pero ahora los ángulos ϕ_{DER} y ϕ_{IZQ} se miden externamente.

A primer orden este es el campo en la región media del interior de un solenoide “muy largo”, es decir, un solenoide en el que $\ell \gg r_a$, porque en este caso los dos ángulos son iguales y próximos a cero. Luego, en el interior de un solenoide de estas características, en las regiones internas alejadas de los bordes, el campo magnético es uniforme y viene dado por la expresión (8.92). Similarmente, en las condiciones de solenoide infinito, la suma de todas las contribuciones en el exterior del solenoide es nula, de manera tal que el campo magnético de un solenoide infinito queda confinado en la región interior. En la figura 8.20 mostramos un corte de un solenoide

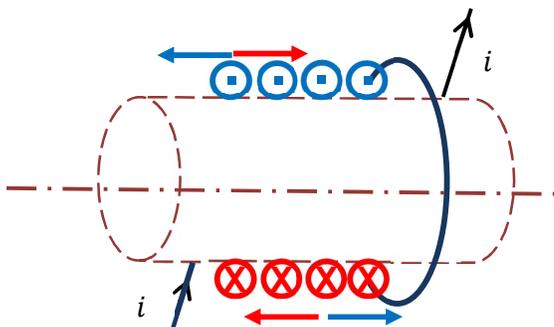


Fig. 8.20: sección de un solenoide en el que se muestran los campos magnéticos de las corrientes en la región externa al solenoide. Si el solenoide es idealmente largo, la suma es nula, es decir, el campo magnético en el exterior es nulo.

infinito, y en colores azul y rojo las corrientes que salen de la hoja y las que entran a la hoja producto de la corriente que circula por las espiras.

La figura 8.21 muestra un *toroide* (o *toro*) de radio R y espiras de radio r_a . Un toroide puede pensarse como un solenoide cerrado sobre sí mismo, y la condición $\ell \gg r_a$ se traduce en la condición $2\pi R \gg r_a$, (de modo tal que la densidad de espiras se escribe como $n = N/2\pi R$) de manera tal que si el radio R del toroide es mucho mayor que el radio de cada espira, el campo magnético en su interior es también uniforme pero ahora en la dirección \hat{e}_ϕ , esto es,

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{e}_\phi \tag{8.93}$$

8.6 – Fuerza y momento sobre una espira

La ecuación (8.26) indica que la fuerza neta sobre una espira por la que circula una corriente i es nula cuando se la coloca en un campo magnético uniforme y constante. En efecto, al integrar la fuerza sobre toda la espira el campo \vec{B} , que por ser uniforme no depende de las coordenadas de integración, puede sacarse de la integral y resulta

$$\vec{F} = i \left[\oint d\vec{\ell} \right] \times \vec{B} = 0 \quad (8.94)$$

porque la integral $\oint d\vec{\ell}$ sobre una curva cerrada C (la espira) es nula. Sin embargo, fuerza neta nula no implica equilibrio mecánico, porque todavía la espira puede rotar. La condición de equilibrio rotacional estático se reduce a pedir que la suma de los momentos de las fuerzas (o torques) respecto a algún punto de referencia sea nula. De manera tal que vale la pena calcular el momento $\vec{\tau}^{(O)}$ de una espira respecto de un punto O en presencia de un campo magnético constante \vec{B} .

De la misma definición del momento de una fuerza, y en función de la expresión (8.26), escribimos

$$d\tau^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (i d\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (8.95)$$

Para simplificar la presentación, supongamos una espira rectangular, de lados a y b , como la de la figura 8.22. Si bien se trata de una configuración particular nos permitirá avanzar en las ideas y conceptos principales.

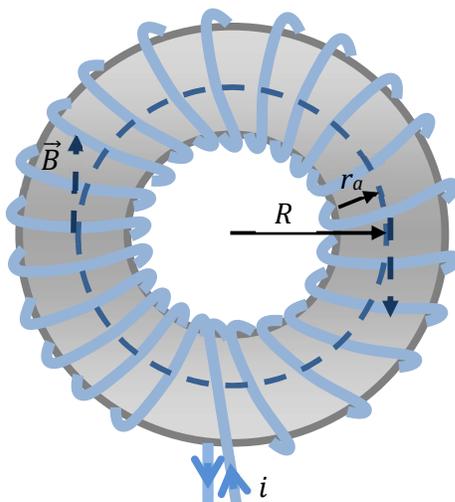


Fig. 8.21: esquema de un toroide ideal en el que se han exagerado las dimensiones, ya que la expresión (8.93) es válida con la condición $R \gg r_a$, donde r_a es el radio de cada espira. Se ha marcado una línea de campo B , que en las condiciones supuestas es constante.

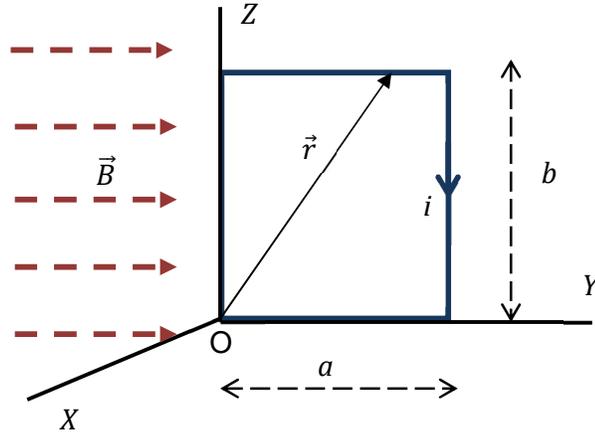


Fig. 8.22: Para evitar fuerzas magnéticas adicionales, suponemos que la corriente llega a la espira por alambres idénticos y paralelos, infinitesimalmente próximos, que no se muestran en la figura. La fuerza y el campo que generan estos alambres son entonces nulos., y la rotación se produce exclusivamente por efectos del campo externo B, que suponemos uniforme.

Supongamos específicamente que el campo magnético es de la forma $\vec{B} = B\hat{e}_y$ que la espira es plana y que se encuentra sobre plano YZ.

Como el momento sobre los lados de la espira paralelos al campo magnético es nulo, el momento neto es el momento sobre los brazos verticales. Sobre el lado vertical derecho es fácil verificar que vale

$$i d\vec{\ell} = i dz (-\hat{e}_z) \tag{8.96}$$

$$\vec{r} = (0; a; z) \tag{8.97}$$

y que en consecuencia resulta

$$\vec{r} \times (i d\vec{\ell} \times \vec{B}) \Big|_{\text{LADO DERECHO}} = -iBz dz \hat{e}_y + iBa dz (-\hat{e}_z) \tag{8.98}$$

Sobre el lado ubicado a lo largo del eje Z las identidades (8.96) y (8.97) se escriben en la forma

$$i d\vec{\ell} = i dz \hat{e}_z \tag{8.99}$$

$$\vec{r} = (0; 0; z) \tag{8.100}$$

y por consiguiente **obtenemos**

$$\vec{r} \times (i d\vec{\ell} \times \vec{B}) \Big|_{\text{LADO IZQUIERDO}} = iBz dz \hat{e}_y \tag{8.101}$$

El momento total respecto del punto O resulta de integrar la suma de las cantidades (8.98) y (8.101), esto es

$$d\tau^{(0)} = iBa \, dz \, (-\hat{e}_z) \Rightarrow \tau^{(0)} = \int_0^b iBa \, dz \, (-\hat{e}_z) = iBab \, (-\hat{e}_z) \quad (8.102)$$

Bajo la acción de este momento, la espira tiende a rotar alrededor del eje Z. Y lo que se ve de la expresión (8.102) es que esta rotación le será impuesta a toda espira por la que circule una corriente de intensidad i y tenga área $A = ab$, porque en ningún lado figuran ni la geometría de la espira ni su localización. En cambio, el torque depende de la orientación de la espira relativa al campo magnético (de hecho, a la ecuación (8.97) llegamos suponiendo una particular orientación del campo \vec{B} respecto a la espira).

Pero notemos que la circulación de una corriente por una espira define un sentido, de manera tal que el plano encerrado por el contorno de la espira puede considerarse una superficie orientada. De hecho, podemos tomar como normal positiva a la superficie la que coincide con el avance de un tornillo de rosca derecha que gire como la corriente.

En el caso de la espira de la figura 8.21 la corriente circula por el plano YZ en sentido horario, de manera tal que un tornillo de rosca derecha avanzaría en la dirección $(-\hat{e}_x)$. Por

Existen diversas reglas prácticas para hallar la orientación de un campo magnético o una superficie respecto a la corriente que circula: la del observador de Ampere, la de la mano derecha, la de la mano izquierda. Tal vez la más intuitiva y familiar sea la del sacacorchos (de Maxwell) que puede ser pensado también como un tornillo de rosca derecha, una lámpara, una canilla, etc.

lo demás, las cantidades que aparecen en la expresión (8.102) que dependen de la espira son su área y la corriente que la circula. Por lo tanto, conviene definir el *momento magnético de una espira* como

$$\vec{m} = i A \hat{n} \quad (8.103)$$

donde A es el área de la espira y \hat{n} la normal positiva. Ahora bien, en la ecuación (8.80) todavía están el valor de la inducción magnética y el sentido $(-\hat{e}_z)$ (que sólo indica hacia donde tiende a girar la espira). Notando que en el caso que hemos presentado el campo \vec{B} es constante

y en la dirección (\hat{e}_y) , y que precisamente el producto vectorial $-\hat{e}_y \times \hat{e}_x = (-\hat{e}_z)$, podemos escribir formalmente

$$\vec{\tau}^{(0)} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.104)$$

Obsérvese que así escrito, el momento $\vec{\tau}$ se refiere a cualquier espira, con cualquier geometría, pero no es válido para cualquier campo magnético, porque arribamos a la ecuación (8.104) suponiendo que el campo externo es constante.

8.7– Algunas propiedades del campo magnético

8.7.1 – Fuerzas y campos magnéticos de corrientes en volumen

Regresemos por un momento a las ecuaciones (8.25) y (8.26), que obtuvimos suponiendo que las corrientes son unidimensionales (que es lo mismo que decir que los cables por los que circula la corriente tienen radio despreciable). Si este no fuera el caso habría que modificar consistentemente la formulación. Notemos que el elemento de corriente puede escribirse en volumen como

$$i d\vec{\ell} = \frac{dq}{dt} d\vec{\ell} = dq \vec{v} = \rho d\mathcal{V} \vec{v} = \vec{j} d\mathcal{V} \quad (8.105)$$

donde $d\mathcal{V}$ representa un elemento diferencial del volumen donde se desarrollan las corrientes y ρ es la densidad volumétrica de carga. De esta manera, la fuerza que un campo externo \vec{B} (cuyas fuentes están en los puntos \vec{r}') sobre una distribución de corrientes \vec{j} (ubicadas en los puntos campo) será

$$d\vec{F} = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}') d\mathcal{V} \quad (8.106)$$

en tanto que el campo magnético generado por la distribución de corrientes en volumen puede evaluarse a partir de la ley de Biot-Savart (8.39) teniendo en cuenta la expresión (8.105) como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa \iiint \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\mathcal{V} \quad (8.107)$$

Recordemos que el vector \vec{j} representa una densidad de corriente, esto es, intensidad de corriente por unidad de superficie. En sí misma representa un promedio pesado de la cantidad de movimiento de las cargas en un dado conductor. Obsérvese que de su misma definición, $\vec{j} = \rho \vec{v}$, resulta que la densidad crece con el número de cargas por unidad de volumen n ($\rho = nq$) y con su velocidad. Claramente, en la hipótesis electrostática la densidad de corriente es nula.

donde la integral se realiza sobre todo el volumen que contiene a las corrientes (precisamente los puntos fuente, los que están primados, por eso la integral resulta en una función que depende de la variable que no se ha integrado, esto es, el punto campo \vec{r}).

8.7.2 – la divergencia del vector inducción

En la expresión (3.2) postulamos que, dado cualquier campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$, podemos calcular su flujo Φ como

$$\Phi = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS \quad (8.108)$$

También interpretamos el flujo de un campo vectorial como una medida del balance entre la cantidad de fuentes y sumideros (en el interior del volumen encerrado por la superficie orientada S) a los que el campo está asociado. Pensemos en las líneas de campo eléctrico: “nacen” en las cargas positivas y “mueren” en las cargas negativas, de manera tal que si dentro del volumen considerado el número de cargas positivas fuera igual al número de cargas negativas, habría tantas líneas de campo entrantes al volumen como líneas de campo salientes. Si la carga neta dentro del volumen considerado es nula, hay tantas líneas de campo entrantes como salientes y el flujo es nulo.

El flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada puede ser no nulo porque siempre podemos encerrar cargas unitarias, simples ¿Pero qué ocurre con el campo magnético? Para responder esta pregunta pensemos en los imanes más simples, el imán tipo barra, que son los que se encuentran, por ejemplo, en forma de plaquetas encapsuladas en los sistemas de cierre de algunas puertas de alacenas, o en las agujas magnéticas, como se ilustra en la figura 8.23.

De la misma manera que las trayectorias de una carga de prueba ponen en evidencia las líneas de campo eléctrico generado por una determinada configuración de cargas, las limaduras de hierro ponen en evidencia las líneas de campo de una determinada configuración magnética. En la figura 8.24 mostramos las líneas de campo magnético de una barra de imán. Las líneas salen de un extremo y se dirigen al otro. Los extremos de un imán se denominan polos magnéticos y arbitrariamente se los llama polo norte y polo sur. Se los reconoce diciendo que las líneas de campo nacen en un polo norte y se dirigen al polo sur, como también se ilustra en la figura 8.24.

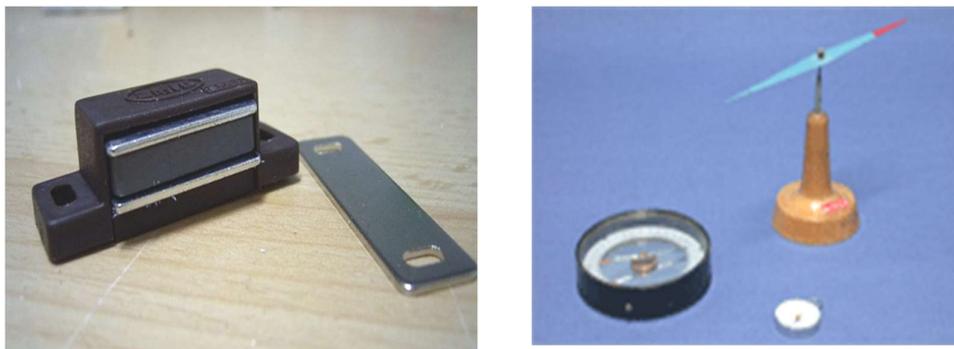


Fig. 8.23: a la izquierda se muestran imanes en barra encapsulados (las líneas plateadas en la caja oscura) en un dispositivo de cierre de puertas de alacena. A la derecha se pueden ver una aguja magnética y una brújula.

Si disponemos de un dipolo eléctrico podemos separar las cargas y observar, carga de prueba mediante, cómo son las líneas de campo de cargas aisladas. Si cortamos un imán y pretendemos hacer lo mismo fracasamos redondamente, porque si cortamos un imán en dos pedazos tenemos dos imanes, no dos polos magnéticos. Y cualquier fraccionamiento que pretendamos jamás habrá de derivar en monopolos magnéticos, sino que siempre habrá tantos imanes como fracciones, con las líneas de campo naciendo en

un polo y muriendo en el opuesto. En conclusión, sin importar cuál sea la superficie cerrada con la que trabajemos, el flujo de campo magnético es siempre nulo, esto es,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.109)$$

A la misma conclusión llegaríamos si en lugar de fraccionar imanes encerrásemos espiras, porque ya hemos visto que las líneas de campo son cerradas, de manera tal que siempre habrá igual número de líneas que entran a la superficie como las que salen. Pero si el flujo de un campo es nulo a través de cualquier superficie, también es nula su divergencia (véase la interpretación de la divergencia de un campo vectorial en el apéndice) en el volumen encerrado por esa superficie. Luego, concluimos que la divergencia del campo \vec{B} es nula, que matemáticamente expresamos como

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.110)$$

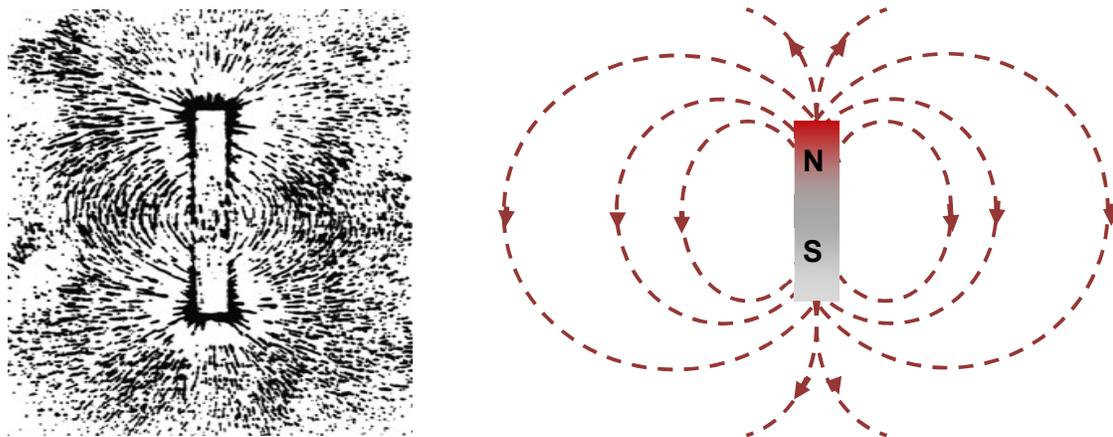


Fig. 8.24: a la izquierda se muestra una barra de imán y las líneas de campo magnético expuestas por limaduras de hierro. A la derecha (figura b) se esquematizan las líneas de campo, mostrando que nacen en el polo norte y llegan al polo sur.

Los campos con la propiedad de tener divergencia nula se llaman *solenoidales* y son, precisamente, aquellos que tienen líneas de campo cerradas.

8.7.3 – La circulación y el rotor del vector inducción

El teorema de Gauss no acerca demasiada información a la hora de evaluar el campo magnético de una dada configuración de cargas porque el flujo de campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Pero la propiedad $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ trae aparejadas a su vez interesantes consecuencias. En particular, que las líneas de campo magnético se

cierran alrededor de sus fuentes, esto es, abrazan corrientes. Recordemos que una línea de campo es una curva que en todo punto es tangente al vector campo, de manera tal que si integrásemos los valores del campo magnético a lo largo de una línea de campo deberíamos obtener una función que sea proporcional a la corriente que esa línea de campo encierra.

La operación de integrar los valores de un campo vectorial arbitrario $\vec{A}(\vec{r})$ alrededor de una dada curva cerrada C se denomina *circulación del campo vectorial* (a lo largo de esa curva cerrada) y se expresa como

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} \quad (8.111)$$

En función de lo que hemos planteado hasta aquí, estamos postulando que si calculamos la circulación del campo de inducción debemos obtener como resultado alguna función de la corriente. A modo de ejemplo muy sencillo, calculemos la circulación del vector inducción generado por la corriente estacionaria que circula por un alambre recto e infinito, a lo largo de una de sus líneas de campo (por ejemplo, la de radio R que mostramos en la figura 8.25). Sabemos que debe ser de la forma

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = F(i) \quad (8.112)$$

porque la línea de campo magnético encierra a la corriente que genera el campo. Por su lado, el campo \vec{B} es de la forma

$$\vec{B} = B_\phi(R) \hat{e}_\phi$$

de manera tal que la circulación del campo se expresará como

$$\int_0^{2\pi} B_\phi(R) \hat{e}_\phi \cdot R d\phi \hat{e}_\phi = F(i) \Rightarrow B(R) = \frac{F(i)}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (8.113)$$

En la expresión (8.113) hemos explicitado que la integral se realiza sobre una curva cerrada, que en este caso es una circunferencia de radio R , por eso integramos entre 0 y 2π . Por simple comparación con la identidad (8.53) deducimos que, al menos en este caso, debe ser

$$F(i) = \mu_0 i \quad (8.114)$$

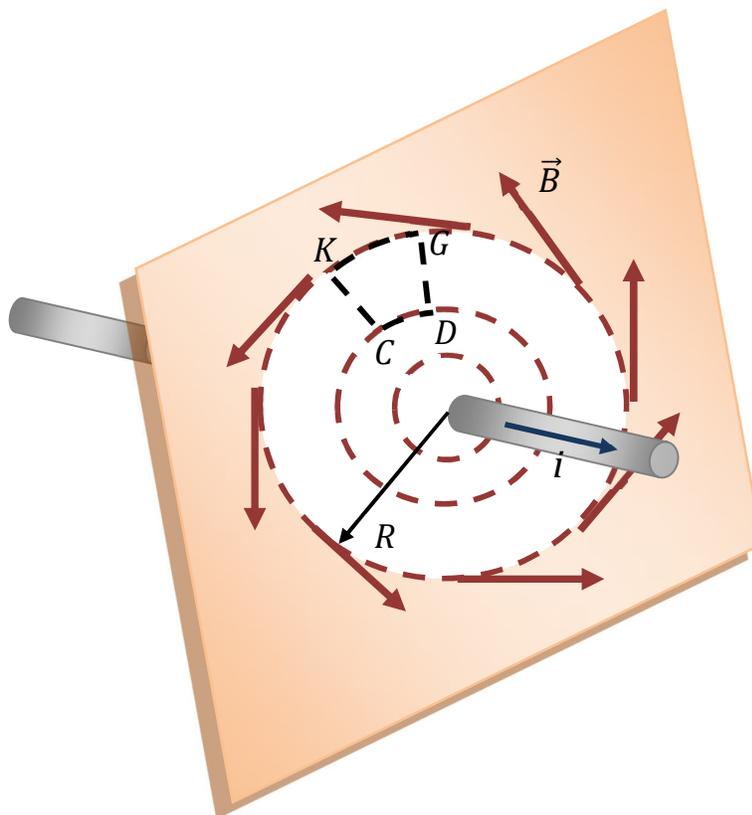


Fig. 8.25: La circulación del vector inducción magnética a lo largo de una línea de campo produce una función de la corriente que esa línea de campo encierra en su parte interior. La circulación a lo largo del circuito cerrado KCDGK es nula, y como cualquier curva puede construirse a partir de caminos infinitesimales como los que componen el recorrido KCDGK, se concluye que la circulación del campo magnético es nula a lo largo de toda curva cerrada que no encierre a la corriente que origina el campo.

Nosotros hemos calculado la circulación del vector \vec{B} a lo largo de una línea de campo. La integral es también particularmente sencilla a lo largo del circuito KCDGK de la figura 8.25. Obsérvese que como la circulación involucra un producto escalar, las contribuciones de los lados KC y DG son ambas nulas, porque el campo es perpendicular a esos lados. Por otro lado, por la particular dependencia del campo con la distancia al cable, las contribuciones a la circulación de los arcos CD y GK son iguales en módulo pero opuestas en signo, de manera tal que

$$\int_{CD} \frac{\mu_0 i}{2\pi R_{CD}} \hat{e}_\phi \cdot R_{CD} d\phi (-\hat{e}_\phi) + \int_{GK} \frac{\mu_0 i}{2\pi R_{GK}} \hat{e}_\phi \cdot R_{GK} d\phi \hat{e}_\phi = 0 \quad (8.115)$$

En síntesis, la circulación del campo a lo largo del circuito KCDGK es nula. Y como todo circuito cerrado puede construirse a partir de segmentos y arcos elementales, concluimos que la circulación del campo a lo largo de cualquier curva cerrada será nula si esa curva no encierra corriente alguna, y será proporcional a $F(i)$ en caso contrario. Y lo

realmente destacable es que la función $F(i)$ es siempre la misma, es decir, para toda curva cerrada C siempre vale

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_c \tag{8.116}$$

donde i_c es la corriente concatenada o abrazada por la curva cerrada C . En nuestro ejemplo la corriente concatenada es simplemente la corriente i que circula por el cable. En los próximos ejemplos mostraremos con algún detalle cómo se aplica este resultado fundamental, conocido como *teorema de Ampere*. Pero por ahora mencionemos algunos aspectos centrales relacionados con este teorema.

En primer lugar, la corriente concatenada debe ser estacionaria, caso contrario la expresión (8.116) no es válida. Como veremos en el capítulo 11, cuando se abandona la hipótesis magnetostática la ecuación (8.116) se modifica en un sentido fundamental. En segundo lugar, la curva de la integral (8.116) (a la que suele denominarse curva de Ampere o curva amperiana) es por completo arbitraria, con la sola condición de que debe ser cerrada. Si no abrazara corriente alguna, hemos demostrado que la integral es nula. En la figura (8.26) mostramos dos curvas C_1 y C_2 . Si bien ambas curvas son cerradas y sus interiores están atravesados por líneas de campo magnético, la circulación de \vec{B} a lo largo de C_1 será $\mu_0 i_c$, en tanto que la circulación del campo \vec{B} a lo largo de C_2 será cero. En

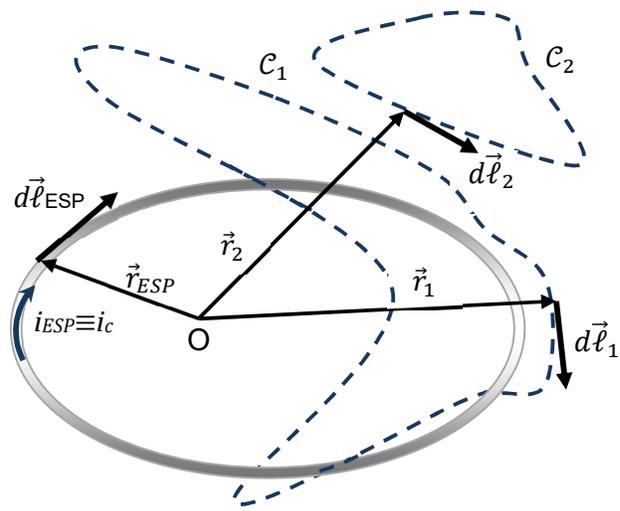


Fig. 8.26: el teorema de Ampere se aplica a toda curva cerrada C . La circulación del campo magnético a lo largo de esta curva será nula si la curva no encierra corriente alguna (como por ejemplo la curva C_2).

tal sentido, recordemos que el campo magnético generado por la espira viene dado por la ley de Biot-Savart (8.40), que en este caso, en la posición \vec{r}_1 de la curva C_1 se escribe como

$$\vec{B}_{ESP}(\vec{r}_1) = \kappa \oint_{ESP} \frac{[i_{ESP} d\vec{\ell}_{ESP} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_{ESP})]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_{ESP}|^3} \tag{8.117}$$

en tanto que la circulación del campo a lo largo de C_1 se define a partir de la expresión (8.116)

$$\oint_{C_1} \vec{B}_{ESP} \cdot d\vec{\ell}_1 = \mu_0 i_{ESP} \quad (8.118)$$

Finalmente, notemos que a partir de la identidad (8.116) podemos calcular el flujo del rotor del campo \vec{B} como

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 i = \mu_0 \iint_{S(C)} d\vec{S} \cdot \vec{j} \quad (8.119)$$

de manera tal que, como las superficies $S(C)$ del segundo y cuarto término son las mismas, podemos igualar para obtener formalmente

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (8.120)$$

Vale la pena mencionar que hemos calculado el flujo del rotor a través de la superficie

Si bien la utilidad práctica del teorema de Ampere a la hora de calcular campos magnéticos se reduce a configuraciones de corriente de muy alta simetría, no debe perderse de vista que tiene validez general. Por lo demás, las ecuaciones (8.116) y (8.120) sólo son válidas si las corrientes son estacionarias, caso contrario se viola el principio de conservación de la carga.

(abierta) que se apoya sobre una curva arbitraria C (la segunda integral de la expresión (8.119)) y que la fuente del rotor del campo de inducción (en situación estática) es la densidad de corriente \vec{j} .

Por último, mencionemos que el teorema de Ampere tiene alguna familiaridad con el teorema de Gauss, por lo menos en el sentido de que es de validez absolutamente general pero su aplicación práctica se reduce a pocos casos es los que se conoce la simetría del campo \vec{B} antes de resolver el problema. De otra manera la ley de Ampere se torna engorrosa para el cálculo y prácticamente es inaplicable para hallar la forma del campo, como lo es el teorema de Gauss para el campo eléctrico

cuando la configuración de cargas no tiene una simetría bien definida.

Ejemplo 8.11: Entre las ecuaciones (8.112) – (8.115) hemos recalculado el campo generado por el alambre infinito del ejemplo 8.5 usando el teorema de Ampere. Si quisiéramos recuperar los resultados obtenidos para el alambre semiinfinito o el de longitud finita de los ejemplos 8.7 y 8.8 nos enfrentaríamos al problema de que, precisamente, ni son infinitos ni son cerrados. En ambos ejemplos hemos insistido en que ignorábamos las contribuciones al campo del resto del circuito, pero eso no significa que esas contribuciones no existan, de modo tal que al calcular el campo en un particular punto del espacio sólo estábamos contando aisladamente la contribución de nuestro elemento. Pero, de nuevo, debido a las contribuciones de todo el circuito, posiblemente el campo total en ese punto particular sea diferente, y si quisiéramos calcular la circulación del campo de inducción a lo largo de cualquier curva cerrada posiblemente no conoceríamos en detalle el valor del campo completo.

En el caso de un alambre infinito este problema se soslaya porque una tal distribución de corrientes puede considerarse como una espira que se cierra en el infinito, y en consecuencia la contribución de los otros cables es nula porque se hallan a distancia infinita de cualquier punto particular de interés en los que calculamos el campo magnético.

Para comprender la dificultad a la que nos enfrentamos, calculemos el campo \vec{B} en el centro geométrico de la espira cuadrada de la figura 8.27. Como conocemos el campo magnético generado por una corriente estacionaria en el punto medio de un alambre finito de longitud L (ecuación (8.75) para $h = 0$) podemos multiplicar por 4, reemplazar la distancia R por $L/2$, y obtenemos sin más el resultado buscado. Obsérvese que por el sentido que le hemos asignado a la corriente, el campo generado por cada brazo es entrante a la hoja, esto es, en el sentido \hat{e}_z de la figura 8.27, es decir

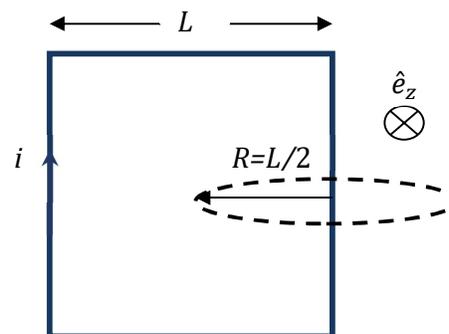


Fig. 8.27: no hay una única manera de calcular el campo magnético en el centro de la espira cuadrada de lado L del ejemplo 8.11. Pero si se usa el teorema de Ampere debe ponerse especial cuidado en las contribuciones al campo en la circulación por toda curva cerrada (por ejemplo, la que se muestra en el brazo derecho).

$$\vec{B}(R) = 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi \left(\frac{L}{2}\right)} \frac{L}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \hat{e}_z \quad (8.121)$$

y en total resulta

$$\vec{B}\left(\frac{L}{2}\right) = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 i}{\pi L} \hat{e}_z \quad (8.122)$$

Si ahora quisiéramos aplicar la ley de Ampere, circulando cada cable a lo largo de una curva cerrada (como la curva punteada de la figura 8.27) y después multiplicar por 4 cometeríamos un error insalvable, porque habría que considerar el campo completo en cada punto de la curva punteada de la figura. De hecho, si para cada rama de la espira incorrectamente escribiéramos

$$\int_0^{2\pi} B\left(\frac{L}{2}\right) \hat{e}_z \cdot \frac{L}{2} d\phi \hat{e}_z = \mu_0 i \quad (8.123)$$

y multiplicáramos por 4, obtendríamos el resultado

$$\vec{B}\left(\frac{L}{2}\right) = 4 \frac{\mu_0 i}{\pi L} \hat{e}_z \quad (8.124)$$

Como es fácil ver, los resultados no coinciden. De hecho, el valor (8.124) es $\sqrt{2}$ veces mayor que el resultado (8.122), y esto se debe a que en el cálculo de la circulación del campo magnético en la ecuación (8.123) no hemos considerado el campo magnético total que circula la curva cerrada punteada. El valor correcto, sin dudas, es el que obtuvimos en la expresión (8.122). El mismo problema tendríamos si quisiéramos calcular el campo magnético generado, por ejemplo, por un alambre semiinfinito: tendríamos que agregar las contribuciones de los alambres que traen y llevan la corriente, y aun si conociéramos en detalle su geometría nadie garantiza que pudiéramos avanzar con el cálculo.

Al calcular la circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada deben tenerse en cuenta las contribuciones de todas las corrientes de un circuito. El caso del alambre infinito es particularmente sencillo porque es parte de una espira (infinita) que se cierra a distancia también infinita. En consecuencia, el resto del circuito no aporta al campo a lo largo de la curva de integración.

Ejemplo 8.12: Un alambre infinito, cilíndrico y de radio r_b , se halla a lo largo del eje Z y tiene una densidad de corriente dada por $\vec{j}(R') = \alpha i_0 R' \hat{e}_z$, donde α es una constante positiva. Calculemos el valor de la inducción magnética en todo punto del espacio.

Recordemos ante todo que la densidad de corriente \vec{j} es una medida de la cantidad de corriente i por unidad de superficie, de manera tal que $i = \iint \vec{j}(R') \cdot d\vec{S}'$. De esta manera, el teorema de Ampere lo escribimos como

$$\oint_C \vec{B}(R) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{j}(R) \cdot d\vec{S}' \quad (8.125)$$

donde \mathcal{C} es la curva cerrada definida por la línea de campo y $S(\mathcal{C})$ es la superficie que se apoya sobre esa curva \mathcal{C} .

Ahora bien, un cilindro conductor puede pensarse como una distribución homogénea y cilíndricamente simétrica de alambres, de manera tal que la simetría del campo \vec{B} de un alambre se conserva para un cilindro. Luego, debe ser $\vec{B} = B_\phi(R) \hat{e}_\phi$.

Integrando ahora el miembro izquierdo de la expresión (8.125) a lo largo de cualquier circunferencia de radio R obtenemos

$$2\pi R B_\phi(R) = \mu_0 \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{j}(R') \cdot d\vec{S}' \quad (8.126)$$

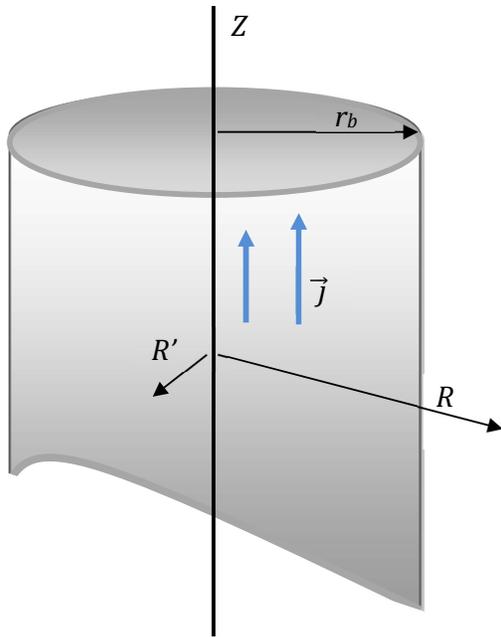


Fig. 8.28: corte del cilindro infinito del ejemplo 8.8. La densidad de corriente es tal que su valor se incrementa desde el eje (donde es nula) hacia fuera del cilindro.

La integral del miembro izquierdo es inmediata teniendo en cuenta que

$$d\vec{S}' = R' dR' d\phi' \hat{e}_z \quad (8.127)$$

de manera tal que resulta

$$\vec{j}(R') \cdot d\vec{S}' = \alpha i_0 R'^2 dR' d\phi' \quad (8.128)$$

Luego, para $R < r_b$ escribimos

$$\begin{aligned} 2\pi R B_\phi(R) &= \mu_0 i_c = \\ &= \mu_0 \alpha i_0 \int_0^R R'^2 dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \end{aligned} \quad (8.129)$$

de donde se obtiene

$$B_\phi(R) = \frac{\mu_0 \alpha i_0}{3} R^2 \quad (R < r_b) \quad (8.130)$$

Cualquier línea de campo de radio $R > r_b$ encierra toda la corriente que circula por el alambre, que a partir de su misma definición resulta

$$i = \alpha i_0 \int_0^{r_b} R'^2 dR' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{2\pi \alpha i_0}{3} r_b^3 \quad (8.131)$$

y en consecuencia, por directa aplicación del teorema de Ampere obtenemos

$$2\pi R B_\phi(R) = \mu_0 i_c = \mu_0 \frac{2\pi\alpha i_0}{3} r_b^3 \Rightarrow B_\phi(R) = \frac{\mu_0\alpha i_0}{3R} r_b^3 \quad (R > r_b) \quad (8.132)$$

La dependencia del campo magnético con la distancia radial se muestra en la figura 8.29. Obsérvese que en $R = r_b$ las expresiones (8.130) y (8.132) coinciden en el valor

$$B_\phi(R = r_b) = \frac{\mu_0\alpha i_0}{3} r_b^2 \quad (8.133)$$

de manera tal que el campo magnético es continuo en la superficie límite del cilindro. Es de notar que esta dependencia es idéntica a la que obtuvimos al calcular el campo eléctrico de una distribución volumétrica de cargas en un casquete cilíndrico (véanse el ejemplo 3.2 y el gráfico asociado).

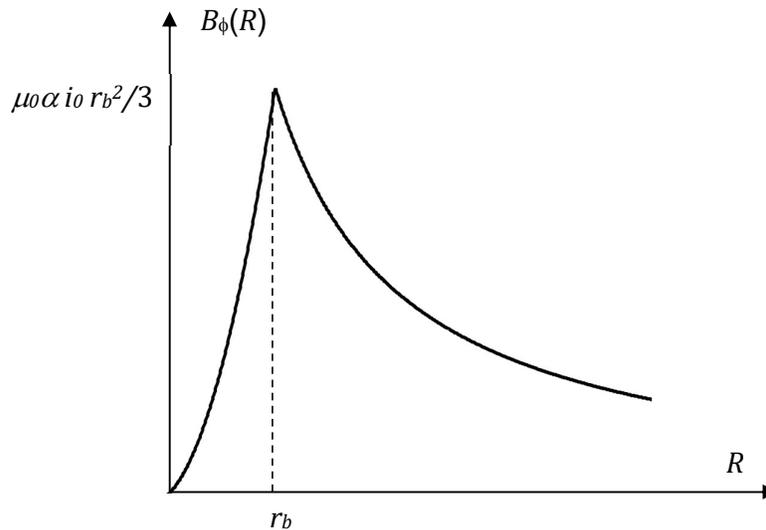


Fig. 8.29: dependencia radial de la inducción magnética en función de la distancia radial para una distribución de corrientes en volumen como la del ejemplo 8.10. Obsérvese que en $R=r_b$ los valores de campo interior y exterior se acoplan.

Ejemplo 8.13: Supongamos ahora una distribución de corrientes, superficial y homogénea, cuya densidad sea \vec{j} , circulando sobre un plano infinito como el de la figura 8.30. Calculemos el campo magnético generado por tal distribución en todo punto del espacio.

Ante todo, la densidad superficial de corriente \vec{g} se define de modo análogo a la densidad volumétrica de corriente, \vec{j} . En este caso será

$$\vec{g} = \sigma \vec{v} \tag{8.134}$$

Del mismo modo que consideramos la intensidad de corriente que atraviesa la sección transversal de un conductor, S , como

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{8.135}$$

definimos la intensidad de corriente que atraviesa una curva C apoyada sobre una superficie como

$$i = \int_C \vec{g} \cdot d\ell \hat{n} \tag{8.136}$$

donde \hat{n} es un versor normal a la curva C y paralelo a la superficie en la que esta curva se apoya. Claramente, la unidad MKS de la densidad superficial de corriente es A/m .

El campo magnético generado por una distribución superficial homogénea de corrientes sobre un plano infinito tiene una marcada similitud con el campo eléctrico generado por una distribución superficial homogénea de cargas. De hecho, dos planos infinitos paralelos, circulados por corrientes antiparalelas, producen un campo magnético nulo en la región externa a los planos.

Notemos ahora que cada línea de corriente puede considerarse como un alambre infinito, de manera tal que sus líneas serán circunferencias concéntricas centradas en la particular línea que se elija. En consecuencia, a cualquier altura sobre el plano las líneas de campo, como composición de todas las contribuciones, serán rectas paralelas al plano y perpendiculares a la dirección de las corrientes, pero el campo por encima y por debajo del plano necesariamente debe tener sentidos opuestos. Todavía más, como el plano es infinito no hay manera de distinguir una posición de otra a lo largo de la dirección contenida en el plano y perpendicular a las corrientes, de manera tal que el vector inducción debe ser constante a lo largo

cualquiera de sus líneas de campo. Por lo demás, la circulación de este campo a lo largo de la curva $adcb$ de la figura 8.30 sólo aporta valores no nulos en las ramas horizontales. Si llamamos \hat{e}_x a la dirección del campo y tomamos $\vec{g} = g_0 \hat{e}_y$, parece evidente que estas contribuciones habrán de escribirse como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_b^a B_{SUP} \hat{e}_x \cdot dx \hat{e}_x + \int_d^c B_{INF} (-\hat{e}_x) \cdot dx (-\hat{e}_x) \tag{8.137}$$

Parece evidente que el campo arriba y abajo es el mismo, salvo por la orientación. Si llamamos B a su módulo, L a la longitud de los segmentos horizontales y $g_0 = iL$ (véanse la figura 8.30 y la ecuación (8.136)) resulta de inmediato

$$2BL = \mu_0 i_c = \mu_0 g_0 L \tag{8.138}$$

y en síntesis resulta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 g_0}{2} \operatorname{sgn}(z) \hat{e}_x \tag{8.139}$$

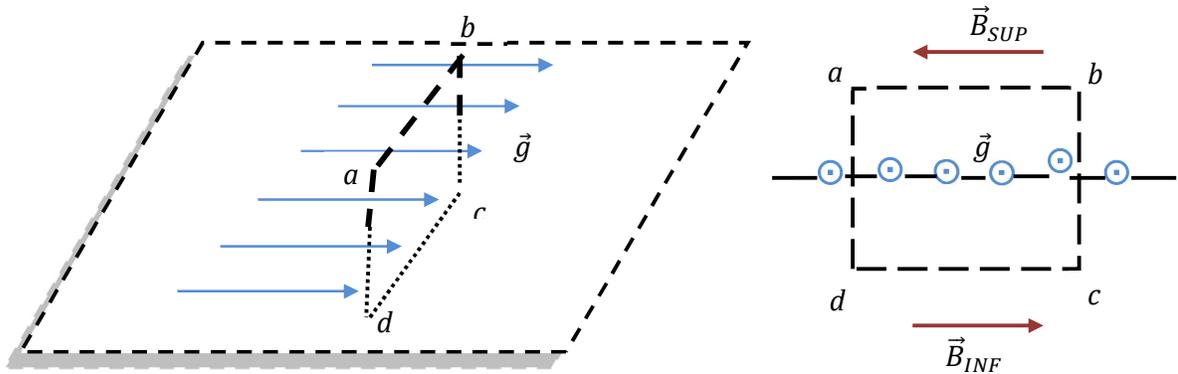


Fig. 8.30: a la izquierda se muestra el plano infinito circulado por una distribución de corrientes en superficie, y la curva amperiana $adcb$. A la derecha se observa un corte del plano y de la curva amperiana. Obsérvese que por encima y por debajo del plano el campo magnético tiene sentidos opuestos.

Un par de comentarios se hacen necesario: en primer lugar, el campo magnético generado por un plano infinito es constante, es decir, es independiente de la altura por sobre el plano. En este sentido es absolutamente análogo al campo eléctrico generado por una distribución superficial uniforme de cargas (distribuidas en un plano infinito). Por otro lado, la densidad superficial de corriente \vec{g} (al igual que la densidad volumétrica de corriente \vec{j}) es una cantidad vectorial pero su integración (en línea) es escalar, pues de hecho es una intensidad de corriente.

Ejemplo 8.14: Supongamos un disco de radio R cargado con densidad superficial de cargas σ y girando con velocidad angular constante ω alrededor de su eje de simetría axial. Hallemos la expresión del campo magnético que genera esta configuración de cargas a lo largo del eje de rotación del disco.

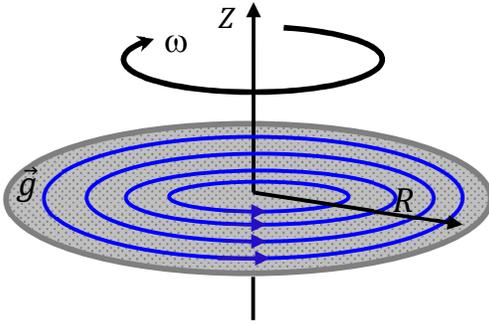


Fig. 8.31: disco rotante cargado en superficie. Las cargas en rotación provocan una densidad superficial de corrientes.

Notemos ante todo que al rotar las cargas del disco se ven como una densidad de corriente de valor

$$\vec{g} = \sigma' \omega' r' \hat{e}_\phi \quad (8.140)$$

que en coordenadas cartesianas escribimos como

$$\vec{g} = \sigma' \omega' r' (-\text{sen}\phi'; \text{cos}\phi'; 0) \quad (8.141)$$

Por lo pronto, dado que los puntos campo son de la forma

$$\vec{r} = (0; 0; z) \quad (8.142)$$

y los puntos fuente de la forma

$$\vec{r}' = (r' \text{cos}\phi'; r' \text{sen}\phi'; 0) \quad (8.143)$$

resultan de inmediato las expresiones

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r'^2 + z^2)^{3/2} \quad (8.144)$$

$$\begin{aligned} \vec{g} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\sigma' \omega' r' \text{sen}\phi' & \sigma' \omega' r' \text{cos}\phi' & 0 \\ -r' \text{cos}\phi' & -r' \text{sen}\phi' & z \end{bmatrix} = \\ &= (\sigma' \omega' r' z \text{cos}\phi'; \sigma' \omega' r' z \text{sen}\phi'; \sigma' \omega' r'^2) \end{aligned} \quad (8.145)$$

Si aplicamos la expresión (8.107) para una densidad superficial de corrientes obtenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} r' dr' d\phi' \frac{\sigma' \omega'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} (r' z \text{cos}\phi'; r' z \text{sen}\phi'; r'^2) \quad (8.146)$$

Parece evidente ahora que las dos primeras integrales se anulan (porque estamos integrando $\sin \phi$ y $\cos \phi$ entre 0 y 2π). La integración de la tercera componente del vector de la ecuación (8.146) resulta en la expresión del campo magnético que estamos buscando, esto es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi \int_0^R r'^3 \frac{\sigma' \omega'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \hat{e}_z = \frac{\mu_0}{2} \sigma' \omega' \left[\sqrt{R^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{e}_z \quad (8.147)$$

8.8 – Superposición de campos. Conservación de la energía

Nuestra observación (sección 8.2) de que el ángulo de deflexión de una carga eléctrica depende de su estado de movimiento sólo si está en presencia de un campo magnético, parece sugerir que los campos eléctrico y magnético son independientes (aunque no necesariamente descorrelacionados). Luego, la fuerza que experimenta una carga eléctrica q en presencia de un campo eléctrico externo y un campo magnético resulta de la superposición de las fuerzas eléctrica y magnética y viene dada por la expresión

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.148)$$

que se conoce como *fuerza de Lorentz*.

Un par de observaciones se hacen necesarias. En primer lugar, la cantidad $\vec{v} \times \vec{B}$ no debe interpretarse como un campo eléctrico, ni siquiera en el caso en que la fuerza de Lorentz sea nula; sin embargo, como veremos más adelante, los campos magnéticos variables son fuentes de fenómenos eléctricos y los campos eléctricos variables son fuentes de fenómenos magnéticos. Por otro lado, es evidente que las unidades Tm/seg y V/m son equivalentes.

Ahora bien, la potencia requerida para mantener a la carga q en movimiento, a partir de la ecuación (8.148), se expresa como

Los campos \vec{E} y \vec{B} que figuran en la ley de Lorentz son externos, no se trata de los generados por la carga q . Por lo demás, en todo momento suponemos que la velocidad de la carga es constante, de manera tal que no estamos considerando el campo de radiación.

$$\vec{v} \cdot \vec{F}_L = q\vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{v} \cdot \vec{E} \quad (8.149)$$

ya que el producto $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ es nulo. Pero si el campo \vec{E} que figura en la identidad (8.149) es el electrostático, que es conservativo (véase la ecuación (4.14) y la discusión que la precede), podemos escribir

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (8.150)$$

En este caso, el miembro derecho de la identidad (8.150) se escribe como

$$-q\vec{v} \cdot \nabla V = -q \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dV}{dx}; \frac{dV}{dy}; \frac{dV}{dz} \right) = -q \frac{dV}{dt} \quad (8.151)$$

y representa la variación temporal de la energía potencial electrostática. Por otro lado, el miembro izquierdo de la ecuación (8.149) puede escribirse como

$$\vec{v} \cdot \vec{F}_L = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dE_C}{dt} \quad (8.152)$$

y representa la variación temporal de la energía cinética de la carga. Luego, la expresión (8.149), teniendo en cuenta las identidades (8.151) y (8.152) resulta en

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_P) = 0 \quad (8.153)$$

donde $E_P = qV$ es la energía potencial electrostática asociada a la carga q .

La expresión (8.153) indica que en presencia de un campo eléctrico conservativo y

La condición $\nabla \times \vec{E} = 0$ indica que el campo eléctrico es conservativo, y esto es lo mismo que decir que estamos en la hipótesis electrostática. Es decir, el campo eléctrico externo es estático.

un campo magnético, la energía mecánica de la carga q es constante. Pero tengamos en cuenta que hemos requerido que se cumpla la condición (8.149). De hecho, teniendo en cuenta que el rotor del gradiente es nulo (véase la el apéndice de cálculo vectorial) la condición (8.149) puede reemplazarse por $\nabla \times \vec{E} = 0$ como condición de campo eléctrico conservativo, de manera tal que la energía de la carga q se conserva sólo en presencia

de una campo eléctrico irrotacional (independientemente de que el campo magnético lo sea o no, porque al cabo no realiza trabajo alguno).

Ejemplo 8.15: un selector de velocidades es un dispositivo capaz de colimar un haz de partículas. Su esquema simplificado se muestra en la figura 8.32. Consiste en un acelerador elemental de cargas eléctricas, y un cañón en el que coexisten un campo eléctrico uniforme y un campo magnético también uniforme y perpendicular tanto al campo eléctrico como a la dirección primaria del haz a colimar.

Aceleradas por la diferencia de potencial ΔV , las partículas llegan a la región de campos con velocidades comprendidas en un rango definido. Para que una determinada carga no se acelere, debe cumplirse que la fuerza magnética sea igual y contraria a la eléctrica, de manera tal que debe ser

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (8.154)$$

Como los tres vectores que figuran en la identidad son mutuamente perpendiculares, se desprende de inmediato que debe cumplirse

$$v = \frac{E}{B} \quad (8.155)$$

Todas las cargas con esta velocidad siguen un camino recto y salen del cañón colimadas. Obsérvese de paso que la energía cinética de las partículas cambia por el trabajo de la fuerza de Lorentz

$$W_{F_{LOR}} = q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.156)$$

y que en consecuencia resulta

$$\frac{q}{m} = \frac{E^2}{2\Delta V B^2} \quad (8.157)$$

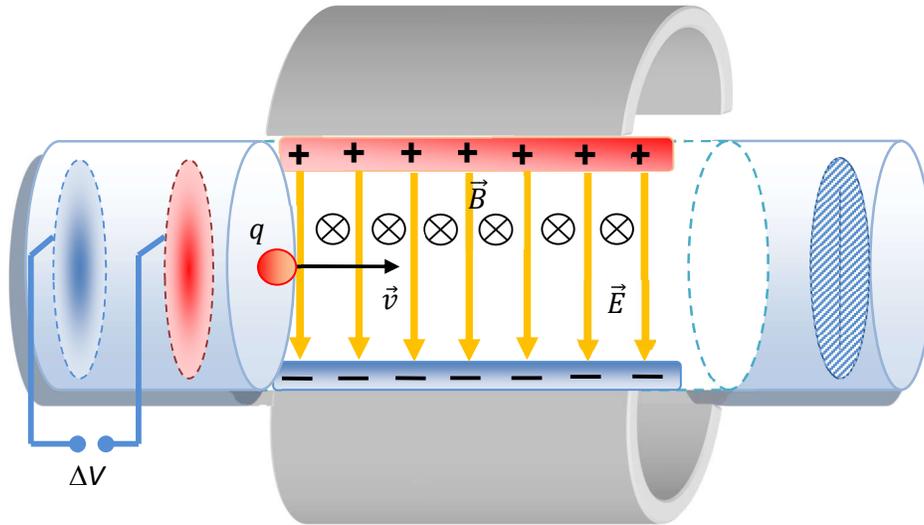


Fig. 8.32: esquema simplificado de un selector de velocidades. Las partículas cargadas son aceleradas desde el reposo mediante una diferencia de potencial ΔV . El armazón cilíndrico genera un campo magnético uniforme en la región en la que existe un campo eléctrico también uniforme. Para cada juego de valores de campo existe una velocidad definida que es invariante. Las partículas con esa velocidad no son deflectadas y salen del selector por la placa de la derecha.

8.9 – Vector intensidad magnética y vector magnetización

En el capítulo 6 hemos analizado la interacción de un campo eléctrico con un medio dieléctrico. Como resultado de la interacción, en el dieléctrico se inducen cargas de polarización, que en realidad aparecen como producto del reordenamiento de moléculas polares. Dicho en otras palabras, los medios dieléctricos están compuestos de moléculas polares que se reorientan por la influencia de un campo eléctrico externo y lo modifican.

Los *medios magnéticos* (o *medios materiales*) tienen propiedades análogas frente a los campos magnéticos, y estas propiedades tienen su origen en fenómenos relacionados con corrientes atómico – moleculares. En términos poco formales, todo átomo puede pensarse como una espira circulada por una corriente eléctrica y, como discutimos en la sección 8.6, dada una espira de geometría por completo arbitraria es posible definir su momento magnético \vec{m} en términos de su área y de la corriente eléctrica que la circula. A su vez, el momento magnético interactúa con el campo magnético externo (en la sección 8.6, por ejemplo, hemos definido la cupla que ejerce un campo externo sobre una espira) y a su vez lo modifica.

Cuando en la ecuación (8.120) escribimos el rotor del vector inducción \vec{B} en términos de la densidad volumétrica de corriente no hicimos ningún comentario al origen o a las propiedades de esa corriente porque implícitamente nos referíamos a las corrientes generadas por alguna fuente en hilos conductores inmersos en un medio vacío. A esa densidad de corriente, por extensión del tratamiento del capítulo 6, la llamaremos corriente libre (de la misma forma que las cargas que generan el vector desplazamiento \vec{D} son las cargas libres).

En presencia de un campo magnético externo algunos materiales revelan propiedades magnéticas, es decir, se magnetizan. Si por ese material se halla circulando una corriente eléctrica, la corriente total será la suma de la corriente libre más la de magnetización (que es la inducida).

Pero si el campo magnético se enciende en un medio material tendremos que tener en cuenta no sólo las corrientes macroscópicas libres \vec{j}_L sino además las corrientes de magnetización, llamémoslas \vec{j}_M , originadas a nivel microscópico. Así, si llamamos densidad de corriente total \vec{j}_T a la suma de las densidades de corrientes libre y de magnetización en un determinado punto fuente \vec{r}'

$$\vec{j}_T(\vec{r}') = \vec{j}_L(\vec{r}') + \vec{j}_M(\vec{r}') \quad (8.158)$$

parece razonable reescribir la ecuación (8.120) para un medio material como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T(\vec{r}') \quad (8.159)$$

Definamos ahora dos vectores en términos de las densidades de corriente $\vec{j}_L(\vec{r}')$ y $\vec{j}_M(\vec{r}')$ con la siguiente propiedad

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_L(\vec{r}') \quad (8.160)$$

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_M(\vec{r}') \quad (8.161)$$

de manera tal de escribir la expresión (8.120) como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M}] \quad (8.162)$$

o, lo que es lo mismo, a partir de la distributividad del producto vectorial respecto a la suma (propiedad que naturalmente se extiende al rotor) si consideramos constante la permitividad escribir

$$\nabla \times [\vec{B} - \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})] = 0 \quad (8.163)$$

es decir

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (8.164)$$

El vector \vec{H} se denomina *vector intensidad de campo magnético* y el vector \vec{M} se conoce como *vector magnetización*. Obsérvese que a partir de su definición, en el sistema MKS las unidades de \vec{H} y de \vec{M} son las de una densidad superficial de corriente, es decir, A/m . Similarmente, dado que la unidad de la permeabilidad magnética es $[\mu_0] = N/A^2$, también podríamos usar $[H] = [B/\mu_0] = T A^2 / N$ (aunque realmente es una unidad poco práctica).

Prestemos atención además a la profunda similitud que existe con el tratamiento que hicimos de las propiedades eléctricas de la materia: el vector \vec{H} juega un rol parecido al del vector \vec{D} (en el sentido de hallarse asociados a las fuentes libres), en tanto que el vector \vec{M} tiene un papel análogo al del vector polarización \vec{P} (en el sentido de hallarse asociados a las fuentes inducidas).

De hecho, así como definimos un medio dieléctrico lineal como aquel para el cual el vector polarización es directamente proporcional al vector campo eléctrico (véase la expresión (6.15)) habremos de definir los medios materiales lineales como aquellos en los cuales el vector \vec{M} es linealmente proporcional a \vec{H} , esto es,

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (8.165)$$

donde χ_M es una constante adimensional (porque las unidades de \vec{H} y de \vec{M} son las mismas) que depende del medio y se denomina susceptibilidad magnética. Si además el medio material es tal que sus propiedades son las mismas en cualquier elemento de volumen diremos que es homogéneo. Luego, en un medio lineal y homogéneo la expresión (8.164) se reduce a la forma

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_M \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} \quad (8.166)$$

Si definimos ahora formalmente la *permeabilidad magnética* de un medio material como

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M) \quad (8.167)$$

escribimos la relación (8.166) en la forma

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.168)$$

La relación (8.168) entre el vector inducción y el vector intensidad de campo magnético es formalmente similar a la relación (6.30) entre el vector desplazamiento y el vector campo eléctrico. Pero debe tenerse siempre presente que arribamos a ambas ecuaciones suponiendo que el medio (dieléctrico o magnético) es lineal, isótropo y homogéneo. Si esta hipótesis no se cumpliera no podríamos haber pasado de la expresión (8.163) a la expresión (8.164) porque no sería cierta la relación $\mu_0 \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\mu_0 \vec{H})$.

La relación $B=\mu H$ sólo es válida en el caso en que la permeabilidad del medio pueda ser considerada constante. Por lo demás, se trata de una relación absolutamente análoga a la que existe entre los campos D y E cuando el medio es lineal.

Digamos finalmente que el teorema de Ampere (8.116) para el vector intensidad de campo se reduce naturalmente a la forma

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = i_{c,L} \equiv \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_L \quad (8.169)$$

donde la corriente $i_{c,L}$ que aparece en el miembro derecho es la corriente libre concatenada o abrazada por la espira. De nuevo, es de notar la profunda similitud entre esta formulación y la que llevó a la relación (6.29) (teorema de Gauss para el vector desplazamiento) aunque al cabo esta similitud no tendría que asombrarnos porque después de todo planteamos el problema de forma tal de manifestar estas coincidencias.

8.10 – Los campos \vec{B} y \vec{H} en la superficie límite de un medio material

En la sección anterior nos hemos referido reiteradamente a la analogía que existe entre los campos relacionados a las propiedades eléctricas de la materia y aquellos relacionados a sus propiedades magnéticas. Esta similitud, desde ya, a este nivel sólo se extiende al tratamiento formal matemático, pero a la hora de estudiar el comportamiento de un campo magnético al pasar de un medio material a otro no parece haber ningún impedimento en explotar estas analogías. La ventaja es que no debemos desarrollar nuevamente las ecuaciones, y el precio a pagar es alguna pérdida del significado físico del tratamiento.

En la búsqueda de simplicidad, decidámonos por las ventajas. Para ello repitamos aquí las ecuaciones (8.109) y (8.169) que respectivamente describen las propiedades de los campos \vec{B} y \vec{H} y que aquí repetimos

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.109)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_L(\vec{r}') \quad (8.169)$$

y regresemos por un momento a las ecuaciones (6.29) y (4.26) que a su vez describen las propiedades de los campos \vec{D} y \vec{E} , respectivamente

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \quad (8.170)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (8.171)$$

Antes de continuar es necesario recalcar que estamos escribiendo las ecuaciones que describen las propiedades de los campos electrostáticos y magnetostáticos, y que sólo nos interesan por ahora las formas matemáticas pero no las relaciones que puedan existir entre los campos, que pospondremos hasta los capítulos 10 y 11.

Obsérvense las expresiones (8.109) y (8.162): las propiedades del vector inducción al atravesar la superficie que separa dos medios materiales deben ser las mismas que las del vector desplazamiento al atravesar la superficie de separación entre dos dieléctricos sin carga libre superficial en la capa límite. Luego, a partir de la igualdad (6.62) resulta

$$B_{N1} - B_{N2} = 0 \quad (8.172)$$

es decir, la componente normal del vector inducción permanece invariante al pasar de un medio material a otro. Es muy importante notar que identidad (6.62) podemos igualarla a cero sólo si no existe carga libre en la superficie de separación, mientras que la expresión (8.172) tiene que ver con la aceptación de la inexistencia de monopolos magnéticos y no con la presencia de corrientes en las superficie de separación de dos medios magnéticos. Luego, la ecuación (8.172) siempre es válida.

Las ecuaciones (8.169) y (8.171) también son funcionalmente similares, de manera tal que las propiedades del vector campo eléctrico en la superficie límite entre dos dieléctricos deben ser las mismas que las del vector intensidad en la superficie límite, por la que circula una corriente libre en superficie i_{SUP} , entre dos medios materiales. Si llamamos H_T a la componente del vector \vec{H} tangente a la superficie de separación, a partir de la condición (6.67) resulta

$$H_{T1} - H_{T2} = i_{SUP} \quad (8.173)$$

Las propiedades de las componentes tangencial de \vec{B} y normal de \vec{H} son inmediatas a partir de la ecuación de relación (8.168). Si μ_1 y μ_2 representan la permeabilidad de los medios a ambos lados de la superficie límite, resultan

$$\mu_1 H_{N1} = \mu_2 H_{N2} \quad (8.174)$$

$$\frac{B_{T1}}{\mu_1} = \frac{B_{T2}}{\mu_2} \quad (8.175)$$

que completan las condiciones de contorno, esto es, las condiciones que cumplen las componentes de los campos \vec{B} y \vec{H} al atravesar la superficie de separación de dos medios magnéticos.

Resumen del capítulo

Hemos introducido una nueva cantidad vectorial, la inducción magnética \vec{B} , que resume las propiedades modificadas del espacio en presencia de imanes o corrientes eléctricas. Estas propiedades no resultan de fenómenos electrostáticos o gravitatorios, de manera tal que su estudio constituye en sí mismo un campo nuevo de conocimiento. Si bien presentamos el problema desde la modificación de la velocidad de una carga eléctrica en movimiento en presencia de un campo magnético, sin decirlo hemos basado todo el desarrollo de la magnetostática en la ley fundamental de Ampere, que es a esta clase de fenómenos lo que la ley de Coulomb es a la electrostática. Debe notarse el profundo parecido formal que existe entre estas dos leyes fundacionales, parecido que hemos explotado a lo largo de todo el capítulo para definir las variables fundamentales y sus propiedades. Sin ir más lejos, hemos deducido la expresión formal del vector inducción de campo magnético de la ley de Ampere (como ley de Biot-Savart) de la misma manera que en su momento dedujimos el vector intensidad de campo eléctrico de la ley de Coulomb.

La aplicación del teorema de Gauss al campo magnético nos condujo a una de las leyes fundamentales del electromagnetismo, que discutiremos en detalle en el capítulo 11, y hemos visto cómo la inexistencia de monopolos magnéticos lleva necesariamente a la ley de Ampere. También hemos visto que sobre una carga en movimiento el campo magnético no realiza trabajo de manera tal que es incapaz de modificar su energía.

Finalmente introdujimos los vectores intensidad de campo magnético y magnetización en un medio magnético casi como para completar la analogía con los tres vectores electrostáticos en un medio dieléctrico. Debe tenerse en cuenta que la analogía se cierra identificando el vector desplazamiento con el vector inducción, el vector campo eléctrico con el vector intensidad de campo, y el vector polarización con el vector magnetización. De ahí que la continuidad en una superficie límite entre dos medios diferentes resulte en condiciones análogas.

Complementos del capítulo

Algunas propiedades magnéticas de los medios materiales

De los fenómenos de magnetización, de los procesos microscópicos que hacen que un material se imane más fácilmente que otro, todavía no hemos dicho nada, por lo menos no a nivel de la Física involucrada. En principio podemos hacernos una idea de las propiedades de los medios materiales apelando (como lo hicimos a lo largo de todo el capítulo) a la similitud funcional que existe entre los campos electrostático y magnetostático.

El momento magnético de un electrón “moviéndose” en su orbital es un concepto complejo que podemos pensar, de una manera sobresimplificada, como el de una carga moviéndose por una espira. Este momento magnético no es el único que posee el electrón, además está el intrínseco (o espín).

Para ello regresemos a la ecuación (6.6), en la que encontramos que el momento de la fuerza (o torque) de un campo eléctrico externo sobre un dipolo vale

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_{EXT}$$

y comparémoslo con la ecuación (8.104) que define el momento de un campo externo sobre una espira cualquiera de momento magnético \vec{m}

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{EXT}$$

Se trata de dos fenómenos físicamente diferentes porque un dipolo eléctrico se parece a una espira en nada. Lo que queremos resaltar es que de la misma manera que un campo eléctrico es capaz de orientar a un dipolo eléctrico, un campo magnético entonces es capaz de orientar a una espira circulada por una corriente sin importar la exacta forma de la espira ni la intensidad de la corriente.

Un electrón orbitando el núcleo de un átomo se parece demasiado a una corriente circulando por un alambre, salvo que en los átomos no hay alambres sino orbitales. Tiene sentido entonces hablar del momento magnético de cada electrón de un átomo y pensar además que un campo magnético externo debería orientarlo. El problema se complica un poco porque los electrones no sólo generan este momento magnético (asociado a su momento angular de rotación) sino que además poseen un momento angular intrínseco que se denomina momento angular de espín o simplemente espín.

El espín es una propiedad inherente a las partículas subatómicas, como lo es su masa o su carga eléctrica, y que a nivel cuántico tiene que ver con una cantidad vectorial que en el caso particular de los electrones sólo admite dos orientaciones posibles. El momento magnético total de un electrón es la resultante de estos dos momentos magnéticos (el orbital y el de espín) y el momento magnético de un átomo resulta de la superposición de todos los momentos magnéticos de sus electrones individuales.

Como el momento angular intrínseco del electrón sólo puede adoptar dos orientaciones posibles, el espín de un electrón sólo puede tomar dos valores, iguales en magnitud pero opuestos. Cuando una capa atómica está completa tiene un número par de electrones[†], la mitad de ellos con una orientación de espín y la otra mitad con la orientación opuesta, de manera tal que en una capa completa el momento magnético derivado del spin se compensa de a pares y la resultante es nula. Si por otro lado la estructura de un átomo es de muy alta simetría los momentos magnéticos orbitales de los electrones también se compensan, porque de otra manera habría una dirección privilegiada de rotación y una dirección privilegiada de rotación se contradice con la existencia de una simetría. En consecuencia, es de esperar que un átomo con muy alta simetría estructural y capas completas muestre momento magnético total nulo. A las sustancias compuestas por átomos o moléculas con estas características se las denomina *diamagnéticas*. Sustancias diamagnéticas típicas son el oro y la plata.

Las sustancias diamagnéticas parecen no “responder” a los imanes porque no son atraídos por éstos. En realidad, lo que ocurre es que este tipo de sustancias es repelido hacia las regiones donde el campo es menos intenso. Todo lo contrario ocurre con las sustancias paramagnéticas, que son atraídas hacia la región donde el campo es más intenso.

Pero siguiendo la lógica de nuestra argumentación (porque al cabo no estamos demostrando nada) parece razonable pensar que los átomos o moléculas que no tienen capas completas (y en consecuencia los espines no están apareados) o no muestran muy alta simetría estructural posean un momento magnético neto. De hecho es esto lo que ocurre, y a las sustancias compuestas por átomos o moléculas con estas características se las denomina *paramagnéticas*. Sustancias paramagnéticas típicas son el aluminio y el titanio.

Sintetizando, por regla general (aunque no necesariamente siempre) los átomos de las sustancias diamagnéticas poseen un número par de electrones y su estructura electrónica es de gran simetría, en tanto que los átomos de las sustancias paramagnéticas poseen en general un número impar de electrones y una estructura electrónica asimétrica.

En cualquier caso, es más o menos sencillo imaginar que en las sustancias paramagnéticas el campo magnético externo interactúa con el momento neto que ya existe en el interior de la sustancia, mientras que en el caso de las sustancias diamagnéticas debe inducir primero un momento neto porque de otra manera no hay momento magnético con el que interactuar. Pero las consecuencias de interactuar con un momento neto o con uno inducido son diametralmente opuestas.

Pensemos primero en las sustancias paramagnéticas. En la ecuación (6.9) hemos visto que la energía potencial asociada a la interacción entre un campo eléctrico externo y un dipolo eléctrico se expresa como

[†] Recordemos brevemente que el número máximo de electrones por capa está asociado al número cuántico principal, n , y que vale $2n^2$, es decir, es un número par. La profundización de estos temas requiere de formulaciones propias de la Mecánica Cuántica que por el momento podemos obviar.

$$U_{P,DIP} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

de manera tal que, explotando la similitud funcional entre los fenómenos dipolares eléctricos y magnéticos y sin entrar en mayores detalles, la expresión (8.82) debe conducir a una expresión similar, es decir, debe ser

$$U_{P,MAG} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (8.176)$$

Parece evidente que el estado de mínima energía se alcanza cuando el momento magnético se alinea en la dirección del campo o, dicho de otra manera, la alineación paralela corresponde a un estado de energía inferior a la alineación antiparalela. En consecuencia, una muestra de sustancia paramagnética situada en un campo magnético es atraída hacia la región donde el campo es más intenso. Para decirlo de otra manera, un imán interactúa atractivamente con las sustancias paramagnéticas. Y es notable, además, que la intensidad de la interacción decrece con el aumento de la temperatura de la muestra.

Esta última observación nos conduce a pensar que, producto de la agitación térmica, los momentos magnéticos de los átomos y moléculas de una sustancia paramagnética deben estar distribuidos al azar y que la orientación de esos momentos magnéticos por parte del campo magnético externo se halla en franca competencia con la agitación térmica. De la misma manera que la orientación de dipolos eléctricos resulta de la competencia entre la energía de origen eléctrico y la de origen térmico, la orientación de momentos magnéticos atómicos (en una sustancia paramagnética) resulta de la competencia entre la energía de origen magnético y la de origen térmico. Y así como introducimos un coeficiente para medir el grado de polarización de un dieléctrico, podemos introducir un coeficiente que mida el grado de magnetización de una muestra a partir del cociente entre las energías magnética y térmica, es decir

$$\xi_M = \frac{|U_{P,MAG}|}{|U_{T,MAG}|} = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{B}|}{k_B T} \quad (8.177)$$

En una sustancia diamagnética estas consideraciones carecen de significado sencillamente porque estas sustancias no tienen un momento magnético inherente sino que en todo caso es inducido. Si bien los fenómenos de inducción habremos de analizarlos en detalle en el próximo capítulo, digamos por ahora que la situación de menor energía posible

en una muestra que no tiene momento permanente es que siga sin tenerlo. Lo que a su vez significa que los momentos que se inducen se oponen al campo magnético externo, es decir, una muestra de sustancia diamagnética situada en un campo magnético es atraída hacia la región donde el campo es menos intenso o, en otros términos, un imán interactúa repulsivamente con las sustancias diamagnéticas.

Si el momento magnético inducido (producto de las corrientes inducidas en los átomos y moléculas del material) tiene sentido opuesto al campo externo entonces el campo magnético dentro del material resulta atenuado respecto del que existe en vacío. Obsérvese de la expresión (8.159) que para atenuar el campo magnético respecto del vacío debe ser $\chi_M < 0$, pero debemos apresurarnos a decir que en estos materiales los valores absolutos de la susceptibilidad magnética son del orden de 10^{-5} , de manera tal que la permeabilidad μ siempre es positiva.

Los medios materiales pueden mostrar características de índole diamagnético o paramagnético, dependiendo fundamentalmente de la estructura atómica de la sustancia. Si acercamos un imán a una llave de puerta de las comunes, por ejemplo, que son de bronce, notaremos que no sufre interacción visible. El bronce, entonces, es diamagnético.

En el caso de sustancias paramagnéticas, por el contrario, el campo magnético en el seno del material se ve incrementado respecto del vacío. Es

casi evidente que en este tipo de sustancias es $\chi_M > 0$. Vale la pena mencionar que una sustancia es paramagnética si sus propiedades paramagnéticas prevalecen competitivamente sobre las diamagnéticas, que están presentes en todos los materiales porque se trata de una propiedad atómica.

Existen sustancias en las que la alineación de los momentos magnéticos es duradera y están divididos en regiones, denominadas *dominios magnéticos*. Estos son los medios *ferromagnéticos*. En estas sustancias la particular manera de interacción de las corrientes atómicas hace que los momentos magnéticos de los átomos dentro de un dominio se alineen paralelamente entre sí (efecto que se conoce como *interacción autoalineadora*). Si bien los momentos de los diferentes dominios que pueden conformar una muestra ferromagnética no están alineados (porque de ser así sería de esperar que dos trozos de hierro interactuarán magnéticamente, algo que en verdad no se observa), parece evidente que habrán de reorientarse en presencia de un campo magnético externo, provocando de esta forma la intensificación del campo dentro del material.

La intensificación del campo en el seno de este tipo de materiales (típicamente el hierro) es muy alta porque la susceptibilidad es muy alta y, en consecuencia, la permeabilidad relativa μ/μ_0 es mucho mayor que la unidad. Por lo demás, la relación entre \vec{B} y \vec{H} no es ni lineal ni unívoca, lo que hace que este tipo de medios no sólo guarde “memoria” de la manera en que fueron magnetizados (*histéresis*) sino que la desmagnetización completa requiere de la ruptura del ordenamiento estadístico de los dominios, y esto sólo se logra calentándolos por encima de una temperatura crítica, llamada punto de Curie (que para el hierro, por ejemplo, es de $770^\circ C$).

Los fenómenos ferromagnéticos, como los antiferromagnéticos y ferrimagnéticos, se hallan asociados a la existencia de dominios magnéticos orientados al azar. En cada dominio los momentos se hallan estadísticamente alineados en una particular configuración.

Existen otros materiales, como los *antiferromagnéticos*, en los que contrariamente a las sustancias ferromagnéticas, el ordenamiento de los momentos magnéticos en un estado de mínima energía potencial hace que los dominios se alineen entre sí en sentido antiparalelo, provocando un momento neto nulo. Existe una temperatura análoga al punto de Curie, llamada temperatura de Néel, por encima de la cual desaparece el orden antiferromagnético.

En una suerte de situación intermedia se encuentran las sustancias *ferrimagnéticas*, que tienen propiedades antiferromagnéticas, en el sentido de un ordenamiento antiparalelo de dominios. Sin embargo, como los momentos de los dominios orientados en un sentido difieren del valor de los que se orientan en sentido opuesto, resulta que poseen un momento magnético neto no nulo y frente a un campo externo se comportan como sustancias ferromagnéticas.

Aceleradores de partículas

En muy diversos campos de la Física y en sinnúmero de aplicaciones biomédicas y tecnológicas se requieren partículas subatómicas en rangos de energía que, en términos de nuestra experiencia cotidiana, podemos definir como comparativamente alta. El intervalo de las energías requeridas, naturalmente, depende de la aplicación. Normalmente, las aplicaciones biomédicas requieren de “bajas” energías, del orden de $20 MeV$ ($1 MeV = 10^6 eV$) para fármacos radiactivos o $200 MeV$ para aplicaciones de radioterapia. Este rango de energías también es típico en procesos de esterilización (típicamente, el recipiente para muestras de orina que se comercia en cualquier farmacia ha sido esterilizado con radiación gamma) y diversos procesos industriales de análisis de estructura interna mediante radiación gamma de alrededor de $10 MeV$.

Recordemos que se define el electronvolt (eV) como la energía cinética que alcanza un electrón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de $1V$, esto es,

$$E_c = qV = 1,6 \cdot 10^{-19}C \times 1V = 1,6 \cdot 10^{-19} J = 1eV \quad (8.178)$$

Para tener una idea del rango de velocidades asociadas del que estamos hablando digamos que $6,25 \text{ MeV}$ corresponden a 10^{-12} J . Si pensamos en la energía cinética de un bloque de masa $m = 2 \text{ kg}$, esta energía corresponde a una velocidad de 10^{-6} m/seg (o sea, 1 micrómetro por segundo). Pero cuando se trata de protones, por ejemplo, energías del orden de 10^{-1} J se corresponden con velocidades del orden de $3 \times 10^7 \text{ m/seg}$, algo así como el 10% de la velocidad de la luz (a energías superiores la asociación de velocidades deja de ser tan sencilla porque tendríamos que apelar a correcciones relativistas, tópico este que está muy alejado del alcance de este libro).

En estudios de la estructura íntima de la materia (Física de partículas) las energías

Asociar “altas energías” a altas velocidades no parece inmediato. Un bloque de 2 kg de masa con una energía de 6 MeV tiene una velocidad del orden de una millonésima de metro por segundo. Un protón con esa energía tiene una velocidad del orden de 30.000.000 metros por segundo.

involucradas ya son del orden de los GeV y TeV (10^9 eV y 10^{12} eV). Las velocidades asociadas a todas estas energías sólo pueden alcanzarse (al menos de manera controlada) en un acelerador de partículas, que en términos absolutamente generales puede pensarse como cualquier dispositivo que permite incrementar la velocidad de diversas partículas por medio de campos eléctricos, magnéticos o combinaciones de ambos. En este contexto, cuando decimos partículas nos referimos en realidad a partículas subatómicas, tales como electrones, protones y neutrones.

Posiblemente valga la pena aclarar que en tanto que el electrón es una partícula fundamental (la Física de partículas no le asigna estructura interna) los nucleones (protones y neutrones) están constituidos por *quarks* y *gluones* (en general denominados *hadrones*, tan de moda a partir del 10 de septiembre de 2008, día en que se puso oficialmente en marcha el LHC –*Gran Colisionador de Hadrones*– del CERN).

En general estamos familiarizados con los aceleradores más de lo que creemos, porque de alguna manera son parte de nuestra vida cotidiana. Sin ir más lejos, pensemos en los tubos de rayos catódicos (la parte interna de las pantallas de los antiguos televisores o monitores de computadora, por ejemplo) o los equipos de rayos X. Se trata de aceleradores electrostáticos, en los que un haz de electrones es acelerado por un campo eléctrico y focalizado por uno magnético.

En el tubo de rayos catódicos, los electrones se aceleran en un único par de electrodos entre los que existe una diferencia de potencial del orden de los miles de volt. En un tubo típico, con $\Delta V = 2000 \text{ V}$ la energía final de los electrones al incidir en la pantalla fosforescente es del orden de los 2 keV . Un tubo convencional de rayos X produce radiación de baja energía, del orden de 50 a 300 keV .

Los aceleradores más sencillos capaces de elevar la energía de partículas subatómicas a valores propios de reacciones nucleares son los del tipo Cockcroft-Watson o los del tipo del generador (o *acelerador*) *Van de Graaff*. Este último, esquematizado en la figura 8.33, es básicamente una máquina electrostática capaz de generar grandes diferencias de potencial a partir de la electricidad estática que, transportada mediante cintas, se deposita en una esfera conductora.

Su principio de operación es razonablemente sencillo: genera electricidad por frotamiento (*triboelectricidad*) y la carga generada es depositada en una esfera conductora. Para ello, la polea inferior (*PI* en la figura 8.33) y la cinta del acelerador (*CA*) se construyen

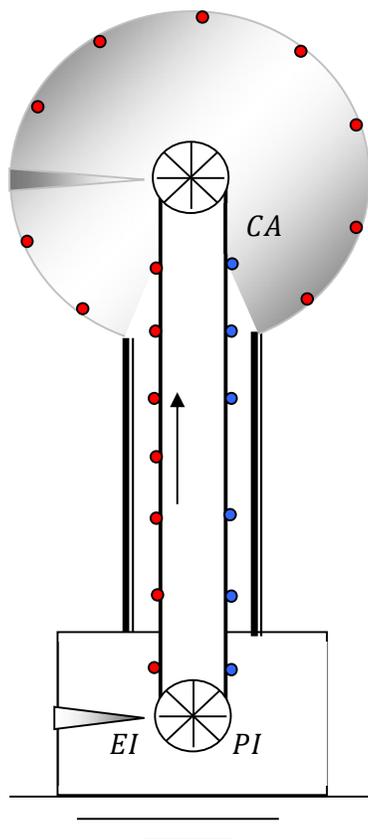


Fig. 8.33: esquema simplificado de un acelerador de Van de Graaff. La flecha indica que la parte izquierda de la cinta que transporta las cargas se mueve en sentido ascendente.

de materiales dieléctricos diferentes, de manera tal que cuando la polea es arrastrada por un motor, el rodillo de la polea y la cinta adquieren carga electrostática por fricción. La cantidad de carga adquirida por uno y otra, naturalmente, es de igual magnitud pero de signo opuesto. Pero al ser igual la cantidad de carga adquirida necesariamente deben ser diferentes las densidades superficiales de carga porque las áreas de la polea y de la cinta lo son. La escobilla inferior (*EI* en el esquema), que se halla muy próxima a la cinta (y en consecuencia al rodillo de la polea), remata en una punta muy pronunciada, de manera tal que el campo eléctrico que generan las cargas inducidas desde la polea es lo suficientemente intenso (por efecto de punta, véase el apartado 4.5 acerca del campo eléctrico en la superficie de los conductores) como para ionizar la columna de aire entre la escobilla y la polea (genera una pequeña columna de plasma). El rodillo atrae cargas opuestas a las que se han depositado sobre su superficie, pero estas cargas son del mismo signo que las de la cinta, se depositan sobre ella y son arrastradas hacia la esfera.

Próxima a la polea superior se coloca un segundo contacto metálico, también con una punta pronunciada, de manera tal que por un mecanismo análogo al del contacto inferior comienza a depositar carga sobre la esfera metálica. Mientras la esfera adquiere carga va aumentando su potencial respecto de tierra. De hecho, el potencial en la superficie de la esfera (de radio R) será

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (8.179)$$

Cuando la esfera se carga al potencial de ruptura del aire o, si se prefiere, se alcanza el valor del campo eléctrico de ruptura (recordemos, del orden de $3MV/m$) deja de acumular carga porque el aire se torna conductor y descarga la esfera.

Los generadores de Van de Graaff suelen utilizarse como etapa previa (produciendo partículas con energía ya elevada a la entrada) de los aceleradores de alta energía. A diferencia de los electrostáticos, los de alta energía en general utilizan campos electromagnéticos que permiten acelerar y mantener enfocado al haz de partículas que se acelera (como en los tubos de rayos catódicos) y por su geometría se dividen en dos tipos: los aceleradores lineales (Linear Accelerators o LINAC) y los circulares.

Un acelerador lineal consiste en un conjunto de tubos de longitud variable alineados, sometidos a diferencia de potencial oscilante. Precisamente, el haz se acelera a través de los cambios de la polaridad del potencial aplicado a los tubos, que alternativa y coherentemente atrae y repele a las partículas que conforman el haz. En consecuencia, los cambios de polaridad deben estar en fase con la salida del haz a través de cada tubo. La longitud variable (de hecho, creciente) de los sucesivos tubos se instrumenta de manera tal que la partícula que se acelera esté en fase con la frecuencia de oscilación del potencial aplicado. En otras palabras, esta frecuencia de oscilación debe ser tal que el tiempo que tarde el ión en recorrer cualquier tubo sea el mismo que necesita el potencial para cambiar de polaridad.

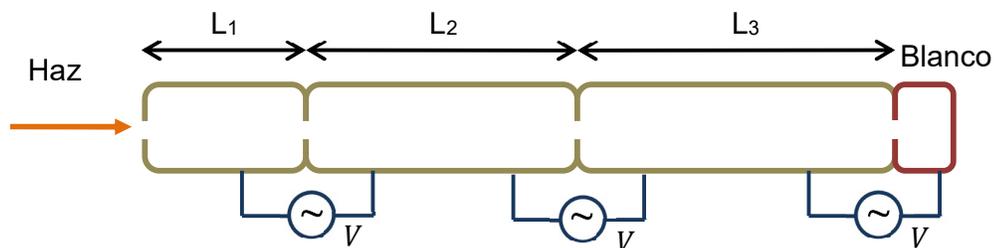


Fig. 8.34: esquema simplificado de un acelerador lineal de tres etapas. En cada etapa el haz de partículas adquiere energía y llega al blanco con una energía final mayor que la inicial. El incremento de energía depende del número de etapas y de la frecuencia de alternancia del potencial.

Supongamos que al acelerador de la figura 8.34 ingresa un haz partículas. Para que la aceleración sea efectiva, la polaridad del potencial debe cambiar al cabo del tiempo que el haz tarda en atravesar el primer tubo, digamos t_0 . Pero para ser oscilante, la mitad del tiempo el potencial debe ser de polaridad positiva y la otra mitad del tiempo de polaridad negativa, de modo tal que t_0 debe ser el semiperíodo de la oscilación, es decir, si llamamos τ al período, debe ser

$$\tau = 2t_0 \quad (8.180)$$

Calculemos ahora el valor de t_0 . Para ello supongamos que el haz ingresa al tubo acelerado desde el reposo por el mismo potencial que se aplica entre los tubos. Como la variación de energía cinética es provocada por el trabajo de la fuerza eléctrica, el haz ingresa al sistema con velocidad de valor

$$v_0^2 = 2 \frac{qV}{m} \quad (8.181)$$

Con esta velocidad debe atravesar un tubo de longitud L_0 tal que emerja del mismo en el preciso instante en que el potencial cambia de signo. Esto significa que debe ser

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0} = L_0 \sqrt{\frac{m}{2qV}} \quad (8.182)$$

Obsérvese que el semiperíodo queda impuesto por la relación carga-masa de las partículas aceleradas y por la diferencia de potencial aplicada. Ahora bien, al atravesar el tubo de longitud L_1 , la ganancia de energía vale

$$\frac{1}{2} m(v_1^2 - v_0^2) = qV \quad (8.183)$$

de manera tal que la velocidad del haz a la salida del tubo 1 será

$$v_1^2 = \frac{2qV}{m} + v_0^2 = 2v_0^2 \quad (8.184)$$

Si consideramos que la velocidad dentro del tubo es esencialmente constante, el tiempo que tarda en atravesarlo es sencillamente

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = \frac{L_1}{\sqrt{2} v_0} \quad (8.185)$$

Ahora bien, la velocidad a la salida del tubo 2, el de longitud L_2 , será

$$\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = qV \Rightarrow v_2^2 = \frac{2qV}{m} + v_1^2 = 3v_0^2 \quad (8.186)$$

y debe atravesar este tubo en un tiempo

$$t_2 = \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_2}{\sqrt{3} v_0} \quad (8.187)$$

Pero el potencial oscila siempre a la misma frecuencia, de modo tal que todos los tiempos de tránsito involucrados deben ser iguales, lo que impone una condición sobre la longitud de los tubos. De las expresiones (8.182), (8.185) y (8.187) es fácil implicar que debe cumplirse la relación

$$\frac{L_0}{v_0} = \frac{L_1}{\sqrt{2} v_0} \Rightarrow L_1 = \sqrt{2} L_0 \quad (8.188)$$

$$\frac{L_0}{v_0} = \frac{L_2}{\sqrt{3} v_0} \Rightarrow L_2 = \sqrt{3} L_0 \quad (8.189)$$

de manera tal que parece razonable extrapolar a la condición de que el n -ésimo tubo debe ser de longitud

$$L_n = \sqrt{n+1} L_0 \quad (8.190)$$

donde L_0 es la longitud del tubo de aceleración primaria. Por su lado, la velocidad con que el haz emerge del último tubo será

$$v_n = \sqrt{n+1} v_0 \quad (8.191)$$

Sólo a modo de ejemplo, pensemos que a un acelerador de 3 tubos (como el de la figura 8.34) ingresa un haz de iones de ${}^{26}_{55}\text{Fe}^{++}$ (el haz del ejemplo 8.3) acelerados por una diferencia de potencial de 400V en una cámara de 10 cm de largo. Estas partículas tienen la masa de 55 nucleones, es decir, $m = 8,8 \times 10^{-26} \text{ kg}$, y la carga neta de dos protones, esto es, $q = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$. Para que el haz siempre se acelere, el tiempo de tránsito por el tubo primario de longitud L_0 debe ser

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0} = L_0 \sqrt{\frac{m}{2qV}} = 1,85 \times 10^{-4} \text{ seg} \quad (8.192)$$

y la frecuencia de trabajo (la inversa del período de la oscilación) será

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2t_0} = 2,7 \text{ kHz} \quad (8.193)$$

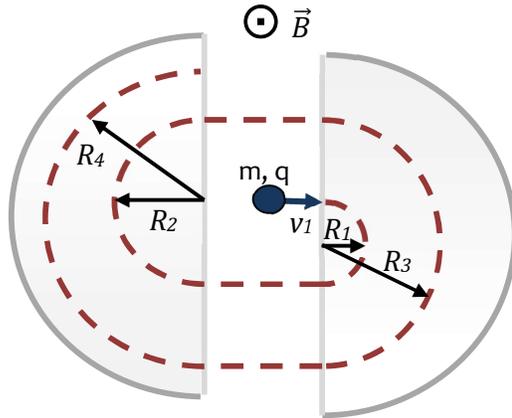
Obsérvese que la velocidad con que las partículas ingresan al primer tubo (ecuación (8.181))

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{qV}{m}} = 540,5 \text{ m/seg} \quad (8.194)$$

que para la masa de los iones que conforman el haz representa una energía de entrada al acelerador de $1,28 \times 10^{-16} \text{ J} \equiv 800 \text{ eV}$. La energía a la salida, de acuerdo a la expresión (8.181), será de 3200 eV.

Es de notar que el acelerador lineal que hemos descrito sólo utiliza campos eléctricos para acelerar las partículas. Un amplio conjunto de aceleradores combina la posibilidad de confinar magnéticamente a las partículas, obligándolas a describir trayectorias curvas, mientras las aceleran mediante la acción de campos eléctricos oscilantes. Posiblemente el ejemplo emblemático de este tipo de aceleradores sea el ciclotrón, cuyo esquema simplificado mostramos en la figura 8.35.

El campo magnético exterior obliga a las partículas de masa m y carga q a describir trayectorias circulares dentro de las armaduras en forma de D, entre las que existe un



campo eléctrico generado por una diferencia de potencial oscilante. El haz de partículas es acelerado a la entrada de la armadura derecha, a la que ingresa con velocidad v_1 y describe una circunferencia de radio R_1 dado por (véase la ecuación (8.7))

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB} \tag{8.195}$$

cuya velocidad angular viene dada por la expresión (8.8)

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{8.196}$$

La frecuencia de oscilación es tal que cuando la partícula egresa de la armadura derecha la polaridad ha cambiado y la partícula es nuevamente acelerada, esta vez hacia a la

Fig. 8.35: esquema sobresimplificado de un ciclotrón. Entre las placas en forma de D se establece un campo eléctrico oscilante, en tanto que el campo magnético, perpendicular al plano del dibujo obliga a la partícula de masa m y carga q a moverse en circunferencias (véase el ejemplo 8.1). El campo eléctrico externo incrementa la velocidad de la partícula y hace que el radio de las

armadura izquierda. Si la diferencia de potencial entre las armaduras es V , resultará un incremento de energía cinética dada por

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = qV \tag{8.197}$$

de manera tal que el radio R_2 se calcula como

$$R_2 = \frac{mv_2}{qB} = \sqrt{\frac{2mV}{qB^2} + R_1^2} \tag{8.198}$$

Desde un punto de vista clásico, y como quedó establecido en el ejemplo 8.1 y en la expresión (8.8), la frecuencia de ciclotrón (8.196) es invariante. Sin embargo, las aceleraciones que supone un ciclotrón hacen que las partículas se muevan a velocidades relativistas, velocidades a las que el concepto de masa invariante se torna insostenible. La energía umbral a partir de la cual comienzan a sentirse los efectos relativistas se sitúa alrededor de los 12 MeV para los electrones y 10 MeV para los protones.

Para poner estos valores en perspectiva, pensemos que el LHC (Large Hadron Collider) se diseñó para colisionar hadrones (en particular protones) a energías del orden de los 7 TeV ($1\text{ TeV} = 10^6\text{ MeV}$). Esta energía corresponde a velocidades de los protones del orden del 98% de la velocidad de la luz, esto es, $0,98c$). Como la masa va creciendo en cada media vuelta, el campo eléctrico debe variar consistentemente su oscilación. En un *sincrociclotrón* se resuelve el problema haciendo que la frecuencia del campo eléctrico varíe de manera tal de ser siempre igual a la frecuencia de ciclotrón de cada media vuelta.

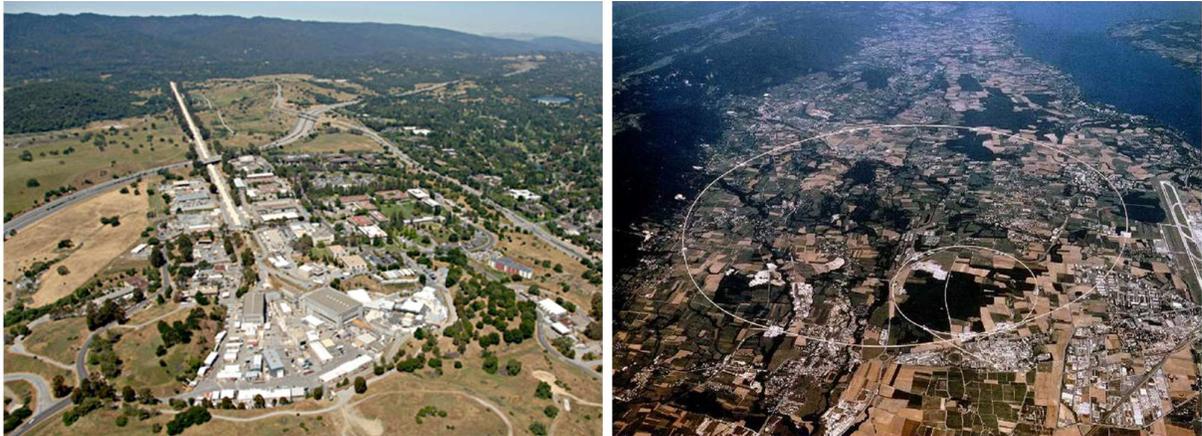


Fig. 8.36: a la izquierda se muestra una imagen aérea del SLAC (*Stanford Linear Accelerator*) de alrededor de 3 km de longitud. A la derecha se muestra la ubicación del acelerador del CERN, dentro del cual se inserta el LHC. El diámetro del acelerador exterior es del orden de 6 km (originales en <http://today.slac.stanford.edu/images/2009/slac-arial.jpg> y <http://eltamiz.com/images/cern-lhc.jpg>, respectivamente).

La ley de Ampere y el principio de interacción de Newton

Regresemos por un momento a las expresiones (8.36) y (8.37) que por comodidad aquí repetimos

$$\vec{F}_{12} = \kappa i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times [d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (8.199)$$

$$\vec{F}_{21} = \kappa i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times [d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (8.200)$$

No parece evidente que se cumpla el principio de interacción, porque la anticonmutatividad del producto vectorial no parece garantizar que la permutación de subíndices de una integral a otra pueda hacerse libremente pretendiendo que una fuerza

es igual y contraria a la otra. Sin embargo, sabemos que la tercera ley de Newton vale, de manera tal que lo mejor que podemos hacer es escribir las formas (8.199) y (8.200) en alguna manera más amena. Para eso, operemos sobre (8.199), notando que podemos darle una forma diferente teniendo en cuenta la identidad para el triple producto vectorial entre tres vectores $\vec{A}, \vec{D}, \vec{C}$

$$\vec{A} \times (\vec{D} \times \vec{C}) = \vec{D} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{D}) \quad (8.201)$$

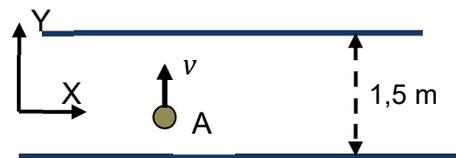
de manera tal que, después de una sencilla operación algebraica, resulta

$$\vec{F}_{12} = -\kappa i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (8.202)$$

Obsérvese que la permutación de subíndices en la ecuación (8.202) cambia el sentido de la fuerza, porque si bien el producto escalar es conmutativo, cambia el signo en la diferencia entre los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , de manera tal que resulta $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

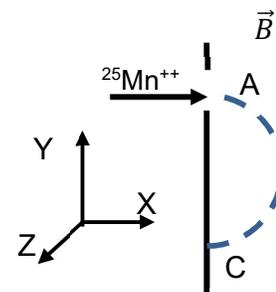
Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Una carga $q = 2 \mu\text{C}$ se mueve con velocidad $\vec{v} = 0,05 \text{ m/seg } \hat{e}_Y$ desde el alambre inferior de la figura al superior. Los dos alambres tienen longitud $L \gg 1,5 \text{ m}$. Cuando la carga pasa por el punto A, situado a $0,5 \text{ m}$ del alambre inferior, se encienden las corrientes $i_{\text{INF}} = 2 \text{ mA}$, $i_{\text{SUP}} = 3 \text{ mA}$, ambas en la dirección \hat{e}_X .



- discuta por qué es necesaria la aclaración de que la longitud del alambre es mucho mayor que la distancia entre ellos;
- calcule el valor de la fuerza \vec{F} sobre la carga en el punto A;
- halle el punto en el que se anula esta fuerza;
- calcule el tiempo que le lleva a la carga desplazarse $0,5 \text{ m}$;
- calcule la fuerza por unidad de longitud que debe ejercerse sobre cada alambre para mantenerlos en la posición original.

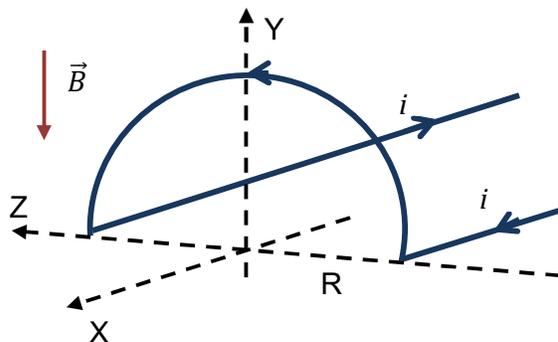
Ejercicio 2: Un haz de partículas de $^{25}\text{Mn}_{50}^{++}$ ingresa por el punto A de la figura a una región del espacio donde existe un campo magnético de intensidad $B = 1 \text{ T}$. Sabiendo que la energía de cada elemento del haz es de 10 keV



- justifique dirección y sentido del campo \vec{B} ;
- calcule el valor de la distancia AC;
- indique cuánto se eleva el haz sobre el plano XY si ingresa con una inclinación de 2° . (Adopte $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y $|e^-| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

Ejercicio 3: Dos alambres paralelos separados una distancia L , transportan corrientes antiparalelas de valor i_1 e $i_2 = 2 i_1$, respectivamente. a) indique y calcule, si existe, un punto en el que el campo magnético de la configuración se anule; b) indique si existe una dirección en el espacio en el que una carga q con velocidad v puede moverse sin acelerarse en presencia de estos dos cables.

Ejercicio 4: Por el alambre semiinfinito de la figura, curvado en su parte media en forma de

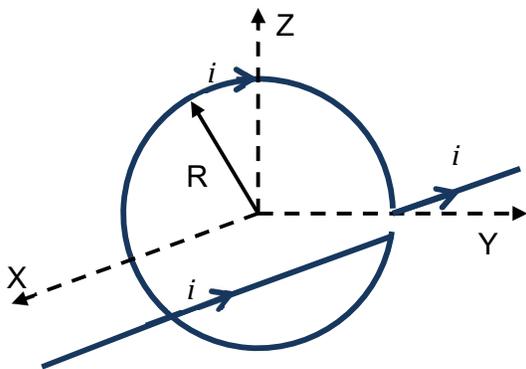
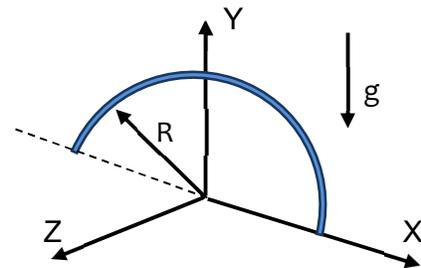


semicircunferencia de radio $R = 0,75 \text{ m}$, circula una corriente $i = 2 \text{ A}$. Las partes rectas son paralelas al eje que hemos denominado X. El alambre se halla inmerso en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = 50 \text{ T } \hat{e}_Y$. Calcule

- la fuerza que el campo exterior ejerce sobre el alambre (en los tramos rectos se calcula la fuerza por unidad de longitud);
- la fuerza que los alambres rectos se ejercen entre sí.

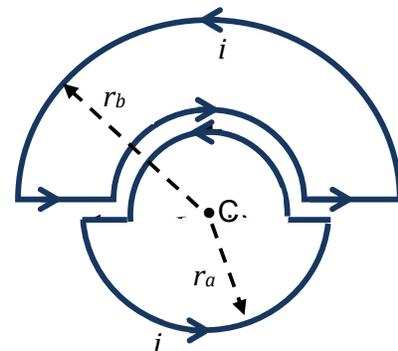
Ejercicio 5: El alambre semicircular de la figura, circulado por una corriente i , se mantiene en equilibrio mediante la acción de dos campos externos: el gravitatorio y uno magnético (a los efectos prácticos, los alambres que llevan la corriente pueden considerarse de masa nula)

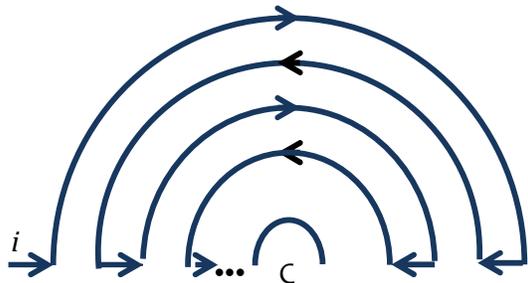
- indique en la dirección y el sentido del campo \vec{B} para lograr el equilibrio;
- indique la dirección que deben tener los alambres y el sentido en el que debe circular la corriente que transportan para lograr el equilibrio;
- calcule el valor de la masa del alambre en términos del radio R , de la corriente i que circula y del campo B .



Ejercicio 6: Calcule la fuerza que debe ejercerse sobre un cuerpo con carga $-Q$ para desplazarlo a lo largo del eje X de la figura, en sentido saliente, con velocidad constante v_0 (o sea, sin incrementar su energía cinética). La espira que permite la circulación de la corriente se supone enteramente contenida en el plano YZ y la abertura que posee puede considerarse infinitesimal, de manera tal que puede asumirse que se cierra sobre sí misma.

- Ejercicio 7:** Por las dos espiras planas de la figura circula una corriente de valor $i = 2A$, en los sentidos que se indican. Ambas espiras se hallan infinitesimalmente próximas, de manera tal que el radio interno $R = 10cm$ es común a ambas. Para $r_a = 15 cm$, $r_b = 20cm$, a) calcule el valor del campo magnético en el centro de simetría (marcado con la letra C); b) discuta cómo cambian los resultados si las corrientes invierten su sentido.

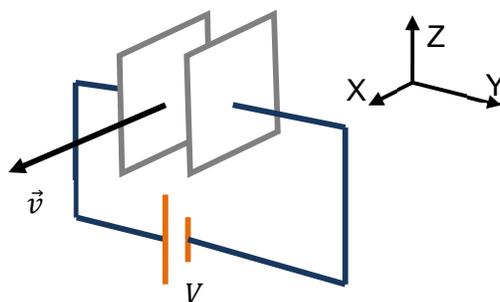




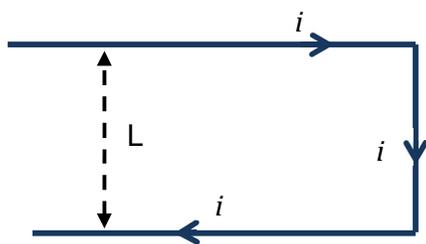
Ejercicio 8: El arreglo ideal de la figura consiste en un alambre doblado en forma de un conjunto infinito de semicircunferencias concéntricas de radios $R_n = r_a / (2n)$ ($n \geq 1$). La corriente que circula por cada espira decrece (por efecto de la resistencia) como $i_n = i_0 / n^2$. Calcule el valor del campo magnético en el centro común del arreglo (el punto C de la figura), indicando si es entrante o saliente.

(tenga en cuenta que $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$)

Ejercicio 9: Se inyecta un haz de electrones entre dos placas plano paralelas separadas entre sí 4 mm y entre las que se aplica una diferencia de potencial de 1kV como muestra la figura. Si la energía del haz es de 4×10^4 eV calcule el valor del vector campo magnético que debe generarse para evitar la deflexión del haz.



Ejercicio 10: Por el alambre de la figura, en forma de U abierta, cuyo lado vertical mide L, circula una corriente i. Las ramas horizontales son rectas. Calcule



- el valor del campo magnético generado por la corriente i en un punto P situado a una distancia R a la derecha del alambre vertical y a una altura $L/2$ del alambre inferior;
- la fuerza que por unidad de longitud el alambre horizontal superior ejerce sobre el horizontal inferior;
- el valor del campo magnético generado por la

corriente i en un punto P situado a una distancia R a la izquierda del alambre vertical y a una altura $L/2$ del alambre inferior.

Ejercicio 11: En el ejemplo 8.11 hemos calculado el campo magnético en el centro de una espira cuadrada. Calcule ahora el campo magnético para todo punto z del eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por el centro de la misma.

Ejercicio 12: Una espira circular de radio $R=0,25$ m por la que circula una corriente $i= 15$ mA se halla inmersa en un campo magnético uniforme de valor 0,5 G que forma un ángulo de 30° con el plano de la espira. Calcule: a) el valor del momento magnético de la espira; b) el torque (momento mecánico) sobre la espira debida al campo magnético externo.

Ejercicio 13: Suponga ahora que en las condiciones del ejercicio anterior son dos las espiras, solidarias, concéntricas y recorridas por la misma corriente. Discuta cómo se modifican los resultados.

Ejercicio 14: Suponga ahora que en las condiciones del ejercicio anterior se trata de un solenoide de 10.000 vueltas. Discuta cómo se modifican los resultados. Discuta en qué dirección gira el solenoide.

Respuestas los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: a) porque de otra manera no pueden ser considerados alambres infinitos;
 b) $\vec{F} = 2 \times 10^{-7} \text{ N } \hat{e}_x$; c) $y = 0,6 \text{ m}$ del alambre inferior; d) 10 seg (observe que la fuerza genera una deriva, pero no “empuja”); e) $F = 8 \times 10^{-13} \text{ N}$ “hacia afuera”.

Ejercicio 2: a) $\vec{B} = B \hat{e}_z$; b) $AC \approx 2 \text{ mm}$; c) $z \approx 0,5 \text{ mm}$

Ejercicio 3: a) el campo neto se anula en la región externa a los cables, a una distancia $x=L$ del alambre que transporta la corriente i_1 ; b) por una línea paralela a los cables, a la distancia en la que el campo se anula.

Ejercicio 4: a) $100 \text{ N/m } \hat{e}_z$ sobre el alambre recto izquierdo; $100 \text{ N/m } (-\hat{e}_z)$ sobre el alambre recto derecho; $150 \text{ N } \hat{e}_z$ sobre la parte semicircular.

b) $F = 5,33 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ (atractiva)

Ejercicio 5: a) debe ser $\vec{B} = B \hat{e}_z$; b) los alambres deben ser paralelos al eje Z, y la corriente i debe circular en sentido antihorario por la semicircunferencia; c) $m = \frac{iRB}{g}$

Ejercicio 6: $\vec{F} = \mu_0 \frac{QV_0 i}{2\pi R} (-\hat{e}_y)$

Ejercicio 7: $\vec{B} = 3,66 \times 10^{-6} \text{ T } \hat{e}_z$ (perpendicular a la hoja y saliente); b) cambia el sentido del campo magnético

Ejercicio 8: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4r_a} i_0 \ln 2 \text{ T}$ (saliente)

Ejercicio 9: $\vec{B} = 2,12 \times 10^{-3} \hat{e}_z \text{ T}$

Ejercicio 10: a) $|\vec{B}| = \sqrt{2} \frac{\mu_0 i}{2\pi L}$ (saliendo de la hoja); b) $F = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}$ (repulsiva);

c) $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} [2\sqrt{2} - 2]$ (saliendo de la hoja).

Ejercicio 11: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} L^2 \frac{1}{\left(z^2 + \frac{L^2}{4}\right) \sqrt{z^2 + \frac{L^2}{2}}} \hat{e}_z$

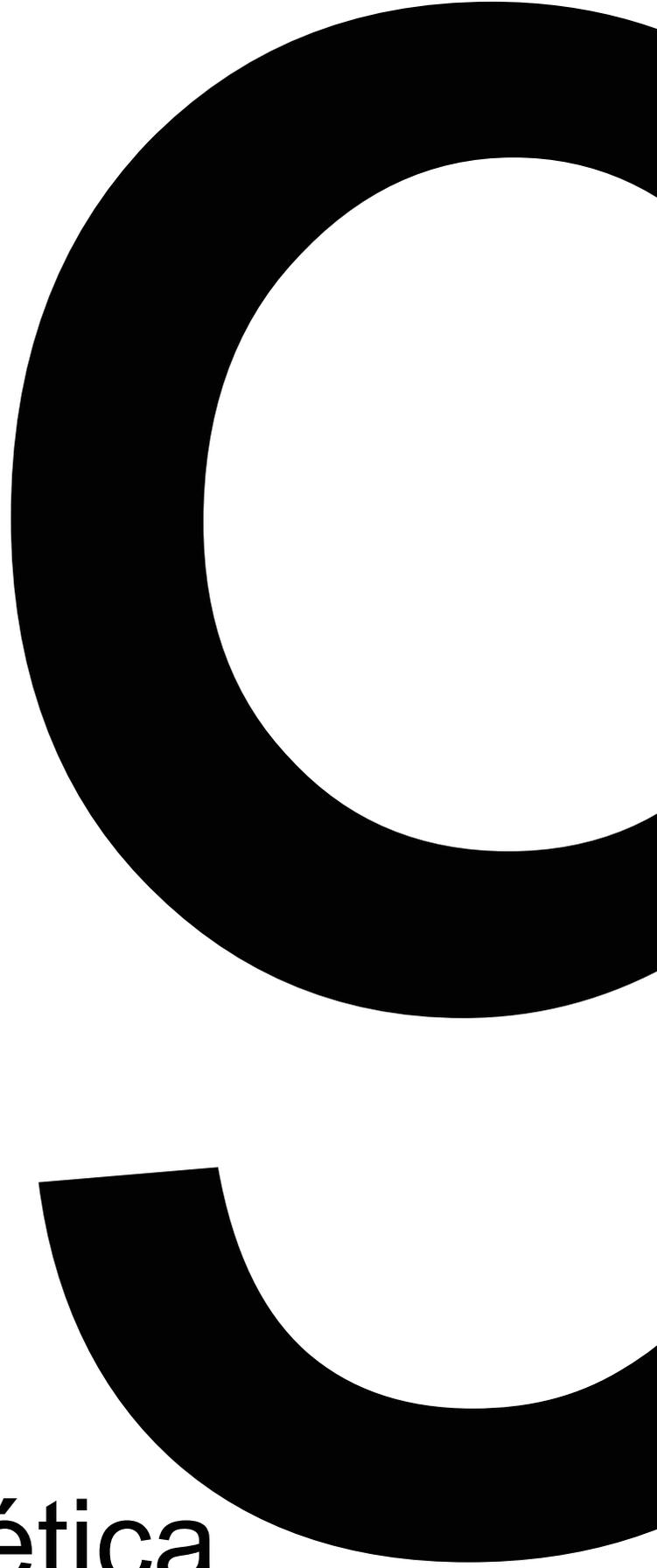
Ejercicio 12: a) $m = 2,94 \times 10^{-3} \text{ A m}^2$; b) $\tau = 7,36 \times 10^{-8} \text{ Nm}$.

Ejercicio 13: se multiplica todo por dos, es decir, a) $m = 5,88 \times 10^{-3} \text{ A m}^2$; b) $\tau = 14,72 \times 10^{-8} \text{ Nm}$.

Ejercicio 14: se multiplica todo por 10^4 , es decir, a) $m = 29,4 \text{ A m}^2$; b) $\tau = 7,36 \times 10^{-4} \text{ Nm}$. Si el campo está orientado 30° respecto al momento de las espiras, sus componentes respecto del eje del solenoide valen $\vec{B} = (4,33 \times 10^{-5} \hat{e}_\parallel + 2,5 \times 10^{-5} \hat{e}_\perp) \text{ T}$. El torque vale entonces

$\vec{\tau} = [29,4 \hat{e}_\parallel \times (4,33 \times 10^{-5} \hat{e}_\parallel + 2,5 \times 10^{-5} \hat{e}_\perp)] \text{ Nm} = 7,35 \times 10^{-4} \text{ Nm } \hat{e}_\perp$, donde \hat{e}_\perp es un versor perpendicular al plano formado por \hat{e}_\parallel y \hat{e}_\perp . En el caso $\hat{e}_\parallel \equiv \hat{e}_x$ y $\hat{e}_\perp \equiv \hat{e}_y$ resulta $\vec{\tau} = 7,35 \times 10^{-4} \text{ Nm } \hat{e}_z$.

Fenómenos de inducción electromagnética



9.1 – Introducción

En el capítulo anterior hemos visto que las corrientes eléctricas son fuentes de campos magnéticos. De igual manera, en la ecuación (8.2) pusimos de manifiesto que los campos magnéticos interactúan con las cargas en movimiento. Cabe preguntarse si los campos magnéticos poseen la propiedad de provocar o inducir, ellos mismos, corrientes eléctricas (una suerte de analogía con el campo eléctrico, que es generado por las cargas eléctricas pero que a su vez induce cargas).

La respuesta, en principio, tendría que ser (y de hecho lo es) afirmativa, porque al cabo la interacción magnética con las cargas en movimiento produce una fuerza sobre las cargas perpendicular a su velocidad; de tener esta fuerza alguna componente en una dirección en la que las cargas pudieran desplazarse, se generaría una corriente. El fenómeno de generación de una corriente eléctrica por un campo magnético recibe el nombre de *inducción* (de ahí el nombre del vector \vec{B}). Para 1819 este fenómeno ya había sido observado y estudiado por Hans Christian Oersted, pero fue Michael Faraday quien un par de años después sentó las bases para su comprensión.

Oersted fue el precursor de los experimentos electromagnéticos. De hecho, consiguió demostrar que una corriente eléctrica genera e induce efectos magnéticos. Ya hemos discutido en el capítulo anterior la ley de Ampere como una ley fundacional, en el sentido de que sienta las bases para comprender el origen de la fuerza que se ejercen dos alambres circulares por sendas corrientes eléctricas. Ampere además introdujo el concepto de corrientes atómico-moleculares para explicar (correctamente, dicho sea de paso) el origen del magnetismo inducido, esto es, magnetismo por influencia.

Faraday propuso la posibilidad del fenómeno inverso, es decir, la generación de corrientes inducidas por influencia de un campo magnético. O, para decirlo en términos diferentes, la posibilidad de que una corriente macroscópica sea capaz de engendrar, en un conductor vecino, corrientes también macroscópicas. En lo que sigue de este capítulo habremos de desarrollar los conceptos fundamentales de lo que se conoce como *inducción electromagnética* y las importantes consecuencias que de este fenómeno se desprenden, introduciendo el tratamiento de algunas de sus aplicaciones, muchas de ellas cotidianas, como los motores eléctricos.

9.2 – Ley de Faraday - Lenz

El experimento que pone de manifiesto el fenómeno de la inducción es muy sencillo, y se esquematiza en la figura 9.1. Se trata simplemente de una espira que se halla en una región donde existe un campo magnético no uniforme, como puede ser el campo generado por un imán. La espira tiene intercalado (es decir, conectado en serie) un instrumento capaz de detectar el pasaje de una corriente eléctrica, llamado galvanómetro (eventualmente puede estar calibrado para medir la cantidad de corriente que circula, en cuyo caso se llama amperímetro).

Básicamente, un galvanómetro es una bobina suspendida por delgados hilos metálicos en el campo magnético de un imán permanente, orientada de tal forma que al circularle una corriente el momento magnético sobre cada espira que conforma el bobinado (véase la sección 8.5) la hace rotar un ángulo proporcional a la corriente que la circula. Uno de los alambres de suspensión lleva adosado algún elemento (generalmente un espejo o una aguja) que indica la rotación del bobinado completo. Obsérvese que el principio de funcionamiento del galvanómetro no es el mismo que el que pretendemos poner de manifiesto. Nosotros estamos interesados ahora en la corriente eléctrica generada por un campo magnético que, visto desde la espira, es variable. El campo que ve la bobina del galvanómetro es esencialmente constante porque está aislada del exterior.

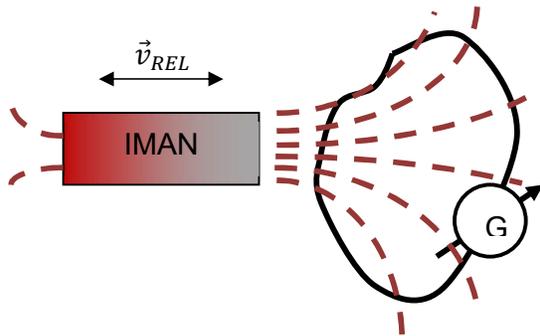


Fig. 9.1: el galvanómetro G colocado en serie con la espira sólo marca el paso de una corriente cuando su velocidad relativa respecto del imán es no nula. En líneas de punto se muestran algunas líneas de campo.

por la espira es no nula. Igual efecto se produce cuando la espira se halla en un campo magnético variable, como puede ser el que se produce cuando se enciende o apaga un electroimán.

Desde el punto de vista de un observador en el imán el problema también puede interpretarse como una variación de la superficie encerrada por la espira (porque la espira parece agrandarse o achicarse según se acerca o se aleja del imán) de manera tal que el galvanómetro también *debe* detectar el paso de una corriente cuando varía el área de la espira aún en el caso en que el campo magnético fuera uniforme.

Obsérvese que lo único que varía con el movimiento relativo es el número de líneas de campo que atraviesan el plano de la espira (véase la figura 9.1), esto es, el flujo del vector inducción \vec{B} a través de la superficie (abierta) de la espira. Obsérvese que al ser la espira una superficie abierta no es el flujo magnético ϕ_M de la ecuación (8.87) el que nos interesa sino el flujo

$$\Phi_M = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.1)$$

Luego, la corriente inducida *debe* ser proporcional a la variación del flujo magnético Φ_M y acompañar sus cambios. Desde un punto de vista puramente circuital, la espira tiene una determinada resistencia R y si por ella circula una corriente (constante o variable, tanto da) es porque de alguna manera aparece una diferencia de potencial que realiza el trabajo de transportar las cargas. A esta diferencia de potencial se la denomina *fuerza electromotriz*

que indica la rotación del bobinado completo. Obsérvese que el principio de funcionamiento del galvanómetro no es el mismo que el que pretendemos poner de manifiesto. Nosotros estamos interesados ahora en la corriente eléctrica generada por un campo magnético que, visto desde la espira, es variable. El campo que ve la bobina del galvanómetro es esencialmente constante porque está aislada del exterior.

Volviendo a la inducción de corriente en la espira, se observa que si la velocidad relativa entre la espira y el imán es nula, el galvanómetro no marca pasaje de corriente alguna. Por el contrario, sea que se mueve la espira o el imán, la corriente

(que generalmente se abrevia como fem y que denotaremos \mathcal{E}), y de esta manera el fenómeno de la aparición de una corriente inducida puede pensarse también a partir de la inducción de una fuerza electromotriz (fem inducida) proporcional a la variación del flujo magnético Φ_M .

Sin embargo, como la fuerza electromotriz inducida es nula si el flujo Φ_M es constante (no necesariamente nulo) resulta que \mathcal{E} acompaña a las variaciones del flujo y no al flujo mismo. Dimensionalmente, dado que

$$[\Phi_M] = T m^2 = \frac{N \text{ seg } m^2}{C m} = \left(\frac{N m}{C}\right) \text{seg} = V \text{seg} \quad (9.2)$$

se ve que la fuerza electromotriz inducida debe relacionarse con las variaciones temporales del flujo magnético, de manera tal que en términos generales, a primer orden la forma funcional de \mathcal{E} debe ser

$$\mathcal{E} = \alpha \frac{d\Phi_M}{dt} + \beta \quad (9.3)$$

donde α y β son constantes a determinar. Ahora bien, la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} , como ya dijimos, es nula si el flujo es constante, de manera tal que la constante β misma debe ser nula.

Por lo demás, la corriente inducida en la espira genera a su vez un campo magnético. Imaginemos que esta corriente inducida circula de tal manera que genera un campo magnético que interactúa atractivamente con el imán de la figura 9.1. Podemos entonces dejar libre al imán y este se acerca a la espira, haciendo que más líneas de campo la atraviesen. Al incrementarse el flujo aumenta la corriente, y en consecuencia aumenta la fuerza atractiva, y el ciclo aumento de flujo \rightarrow aumento de corriente inducida \rightarrow incremento de fuerza atractiva \rightarrow acercamiento del imán \rightarrow aumento de flujo, se podría sostener indefinidamente, realizando trabajo sobre el imán sin consumo ni de calor ni de energía, una situación que por cierto viola el primer principio de la Termodinámica.

La inducción de una fuerza electromotriz en una espira está relacionada con las variaciones temporales de un flujo magnético (a través de la superficie de una espira) y no con la sola existencia de ese flujo magnético. En otras palabras, un flujo magnético constante no induce fem alguna.

Entonces, el escenario debe ser el inverso: la corriente inducida circula de manera tal que genera un campo magnético que se opone a la variación del flujo original, repele al imán, éste se aleja, disminuye el flujo y si queremos acercar el imán a la espira debemos realizar trabajo en contra de la fuerza magnética repulsiva.

Esta manera de pensar el principio de conservación de la energía (conocido como ley de Lenz) impone que en la ecuación (9.3) sea $\alpha = -1$, de manera tal que llegamos a la ley de Faraday–Lenz como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \quad (9.4)$$

que en función del campo magnético externo a la espira y de su superficie se escribe

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\left[\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint \vec{B} \cdot \frac{\partial d\vec{S}}{\partial t} \right] \quad (9.5)$$

donde $d\vec{S}$ es el elemento de superficie orientada $dS \hat{n}$, y las derivadas dentro de las integrales son parciales porque recién después de integrada en las coordenadas espaciales la función resultante depende solamente del tiempo.

En principio la superficie $d\vec{S}$ no parece quedar bien definida porque no queda claro cuál debe ser la normal saliente. Sin embargo, el flujo magnético a través de una superficie abierta queda definido por la dirección del campo y en principio no habrá dificultades en definir todos y cada uno de los parámetros que

El signo negativo en la ley de Faraday- Lenz tiene un significado físico muy preciso (refleja la imposibilidad de obtener energía sin invertir ni calor ni trabajo). Su significado práctico, por el contrario, es de dudosa practicidad, porque no queda claro qué significa una fem inducida “negativa”.

intervienen en la expresión (9.5). Por lo demás, la corriente inducida impone un sentido de recorrido del circuito (la espira) porque tiende a circular contrarrestando las variaciones que la generan. Luego, a los efectos del flujo magnético, la normal saliente a la superficie tiene la dirección y el sentido de avance de un sacacorchos que girara en sentido contrario a la corriente inducida. Como veremos en los ejemplos que siguen, esta regla es equivalente a pensar que si camináramos moviéndonos en sentido contrario a la corriente inducida, de manera

que el interior de la espira quedara siempre a nuestra izquierda, nuestra cabeza indicaría el sentido de la normal saliente a la superficie.

Por último, vale la pena mencionar que el signo negativo de la expresión (9.4) (o su equivalente (9.5)) se relaciona con la conservación de la energía y no tiene ulterior interpretación; de hecho, toda vez que el flujo magnético Φ_M sea creciente (decreciente) la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} habrá de ser negativa (positiva), pero en ambos casos lo que tiene significado es la circulación de una corriente inducida. Analizaremos los siguientes ejemplos para fijar ideas.

Ejemplo 9.1: La barra AD de la figura 9.2 se mueve sin rozamiento, con velocidad uniforme $\vec{v} = v \hat{e}_x$, en contacto con un alambre conductor en forma de U. Todo el sistema se halla en una región de campo magnético uniforme $\vec{B} = B \hat{e}_z$. Calculemos el valor de la

fuerza electromotriz inducida en el circuito y el trabajo requerido para mantener a la barra AD en movimiento.

El desplazamiento de la barra de longitud $\mathcal{L} = AD$ modifica el área de la espira que forma con el conductor en U sobre el que se mueve, de manera tal que en un intervalo infinitesimal el flujo de campo magnético se incrementa una cantidad

$$d\Phi_M = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.6)$$

porque el área de la espira aumenta con el movimiento de la barra. En principio, queda claro que la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} habrá de tener signo negativo, pero parece también evidente que este hecho carece de relevancia porque no hay definida una dirección positiva.

Para determinar la normal saliente pensemos que la corriente inducida i_{IND} habrá de circular de manera tal de que la fuerza magnética inducida

$$d\vec{F}_{IND} = i_{IND} d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (9.7)$$

se oponga al desplazamiento de la barra y la frene. Este es el verdadero significado de una corriente “que se opone a la causa que la produce”; la corriente no se opone al campo magnético externo (que al cabo en este caso es de valor constante) sino a la variación del flujo magnético.

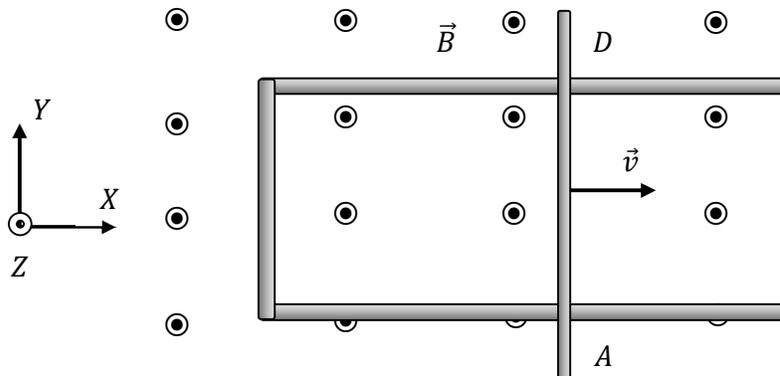


Fig. 9.2: la barra AD se mueve a través de una región con campo \vec{B} uniforme en la dirección saliente del plano del papel.

Con el campo magnético en la dirección \hat{e}_z , para que la fuerza \vec{F}_{IND} actúe en la dirección $(-\hat{e}_x)$ la corriente por la barra móvil debe circular en la dirección $(-\hat{e}_y)$. Algunas consecuencias son inmediatas: por un lado, la corriente inducida circula de manera tal que

genera un campo magnético (inducido) en la dirección $(-\hat{e}_z)$, esto es, opuesto al campo externo, en la región interna de la espira (que es donde se calcula el flujo magnético); en segundo lugar, si tuviéramos que reemplazar a la barra AD por una pila que generara la misma corriente, la conectaríamos con el borne negativo en D y el positivo en A , de manera tal que todo el conjunto se comporta como un sistema en el cual $V_A > V_D$; por último, notemos que la normal saliente a la superficie de la espira, que es la opuesta a la de avance de un sacacorchos que girara como la corriente inducida, apunta en el sentido \hat{e}_z , precisamente en la dirección del campo externo. Obsérvese que, como afirmamos renglones arriba, la variación temporal del flujo de campo magnético externo es creciente porque la superficie se agranda a un ritmo $dS = v dt dy$.

A partir de la última observación el cálculo de la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} es inmediato. Dado que

$$d\Phi_M = \int_A^D (B \hat{e}_z \cdot v dt \hat{e}_z) dy = Bv\mathcal{L} dt \quad (9.8)$$

resulta que por simple aplicación de la expresión (9.4) obtenemos

$$\mathcal{E} = -Bv\mathcal{L} \quad (9.9)$$

Obsérvese que, como habíamos anticipado, la fuerza electromotriz inducida tiene signo negativo (aunque de nuevo, no significa que represente una diferencia de potencial “negativa”). Pensemos qué ocurre en la situación en la que la barra se mueve con velocidad opuesta manteniendo invariante el campo magnético, esto es, con velocidad $\vec{v} = v(-\hat{e}_x)$ en el mismo campo $\vec{B} = B(\hat{e}_z)$.

En este caso tan sencillo sabemos que la fuerza electromotriz inducida habrá de tener signo positivo porque el flujo Φ_M es decreciente. Pero vale la pena observar que la corriente en este caso circula en sentido contrario al anterior, esto es, en la barra AD circula “hacia arriba”. La razón es muy sencilla: desde un punto de vista meramente matemático el vector $i_{IND} d\vec{\ell}$ debe orientarse en la dirección \hat{e}_y para que la fuerza se oriente en la dirección \hat{e}_x y tienda a frenar a la barra. Desde un punto de vista físico, la corriente habrá de circular de manera tal de reforzar el flujo magnético que decrece (se opone a la variación) y esto lo consigue generando un campo magnético que en el interior de la espira se alinea con el campo externo en la dirección \hat{e}_z , esto es, circulando en sentido antihorario. Luego, cambian los signos de Φ_M en la expresión (9.4) y de $d\vec{\ell}$ en la ecuación (9.7), pero sus módulos son invariantes.

El problema puede también interpretarse desde un punto de vista ligeramente distinto: al desplazarse por la región con campo magnético, todas las cargas de la barra móvil están sometidas a la misma fuerza

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.10)$$

aunque posiblemente sólo algunas cargas podrán moverse en la dirección de la fuerza y transformarse en la corriente i_{IND} .

En el caso de la barra conductora de la figura 9.2 las cargas que se desplazan son electrones de carga $q = -e$, de manera tal que la fuerza tiene valor

$$\vec{F} = (-e)vB(-\hat{e}_y) \quad (9.11)$$

y en consecuencia está dirigida “hacia arriba”. El fenómeno del desplazamiento de cargas puede también interpretarse desde el punto de vista de la aparición de un campo eléctrico ficticio (recordemos que en la expresión (8.104) de la fuerza de Lorentz el producto $\vec{v} \times \vec{B}$ no se interpreta como un campo eléctrico real) de valor

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{(-e)} = \vec{v} \times \vec{B} = vB(-\hat{e}_y) \quad (9.12)$$

Para desplazar una carga negativa a velocidad constante a lo largo de la barra AD , desde D hasta A , debe realizarse un trabajo que por unidad de carga es precisamente

$$|V_A - V_D| = \mathcal{E} = vBL \quad (9.13)$$

Ahora bien ¿de dónde proviene la energía necesaria para poner en movimiento a las cargas? Está claro que algún ente debe estar haciendo trabajo, y ese ente es precisamente la fuerza \vec{F} de la expresión (9.11). De hecho, debe hacer trabajo contra algo, porque de otra manera no sería necesario invertir energía.

Recordemos que al originarse la corriente i_{IND} aparece la fuerza \vec{F}_{IND} de la expresión (9.7) que tiende a frenar a la barra móvil. Para mantener a la barra en movimiento con velocidad \vec{v} hay que aplicar una fuerza \vec{F} , opuesta a \vec{F}_{IND} , que desarrolla una potencia cuyo valor absoluto es

$$|\vec{F}_{IND} \cdot \vec{v}| = |i_{IND} vBL| = i_{IND} \mathcal{E} \quad (9.14)$$

En la expresión (9.14), $i_{IND} \mathcal{E}$ no es otra cosa que la potencia que se disipa en el circuito por efecto Joule, de manera tal que si todo el circuito tiene resistencia eléctrica R la potencia disipada habrá de ser

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(vBL)^2}{R} \quad (9.15)$$

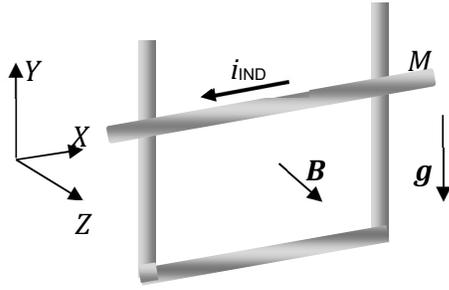


Fig. 9.3: la barra horizontal superior cae con velocidad función de su peso y de la fuerza magnética inducida.

Ejemplo 9.2: Supongamos ahora que giramos 90° el cuadro del ejemplo anterior, como se muestra en la figura 9.3, de modo tal que la barra metálica móvil, que tiene masa M , cae. Como antes, la barra desliza idealmente en contacto con el cuadro metálico. Asumiendo que el cuadro completo tiene resistencia eléctrica R (que no varía con el movimiento de la barra), hallemos la expresión de la velocidad de caída de la barra teniendo en cuenta sólo el campo externo.

Ante todo, si circula una corriente inducida variable se genera un campo magnético, también variable, debido a esa corriente, y en consecuencia aparece (inducido) un flujo propio. En este análisis sólo tendremos en cuenta el campo externo y pospondremos hasta la sección 9.2 el tratamiento del flujo autoinducido (de todos modos, en términos relativos mucho menor al flujo externo). Hecha esta salvedad, notemos que al caer la barra el flujo dentro del cuadro disminuye, de manera tal que la corriente inducida tenderá a reforzarlo, es decir, tenderá a originar un campo magnético en igual sentido que el externo, de modo tal que en el dibujo circula en sentido antihorario. Con la barra cayendo la fuerza magnética inducida se escribe entonces como

$$d\vec{F}_{MAG} = i_{IND} d\vec{\ell} \times \vec{B} = i_{IND} dx (-\hat{e}_x) \times B \hat{e}_z \Rightarrow \vec{F}_{MAG} = i_{IND} LB \hat{e}_y \quad (9.16)$$

Por lo demás, la fem inducida se escribe como

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -BL \left(-\frac{dy}{dt} \right) \quad (9.17)$$

y, en consecuencia, resulta

$$i_{IND} = \frac{BL}{R} \frac{dy}{dt} \quad (9.18)$$

Luego, la ecuación de Newton

$$F_{MAG} - Mg = Ma \equiv -M \frac{d^2y}{dt^2} \quad (9.19)$$

resulta en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{B^2 L^2}{MR} \frac{dy}{dt} = g \equiv \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 L^2}{MR} v = g \quad (9.20)$$

La ecuación diferencial que resulta es de primer grado, primer orden, a coeficientes constantes, del tipo que ya hemos resuelto en diversas oportunidades a lo largo de estos capítulos (por ejemplo, es funcionalmente idéntica a la de la carga en función del tiempo en un circuito RC , ecuación (7.137)). Por directa sustitución puede corroborarse que si en el instante inicial $t = 0$ la velocidad de la barra es nula, la solución es de la forma

$$v(t) = \frac{M g R}{B^2 L^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 L^2}{MR} t} \right) \quad (9.21)$$

La ecuación (9.21) expresa el valor del módulo de la velocidad de caída. El sentido es hacia abajo porque ese es el único movimiento posible de la barra, caer, ascender no puede, porque si supusiéramos que sube resultaría que la corriente inducida circularía en sentido horario y en tal caso la fuerza magnética inducida tendría sentido hacia abajo, en el mismo sentido que el peso de la barra, y no habría fuerza alguna que la haga subir, en clara contradicción con nuestra suposición. Por lo demás, la expresión (9.21) podría llamar a engaño porque en principio podría pensarse (erróneamente) que alcanza con colocar una resistencia de elevado valor y la velocidad de caída sería arbitrariamente grande. O que un campo magnético arbitrariamente pequeño provocaría efectos similares en la velocidad. Sin embargo, puede verse que si la resistencia eléctrica es muy grande (o el valor del campo magnético muy pequeño) la barra se mueve prácticamente como en caída libre, porque en tal caso la corriente inducida, y luego la fuerza magnética, serían mucho más pequeñas que la fuerza gravitatoria. Por ejemplo, para $B = 1T$, $L = 1m$, $M = 1kg$, $R = 1M\Omega \equiv 10^6\Omega$ es fácil ver que al cabo de 1 seg la diferencia entre la velocidad de caída con campo magnético y la velocidad de caída libre es del orden de 5 millonésimas de m/seg . En el extremo opuesto, si es $B^2 L^2 \gg MR$, la velocidad de caída será muy pequeña. Y en cualquier caso, la expresión (9.21) indica que al cabo de un cierto tiempo (del orden de $5B^2 L^2 / MR$) la velocidad de caída será prácticamente constante.

Ejemplo 9.3: La fuerza electromotriz \mathcal{E} que se induce en un sistema no requiere de un circuito cerrado como el de los ejemplos anteriores. Por caso, analicemos la fuerza electromotriz que aparece entre los extremos de una barra como la de la figura 9.4, que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo, inmersa en un campo magnético uniforme.

La corriente que vaya a circular lo hará en un sentido tal que tienda a frenar a la barra. Para ello, teniendo en cuenta la geometría cilíndrica del problema y el sistema de coordenadas de la figura 9.4, la fuerza debe estar en la dirección \hat{e}_ϕ . Como el campo magnético tiene sentido \hat{e}_z , resulta que la corriente debe circular en la dirección $(-\hat{e}_R)$, esto

es, desde el punto D hacia el extremo opuesto (que se halla a mayor potencial, porque si conectáramos una pila que hiciera circular esa misma corriente, lo haríamos con el polo negativo en el punto D).

El área diferencial $d\vec{S}$ que la barra recorre en la unidad de tiempo vale

$$d\vec{S} = R dRd\theta \hat{n} = R\omega dt dR(-\hat{e}_z) \tag{9.22}$$

de manera tal que el diferencial de flujo magnético se escribe como

$$d\Phi_M = \int_A^D B\hat{e}_z \cdot \omega dt (-\hat{e}_z) R dR = -\frac{1}{2} \omega \ell^2 B dt \tag{9.23}$$

y el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} será

$$|\mathcal{E}| = -\frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{1}{2} \omega \ell^2 B \tag{9.24}$$

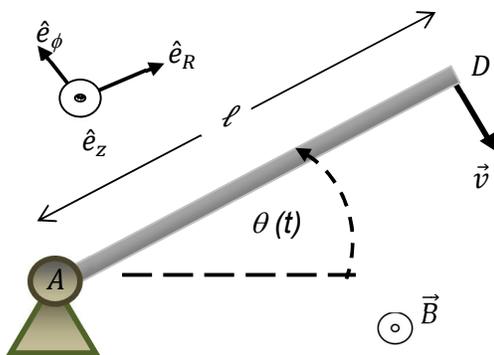


Fig. 9.4: la barra gira alrededor del punto A en sentido horario. En esta situación, la existencia de un campo magnético externo provoca la inducción de una fuerza electromotriz que transporta electrones desde D hacia A.

Osérvese que una situación absolutamente análoga se presenta si lo que gira es un disco conductor en lugar de una barra, porque todo ocurre como si fuera una sucesión de barras separadas una distancia infinitesimal. De hecho, este tipo de dispositivo, conocido como *disco de Faraday* y esquematizado en la figura 9.5, se utiliza como un generador elemental de tensión. Consiste en un disco metálico de radio L que gira con frecuencia $f = \omega/2\pi$ alrededor de su eje de simetría, perpendicular al plano del disco. Un par de escobillas deslizantes, una en el centro y otra en el borde, se usan a modo de contactos. Obsérvese que el campo magnético tiene sentido opuesto al vector velocidad angular, de manera tal que la

fuerza electromotriz inducida entre los contactos es en un todo similar a la expresión (9.24).

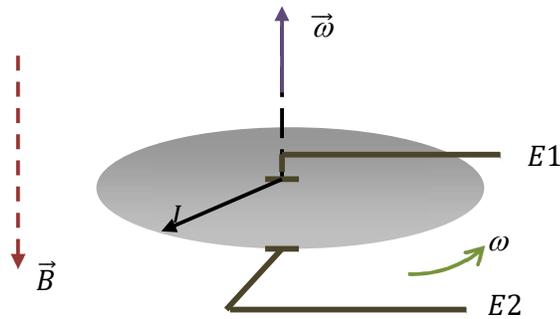


Fig. 9.5: disco de Faraday, girando en sentido antihorario ($\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$). Entre las escobillas E1 y E2 se induce una diferencia de potencial cuyo valor depende de ω y de B.

Ejemplo 9.4: Un bobinado de 1000 espiras rectangulares de lados a y h , se encuentra a una distancia D de un alambre recto de longitud ℓ mucho mayor que cualquier longitud típica del problema, esto es, $\ell \gg a, h, D$. En un determinado instante se hace circular corriente por el alambre, que crece hasta llegar a su valor en régimen estacionario como $i(t) = i_0 (1 - e^{-\beta t})$, donde β es una constante positiva. Calculemos el valor de la fuerza electromotriz inducida en el bobinado.

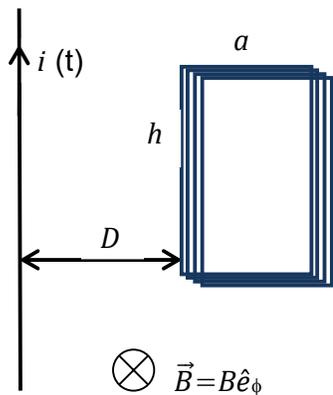


Fig. 9.6: esquema del bobinado compacto del ejemplo 9.3. La variación temporal de la corriente provoca una variación temporal del flujo, que induce una fem en la espira.

Supongamos que la configuración es la de la figura 9.5, en la que el alambre coincide con el eje Z del sistema de referencia elegido. Por lo demás, siendo $\ell \gg a, h, D$, podemos trabajar en la aproximación de alambre infinito, que de acuerdo a la expresión (8.52) genera un campo magnético que en este caso vale

$$\vec{B}(R, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (9.25)$$

Debemos destacar que este es el primer ejemplo en el que las cargas están aceleradas. Ya en el capítulo 8

habíamos mencionado que con la aceleración de las cargas eléctricas aparecen fenómenos de radiación que, por lo pronto, y en virtud de los valores que adoptamos para los diferentes parámetros, están muy lejos de ser significativos (y que en consecuencia, de aquí en más, dejaremos de lado hasta el capítulo 11). Como este campo magnético crece desde su valor nulo en $t = 0$ hasta su valor en régimen permanente, la corriente en cada espira habrá de

circular de manera tal de disminuir el valor del campo magnético dentro de la espira, esto es, tiende a generar un campo magnético en la dirección $(-\hat{e}_\phi)$, circulando para ello en sentido antihorario. Luego, la normal saliente a la superficie es opuesta al sentido de la circulación de la corriente inducida y por tanto coincide con el versor \hat{e}_ϕ , y el diferencial de superficie se escribe como

$$d\vec{S} = dRdz \hat{n} = dR dz \hat{e}_\phi \quad (9.26)$$

Para calcular el valor de la fuerza electromotriz inducida apliquemos directamente la expresión (9.5) con $dS/dt = 0$, teniendo en cuenta que el principio de superposición impone que en el caso de N espiras sea

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (9.27)$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -N \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -N \frac{d}{dt} \left[\int_0^h dz \int_a^{D+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi R} \hat{e}_\phi \cdot dR \hat{e}_\phi \right] = \\ &= -\frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Teniendo en cuenta que la corriente varía como $i(t) = i_0 (1 - e^{-\beta t})$ la expresión (9.28) resulta

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) i_0 \beta e^{-\beta t} \quad (9.29)$$

Para fijar ideas, supongamos específicamente que las espiras tienen un ancho de 2 cm , que su altura es de 10 cm y que el borde izquierdo se halla a 10 cm del alambre. Supongamos también que la corriente de régimen estacionario vale $i_0 = 0,1 \text{ A}$, y que las 1000 espiras se han bobinado en forma compacta, de manera tal que el campo pueda considerarse idéntico sobre cada espira. Con estos valores resulta

$$|\mathcal{E}(t)| = 3,64 \times 10^{-7} \beta e^{-\beta t} \quad (9.30)$$

En la figura 9.7 se muestran las curvas del módulo de la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y del parámetro β . Es casi evidente que el régimen estacionario se logra

en tiempos más breves cuanto mayor es el valor de β , y dado que $|\mathcal{E}|$ es nulo en régimen estacionario resulta que la curva debe decrecer más rápidamente cuanto mayor es el valor del parámetro β . Pero como el área debajo de cada curva es la misma para todo valor positivo de β (y, como es fácil corroborar, en todos los casos vale 1) resulta que el valor de pico de $|\mathcal{E}|$ debe incrementarse con β . Dicho de otra forma, cuanto más rápida es la variación del flujo, mayor es el valor inicial de $|\mathcal{E}|$, que no expresa otra cosa que el teorema de Faraday, pero que aquí remarcamos como una evidente indicación de que la fuerza electromotriz inducida no se opone al flujo sino a su variación.

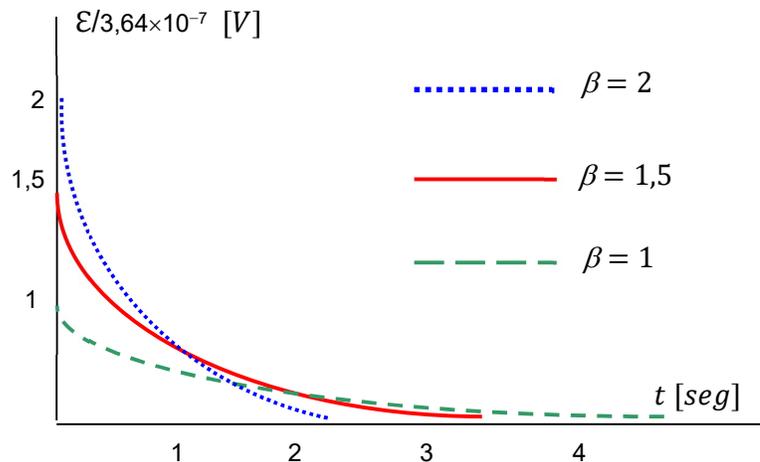


Fig. 9.7: fem inducida en función del tiempo para diferentes valores del parámetro β .

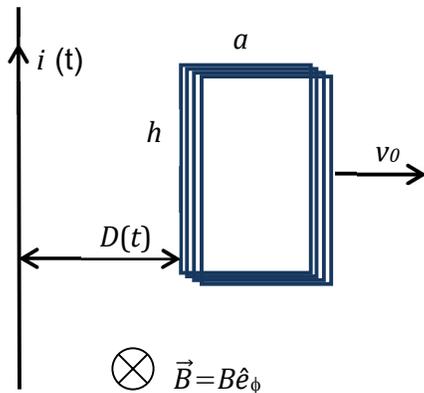
Ejemplo 9.5: La inducción de una fuerza electromotriz en el cuadro no está asociada solamente a las variaciones de la corriente en el cable. De hecho, cualquier variación temporal de los parámetros propios que intervienen en el flujo habrá de inducir una fem. Por ejemplo, supongamos que además de variar la corriente que circula por el cable, el cuadro se aleja con velocidad uniforme v_0 . En tal caso, la distancia D al cable está variando en el tiempo y habremos de tener en cuenta esta variación a la hora de computar la fem inducida.

Específicamente, habremos de reescribir la ecuación (9.28) en la forma

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{D+a}{D} \right) i(t) \right] \tag{9.31}$$

en cuyo caso resulta

$$\varepsilon(t) = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) i_0 \beta e^{-\beta t} + i_0 e^{-\beta t} \left[\left(\frac{D}{D+a}\right) \left(\frac{1}{D} - \frac{D+a}{D^2}\right) \frac{dD}{dt} \right] \right\} \quad (9.32)$$



donde, por supuesto, $dD/dt = v_0$. Obsérvese que en este caso, por ser creciente la distancia, la derivada es positiva (es decir, v_0 es positivo). En general, para cualquier parámetro G propio del flujo, siempre podremos escribir

$$\frac{d\Phi_M(G)}{dt} = \frac{\partial\Phi_M}{\partial G} \frac{dG}{dt} \quad (9.33)$$

Fig. 9.8: esquema del bobinado compacto del ejemplo 9.5, similar al del ejemplo 9.4 salvo que ahora se aleja del cable con velocidad v_0 .

de manera tal que, al menos en principio, podemos siempre evaluar la fuerza electromotriz inducida. De hecho, en los ejemplos que siguen y en los ejercicios al final del capítulo se proponen diversas situaciones que ilustran el método.

Ejemplo 9.6: La espira cuadrada de la figura 9.9 avanza con velocidad constante inmersa en un campo magnético variable de la forma

$$\vec{B} = \frac{A}{C+x} \hat{e}_y$$

donde A y C son dos constantes positivas. Hallemos la expresión del módulo de la fuerza electromotriz inducida en la espira en todo instante, suponiendo que en el instante $t = 0$ la espira se hallaba a distancia x_0 del origen.

Sin necesidad de cálculo alguno podemos establecer el sentido de la corriente inducida. En efecto, dado que la espira se desplaza hacia regiones en las que el campo externo disminuye, la corriente inducida procurará reforzar el flujo que se extingue, de manera tal que tenderá a generar un campo magnético paralelo al campo externo *dentro* de la espira, lo

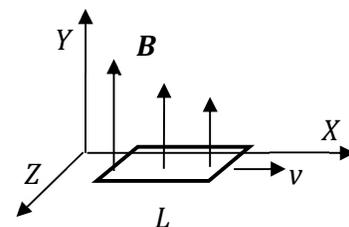


Fig. 9.9: la espira avanza en el sentido de campo decreciente. Luego, la corriente inducida tiende a reforzar el flujo magnético, generando un campo inducido en igual sentido al externo.

que a su vez significa que debe circular en sentido antihorario. Por lo demás, el flujo magnético se escribe como

$$\Phi_M = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_{x_0+vt}^{x_0+L+vt} \frac{A}{C+x} \hat{e}_y \cdot dy dx \hat{e}_y = AL \ln \left[1 + \frac{L}{C+x_0+vt} \right] \quad (9.34)$$

de manera tal que el módulo de la fem inducida irá como

$$|\mathcal{E}| = AL \left| \frac{d}{dt} \left[\ln \left(1 + \frac{L}{C+x_0+vt} \right) \right] \right| = AL^2 \left(\frac{v}{(L+C+x_0+vt)(C+x_0+vt)} \right) \quad (9.35)$$

Un par de comentarios se hacen necesarios. En primer lugar, tenemos la descripción completa del fenómeno de inducción del caso que estamos tratando porque conocemos la expresión de la fuerza electromotriz inducida (y en consecuencia la de la corriente inducida) y el sentido de circulación de la corriente asociada. A esto nos referíamos al decir que el signo negativo de la ley (9.4) es usualmente innecesario en términos prácticos. De nuevo, el significado físico del signo negativo en la ley de Faraday-Lenz es de relevancia central, refleja el concepto de conservación de la energía, lo que estamos diciendo es que en términos prácticos es suficiente con conocer el valor absoluto de la fem inducida y el sentido de circulación de la corriente inducida asociada.

Por otro lado, la expresión (9.35) indica que la fem inducida va a cero como t^{-2} , es decir, decrece a medida que el tiempo transcurre, algo que era de esperar porque la espira se mueve hacia regiones en las que el campo magnético externo se extingue. También es notable la dependencia de la fem inducida con la velocidad de la espira. Notemos ante todo que para $v = 0$ la fem inducida debe ser nula (el campo magnético externo varía con la posición, no con el tiempo) y de hecho lo es; pero también puede verse que a medida que la velocidad de la espira aumenta la diferencia de potencial inducida en la espira tiende a cero (porque es $|\mathcal{E}| \sim v/(a+vt)(b+vt)$) de modo tal que debe existir un valor de velocidad que maximiza la fem inducida.

La figura 9.10 muestra esta relación entre la fem inducida y la velocidad en un instante determinado, en tanto que la figura 9.11 pone en evidencia el carácter monótono decreciente de la función fuerza electromotriz inducida en términos del tiempo.

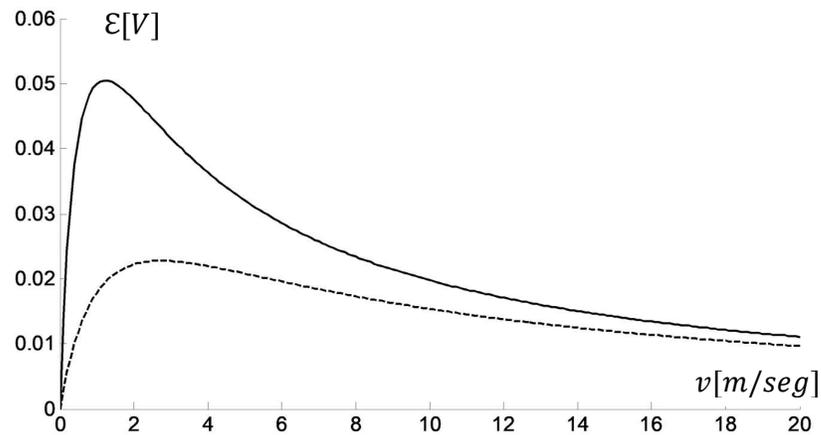


Fig. 9.10: curvas de fem inducida en términos de la velocidad en $t=2$ seg. En los dos casos hemos tomado $A=1$ Tm, $L=1$ m. La curva superior corresponde a $C+x_0=1$ m y la curva inferior a $C+x_0=5$ m. Obsérvese que el valor de la fem decrece asintóticamente con el incremento de velocidad como $1/vt$, de manera tal que, dado para t creciente la fem \mathcal{E} tiende a cero como $1/t^2$, en todo instante será una función acotada.

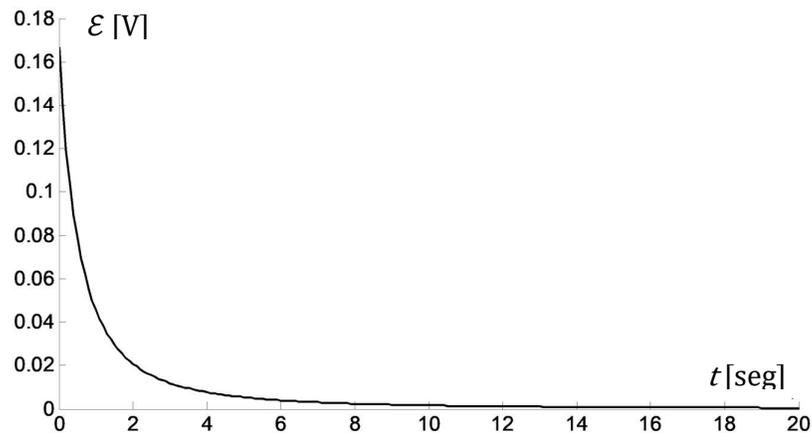


Fig. 9.11: curva de fem inducida en términos del tiempo. Nuevamente hemos tomado $A=1$ Tm, $L=1$ m, la velocidad $v=2$ m/seg y $C+x_0=5$ m. Más allá del pico, la fuerza electromotriz inducida decrece como $1/vt^2$ de manera tal que para velocidades mayores es mayor el valor inicial pero su caída es más abrupta.

Ejemplo 9.7: Modifiquemos nuevamente la configuración del dispositivo del ejemplo 9.4 colocando ahora el cuadro en un campo magnético uniforme de intensidad B . Hagamos

girar el cuadro alrededor de su eje de simetría vertical con velocidad angular constante ω y calculemos el valor de la fuerza electromotriz inducida.

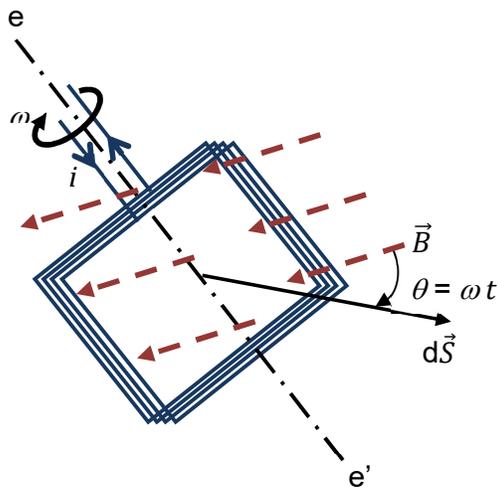
Obsérvese que el flujo de campo magnético a través del devanado no es constante porque el ángulo θ entre los vectores \vec{B} y $d\vec{S}$ es variable. Precisamente, si llamamos A al área de la espira, es fácil ver que el flujo magnético resulta

$$\Phi_M = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B dS \cos \theta = BA \cos(\omega t) \tag{9.36}$$

de manera tal que la fuerza electromotriz inducida en el bobinado vale

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBA \omega \text{sen}(\omega t) \tag{9.37}$$

Si consideramos que todo el bobinado tiene resistencia eléctrica R , habrá de circular una corriente variable en el tiempo



$$i(t) = N\omega \frac{BA}{R} \text{sen}(\omega t) \tag{9.38}$$

que a su vez genera un campo magnético que, de acuerdo a la ley de Lenz, tiende a oponerse a las variaciones del flujo externo, definiendo así su sentido de circulación. Obsérvese, de paso, que el momento del campo magnético definido en la expresión (8.82) resulta en este caso

Fig. 9.12: el bobinado gira alrededor del eje ee' . Obsérvese que si ω es constante, el período de máximos y mínimos de flujo queda bien definido.

$$\vec{\tau}(t) = i(t)A\hat{n} \times \vec{B} = \frac{N\omega B^2 A^2 \text{sen}(\omega t)}{R} \tag{9.39}$$

donde \hat{n} es la normal al plano de la espira. Parece evidente que el momento magnético es máximo en la posición en que se anula el

flujo magnético ($\theta = \pi/2$), manteniendo de esta forma la rotación. Un dispositivo como el que estamos analizando es un *generador de corriente alterna*, cuya frecuencia es precisamente la de rotación del cuadro. La corriente que circula por el cuadro es una función sinusoidal que tiene máximos en los instantes en los que la función $\text{sen}(\omega t)$ es máxima, esto es, aquellos para los cuales el argumento ωt vale $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, o, sintéticamente

$$\omega t = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N} \tag{9.40}$$

Los mínimos de la corriente ocurren en los instantes en que la función $\text{sen}(\omega t)$ se anula, es decir, para $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, o, en forma sucinta,

$$\omega t = k\pi \quad k \in \mathbb{N} \tag{9.41}$$

Ejemplo 9.8: Supongamos que la espira circular de la figura, de radio $r = 20 \text{ cm}$ y resistencia $R = 5 \Omega$ está montada sobre una plataforma que gira alrededor del eje Z , con velocidad angular constante $\omega = 0,785 \text{ seg}^{-1}$, en presencia de un campo magnético externo uniforme y estacionario $\vec{B} = 0,003 \text{ T } \hat{e}_y$. Si en el instante $t = 0$ el lado AD de la plataforma coincide con el semieje X positivo, hallemos el valor de la intensidad de la corriente inducida y grafiquémosla entre $t = 0$ y $t = 24 \text{ seg}$.

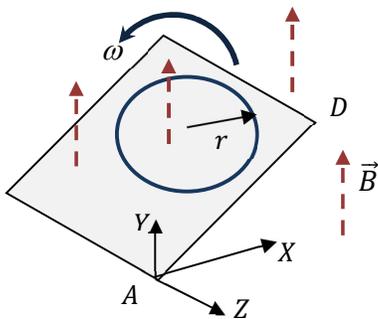


Fig. 9.12: la espira está montada sobre una plataforma rotante, inmersa en un campo externo uniforme. En este caso la fem inducida aparece porque varía el ángulo entre la superficie y el campo externo.

Notemos ante todo que la situación es absolutamente similar a la del ejemplo anterior, al menos en el sentido de que el módulo de la fem va como $\cos(\omega t)$ y en consecuencia parece natural que existan instantes en los que se anule (como lo hará la corriente inducida). En efecto, cada vez que sea

$$\omega t = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N} \tag{9.42}$$

la fem se extinguirá. Y esto significa que, para el valor de la velocidad angular con que rota la plataforma, en los instantes

$$t = 2(2k + 1) \text{ seg} \quad k \in \mathbb{N} \tag{9.43}$$

la corriente inducida se anula. Y de hecho, su valor en función del tiempo se escribe como

$$i_{IND}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{B\pi r^2}{R} \cos(\omega t) \tag{9.44}$$

Ahora bien, mientras el plano está en reposo no circula corriente alguna porque el flujo de campo externo es constante. Si en $t = 0$ comienza a girar como muestra la figura 9.12, el flujo comienza a modificarse y es creciente hasta que forma un ángulo de $\pi/4$ radianes.

Luego disminuye, pero si tomamos la normal al plano paralela al campo magnético externo lo hará siempre con signo positivo y, consecuentemente, la corriente inducida circulará en sentido antihorario según se ve el plano desde el eje $+Y$.

En $t = 2 \text{ seg}$ el plano que contiene a la espira coincide con el plano YZ y la fem inducida se anula porque el flujo es nulo (la normal del plano es perpendicular al campo magnético). Como el plano sigue rotando, vuelve a crecer el flujo y la corriente inducida tenderá a disminuirlo, pero la corriente ahora girará en sentido opuesto a lo que lo hizo en los primeros 2 segundos porque la normal al plano es ahora opuesta al campo externo. En síntesis, la corriente será sinusoidal, con período $\tau = 8 \text{ seg}$. como muestra la figura 9.13

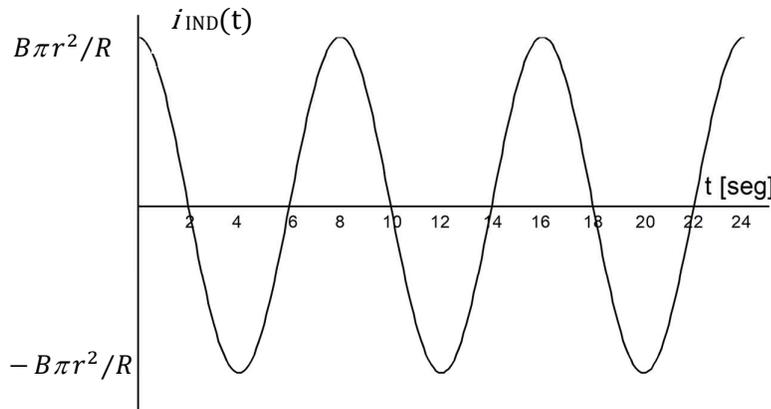


Fig. 9.13: corriente inducida en función del tiempo en la espira del ejemplo 9.8.

9.3 – Autoinducción e inducción mutua

Supongamos una espira de forma arbitraria en una región del espacio donde hay un campo magnético variable. Sabemos que en estas condiciones en la espira se induce una fuerza electromotriz. Ahora bien, a los efectos prácticos el origen del campo magnético es irrelevante, y bien podría ser el producido por una corriente variable i que circulara por la misma espira. Pero en este caso habrá de generarse una contracorriente inducida i_{IND} , opuesta a la corriente i original. Analicemos con un poco de detenimiento la situación planteada.

De la ley de Biot-Savart (ecuación (8.39)) o del teorema de Ampere (ecuación (8.91)) se desprende que el campo magnético generado por una corriente i varía linealmente con esta, y como el flujo magnético Φ_M varía linealmente con el campo magnético, se concluye que el flujo Φ_M debe variar linealmente con la corriente i .

Luego, la fuerza electromotriz *autoinducida* por la variación del campo magnético propio puede pensarse en términos de la corriente propia de la espira, es decir

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_M}{dt} \propto -\frac{di}{dt} \quad (9.45)$$

Obsérvese que el cálculo de la fuerza electromotriz en términos del flujo abrazado por la espira involucra una integración sobre el área de la espira, y ese factor (puramente geométrico, por otro lado) debe aparecer de alguna forma si calculamos la fuerza electromotriz en términos de la corriente propia. Por lo pronto, conviene introducir una constante de proporcionalidad, L , que sea función sólo de la geometría de la espira y al que denominaremos *coeficiente de autoinducción*, y escribir la expresión (9.45) formalmente como

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \quad (9.46)$$

Las unidades del coeficiente de autoinducción se derivan a partir de su definición, y se adopta como unidad el henry, que corresponde al coeficiente de autoinducción de una espira en la que se induce una fuerza electromotriz de 1 V cuando la corriente varía 1 A por cada segundo, es decir,

$$[L] = \frac{[\varepsilon] [t]}{[i]} = \frac{V \text{ seg}}{A} = \Omega \text{ seg} = H \text{ (henry o henrio)}$$

Por otro lado, obsérvese que definida por la expresión (9.46), la fuerza electromotriz autoinducida depende de la geometría sólo a través del coeficiente de autoinducción, de manera tal que es indistinto que se trate de una espira o de un conjunto de $N > 1$ espiras. Sin embargo, si se trata de un sistema de N espiras, el flujo abrazado se multiplica N veces y esto debe quedar reflejado en el valor de L .

De hecho, a partir de las ecuaciones (9.4) y (9.46) la expresión del coeficiente de autoinducción en términos de las variables propias, esto es, la corriente i que circula por cada una de las N espiras de un bobinado y el flujo autoinducido $N\Phi_M$, resulta de manera casi inmediata

$$-\frac{d}{dt} (N\Phi_M - Li) = 0 \quad (9.47)$$

Claramente, el factor entre paréntesis es una constante del sistema, cuyo valor es por de pronto irrelevante. Si tomamos esta constante igual a cero, resulta de inmediato

El coeficiente de autoinducción tiene que ver con el hecho de que una corriente circulando por una espira genera un campo magnético que abraza a la misma espira, de manera tal que induce una fuerza electromotriz en la misma espira. Si la corriente de la espira es variable, la corriente autoinducida habrá de oponerse a las variaciones del flujo propio.

$$L = N \frac{\Phi_M}{i} \quad (9.48)$$

Obsérvese que aunque la corriente es variable el valor del coeficiente de autoinducción no depende del tiempo. De hecho, si el término entre paréntesis en la expresión izquierda de (9.47) dependiera del tiempo su derivada no sería nula. Esto se debe a que el flujo autoinducido tiene la misma dependencia temporal de la corriente, de manera tal que L es constante.

Usando argumentos absolutamente similares podemos escribir la expresión de la fuerza electromotriz que se induce en una espira inmersa en un campo externo variable en

Los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua son puramente geométricos. No se asocian a cambios temporales ni de los flujos ni de las corrientes involucrados. Y de hecho, el coeficiente de autoinducción puede pensarse como el acoplamiento de un circuito consigo mismo ($L_j = M_{jj}$).

términos de la geometría de la espira y de la variación de la corriente que genera aquel campo externo. De hecho ya hemos hecho algo así en el ejemplo 9.3, en el que la expresión de la fuerza electromotriz inducida en el cuadro quedó en términos de la corriente que circula por el alambre rectilíneo (es decir, de la corriente que provoca lo que para la espira es el campo externo). Desde un punto absolutamente formal la tarea es muy sencilla, pues alcanza con introducir un coeficiente puramente geométrico, con un significado análogo al del coeficiente de autoinducción, que relacione

la fuerza electromotriz \mathcal{E}_1 inducida en el circuito 1 por la corriente i_2 que circula por el circuito 2. A este coeficiente lo llamaremos coeficiente *de inducción mutua*, M_{12} , de manera tal que sea

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (9.49)$$

Desde ya que la fuente de fuerza electromotriz inducida en una espira no tiene por qué estar asociada a un único circuito. De hecho, podría tratarse de los campos magnéticos originados por las corrientes que circulan en K espiras (recordemos que, en todo caso, un alambre infinito es una espira de radio también infinito), incluida la espira misma. Así, en términos de la expresión (9.49), dado un conjunto de K fuentes, la fuerza electromotriz \mathcal{E}_1 inducida en la espira 1 por el total de las K corrientes debe escribirse como

$$\mathcal{E}_1 = - \sum_{p=1}^K M_{1p} \frac{di_p}{dt} \quad (9.50)$$

donde el sumando con $p = 1$ corresponde a la fuerza electromotriz autoinducida por la corriente propia de la espira, es decir, implícitamente estamos definiendo

$$M_{pp} = L_p \quad (9.51)$$

Por supuesto que una ecuación similar a (9.50) habrá de valer para cada una de las K espiras del conjunto. Con la definición del coeficiente de autoinducción en términos de la de inducción mutua dada en la forma (9.51), parece evidente que la expresión general de la fuerza electromotriz inducida en cada una de las espiras es de la forma

$$\varepsilon_j = - \sum_{p=1}^K M_{jp} \frac{di_p}{dt} \quad (9.52)$$

Obsérvese un detalle de interés: aunque parece evidente a partir de (9.51), es necesario decir que, a pesar de que no lo hemos demostrado, el coeficiente de inducción mutua es simétrico, esto es, resulta $M_{jp} = M_{pj}$, o, dicho de otra forma, la permutación de subíndices no modifica el valor del coeficiente. Esta propiedad se relaciona con el hecho de que M_{jp} es un factor meramente geométrico que depende sólo de la particular configuración de las dos espiras para las que se lo calcula, y la permutación de las espiras no modifica las propiedades de la configuración. Esta simetría característica habremos de explotarla cuando en los complementos del capítulo hagamos el balance energético de la configuración de espiras, corrientes y campos.

Por último, notemos que podemos escribir el coeficiente de inducción mutua entre dos espiras en términos de parámetros propios. Para ello, denominemos con subíndices 1 y 2 a los parámetros intrínsecos de cada espira, supongamos que la corriente circula por el circuito 2 y llamemos Φ_{12} al flujo del circuito 2 en la posición de la espira 1. A partir de la ecuación (9.21)

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{M12}}{dt} \quad (9.53)$$

y en virtud de la expresión (9.50), para sólo dos espiras resulta

$$-N_1 \frac{d\Phi_{M12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (9.54)$$

e inmediatamente obtenemos

$$M_{12} = N_1 \frac{d\Phi_{M12}}{di_2} \quad (9.55)$$

Como veremos en algunos ejemplos y discutiremos con algún detalle en el próximo capítulo, la derivada que figura en la última expresión puede algunas veces reemplazarse por el cociente Φ_{12}/i_2 , y en realidad esto depende de las propiedades magnéticas del medio en el que circulan la corriente y se genera el flujo. Los medios para los que vale esta propiedad se denominan *lineales*, y sus ejemplos emblemáticos posiblemente sean el aire y el vacío.

Ejemplo 9.9: regresemos por un momento al ejemplo 9.4, en el que un bobinado de 1000 espiras rectangulares de lados a y h , se encuentra a una distancia D de un alambre recto de longitud ℓ , por hipótesis mucho mayor que cualquier longitud típica del problema, esto es, $\ell \gg a, h, D$. En tal situación, habíamos encontrado que el valor de la fuerza electromotriz inducida en el bobinado viene dado por la expresión (9.28) como

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) \frac{di(t)}{dt}$$

Por simple comparación con la expresión (9.49) es casi inmediato que el coeficiente de inducción entre el alambre y el bobinado vale

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) \quad (9.56)$$

De igual forma, obsérvese que el miembro derecho de la expresión (9.28) debe ser el valor de la derivada del flujo Φ_M cambiado de signo, esto es, debe ser

$$\Phi_M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) i(t) \quad (9.57)$$

que en virtud de la ecuación (9.55) permite reobtener el valor del coeficiente M de inducción mutua de manera inmediata. Obsérvese de paso que la relación lineal entre flujo y corriente indica implícitamente que el medio en el que se desarrollan es lineal.

Ejemplo 9.10: Imaginemos un solenoide de radio R_1 y longitud ℓ_1 que se halla en el interior de otro solenoide, de radio $R_2 \gg R_1$ y longitud $\ell_2 \gg \ell_1$. Los ejes de los dos

solenoides coinciden, y por el externo circula una corriente variable de la forma $i_2(t) = 2 \text{ sen}(10t) \text{ A}$. Asumiendo $R_1 = 10 \text{ cm}$ y que la bobina exterior tiene un arrollado de 1000 vueltas/cm , calculemos el valor del coeficiente de inducción mutua del sistema y hallemos la expresión de la corriente i_1 que circula por la bobina interior sabiendo que el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida que se mide sobre ella vale $\mathcal{E}_1 = 0,002 \cos 10t \text{ V}$ y que su coeficiente de autoinducción vale $L_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ H}$.

Dado que las dimensiones características del solenoide exterior son mucho mayores que las del solenoide interior, podemos considerar, en primera aproximación, que el solenoide interno se halla sumergido en un campo magnético uniforme, a saber, el que existe en el eje y es generado por el solenoide externo. Más aún, desde el solenoide interior el externo se ve infinito, de manera tal que si llamamos n_2 al número de vueltas por unidad de longitud del bobinado exterior podemos usar la expresión (8.70) y escribir

$$\vec{B}_{EXT} = \mu_0 n_2 i_2(t) \hat{e}_z \quad (9.58)$$

Luego, el flujo abrazado por solenoide interior vale

$$\Phi_{M1} = \mu_0 n_2 i_2(t) \pi R_1^2 \quad (9.59)$$

y a partir de la expresión (9.55) podemos evaluar el coeficiente de inducción mutua como

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{M1}}{di_2} = \mu_0 n_2 \pi R_1^2 \quad (9.60)$$

Es casi inmediato verificar que con los valores dados resulta $M_{12} \sim 4 \times 10^{-5} \text{ H}$.

En cuanto al cálculo de la corriente que circula por la bobina interior, partamos de la expresión (9.52), teniendo en cuenta que la fuerza electromotriz que le da origen reconoce dos fuentes: por un lado la corriente que circula por la bobina externa, que genera el flujo que a su vez induce una tensión a través del coeficiente de inducción mutua M_{12} ; y por otro lado la propia corriente por el solenoide interior, que genera un flujo propio que es abrazado por el mismo bobinado e induce una fuerza electromotriz a través del coeficiente de autoinducción L

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt} \quad (9.61)$$

de donde inmediatamente resulta

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{L} \left(\mathcal{E}_1 + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) \quad (9.62)$$

Para las funciones temporales propuestas se obtiene

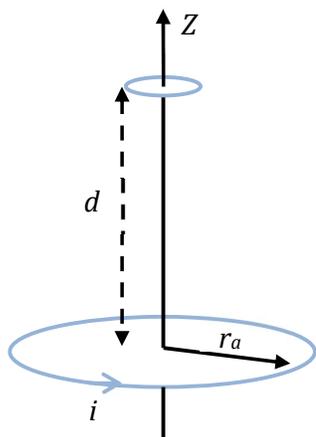
$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{5 \times 10^{-5}} [2 \times 10^{-3} \cos(10t) + 4 \times 10^{-5} \times 20 \cos(10t)] \frac{\text{A}}{\text{seg}} \quad (9.63)$$

cuya integración resulta de inmediato en la función

$$i_1(t) = 5,6 \text{ sen}(10t) \text{A} \quad (9.64)$$

Ejemplo 9.11: En el ejemplo anterior usamos una aproximación que podría considerarse burda: hemos asumido que el solenoide interior se halla inmerso en un campo magnético uniforme, a saber, el del interior del solenoide externo. Sabemos que, en realidad, el campo magnético en el interior de un solenoide es constante sólo en su eje de simetría axial, porque de hecho hemos partido del cálculo del campo generado por una espira en su eje de simetría de revolución axial (ejemplo 8.9, ecuación (8.84)) para extrapolar luego al caso de un conjunto coherente de espiras (el solenoide). En la misma aproximación podríamos calcular entonces el coeficiente de inducción mutua entre dos espiras, una de radio r_a y la otra de radio $r_b \ll r_a$, separadas una distancia $d \gg r_b$. De nuevo, la aproximación consiste en suponer que toda la superficie de la espira superior está inmersa en el mismo campo magnético (de ahí la necesidad de suponer $r_b \ll r_a$).

Para calcular el valor del coeficiente de inducción mutua, recordemos que el campo generado por una espira de radio r_a a lo largo de su eje de simetría vale



$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (9.65)$$

El flujo a través de la espira superior, de radio r_b , será

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} \pi r_b^2 \quad (9.66)$$

de manera tal que la fem inducida en la espira de radio r_b será

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} \pi r_b^2 \frac{di}{dt} \quad (9.67)$$

Fig. 9.14: A primer orden, la espira superior se halla en el campo magnético que la espira inferior genera sobre el eje Z.

Ahora bien, de acuerdo a la expresión (9.49) el coeficiente de inducción mutua vale

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{2} \frac{r_a^2}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} \pi r_b^2 \quad (9.68)$$

y, como quedó dicho, es un factor puramente geométrico. Pero debe observarse que el coeficiente M_{12} existe aun cuando la fem inducida fuera nula, es decir, es independiente de las variaciones temporales de la corriente en la bobina inferior.

9.4 – Arreglos con bobinas y resistores en corriente continua (circuitos RL)

En la sección 7.8 hemos analizado circuitos de corriente continua en los que a los capacitores se agregaban los efectos resistivos en pilas y cables. Ahora tendremos que tener en cuenta la posibilidad de arrollamientos que provoquen la aparición de fuerzas electromotrices inducidas que, a su vez, habrán de modificar el balance de energía (caídas de potencial) al recorrer el circuito (véase la sección 7.6, referida a las leyes de Kirchhoff).

Los efectos de diferencias de potencial inducidas pueden obedecer a la existencia de arrollamientos de cables o bien a dispositivos especialmente diseñados denominados *autoinductores* (o bobinas, como usualmente se los llama) cuya función habremos de analizar a continuación.

Para ello, prestemos atención al circuito serie simple de la figura 9.15, en la que de paso introducimos el símbolo de las autoinductancias. Este circuito contiene sólo una bobina, de coeficiente de autoinducción L , una pila y un resistor, y K es una llave de corte. Si llamamos \mathcal{E} a la fuerza electromotriz inducida en la bobina, con la llave K cerrada, escribimos la segunda ley de Kirchhoff en la forma

$$V + \mathcal{E} = iR \tag{9.69}$$

que a partir de la identidad (9.46) se transforma en

$$L \frac{di}{dt} + iR = V \tag{9.70}$$

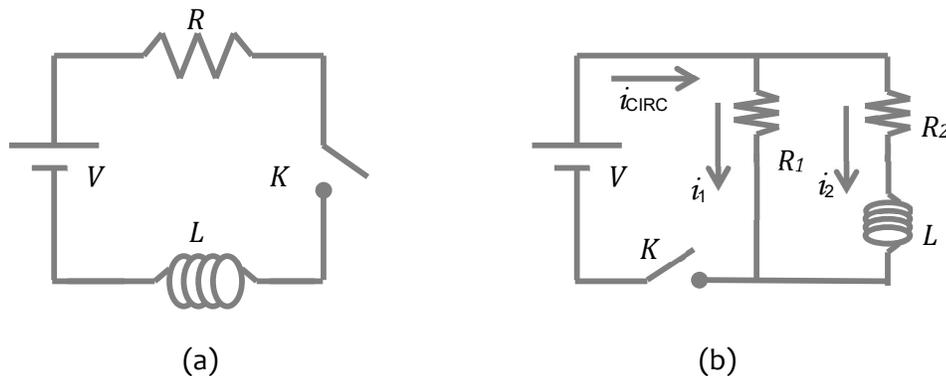


Fig. 9.15: circuitos RL serie (a la izquierda) y paralelo (panel (b)). En ambos casos la llave K permite desconectar la batería.

Luego, la evolución temporal de la corriente que circula por el circuito está representada por una ecuación diferencial de primer grado, ordinaria, lineal y de coeficientes constantes, del mismo tipo que la obtenida en la sección 7.8 para los circuitos RC serie en términos de la carga (ecuación (7.118))

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \tag{9.71}$$

Ahora bien, existe una marcada similitud funcional entre las ecuaciones (9.70) y (9.71). Para corroborarlo, basta con realizar formalmente el cambio de variables y coeficientes $q \rightarrow i, R \rightarrow L, 1/C \rightarrow R$. Luego, cabe inferir que la solución de la ecuación (9.70) debe ser la que corresponde a la expresión (9.71), expresada en la identidad (7.120) y que aquí repetimos

$$q(t) = A_1 e^{-t/RC} + CV \quad (9.72)$$

con el mismo cambio de variables y coeficientes, esto es

$$i(t) = A_2 e^{-tR/L} + \frac{V}{R} \quad (9.73)$$

Al igual que en el caso de la solución completa de la ecuación (9.72), el valor de la constante A_2 depende de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si cuando se conecta la fuente ($t = 0$) no hay ninguna corriente en el circuito, resulta

$$A_2 = -\frac{V}{R} \quad (9.74)$$

y en consecuencia obtenemos la solución completa

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-tR/L}) \quad (9.75)$$

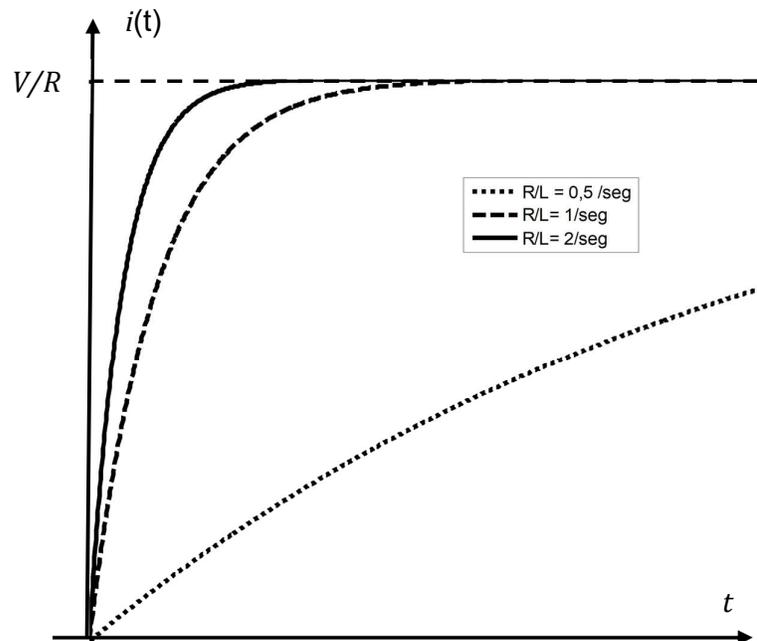


Fig. 9.16: gráfica de la corriente en función del tiempo en un circuito RL serie, para tres valores del coeficiente R/L . Obsérvese que cuanto mayor es el coeficiente más rápidamente tiende la función a su valor de régimen permanente.

Obsérvese que la corriente es una función creciente en el tiempo que tiende a su valor límite $i = V/R$ como postula la ley de Ohm, esto es, en régimen permanente (o estacionario) la corriente que circula por el circuito es la que circularía aun sin la bobina, pero en régimen transitorio (en los primeros instantes luego de cerrar la llave de contacto) la bobina gobierna no el valor final sino el tiempo de establecimiento de la corriente definitiva.

Debe notarse asimismo que la cantidad R/L que figura en el exponente de la expresión (9.75) es necesariamente la inversa de un valor de tiempo. Precisamente, dado un circuito RL se define la constante de tiempo τ_L del mismo como

$$\tau_L = \frac{R}{L} \quad (9.76)$$

y representa el tiempo en el que la corriente alcanza el 63% de su valor final (de manera tal que para $t = 5\tau_L$ la corriente alcanzará el 99% de su valor final, es decir, prácticamente será el valor de régimen permanente). Finalmente, obsérvese que el balance energético es inmediato multiplicando la ecuación (9.70) por $i(t)$, la corriente que circula por el circuito:

$$iV = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + i^2 R \quad (9.77)$$

La interpretación es inmediata: la potencia $P = iV$ que entrega la batería en parte queda almacenada como potencia magnética en el campo magnético de la bobina y en parte se disipa por efecto Joule en la resistencia.

En cuanto al circuito RL paralelo de la figura 9.15b, mediante un procedimiento absolutamente similar al que nos llevó a la expresión (7.144), a partir de las ecuaciones (7.3) y (9.75) escribimos la corriente que circula por la pila como

$$i_{CIRC} = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} (1 - e^{-tR_2/L}) \quad (9.78)$$

9.5 – Circuitos RLC de corriente continua

Podemos avanzar un paso más en el análisis de circuitos completando el estudio de la sección anterior con el agregado de un condensador, en serie con el resto de la configuración. El circuito resultante, denominado RLC serie, se esquematiza en la figura 9.17, en el que K es una llave que se cierra en el instante $t = 0$. La aplicación del teorema de conservación de la energía al circuito resulta en la forma

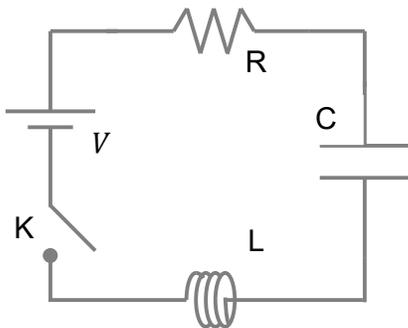
$$V_R + V_C = V + \mathcal{E} \quad (9.79)$$

donde, como es habitual, V_R y V_C representan las caídas de potencial en la resistencia y el capacitor, respectivamente, y \mathcal{E} es la fuerza electromotriz inducida en la bobina.

En términos de la expresión (9.46), la ley de Ohm (7.3) y la definición de capacidad (5.6) resulta de inmediato

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V \tag{9.80}$$

que se transforma en una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden si derivamos respecto al tiempo, esto es,



$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \tag{9.81}$$

Fig. 9.17: circuito RLC serie de corriente continua.

Esta ecuación ya no puede integrarse directamente, aunque parece razonable proponer alguna solución similar a las que obtuvimos en los casos en que las ecuaciones eran de primer orden (secciones 7.8 y 9.3). Sin embargo, parece evidente que se trata de buscar una función que derivada sea siempre igual a sí misma a menos del producto por una constante. En consecuencia, proponemos para la corriente una solución en la forma

$$i(t) = De^{\lambda t} \tag{9.82}$$

con D una constante arbitraria y λ una constante a determinar. Precisamente, si reemplazamos la forma (9.82) en la expresión (9.81) obtenemos la ecuación

$$\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} \right) De^{\lambda t} = 0 \tag{9.83}$$

que evidentemente sólo puede anularse si se anula el término entre paréntesis, que es precisamente una función del parámetro λ . Siendo una ecuación de segundo grado, sus soluciones se obtienen de manera inmediata como

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4(L/C)}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{9.84}$$

Para simplificar la notación, definamos los parámetros

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} \quad (9.85)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (9.86)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} \quad (9.87)$$

de manera tal que los dos valores posibles del parámetro λ sean $\lambda_1 = \omega_1 + \omega$, $\lambda_2 = \omega_1 - \omega$. Obsérvese de paso que las cantidades $(R/2L)^2$ y $1/LC$ tienen unidades de velocidad angular al cuadrado, de ahí que hayamos elegido denominarlas ω_1 y ω_0 respectivamente.

Después de un sencillo aunque engorroso álgebra es fácil corroborar que las dos soluciones $De^{\lambda_1 t}$ y $De^{\lambda_2 t}$ son ambas soluciones de la ecuación (9.83). Sin embargo, es de esperar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (esto es, $\omega \neq 0$) la solución más general de la ecuación (9.83) se escriba como la combinación de las dos soluciones que se obtienen con λ_1 y λ_2 por separado, en la forma †

$$i(t) = A_1 e^{(-\omega_1 + \omega)t} + A_2 e^{(-\omega_1 - \omega)t} = e^{-\omega_1 t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t}) \quad (9.88)$$

donde ahora A_1 y A_2 son constantes, no necesariamente reales, que dependen de las condiciones iniciales del sistema. Como antes, a través de una más bien aburrida operatoria es posible comprobar que la forma (9.88) también es solución de la ecuación diferencial (9.81).

Obsérvese que, dado que los parámetros circuitales R y L son definidos positivos, el coeficiente ω_1 es definido positivo, de manera tal que la exponencial $e^{-\omega_1 t} \equiv e^{-Rt/2L}$ representa un factor que decrece monótonamente en el tiempo. Por otro lado, que sea $\omega \neq 0$ no implica necesariamente que sea real. De hecho, ω es real si, y sólo si,

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \equiv R^2 > \frac{4L}{C} \quad (9.89)$$

Como aun en este caso es $|\omega_1| > \omega$, porque

† En caso de ser $\beta=0$ las dos soluciones propuestas coinciden. En tal caso, aunque no habremos de demostrarlo, la solución más general es de la forma $i(t) = e^{-\omega_1 t} (A_1 + A_2 t)$.

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} < |\omega_1| \quad (9.90)$$

en virtud de que también C es un parámetro definido positivo, resulta que cada uno de los términos de la expresión (9.88) es una función monótona decreciente, y en consecuencia la corriente $i(t)$ se extingue monótonamente, como se muestra en la figura 9.18 para diferentes valores de los parámetros que intervienen en la solución.

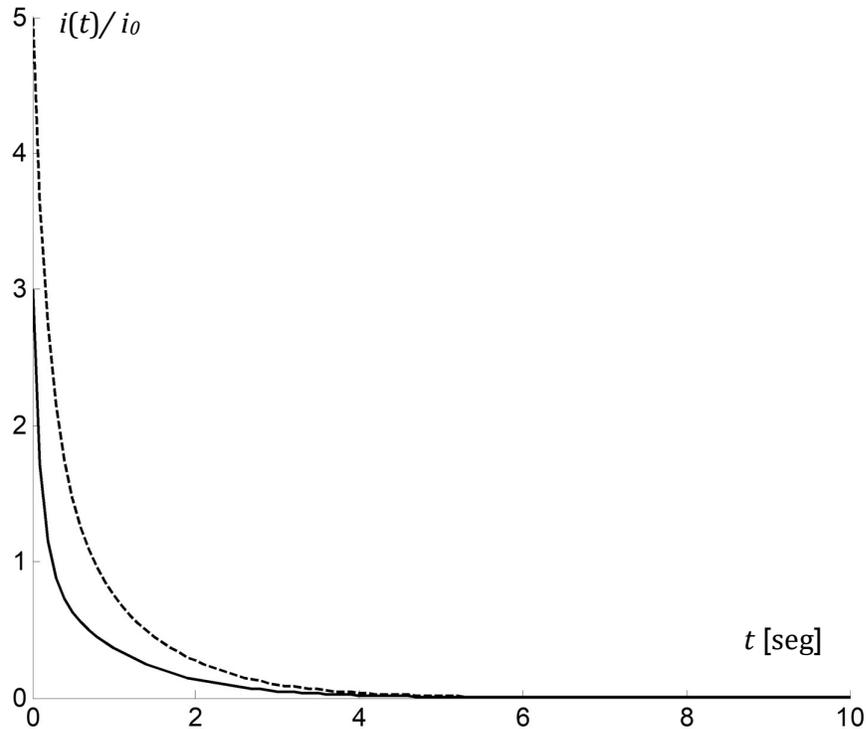


Fig. 9.18: corriente en función del tiempo que resulta de resolver la ecuación diferencial (9.69) en dos casos particulares: $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $\omega_1 = -3$, $\omega = -2$ (curva punteada) y $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $\omega_1 = -5$, $\omega = -4$ (curva llena). Los valores son absolutamente arbitrarios y pueden fijarse en términos de las constantes del circuito, a saber, R , L , C . Obsérvese que el valor de la corriente se especifica en relación a un valor de corriente también arbitrario.

Abandonemos ahora la hipótesis (9.89) y supongamos el caso contrario, esto es

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \equiv R^2 < \frac{4L}{C} \quad (9.91)$$

en cuyo caso el factor ω es un número imaginario puro cuyo módulo vale

$$|\omega| = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad (9.92)$$

y la corriente que circula en el circuito resulta de la forma

$$i(t) = A_1 e^{(-\omega_1 + \omega)t} + A_2 e^{(-\omega_1 - \omega)t} = e^{-\omega_1 t} (A_1 e^{j|\omega|t} + A_2 e^{-j|\omega|t}) \quad (9.93)$$

donde j representa aquí la unidad imaginaria (hemos preferido escribir j en lugar de i para que no exista posibilidad de confusión con la corriente del circuito); en virtud de la conocida relación de Euler

$$e^{\pm jz} = \cos z \pm j \operatorname{sen} z \quad (9.94)$$

la expresión (9.93) puede escribirse como

$$i(t) = e^{-\omega_1 t} (D_1 \cos (|\omega| t) + D_2 \operatorname{sen} (|\omega| t)) \quad (9.95)$$

donde D_1 y D_2 son dos nuevas constantes derivadas de las anteriores, A_1 y A_2 , como

$$D_1 = A_1 + A_2 \quad D_2 = j(A_1 - A_2) \quad (9.96)$$

y que por consiguiente también dependen de las condiciones iniciales. Podemos simplificar aún más la expresión (9.95) notando que es una función cuyo término entre paréntesis consta de dos factores que oscilan con idéntica frecuencia, que la amplitud máxima vale

$$(D_1^2 + D_2^2)^{1/2} \quad (9.97)$$

y que en el instante $t = 0$ la intensidad de corriente vale D_1 . Luego, siempre podemos reemplazarla por una función de la forma

$$i(t) = i_0 e^{-\omega_1 t} \operatorname{sen} (|\omega| t + \varphi) \quad (9.98)$$

donde i_0 y φ son dos constantes relacionadas con las condiciones iniciales, y que en términos de D_1 y D_2 se expresan como

$$i_0 = (D_1^2 + D_2^2)^{1/2} \quad (9.99)$$

$$\varphi = \arcsen \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}} \quad (9.100)$$

Obsérvese que en cualquiera de sus formas la solución más general de la corriente siempre depende de dos constantes cuyos valores reflejan el estado inicial del sistema. Esta es una regla general: una ecuación diferencial ordinaria como (9.80), lineal, de orden n , queda definida en términos de n constantes que sólo pueden fijarse si se conoce la configuración inicial del sistema. Notemos por último que por su estructura la solución (9.98) es una función sinusoidal cuya amplitud decrece en forma exponencial, modulada por el factor $e^{-\omega_1 t}$, como se muestra en la figura 9.19 para un juego particular de valores de los parámetros.

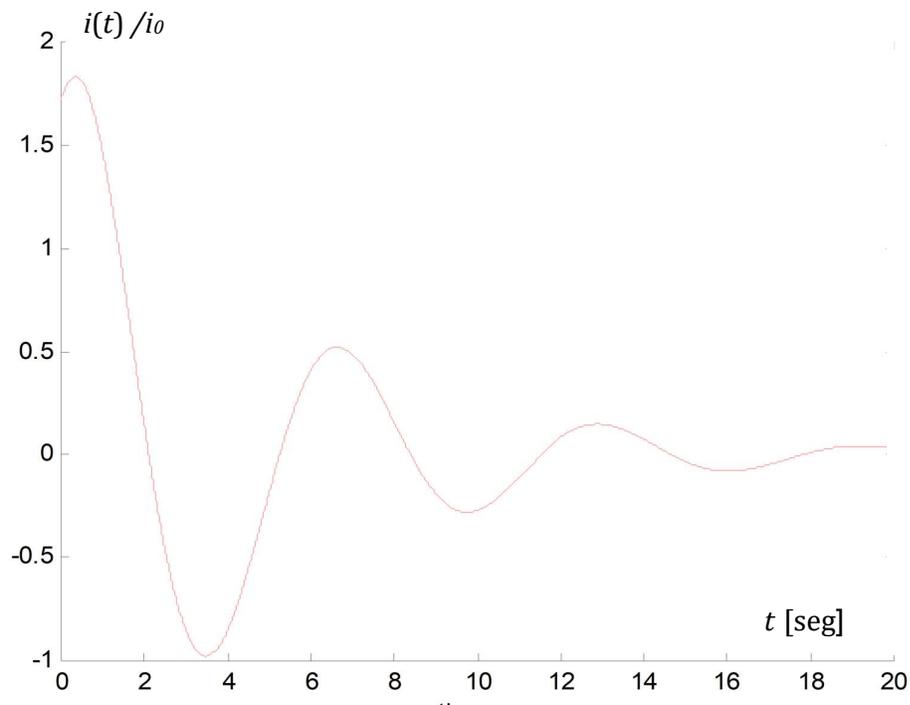


Fig. 9.19: corriente $i(t)$ en el caso ω imaginario puro, que corresponde a la expresión (9.86). Se ha graficado para $i_0=2$, $\omega_1=0,2$, $|\omega|=1$, $\varphi=\pi/3$.

Resumen del capítulo

A través de los temas tratados en el capítulo hemos discutido con alguna profundidad el fenómeno de la inducción electromagnética, esto es, partiendo de la pregunta acerca de la posibilidad de que un campo magnético generara corrientes llegamos a la conclusión de que un campo magnético es capaz de inducir en un circuito vecino una fuerza electromotriz, esto es, una diferencia de potencial, capaz de provocar la circulación de una corriente eléctrica. De alguna manera estos resultados son tranquilizadores porque nos permite respirar cierto aire de simetría, ya que al cabo el campo magnetostático se relaciona con sus fuentes de la misma manera que lo hace el campo electrostático: el campo como inductor de fuentes, las fuentes generando el campo.

Que en algún sentido sean simétricos no significa que sean necesariamente similares. Recordemos que el campo eléctrico genera (induce) cargas aun en régimen estático, mientras que el campo magnético es incapaz de inducir corrientes si no es en régimen no estacionario. Estas posibilidades las hemos plasmado en aplicaciones prácticas, tales como el prototipo de motor eléctrico del ejemplo 9.7. En general, todo sistema capaz de convertir energía eléctrica en energía mecánica se denomina motor, de manera tal que no parece necesario recalcar que de manera alguna hemos pretendido agotar la discusión siquiera de las bases de funcionamiento de los motores eléctricos.

Hemos visto también que un circuito que transporta una corriente variable en el tiempo genera un campo magnético que provoca (autoinduce) un campo magnético extra en el mismo circuito. Las aplicaciones prácticas de los dispositivos fabricados en base a esta propiedad (inductores o bobinas) las hemos analizado en las últimas secciones.

Complementos del capítulo

Efecto Hall

Regresemos por un momento a la fuerza \vec{F}_{IND} que aparece por efectos de la corriente i_{IND} de la ecuación (9.7). Esta fuerza es perpendicular a la dirección de circulación de la corriente, de manera tal que arrastra cargas hacia los bordes del conductor. En la figura 9.20 reproducimos las condiciones del ejemplo 9.1, bajo las cuales la fuerza de origen magnético tiende a desplazar electrones hacia el borde izquierdo de la barra móvil AD . Este fenómeno se traduce en la aparición de un exceso de carga eléctrica positiva en el borde derecho de la barra metálica.

La desviación de cargas, sin embargo, no puede ser indefinida porque en algún momento la diferencia de carga acumulada generará un campo eléctrico \vec{E} (y, entonces, una fuerza eléctrica \vec{F}_{el}) de intensidad suficiente como para inhibir una mayor concentración. Pero una vez alcanzado el régimen estacionario existe una diferencia de potencial medible entre los lados verticales de la barra, que es proporcional a la intensidad de campo magnético (de hecho, es nula si \vec{B} es nulo). Este fenómeno, que se descubrió

hacia la segunda mitad del siglo 19 y se conoce como efecto Hall, puede pensarse en términos del campo eléctrico \vec{E}_H generado por las N cargas de valor e (el valor absoluto de la carga del electrón) que arrastra la fuerza \vec{F}_{IND}

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_{IND}}{N(-e)} = \frac{i_{IND} L B}{N e} \hat{e}_x \tag{9.101}$$

donde ℓ es la longitud de la barra AD . Si convenimos en llamar \mathcal{E}_H al valor absoluto de la diferencia de potencial entre los extremos verticales de la barra móvil de ancho d , será

$$\mathcal{E}_H = E_H d = \frac{i_{IND} \ell B d}{N e} = \frac{i_{IND} B \mathcal{A}}{N e} \tag{9.102}$$

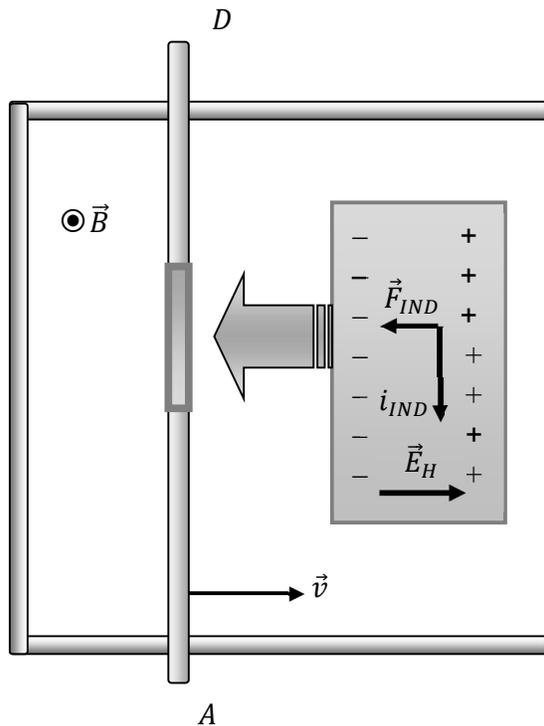


Fig. 9.20: corte de la sección de un conductor moviéndose a través de un campo magnético externo. Las cargas (en este caso electrones) se acumulan en un costado hasta que el campo eléctrico inducido genera una fuerza que inhibe el transporte de cargas.

donde \mathcal{A} es el área de la parte frontal de la barra. Llamemos s al espesor de la barra, de manera tal que $\mathcal{V} = s \times \mathcal{A}$ sea el volumen de la misma. Luego, si llamamos $n = N / \mathcal{V}$ al número de electrones por unidad de volumen, podemos escribir

$$\mathcal{E}_H = \frac{i_{IND} B}{n e s} \tag{9.103}$$

La misma diferencia de potencial habrá de medirse si se coloca una pastilla de material conductor entre las placas de un imán y se hace circular una corriente i por la pastilla, en dirección perpendicular al campo externo. Obsérvese que de esta manera todos los parámetros del miembro derecho de la identidad (9.103), salvo el número de electrones por unidad de volumen, se controlan externamente y la diferencia de potencial \mathcal{E}_H se puede medir, de forma tal que a través de este arreglo experimental es posible evaluar la densidad volumétrica de cargas libres del material conductor de la pastilla como

$$n = \frac{i B}{\mathcal{E}_H e s} \tag{9.104}$$

Téngase en cuenta que la diferencia de potencial \mathcal{E}_H es función de la intensidad del vector inducción, de manera tal que no es un parámetro independiente. En las mediciones habituales se trata normalmente de una diferencia de potencial de valor comparativamente pequeño, del orden de las milésimas de volt o menos. A partir de la expresión (9.104) los valores que se calculan para el número de cargas libres en diferentes materiales conductores resultan del orden de $10^{23}/cm^3$, aunque notablemente llegan a diferir en un factor 20 entre elementos como el cobre ($n_{Cu} = 1,1 \times 10^{23}/cm^3$) y el hierro ($n_{Fe} = 0,06 \times 10^{23}/cm^3$).

Ahora bien, teniendo en cuenta que en un mol de cobre (63,57 g) hay $6,02 \times 10^{23}$ átomos y que su densidad vale $8,9 g/cm^3$, resulta que por cada cm^3 de cobre hay aproximadamente $n_{a,Cu} = 0,84 \times 10^{23}$ átomos. Similarmente, el hierro (masa atómica 58,94g, densidad $7,86 g/cm^3$) por cada cm^3 contiene aproximadamente $n_{a,Fe} = 0,8 \times 10^{23}$ átomos, un valor absolutamente similar al del cobre. Luego, resulta que el número de electrones que aporta (estadísticamente) cada átomo de estos elementos para la conducción es bien diferente, un hecho que ofrece una perspectiva diferente para comprender la diferencia entre conductores y aislantes, y aún las diferencias dentro de los conductores (como el cobre y el hierro).

Contenido energético de un campo magnético

En el capítulo 4 (sección 4.3) habíamos visto que el campo electrostático es conservativo; dicho en otras palabras, esta propiedad expresa que la circulación de un campo electrostático alrededor de una línea cerrada es nula (porque se regresa a un punto de igual potencial, véase la expresión (4.22)). En la ecuación (4.26) mostramos que esta propiedad del campo electrostático es equivalente a postular que su rotor es nulo, es decir, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

En el caso en que circulan corrientes el rotor de campo \vec{E} ya no tiene por qué ser nulo, sencillamente porque la situación ya no es estática y \vec{E} ya no es conservativo. En consecuencia, la circulación del campo \vec{E} no es nula sino que equivale a una diferencia de potencial, que en el caso que nos interesa no es otra que la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (9.105)$$

donde hemos usado el teorema de Stokes para expresar la fuerza electromotriz inducida en términos del rotor del campo eléctrico. Usando la ecuación (9.4) podemos relacionar ahora el rotor del campo eléctrico con las variaciones del campo magnético; en efecto, resulta

$$\iint_{S(C)} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.106)$$

Supongamos ahora que la superficie es constante, de manera tal que el miembro derecho puede escribirse como

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (9.107)$$

(recordemos que la derivada total entra a la integral como una derivada parcial porque sólo después de integrar en las coordenadas espaciales la función depende sólo del tiempo). Luego, como la superficie $S(C)$ es la misma en ambos miembros, concluimos en que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.108)$$

Podemos explotar ahora la propiedad (9.108) para calcular el trabajo necesario para encender un campo magnético. Si no se emplea en otras cosas, todo ese trabajo habrá de quedar contenido como energía del campo \vec{B} . Para ello, imaginemos una región del espacio en la que hay un campo eléctrico \vec{E} y una distribución localizada de cargas que interactúan con el campo eléctrico. La interacción genera corrientes (las cargas, con velocidad \vec{v} , pensadas como un sistema de tubos de corriente, tal como los que introdujimos en la sección 8.3) y estas corrientes eléctricas son las fuentes de \vec{B} .

El trabajo requerido por unidad de tiempo para generar el campo magnético debe relacionarse a la potencia disipada por el sistema de cargas y corrientes, porque es la única energía que no emplea para su redistribución. Luego, si δW representa el trabajo requerido para generar el campo magnético y U_M la energía magnética, a partir de la identidad (7.98) resulta formalmente

$$\frac{\delta W}{dt} = i dV = -\frac{dU_M}{dt} \quad (9.109)$$

donde i es el valor de la corriente que circula en el volumen estudiado y V es el potencial asociado a la distribución de cargas. Pero a partir de las expresiones (7.12) y (4.25) podemos expresar las variables i, V en términos de la densidad de corriente \vec{j} y el campo eléctrico \vec{E} , respectivamente, y escribir

$$dU_M = -dt \left[\iiint \vec{j} \cdot d\vec{S} \right] \left[\int \vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell} \right] = -dt \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (9.110)$$

Obsérvese que la última igualdad es sólo posible en virtud de que los vectores \vec{j} , $d\vec{S}$ y $d\vec{\ell}$ son paralelos, porque están relacionados a cada tubo de corriente. Ahora bien, la ecuación (8.93) relaciona el rotor de campo magnético con la densidad de corriente \vec{j} ,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

de manera tal que reemplazando en la última expresión resulta

$$dU_M = -dt \iiint \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (9.111)$$

Usemos ahora la igualdad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{w}) \quad (9.112)$$

para expresar la igualdad (9.111) como

$$dU_M = -\frac{1}{\mu_0} dt \left[\iiint \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\mathcal{V} - \iiint \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\mathcal{V} \right] \quad (9.113)$$

La segunda integral del miembro derecho de la igualdad (9.113) es nula. Para demostrarlo, apliquemos la igualdad de Green para el vector $\vec{E} \times \vec{B}$ y escribamos

$$\iiint \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\mathcal{V} = \iint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (9.114)$$

Como extendemos la integral a todo el espacio y los campos \vec{E} y \vec{B} van a cero para distancias infinitas (tienden a cero como $1/r^n$, con $n > 2$) la integral no entrega contribución alguna (en el capítulo 11 veremos que el producto $\vec{E} \times \vec{B}$ se halla asociado al flujo de energía electromagnética, de manera tal que a través de una superficie infinita ese flujo es nulo). Por lo demás, la primera de las integrales del miembro derecho de la ecuación (9.114) puede modificarse utilizando la igualdad (9.108)

$$dU_M = -\frac{1}{\mu_0} dt \iiint \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\mathcal{V} = \frac{1}{\mu_0} \iiint \vec{B} \cdot d\vec{B} d\mathcal{V} \quad (9.115)$$

de manera tal que, en definitiva, obtenemos

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \iiint |\vec{B}|^2 d\mathcal{V} \quad (9.116)$$

Esta última expresión representa el contenido de energía del campo magnético de una configuración de corrientes, de la misma manera que la ecuación (4.62) representa la energía contenida en el campo electrostático de una configuración de cargas. Obsérvese que la ecuación (9.116) está escrita para el vacío, en ausencia de medios materiales (sección 8.9). Sin embargo, si las corrientes se desarrollan en un medio magnético, a partir de la relación de definición (8.120) resulta inmediatamente

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B} \cdot \mu \vec{H} d\mathcal{V} = \frac{\mu}{2\mu_0} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} d\mathcal{V} \quad (9.117)$$

Claramente, dado que los valores de susceptibilidad magnética son muy inferiores a la unidad, en general el factor μ/μ_0 es próximo a la unidad. Es importante notar que estamos postulando que la energía está contenida en el campo magnético, que está extendido a todo el espacio y no se limita al volumen donde existen las corrientes. Desde ya que también es posible escribir la energía involucrada en términos de esas corrientes, porque el contenido energético es único e independiente de la formulación que se elija.

Si optamos por esta formulación, debemos sumar las contribuciones de todos los tubos de corriente (o conjunto de espiras) que conforman el volumen que estamos estudiando. Sin necesidad de adentrarnos en el tratamiento formal del problema (un cálculo por otro lado bastante engorroso y que involucra un conjunto de herramientas matemáticas que no deseamos incorporar) pensemos en el aporte de un elemento de corriente. Siempre será posible situarse a alguna distancia de este elemento como para considerarlo, en primera aproximación, como un alambre infinito (en el sentido de que su longitud típica es mucho mayor que cualquier distancia característica involucrada en el problema).

Escribamos la expresión (9.117) arreglada para un elemento genérico, por el que circula, digamos, la corriente i_k . Usando la expresión (8.53) del campo magnético generado por una corriente en un alambre infinito escribimos

$$U_{Mk} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B_k^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint (\vec{B}_k \cdot \vec{B}_k) d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint \frac{\mu_0 i_k^2}{4\pi^2 R^2} d\mathcal{V} \quad (9.118)$$

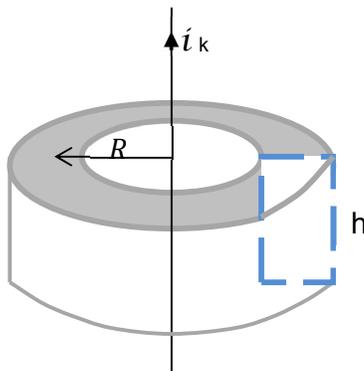
Elijamos como volumen de integración una corona elemental que rodee (localmente) al elemento en cuestión, como la que se muestra en la figura 9.21. Como puede verse, se trata de una sucesión de rectángulos de altura h , cada uno de ellos atravesado perpendicularmente por las líneas de campo magnético. El elemento de volumen, en este caso, se reduce a

$$d\mathcal{V} = R d\phi dz dR = 2\pi h R dR \tag{9.119}$$

de manera tal que la energía U_{Mk} de (9.117) resulta

$$U_{Mk} = \frac{\mu_0 h i_k^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 h i_k^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{9.120}$$

Esta última expresión puede ponerse en una forma más familiar, si recordamos que el flujo magnético Φ_{Mk} que atraviesa una superficie rectangular de lados h y $(R_2 - R_1)$, debido a la corriente i_k de un alambre infinito (véase el resultado (9.22)) se escribe como



$$\Phi_{Mk} = \frac{\mu_0 h i_k}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{9.121}$$

de manera tal que la expresión (9.101) puede escribirse como

$$U_{Mk} = \frac{1}{2} i_k \Phi_{Mk} \tag{9.122}$$

y la energía magnética debida a la contribución de todas las espiras contenidas en el volumen resulta de manera casi inmediata

Fig. 9.21: la corriente i_k está rodeada por una corona. Se muestra un corte de la misma.

$$U_{Mk} = \frac{1}{2} \sum_k i_k \Phi_{Mk} \tag{9.123}$$

donde cada flujo Φ_{Mk} , como veremos en la próxima sección, involucra al flujo propio de la k -ésima espira y a los del resto de las espiras en la posición de ésta.

Energía de una configuración de espiras

Sin necesidad de un balance energético completo, calculemos el trabajo que se requiere para modificar la configuración de un arreglo de espiras. Comencemos reduciendo el tratamiento a un sistema formado por sólo dos espiras, en cuyo caso tendremos que tener en cuenta no sólo el flujo propio sino también el flujo generado por la otra espira. Si llamamos C_1 y C_2 a los contornos de las dos espiras, i_1 e i_2 a las corrientes que circulan por

cada circuito, Φ_{12} al flujo que la corriente i_2 genera en la posición del circuito C_1 , Φ_{21} al flujo que la corriente i_1 genera en la posición del circuito C_2 la reducción de la expresión (9.123) a dos espiras resulta inmediatamente

$$U_M = \frac{1}{2} i_1(\Phi_{12} + \Phi_{21}) + \frac{1}{2} i_2(\Phi_{21} + \Phi_{22}) \quad (9.124)$$

En los renglones que siguen a la expresión (9.55) adelantamos que en los medios lineales el coeficiente de inducción mutua entre dos circuitos 1 y 2 puede escribirse como $M_{12} = N_1 \Phi_2 / i_2$. Sin pérdida alguna de generalidad, para simplificar el tratamiento en lo que sigue pensemos en circuitos de una sola espira ($N = 1$) inmersos en medios lineales. En estas condiciones, en la ecuación (9.78) podemos reemplazar los flujos Φ_{12} y Φ_{21} en términos de las corrientes i_1 e i_2 y los coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} , para escribir

$$U_M = \frac{1}{2} i_1 M_{12} i_2 + \frac{1}{2} i_1 M_{11} i_1 + \frac{1}{2} i_2 M_{21} i_1 + \frac{1}{2} i_2 M_{22} i_2 \quad (9.125)$$

El coeficiente de inducción mutua es un factor meramente geométrico y simétrico (véase la sección 9.3) es decir, $M_{12} = M_{21}$. Por lo demás, recordando que $M_{mm} = L_m$ (ecuación (9.51)) la identidad (9.125) se reduce a la forma

$$U_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + i_1 i_2 M_{21} \quad (9.126)$$

Obsérvese que ahora la extensión a un conjunto de K espiras es inmediata, a condición de tener siempre en cuenta que cada término con subíndice $j=p$ corresponde a la energía propia de la espira C_j , relacionada a través de su coeficiente de autoinducción $M_{jj} = L_j$. Resulta entonces

$$U_M = \sum_{\substack{j=1 \\ p=1}}^K \frac{1}{2} M_{jp} i_j i_p \quad (9.127)$$

Coherentemente, podemos regresar ahora a la expresión (9.124) para escribir la energía magnética en términos de las corrientes y los flujos (propios y de interacción) en la forma general

$$U_M = \sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^K \frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} \tag{9.128}$$

Pensemos ahora en una configuración de espiras, y supongamos que deseamos modificar la distribución espacial de estas espiras. Para ello debemos realizar un cierto trabajo en contra de las fuerzas magnéticas, que a su vez debe traducirse en una modificación de la energía interna del sistema, expresada por la ecuación (9.127) o por su equivalente (9.128). Luego, el trabajo necesario para desplazar una espira, esto es, la variación ΔU_M , podrá calcularse tanto en términos de la variación de los coeficientes de inducción mutua como de la variación del flujo, como intentamos poner de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo complementario 1: Imaginemos una espira rectangular, por la que circula una corriente constante i_1 , inmersa en el campo magnético generado por la corriente i_2 , también constante, que circula por un alambre infinito (como siempre, con alambre infinito queremos decir un conductor de longitud mucho mayor que las dimensiones típicas del problema). Calculemos el trabajo que debe realizarse *sobre* la espira (o *entregarse* a la espira) para trasladarla a velocidad constante por el campo magnético externo.

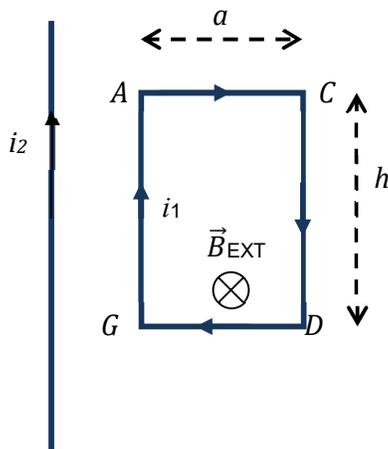


Fig. 9.22: la espira ACDG, circulada por la corriente i_1 , se halla en el campo generado por la corriente i_2 (para la espira es un campo externo).

Para ello, evaluemos la fuerza $\vec{F}_{12}(R) = i_1 d\vec{\ell} \times \vec{B}_2$ que el campo externo (es decir, el generado por la corriente i_2 que circula por el alambre) ejerce sobre el cuadro. En la figura 9.22 hemos esquematizado el arreglo, en el que hemos asumido un determinado (y por completo arbitrario) sentido de circulación de las corrientes; obsérvese que en coordenadas cilíndricas resultan

$$i_1 d\vec{\ell}_{AC} = i_1 dR \hat{e}_R \tag{9.129.a}$$

$$i_1 d\vec{\ell}_{CD} = i_1 dz (-\hat{e}_z) \tag{9.129.b}$$

$$i_1 d\vec{\ell}_{DG} = i_1 dR (-\hat{e}_R) \tag{9.129.c}$$

$$i_1 d\vec{\ell}_{GA} = i_1 dz \hat{e}_z \tag{9.129.d}$$

de manera tal que, teniendo en cuenta que el campo magnético generado por la corriente i_2 es de la forma $\vec{B}_2 = B_2(R) \hat{e}_\phi$, resulta de inmediato que sobre los lados AC y DG la fuerza

neta es de igual magnitud (porque el campo externo no depende de la altura z) y sentido contrario, de manera que no contribuyen a la fuerza neta.

Por lo demás, siendo

$$\vec{B}_2(R) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (9.130)$$

es casi evidente que la fuerza sobre los lados CD y GA tiene sentido radial y que su valor neto depende del valor del ancho a de la espira. De hecho, a partir de las expresiones (9.129) es fácil ver que la fuerza neta sobre la espira vale

$$\vec{F}_{12}(R) = \int_0^a i_1 d\vec{\ell} \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h}{2\pi} \left(\frac{a}{R(R+a)} \right) (-\hat{e}_R) \quad (9.131)$$

de manera tal que el trabajo W_{12} necesario para trasladar la espira desde una posición R_p a otra R_q en contra de la fuerza magnética \vec{F}_{12} resulta

$$W_{12} = \int_{R_p}^{R_q} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{R} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h}{2\pi} \int_{R_p}^{R_q} \frac{a}{R(R+a)} dR = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h}{2\pi} \ln \left[\frac{R_q(R_p+a)}{R_p(R_q+a)} \right] \quad (9.132)$$

Pero mientras la espira se desplazó apareció, además, una corriente i_{IND} , circulando de manera tal de generar un campo magnético creciente o decreciente según la espira se desplaza hacia la derecha (hacia donde el campo magnético del cable disminuye) o hacia la izquierda (hacia donde el campo del alambre crece) respectivamente.

Específicamente, imaginemos que el desplazamiento es hacia la región de campo creciente, es decir, acercamos el cuadro al alambre. Luego, la corriente inducida circula en sentido contrario al de i_1 y, por lo demás, el cálculo es absolutamente análogo al que ya hicimos. Así, si llamamos W_{IND} al trabajo realizado en contra de la fuerza inducida, a partir de la ecuación (9.132) resulta inmediatamente

$$W_{IND} = -i_{IND} \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \left[\frac{R_q(R_p+a)}{R_p(R_q+a)} \right] \quad (9.133)$$

El trabajo total realizado, W , resulta de la suma de las expresiones (9.132) y (9.133). Parece evidente que este trabajo debe quedar necesariamente como energía de la configuración, porque el desplazamiento se efectuó a velocidad constante, de manera tal

que podemos asociarlo al contenido de energía magnética del sistema cable-espira, esto es,

$$\Delta U_M = W = (i_1 - i_{IND}) \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \left[\frac{R_q(R_p + a)}{R_p(R_q + a)} \right] \quad (9.134)$$

Obsérvese, con todo, que el signo del trabajo W depende del sentido de circulación de las corrientes i_1 e i_2 y del sentido del desplazamiento (o, dicho de otra manera, del sentido de circulación de i_{IND}), un hecho que en principio no debería sorprendernos porque al cabo las fuerzas y los campos magnéticos dependen de las corrientes.

Una manera alternativa de calcular la variación del contenido energético de la configuración, de acuerdo a lo discutido en el párrafo anterior, es a través de la variación del flujo magnético. Para hacerlo, notemos que en el cálculo de dicha variación intervienen las áreas barridas en su desplazamiento por los brazos AG y CD del cuadro, por los que la corriente circula en sentidos opuestos, de manera tal que las superficies orientadas tienen sentidos opuestos y, luego, las variaciones de flujo en uno y otro extremo tienen signo contrario. Por otro lado, tengamos en cuenta que el brazo AG se halla inicialmente a una distancia R_p del alambre, en una región del espacio donde el campo magnético externo es proporcional a $1/R_p$, en tanto que el brazo CD se halla a una distancia $(R_p + a)$ del alambre, en una región donde el campo magnético ha decrecido en valor absoluto y es proporcional a $1/(R_p + a)$. Con estas consideraciones en mente, resulta

$$\Delta \Phi_M = \int_0^h dz \left[\int_{R_p}^{R_q} B(R_p) dR - \int_{R_p+a}^{R_q+a} B(R_p + a) dR \right] = \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \left[\frac{R_q(R_p + a)}{R_p(R_q + a)} \right] \quad (9.135)$$

Luego, a partir de la ecuación (9.123) es inmediato que se recupera el resultado (9.134). También podemos reencontrar este resultado pensando que el trabajo se ha invertido para modificar la geometría de la configuración. Pero esto lleva necesariamente a una variación en el coeficiente de inducción mutua, que para una disposición análoga a la del problema ya fue calculada en el ejemplo 9.9. Si llamamos M y M' a los valores del coeficiente de inducción mutua antes y después del desplazamiento, en base al resultado (9.45) escribimos

$$M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{R_p + a}{R_p} \right) \quad (9.136)$$

$$M' = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{R_q + a}{R_q} \right) \quad (9.137)$$

de manera tal que resulta

$$\Delta M = M - M' = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left[\frac{R_q(R_p + a)}{R_p(R_q + a)} \right] \quad (9.138)$$

y, recordando que los términos con el coeficiente de inducción mutua deben contarse dos veces, a partir de la expresión (9.125) reobtenemos el valor (9.134).

Fuerza de un campo magnético sobre una espira

Imaginemos que deseamos traer una espira C_2 desde el infinito, en presencia del campo magnético generado por una espira C_1 localizada en el origen de un sistema de referencia arbitrario. Está claro que para armar la configuración final de las dos espiras será necesario invertir una cierta cantidad de trabajo, porque en todo caso, y aun si no se le suministrara externamente una corriente, por la espira C_2 habrá de circular una corriente inducida i_{IND} que generará un flujo tendiente a frenar el movimiento. Dicho de otra manera, debemos realizar trabajo en contra de la fuerza magnética, y ese trabajo debe quedar contenido como energía magnética de la configuración o disiparse en forma de calor.

De alguna manera, estamos pensando en un problema análogo al que planteamos en el capítulo 6 cuando calculamos el trabajo necesario para armar una configuración de dieléctricos y conductores (véase la sección 6.6). Ahora queremos armar una configuración de espiras, y para ello hemos colocado la primera espira en su posición y una vez ubicada le hacemos circular corriente. Pero la forma de transportar la segunda espira no es única, porque podemos hacerlo con las espiras aisladas (en cuyo caso el flujo magnético permanecerá constante) o sin aislar (en cuyo caso las fuentes de corriente mantendrán constante el valor de la corriente en cada espira, independientemente de la corriente i_{IND} que pueda circular).

Para adentrarnos un poco en la diferencia conceptual entre los dos métodos, pensemos en dos espiras ideales, ambas de resistencia nula. Traigamos C_2 en presencia de C_1 y supongamos por ahora que la única corriente que circula por la espira C_2 es la inducida, de manera tal que la única fuerza que debemos tratar es \vec{F}_{IND} . Admitamos, sin pérdida alguna de generalidad, que el campo magnético que genera la primera espira no sólo no es uniforme sino que además tiene módulo mayor a la izquierda de la espira que estamos transportando. Si movemos la espira en el sentido indicado en la figura 9.23 estamos llevándola a regiones de campo de mayor intensidad y, por consiguiente, el flujo magnético que abraza es creciente.

El problema puede también pensarse así: deformamos la espira, contrayéndola por su parte derecha y estirándola por su costado izquierdo, a condición de que el área y el perfil sean invariantes. Obsérvese que el orden de las deformaciones es irrelevante, y que las corrientes inducidas en las dos operaciones tienen signo opuesto, porque el flujo crece cuando la espira se agranda y decrece cuando se contrae. Sin embargo, como el campo

magnético es de mayor intensidad a la izquierda, el flujo abrazado en cada deformación de estiramiento es mayor que el que deja de abrazarse con la deformación de contracción y, en consecuencia, al cabo de cada par de deformaciones el flujo neto abrazado ha crecido.

La fuerza inducida \vec{F}_{IND} habrá de oponerse al movimiento, tratando de mantener constante el flujo, de manera tal que el incremento diferencial de la energía magnética debido a la corriente inducida, digamos $dU_{M,IND}$, será proporcional al trabajo elemental δW de dicha fuerza, esto es,

$$dU_{M, IND} = -\delta W_{F_{IND}} \quad (9.139)$$

El trabajo elemental δW de la fuerza \vec{F}_{IND} lo evaluamos integrando la fuerza sobre toda la espira C_2 (la que estamos transportando)

$$\delta W_{F_{IND}} = \oint_{C_2} \vec{F}_{IND} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} (i_{IND} d\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (9.140)$$

que, en virtud de la identidad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ se transforma en

$$\delta W_{F_{IND}} = \oint_{C_2} i_{IND} (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \quad (9.141)$$

Observemos ahora que el factor entre paréntesis en esta última expresión representa una superficie orientada, pues en efecto

$$d\vec{r} \times d\vec{\ell} = d\vec{S}' \quad (9.142)$$

Ahora bien, $d\vec{S}'$ es un elemento de superficie orientado en el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha que girara como la corriente inducida. Al final de la sección 9.2 vimos que a los efectos del flujo magnético la superficie se orienta en sentido contrario al de avance de la corriente, de manera tal que si llamamos $d\vec{S}$ a la superficie orientada en sentido contrario, es decir, $d\vec{S} = -d\vec{S}'$, resulta que la integral extendida a toda la superficie es proporcional al flujo magnético que atraviesa la espira C_2 . Luego, la energía $U_{M,IND}$ después de integrar la identidad (9.130) sobre toda el área de la espira, resulta

$$U_{M, IND} = -W_{F_{IND}} = - \iint i_{IND} (-d\vec{S}) \cdot \vec{B} = i_{IND} \Phi_M \quad (9.143)$$

Evaluemos ahora la variación de energía magnética $U_{M,EXT}$ debida a la corriente $i_{2,EXT}$, de origen externo, que puede circular por la espira C_2 . De nuevo, con origen externo de la corriente queremos decir que existe un generador que suministra corriente a la espira de manera permanente, de forma tal que circula aun cuando la espira está en reposo. Observemos que el desarrollo formal es idéntico al que hicimos para la corriente inducida i_{IND} , salvo que al llegar a la expresión (9.142) el diferencial de superficie $d\vec{S}'$ no requiere de mayor interpretación porque es el elemento de superficie asociado a la corriente $i_{2,EXT}$ – forzada externamente – que circula por la espira. Así, salvo por el signo y el origen de la corriente, llegamos a una expresión análoga a (9.143)

$$U_{M, EXT} = -W_{F_{EXT}} = - \iint i_{2,EXT} d\vec{S}' \cdot \vec{B} = i_{2,EXT} \Phi_M \tag{9.144}$$

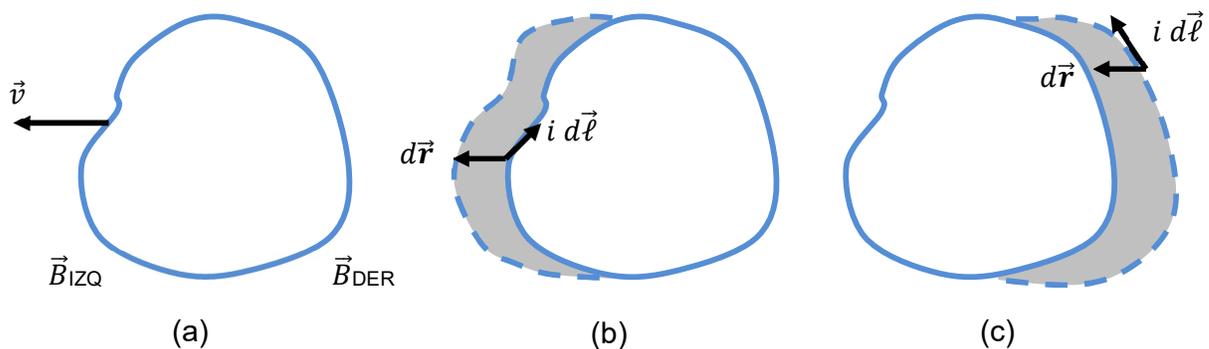


Fig. 9.23: (a) la espira se mueve con velocidad v en un campo magnético externo (generado por otra espira, que no se muestra en el dibujo) que crece de izquierda a derecha, esto es, $|B_{IZQ}| > |B_{DER}|$. El movimiento es equivalente a deformar primero la parte izquierda de la espira (figura (b)) de manera tal que se incremente el flujo abrazado, y luego regresarla a su forma original achicando la parte derecha (figura (c)) con el consiguiente decremento de flujo. Obsérvese que las corrientes inducidas en cada caso son opuestas.

Queda claro que la diferencia entre un caso y otro es un signo negativo, que en principio podríamos haber esperado en función de la ley de Lenz. También parece evidente que a la hora de realizar un balance energético completo en una espira real (con resistencia no nula) estas dos corrientes de alguna forma deben figurar en un término que tenga en cuenta los efectos disipativos (potencia perdida).

Supongamos ahora que la espira no está aislada, y llamemos simplemente i a la corriente externa que se le suministra y U_M a la energía magnética. De acuerdo a la identidad (9.144), si desplazamos la espira hasta una posición arbitraria y luego la regresamos a su ubicación original, el contenido energético no cambia, de manera tal que la fuerza asociada, en este caso, es conservativa. Luego, podemos escribir

$$\vec{F}_M = -\nabla U_M = -\nabla(-i \Phi) \quad (9.145)$$

Un caso particularmente interesante y sencillo se presenta si el campo magnético \vec{B} en el que se halla la espira es constante. En este caso la expresión de la fuerza \vec{F}_M puede escribirse como

$$\vec{F}_M = \nabla(i \Phi) = \nabla \left[i \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \nabla \left[\left(i \iint d\vec{S} \right) \cdot \vec{B} \right] \quad (9.146)$$

que en términos del momento magnético de la espira definido en la ecuación (8.103) se reduce a la forma

$$\vec{F}_M = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (9.147)$$

Ejemplo complementario 2: recalculemos la fuerza que ejerce el campo magnético del hilo delgado del ejemplo 9.4 sobre el cuadro de lados a y h usando la formulación anterior.

Usando la notación de la figura 9.21, y llamando Φ_{12} al flujo magnético que la corriente i_2 provoca en la posición del cuadro, de acuerdo a la expresión (9.145) es

$$\vec{F}_{12} = \nabla(i_1 \Phi_{12}) \quad (9.148)$$

Ahora bien, dado que

$$\Phi_{12} = \int_0^h dz \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} dR = \frac{\mu_0 i_1 h}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right) \quad (9.149)$$

en coordenadas cilíndricas resulta

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial R} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right) \hat{e}_R = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h}{2\pi} \left(\frac{a}{R(R+a)} \right) (-\hat{e}_R) \quad (9.150)$$

que es la expresión de la fuerza magnética que ya habíamos calculado en la ecuación (9.131).

Balance energético de un sistema de espiras

Analicemos ahora una configuración de K espiras reales, esto es, con resistencia no nula, y calculemos la fuerza que es necesario realizar para desplazar una de las espiras en presencia de las otras. Por lo pronto, si las espiras no están aisladas, en el balance energético debemos incluir el trabajo δW_f de las fuentes que suministran las corrientes de cada espira, el trabajo $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ que debemos realizar para desplazar la espira, y la cantidad de calor δQ que se disipa en las espiras por efecto de la resistencia eléctrica. Sin embargo, como no conocemos la cantidad de calor sino la potencia que se disipa en una resistencia, conviene que el balance sea a nivel de potencias. Matemáticamente, nuestro balance se expresa como

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{\delta W_f}{dt} - \vec{F} \cdot d\vec{r} - \frac{\delta Q}{dt} \quad (9.151)$$

La energía que figura en el miembro izquierdo es la de la configuración, calculada en la ecuación (9.128), de manera tal que escribimos

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^K \frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} \quad (9.152)$$

El segundo término del miembro derecho de la expresión (9.151) no ofrece dificultades porque es simplemente la potencia $\vec{F} \cdot \vec{v}$ que debemos desarrollar para mover la espira. El primer sumando en esa ecuación representa la potencia entregada por las fuentes, que de acuerdo a la identidad (7.98) podemos expresarla como

$$\frac{\delta W_f}{dt} = P_f = \sum_{j=1}^K i_j V_j \quad (9.153)$$

La diferencia de potencial V_j que figura en la suma, de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff (apartado 7.6) debe incluir no sólo las caídas de potencial sino también las fuerzas electromotrices inducidas, pues como hemos asegurado renglones arriba, debajo de la expresión (9.144), las corrientes inducidas deben tenerse en cuenta a la hora de plantear el balance de energía. De esta manera, si \mathcal{E}_j representa la fuerza electromotriz inducida en la espira j , de manera absolutamente general planteamos

$$V_j = i_j R_j - \mathcal{E}_j \quad (9.154)$$

y la expresión (9.153) se transforma como

$$P_f = \sum_{j=1}^K i_j (i_j R_j - \varepsilon_j) = \sum_{j=1}^K \left[i_j^2 R_j - i_j \left(-\frac{d\Phi_{jp}}{dt} \right) \right] \quad (9.155)$$

donde Φ_{jp} representa el flujo total que atraviesa la espira j . En cuanto al último sumando del miembro derecho, se debe a la potencia disipada por las corrientes (externas e inducidas) que circulan por cada espira, de manera tal que, de nuevo, apelando a la ecuación (7.98), escribimos el calor (en joule) que por segundo se disipa en todas las espiras como

$$\frac{\delta Q}{dt} = \sum_{j=1}^K i_j^2 R_j \quad (9.156)$$

Sumando todas las componentes, el balance (9.151) resulta

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^K \frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} = \sum_{j=1}^K \left[i_j^2 R_j + i_j \left(\frac{d\Phi_{jp}}{dt} \right) \right] - \vec{F} \cdot \vec{v} - \sum_{j=1}^K i_j^2 R_j \quad (9.157)$$

que de manera casi evidente se reduce a la forma

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \sum_{j=1}^K \left\{ i_j \frac{d\Phi_{jp}}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} \right) \right\} \quad (9.158)$$

Obsérvese que si las corrientes i_j son constantes pueden salir de la derivada del segundo término del miembro derecho y naturalmente se obtiene

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^K \frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} \quad (9.159)$$

Debe notarse que la suma que figura en la última expresión es la energía magnética definida en la ecuación (9.128). Por lo demás, dada una función escalar cualquiera $G(x, y, z)$ es fácil verificar la operación

$$\nabla G \cdot \vec{v} = \frac{\partial G}{\partial x} v_x + \frac{\partial G}{\partial y} v_y + \frac{\partial G}{\partial z} v_z = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dG}{dt} \quad (9.160)$$

de manera tal que si

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \nabla G \cdot \vec{v} \quad (9.161)$$

es casi inmediato que resulta

$$\vec{F} = \nabla G \quad (9.162)$$

y en el caso que estamos analizando se desprende de inmediato la igualdad

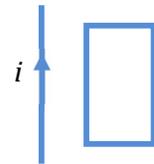
$$\vec{F} = \nabla \left[\sum_{\substack{j=1 \\ p=1}}^K \frac{1}{2} i_j \Phi_{jp} \right] \quad (9.163)$$

que es formalmente idéntica a la ecuación (9.128), salvo por la aparente discrepancia entre las expresiones de la energía magnética U_M . Sin embargo, debemos tener en cuenta que en tanto la expresión (9.123) está escrita en términos del flujo magnético externo sobre una espira, la ecuación (9.163) está expresada en términos de la energía de interacción de todo el conjunto de espiras.

Ejercicios propuestos

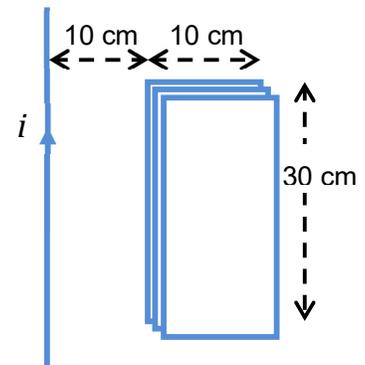
Ejercicio 1: Suponga que el alambre rectilíneo de la figura tiene longitud mucho mayor que las dimensiones de la espira y que la distancia que la separa de ésta. Indique cómo circula la corriente inducida en el cuadro en los siguientes casos:

- a) la corriente crece en el tiempo;
- b) la corriente decrece en el tiempo;
- c) la corriente es constante;
- d) la corriente es constante y la espira se acerca al cable;
- e) la corriente crece y la espira se acerca al cable;
- f) la espira se desplaza paralela al cable;
- g) la espira gira rígidamente alrededor del cable manteniendo constante su forma y la distancia al alambre.



Ejercicio 2: La bobina rectangular de la figura tiene 50 vueltas y su normal es perpendicular al plano que contiene al hilo (que podemos considerar infinito) por el que circula una corriente de la forma $i(t) = 5(b t + 1) \text{ A}$. Calcule la fem inducida en la bobina en los siguientes casos:

- a) la bobina está en reposo respecto del alambre y $b = 2 \text{ seg}^{-1}$;
- b) la bobina se aleja del hilo con velocidad $v = 0,15 \text{ m/seg}$ y $b = 0$;
- c) la bobina se aleja del hilo con velocidad $v = 0,15 \text{ m/seg}$ y $b = 2 \text{ seg}^{-1}$.

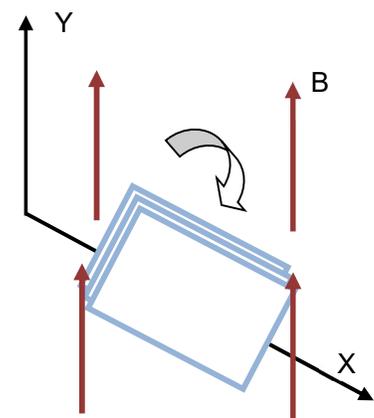


Ejercicio 3: Regresemos al cuadro del ejercicio anterior y pensemos que se aleja del hilo con velocidad $v = 0,15 \text{ m/seg}$ y $b = 2 \text{ seg}^{-1}$. Justifique si la fem inducida cambia o permanece invariante si, antes de comenzar a moverse, se gira 90° el cuadro conservando su normal perpendicular al plano de la hoja (o sea, el lado de 10 cm es el que queda enfrente al cable).

Ejercicio 4: La figura muestra una bobina rectangular de 100 espiras, cuyos lados miden 20 cm y 25 cm, respectivamente, y que gira de manera uniforme a 600 rpm alrededor del eje x. Si la bobina está rotando en una región del espacio donde existe un campo uniforme $\vec{B} = 0,125 \text{ T } \hat{e}_y$,

- a) halle el valor de la fem que se origina en los extremos de la bobina;
- b) suponiendo que todo el cuadro tiene una resistencia propia $R = 2 \Omega$, calcule el valor de la corriente inducida en $t = 0,1 \text{ seg}$, en $t = 0,157 \text{ seg}$, en $t = 0,314 \text{ seg}$ y en $t = 0,471 \text{ seg}$;

c) la corriente inducida, claramente, no es constante. Si queremos calcular el valor de la energía disipada por la resistencia propia del cuadro en cada vuelta completa nos encontramos con la dificultad de que no tenemos un único valor de corriente. Como la resistencia siempre disipa, podemos pensar en integrar en un ciclo los valores del cuadrado de la corriente, pero para que sea un valor de corriente debemos dividir



por un tiempo, a saber, el valor del período y luego tomar la raíz cuadrada, esto es, realizar la operación

$$\langle i \rangle = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}$$

Calcule el valor de $\langle i \rangle$ (que en el capítulo 11 llamaremos *corriente eficaz*) y demuestre que en este caso vale 0,707 i_0 , es decir, 0,707 veces el valor máximo de la corriente inducida. Calcule luego el valor de la potencia que por ciclo disipa la resistencia propia del cuadro.

Ejercicio 5: Un bobinado de N espiras cuadradas de lado a , se encuentra a una distancia d de un alambre recto de longitud L mucho mayor que cualquier longitud típica del problema, esto es, $L \gg a, d$. En un determinado instante se hace circular corriente por el alambre, que crece hasta llegar a su valor en régimen estacionario como $i(t) = i_0 (1 - e^{-\alpha t})$, donde α es una constante positiva.

- a) calcule el valor de la fem inducida en el bobinado en régimen transitorio suponiendo $L \gg a, d$;
- b) calcule el coeficiente de inducción mutua suponiendo $L \gg a, d$;
- c) proponga un valor para el tiempo que tarda en anularse la fem inducida en la espira;
- d) repita los primeros puntos suponiendo ahora $L = 5(a+d)$ con el centro de la espira situado en el centro del cable.

(Recuerde la expresión para el campo magnético generado por un alambre finito a una distancia R y a una altura h ($h < L/2$) de su centro

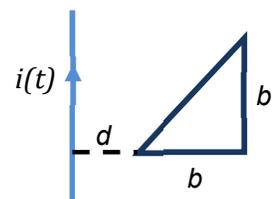
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left[\frac{h + \frac{L}{2}}{\left(R^2 + \left(h + \frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{h - \frac{L}{2}}{\left(R^2 + \left(h - \frac{L}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \right] \hat{e}_\phi$$

e integre la expresión $\vec{B} \cdot d\vec{S} = B(R, h) dR dh$ entre $h = -a/2$ y $h = a/2$ y luego entre $R = a$ y $R = a+d$)

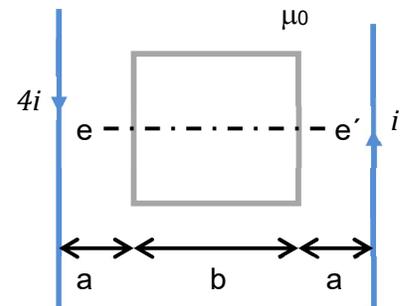
Ejercicio 6: Un alambre recto e infinito, por el que se transporta una corriente variable en el tiempo $i(t)$, se halla a una distancia d de una espira triangular de lado b , como se muestra en la figura. Calcule el flujo que atraviesa la espira.

(El problema es meramente geométrico, y posiblemente convenga integrar el flujo entre $z = 0$ y $z = R - d$, y R entre $R = d$ y $R = d + b$. Note que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{k}{x} \right) = k.$$



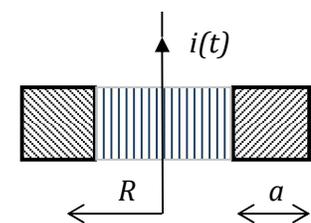
Ejercicio 7: La espira cuadrada de la figura se halla contenida en el plano determinado por los dos alambres paralelos de la figura, de longitud $L \gg 2a+b$. Por el alambre de la derecha circula una corriente $i(t)$, en tanto que por el de la izquierda circula una corriente $4i(t)$.



- calcule el flujo magnético a través de la espira;
- calcule el valor de la inductancia mutua M del sistema espira-cables;
- calcule la fem inducida en la espira;
- recalcule la fem inducida suponiendo ahora que las corrientes circulan en igual sentido;
- suponga que la espira gira alrededor del eje ee' con frecuencia $f=600\text{rpm}$. Recalcule el valor de la fem inducida en estas condiciones, suponiendo que las corrientes son antiparalelas (como en la figura);
- calcule nuevamente la fem inducida suponiendo ahora que la espira gira alrededor de un eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por su centro, con la misma frecuencia $f=600\text{rpm}$.

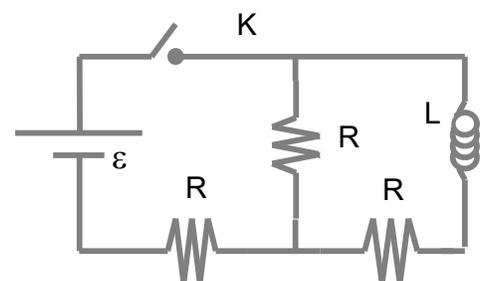
Ejercicio 8: Un solenoide de radio R_1 y longitud L_1 se halla en el interior de otro solenoide, de radio $R_2 \gg R_1$ y longitud $L_2 \gg L_1$. Los solenoides son coaxiales y por el externo circula una corriente variable de la forma $i_2(t) = 2 \sin(2\pi 10 t)$ A. Suponiendo $R_1 = 10 \text{ cm}$ y que la bobina exterior tiene 1000 vueltas /cm, calcule el coeficiente de inducción mutua del sistema. Explique por qué son necesarias las hipótesis.

Ejercicio 9: El alambre recto de la figura transporta una corriente $i(t) = i_0 \sin \omega t$, y pasa por el centro de un toroide de perfil cuadrado de densidad de espiras n , radio R y lado a , como se muestra en la figura.



- calcule la fem inducida en el toroide;
- calcule el coeficiente de inducción mutua del sistema.

Ejercicio 10: En el instante en que se cierra la llave K , por el circuito de la figura no circula corriente. Se mantiene la llave cerrada un tiempo mucho mayor que la constante de tiempo del circuito y luego se la abre. Si $\varepsilon=20\text{V}$, $R=50 \Omega$, y $L=0,1 \text{ H}$, calcule la corriente por cada rama



- inmediatamente después de cerrar la llave;
- inmediatamente después de abrirla.

Ejercicio 11: Sea un circuito RLC serie conectado a una batería de corriente continua. Muestre que si $R^2 LC = 4$ entonces la corriente tiene un extremo relativo cuya localización depende de las condiciones iniciales.

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: a) la corriente inducida circula por la espira en sentido antihorario; b) circula en sentido horario; c) no circula corriente inducida; e) circula en sentido antihorario; e) circula en sentido antihorario, f) no circula corriente inducida; g) no circula corriente inducida.

Ejercicio 2: a) $\mathcal{E} \sim 2 \times 10^{-5} \text{ V}$;

b) si llamamos $x(t)$ a la distancia entre el cable y el lado izquierdo del cuadro, resulta

$$|\mathcal{E}(t)| \sim \frac{2,25 \times 10^{-7}}{x(t)[x(t) + 0,1]} \text{ V} \quad (x(t) = D + v_0 t);$$

c) $|\mathcal{E}(t)| \sim 10^{-6} \left[5b \times \ln \left(1 + \frac{0,1}{x(t)} \right) - 5(bt + 1) \times \frac{0,1 v_0}{x(t)[x(t)+0,1]} \right] \text{ V}.$

Ejercicio 3: No, el resultado no es igual porque el flujo no es “campo magnético x área de la espira”. Luego, al cambiar los límites de integración, cambia el resultado.

Ejercicio 4: a) $6,25 \sin(\omega t) \text{ V}$; b) $2,63 \text{ A}$; $3,125 \text{ A}$; 0 ; $-3,125 \text{ A}$; c) $P = 9,76 \text{ W}$.

Ejercicio 5: a) $|\mathcal{E}| = N \frac{\mu_0 i_0 \alpha a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right)$; b) $M = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right)$; c) $t = 5/\alpha$; d) $\frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\left(R^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right)^{1/2}}$

Ejercicio 6: $\Phi = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \left[b - d \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]$

Ejercicio 7: a) $\Phi = \frac{5\mu_0 i(t)}{2\pi} b \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right)$; b) $M = \frac{5\mu_0}{2\pi} b \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right)$;

c) $|\mathcal{E}| = \frac{5\mu_0}{2\pi} b \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{di(t)}{dt}$;

d) $\Phi = \frac{3\mu_0 i(t)}{2\pi} b \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right)$; e) $\mathcal{E} = \frac{5\mu_0}{2\pi} b \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{d}{dt} [i(t) \text{ sen}(2\pi 10 t)]$

f) $\mathcal{E} = \frac{5\mu_0}{2\pi} b \Psi(a, b) \frac{d}{dt} [i(t) \text{ sen}(2\pi 10 t)]$ $\Psi(a, b) = \int_a^{a+b} \left(\frac{2(2a+b)}{R(2a+b-R)} - \frac{1}{2a+b-R} \right) dR$

Ejercicio 8: $M \approx 4 \times 10^{-5} \text{ Hy}$, válido si $R_2 \gg R_1$ y $L_2 \gg L_1$ porque en tal caso se puede considerar que el campo externo al solenoide de radio R_1 es constante.

Ejercicio 9: a) $|\mathcal{E}| = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right) \frac{di}{dt}$ $N = 2\pi R n$

b) $M = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right)$

Ejercicio 10: a) $i_2(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/2L})$; $i_1(t) = \frac{\varepsilon}{2R} + \frac{i_2}{2}$ (i_2 es la corriente de la malla que contiene la bobina);

b) $i_2(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-2Rt/L}$

Ejercicio 11: En el caso $R^2LC=4$ la solución es de la forma $i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$, que al cabo se trata de la suma de una exponencial decreciente (porque $\alpha = -R/2L$) con una función con un máximo.

10

Elementos
de
corriente
alterna

10.1 – Introducción

Si conectamos una batería a un dispositivo con determinada resistencia sabemos que circula una corriente. En el capítulo 7 a esa corriente la denominamos *continua* para indicar que la tensión de la fuente tiene un valor (idealmente) continuo. Salvo algún ejemplo concreto, jamás pensamos en la resistencia propia de los cables que cierran el circuito, fundamentalmente porque la resistividad de los conductores es comparativamente muy baja.

Si alargamos los cables y queremos mantener el valor de resistencia constante (por ejemplo para evitar mayores pérdidas por efecto Joule) tendremos que aumentar la sección del cable de manera proporcional a como aumentamos la longitud, esto es, si aumentamos 100 veces la longitud, mantenemos constante el valor de resistencia si aumentamos 100 veces la sección. Y como la sección (pensando esto es términos de un conductor cilíndrico) va como el radio al cuadrado, mantenemos la resistencia constante si multiplicamos el radio de la sección por un factor 10.

Supongamos ahora que el dispositivo se encuentra a algunos kilómetros de distancia de la batería. En tal caso parece impracticable mantener constante la resistencia del cable y, en consecuencia, las pérdidas que se producen en la línea de transmisión son enormes. Salvo, claro está, que se provoque un aumento igualmente enorme del valor de la diferencia de potencial de la batería de manera tal que la potencia útil en la resistencia lejana sea la misma que cuando estaba cerca. Pero si esa diferencia de potencial queremos aprovecharla en otro dispositivo resistivo cercano a la batería tendremos que tener mucho cuidado de cargar el circuito (cercano) con mayor resistencia de manera tal de evitar colapsos indeseables.

Si en lugar de corriente continua generásemos una que fuera variable en el tiempo, es decir, si abandonáramos la hipótesis de valor temporalmente constante de la fuerza electromotriz de la batería, a partir de los dispositivos elementales que analizamos en el capítulo anterior (véanse, por caso, los ejemplos 9.4 y 9.7) podríamos inducir en los circuitos a utilizar corrientes de valor en principio arbitrarias, o sea, aun cuando el valor de la corriente pudiera haber disminuido por efectos resistivos, podríamos elevarlo con sistemas de espiras (porque de esta manera se eleva el valor de la fuerza electromotriz inducida).

La enorme ventaja de una tensión variable por sobre la continua es precisamente la posibilidad de *transformar* su valor (elevarlo o disminuirlo), permitiendo de esta manera transportar energía a grandes distancias usando altas tensiones y bajas corrientes, con lo que se disminuyen las pérdidas en la líneas de transmisión.

En términos generales, si la fuerza electromotriz varía *periódicamente* en el tiempo se dice que la corriente que circula es *corriente alterna*, aunque suele reservarse esta denominación a la corriente que varía sinusoidalmente. En lo que resta de este capítulo estudiaremos los fundamentos de la teoría y los aplicaremos a algunas disposiciones circuitales elementales.

10.2 – Circuito RLC serie con corriente alterna

En el ejemplo 9.7 introdujimos las ideas básicas de los generadores de corriente alterna, mostrando que en una bobina que rota con velocidad angular ω constante en un campo magnético uniforme se induce una fuerza electromotriz \mathcal{E} variable y periódica, que en su forma más general puede escribirse como (véase la ecuación (9.37))

$$\mathcal{E}(t) = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t + \phi_1) \quad (10.1)$$

donde ε_0 es la amplitud (o valor de pico) de la fuerza electromotriz inducida, es decir, el valor máximo que alcanza la función, y ϕ_1 representa la *fase inicial* de la señal de tensión, esto es, se trata de una medida de la fracción de período transcurrido desde el inicio efectivo de la onda en algún sistema de referencia. Es de esperar que las características propias de un circuito *RLC* como el de la figura 9.17 no cambien cuando se lo conecta a un generador como este, es decir, sigue siendo un circuito *RLC* serie en un todo idéntico al que hemos analizado en la sección 9.4, sólo que ahora cambia la forma de las soluciones porque cambia la forma del miembro derecho de la ecuación diferencial que define al sistema. En la ecuación (9.80) la función del miembro derecho es una constante porque suponemos que se trata de una pila (ideal). En la situación que estamos proponiendo la ecuación (9.80) se convierte en

El término *corriente alterna* denota a toda función de corriente periódica en el tiempo, aunque suele identificarse sólo con las formas senoidales. De hecho, la corriente de uso domiciliario tiene esta característica. La tensión de pico domiciliar es de 311V, a una frecuencia de 50 Hz (lo que equivale a una pulsación ω de 314 seg^{-1}).

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t + \phi_1) \quad (10.2)$$

que se transforma en una ecuación sólo para la corriente circuital si derivamos respecto al tiempo ambos miembros

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t + \phi_1) \quad (10.3)$$

Aun sin conocer en detalle la solución de la expresión (10.3) podemos inferir que parece ser una función de tipo senoidal, de la forma

$$i(t) = i_0 \text{sen}(\omega t + \phi_2) \quad (10.4)$$

porque sabemos que las derivadas de estas funciones son también senoidales. Como es

Sin importar cuál sea la dependencia temporal de la fem de la fuente (a condición de que sea periódica) la solución de la ecuación (10.4) siempre pasa por hallar la intensidad de pico y la diferencia de fase. Esto se debe a que estamos hallando la solución de una ecuación diferencial de segundo grado, es decir, debemos determinar el valor de sólo dos constantes.

habitual, i_0 denota el valor de pico de la corriente circuital que proponemos como solución, y ϕ_2 indica el valor de la fase de la señal de corriente. Sabemos también que siendo la expresión (10.3) una ecuación diferencial lineal de segundo orden la solución habrá de depender de dos constantes, en principio arbitrarias. Resolver por completo la ecuación (10.3) significa en síntesis hallar el valor de esas dos constantes arbitrarias.

Entre las ecuaciones (10.1) a (10.4) hemos introducido tres constantes a determinar, a saber, i_0 , ϕ_1 y ϕ_2 , de manera tal que si hallamos los valores de estas constantes resolvemos el problema por completo. Como sólo disponemos de dos

ecuaciones, elegiremos las constantes indeterminadas como la intensidad de la corriente circuital i_0 , y la diferencia de fase ϕ entre las señales de tensión y de corriente, esto es,

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (10.5)$$

La combinación (10.5) no está mal, porque al cabo lo que nos interesa es la diferencia de fase entre las señales de tensión y corriente (esto es, la medida de la fracción de período que transcurre entre los instantes en que las señales de corriente y de tensión alcanzan sus valores máximos) y no la fase individual de cada señal en algún sistema de referencia. De alguna manera, hemos tomado a una de las señales como sistema de referencia (su fase es entonces nula) respecto del cual la otra señal adelanta o atrasa.

Parece evidente entonces que asignar la diferencia de fase a la señal de corriente o a la señal de tensión es indiferente, porque decir por ejemplo que la corriente atrasa (respecto a la tensión) es lo mismo que decir que la tensión adelanta (respecto a la corriente). Por comodidad, para resolver las ecuaciones (10.3)-(10.4) habremos de cargar la diferencia de fase a la señal de tensión, de manera tal que las ecuaciones a resolver serán de la forma

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \quad (10.6)$$

$$i(t) = i_0 \text{sen}(\omega t) \quad (10.7)$$

Tal vez valga la pena recalcar que si bien asignar la diferencia de fase a la tensión es arbitrario, el signo que adopte la diferencia de fase no es irrelevante. De hecho, valores positivos de la fase ϕ corresponden a situaciones en los que la tensión alcanza su valor máximo antes que la corriente que circula por el circuito, o, lo que es igual, que la tensión

adelanta a la corriente. Por supuesto, valores negativos de la fase ϕ representan situaciones en las que la tensión retrasa respecto de la corriente del circuito.

Reemplacemos entonces la forma de corriente propuesta (10.7) de manera tal que la expresión (10.3) se verifique idénticamente. De inmediato obtenemos

$$-L\omega^2 i_0 \operatorname{sen}(\omega t) + R\omega i_0 \cos(\omega t) + \frac{i_0}{C} \operatorname{sen}(\omega t) = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \quad (10.8)$$

El miembro derecho puede desarrollarse recordando la identidad trigonométrica

$$\cos(\omega t \pm \phi) = \cos(\omega t) \cos \phi \mp \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen} \phi \quad (10.9)$$

La ecuación (10.9) puede expresarse entonces completa y formalmente como

$$[R\omega i_0 - \varepsilon_0 \omega \cos \phi] \cos(\omega t) + \left[-L\omega^2 i_0 + \frac{i_0}{C} - \varepsilon_0 \omega \operatorname{sen} \phi \right] \operatorname{sen}(\omega t) = 0 \quad (10.10)$$

Ahora bien, para que la expresión (10.10) tenga validez general debe anularse en todo instante o, si se prefiere, para todo valor del argumento ωt . Pero esto sólo es posible si se anulan los términos entre corchetes por separado[†]. Por ejemplo, cada vez que el argumento ωt sea un múltiplo entero de π sabemos que el segundo sumando habrá de anularse sin importar cuánto valga el término dentro del segundo corchete porque $\operatorname{sen} k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Esto significa que el término encerrado en el primer corchete debe ser nulo porque $\cos k\pi \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. De la misma manera tendrá que ser nulo el término que figura en el segundo corchete cada vez que se anule la función $\cos(\omega t)$, esto es, cada vez que sea $\omega t = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$. Pero como es la suma de los dos términos lo que debe anularse, y en todo instante, volvemos al principio: la única forma que encontramos que pueda suceder es que, por separado, cada uno de los dos términos entre corchetes sea nulo, es decir, deben cumplirse simultáneamente las dos condiciones

Las funciones $\operatorname{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ son elementos de una base (infinita) de funciones ortogonales, de manera tal que sus elementos son linealmente independientes. En consecuencia, la única solución de la ecuación (10.8) es que cada corchete se anule por separado. En general, cualquier función periódica puede ser escrita en esta base, y este desarrollo se conoce como desarrollo en serie de Fourier.

[†] En rigor, las funciones $\operatorname{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ son parte de una base de funciones ortogonales, de manera tal que, como si se tratara de vectores de R^n , la única manera de escribir el cero con una combinación lineal de elementos de la base es que los coeficientes sean todos nulos.

$$R\omega i_0 - \varepsilon_0 \omega \cos \phi = 0 \quad (10.11)$$

$$-L\omega^2 i_0 + \frac{i_0}{C} - \varepsilon_0 \omega \sin \phi = 0 \quad (10.12)$$

A partir de la expresión (10.11) obtenemos

$$R = \frac{\varepsilon_0}{i_0} \cos \phi \quad (10.13)$$

en tanto que de la expresión (10.12) resulta

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{i_0} \sin \phi \quad (10.14)$$

Del cociente entre la ecuación (10.14) y la ecuación (10.13) resulta de inmediato el valor de la fase ϕ en la forma

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (10.15)$$

Asignar la diferencia de fase a la corriente o a la tensión resulta irrelevante, porque su valor sólo depende de los parámetros circuitales. Pero una vez asignada a una de las dos funciones, el signo de la diferencia de fase no es arbitrario sino que define las propiedades del circuito.

Como quedó dicho, el valor de la diferencia de fase ϕ (o simplemente desfase) es una medida de la diferencia de tiempo que media entre los instantes en los que la tensión y la corriente alcanzan sus valores máximos, y claramente depende de los valores circuitales y de la frecuencia de trabajo. Obsérvese que el período de las dos señales, la de tensión y la de corriente, es el mismo porque la pulsación ω (y en consecuencia la frecuencia) es la misma, pero se trata de dos funciones senoidales desplazadas en

el tiempo, salvo, por supuesto, en el caso en que el paréntesis de la expresión (10.15) se anule. En el ejemplo 10.1 ponemos en números estas consideraciones.

Ejemplo 10.1: Supongamos que resolvemos un circuito en el que la fase ϕ es $\pi/3$. Que la fase sea positiva significa que la tensión alcanza sus valores máximos antes que la corriente. Sin importar el valor de los parámetros circuitales, sabemos que una función senoidal alcanza su primer valor máximo en un tiempo tal que

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \quad (10.16)$$

o lo que es lo mismo

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4} \quad (10.17)$$

donde T es el período de la función. Si pensamos que la fase de la ecuación (10.1) es directamente la diferencia de fase entre tensión y corriente, la tensión alcanza su primer máximo en un tiempo $\omega t + \phi = \pi/2$, esto es, en un tiempo

$$t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{T}{12} \quad (10.18)$$

La diferencia temporal entre los dos valores pico es entonces

$$\Delta t = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6} \quad (10.19)$$

Si por ejemplo el circuito estuviera operando a 50 Hz, resultaría $T = 1/50 \text{ seg} = 0,02 \text{ seg}$ y la diferencia temporal entre máximos de tensión y corriente sería $\Delta t = 0,0033 \text{ seg}$. El valor parece irrelevante pero veremos que es central a la hora de calcular la potencia que es capaz de transferir el circuito. En la figura 10.1 mostramos las formas de las funciones de tensión y de corriente.

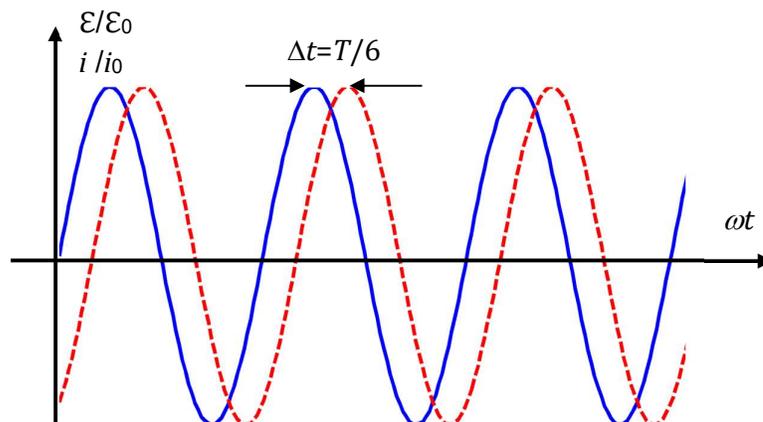


Fig. 10.1: formas de las señales de tensión (línea llena) y de corriente (línea punteada). La corriente está desfasada $\pi/3$ en retraso respecto de la tensión o, similarmente, la tensión está adelantada en $\pi/3$ a la corriente.

Analicemos con algún detalle la expresión del ángulo de fase. En primer lugar, obsérvese que el término entre paréntesis en la expresión (10.15) debe tener unidades de resistencia eléctrica. Para corroborarlo basta recordar que la unidad de inductancia, H , equivale a $\Omega \text{ seg}$ (véase la ecuación de definición (9.46)), y que la unidad de capacidad, F , equivale a C/V , es decir, $A \text{ seg}/V = \text{seg}/\Omega$.

A este término óhmico se lo denomina reactancia, X , y, como quedó dicho, se lo define como

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (10.20)$$

La componente ωL se llama *reactancia inductiva*, X_L ,

$$X_L = \omega L \quad (10.21)$$

en tanto que la *reactancia capacitiva*, X_C , se define como

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (10.22)$$

de manera tal que la reactancia de un circuito queda definida como la suma de sus partes inductiva y capacitiva, esto es,

$$X = X_L + X_C \quad (10.23)$$

Por lo demás, que la reactancia capacitiva sea negativa no significa que estamos trabajando con resistencias negativas porque la reactancia no está emparentada con la resistividad. En cierto modo es una medida de la resistencia al flujo de cargas por una bobina o por un capacitor (recordemos que la corriente continua en régimen estacionario no circula a través de los capacitores, y que las bobinas en corriente continua juegan el mismo rol que una llave cerrada) pero debe tenerse en cuenta que dependen de la frecuencia. Parece evidente, además, que si la reactancia de un circuito *RLC* serie es negativa es porque prevalecen los efectos capacitivos sobre los inductivos.

Finalmente, para completar el cálculo que nos hemos propuesto, regresemos a las expresiones (10.13) y (10.14) para calcular el valor del parámetro i_0 . Para ello elevemos al cuadrado ambas ecuaciones y sumémoslas. Es fácil ver que se obtiene la forma

La reactancia es una propiedad de las bobinas y de los capacitores que sólo aparece con corrientes variables en el tiempo. De alguna manera es una medida de su resistencia (al flujo de cargas) en función de la frecuencia, pero no está emparentada con la resistividad. Obsérvese que para $\omega=0$ (corriente continua) la reactancia inductiva es nula (la bobina se comporta como un alambre) y la capacitiva es infinita (el capacitor se comporta como una llave abierta).

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (10.24)$$

En conjunto, el denominador de la expresión (10.24) define la *impedancia*, Z , del circuito, es decir,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (10.25)$$

Por lo pronto, siendo su unidad la de una resistencia eléctrica, es casi inmediato que la impedancia define la relación de forma entre las amplitudes de la tensión y de la corriente en la forma

$$\mathcal{E}_0 = i_0 Z \quad (10.26)$$

Desde ya que esta identidad puede extenderse formalmente a las funciones temporales. Nosotros hemos asignado la fase a la tensión de la fuente, pero de nuevo, como es irrelevante decir que una adelanta o que la otra atrasa, es casi evidente que podemos elegir cualquiera de los pares de las siguientes formas temporales

Hemos calculado la diferencia de fase ϕ para la tensión. De nuevo, cargarle la fase a la tensión es arbitrario, pero si se la cargásemos a la corriente deberíamos tomarla como negativa (porque si matemáticamente la tensión adelanta debemos asegurarnos de que la corriente atrase). Esa es la razón del signo con el que la fase aparece en la ecuación (10.28), aunque, por supuesto, sigue calculándose a partir de la expresión (10.16).

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (10.27.a)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \text{sen}(\omega t) \quad (10.27.b)$$

o, equivalentemente

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t) \quad (10.27.c)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (10.27.d)$$

Queremos destacar que habrá que tener algún cuidado a la hora de la interpretación de estas identidades: la corriente que figura en las expresiones (10.27) es la que circula por el circuito, no necesariamente representa la corriente en cada uno de los elementos. En la sección próxima analizaremos con algún detalle esta afirmación.

Por lo pronto, parece evidente que la impedancia es función de la frecuencia, como queda en evidencia en la ecuación (10.25) y mostramos en la figura 10.2. Posiblemente la característica más notable de esta curva es que presenta un mínimo. Y no

importa la relación de valores de inductancia y capacidad que se elija, ese mínimo existe siempre.

En la figura 10.2 hemos marcado el extremo de la curva como ω_0 . Obsérvese que este mínimo se desprende naturalmente de la ecuación (10.25), y se da en el punto en que se anula la reactancia, una situación que analizaremos en detalle en la próxima sección.

Pero por lo pronto, la relación (10.26) ya nos adelanta que a ese valor de pulsación la corriente presenta un máximo. Parece evidente, además, que por debajo de la frecuencia de resonancia prevalecen los efectos capacitivos, en tanto que por encima de ω_0 el circuito tiene carácter inductivo, como se muestra en los gráficos de la figura 10.2.

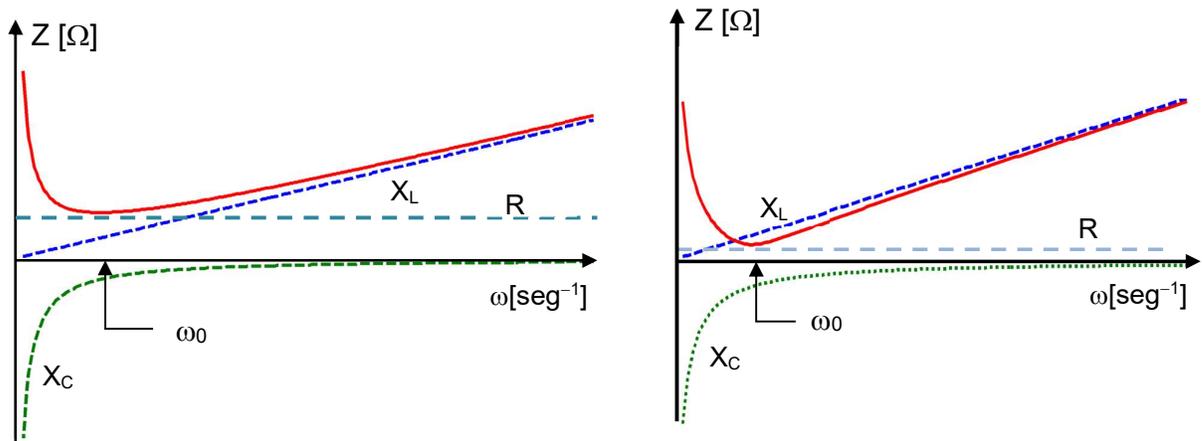


Fig. 10.2: impedancia (línea llena) en función de la pulsación ω para dos relaciones diferentes de reactancia. A la izquierda, $L/C= 50\Omega^2$ y a la derecha $L/C= 250\Omega^2$. En ambos casos el valor de la resistencia R es el mismo. Obsérvese que la impedancia muestra un mínimo (para $\omega= \omega_0$) y en ese punto vale R . Puede verse además que para valores menores a ω_0 la impedancia muestra carácter capacitivo, en tanto que por encima de ω_0 dominan los efectos inductivos.

10.3 – Circuitos inductivos y capacitivos. Resonancia

Regresemos a la expresión (10.15) que define la diferencia de fase entre las señales de tensión y de corriente. Dado que la resistencia es un escalar definido positivo, es casi evidente que sólo puede darse una de tres situaciones:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \tag{10.28}$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \phi > 0 \Rightarrow 0 < \phi < \pi/2 \tag{10.29}$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \phi < 0 \Rightarrow -\pi/2 < \phi < 0 \quad (10.30)$$

Cada uno de estos escenarios, a su vez, está relacionado con situaciones de interés práctico que a continuación analizaremos con algún detalle.

10.3.1.– Resonancia: obsérvese que en el único caso en que la corriente está en fase con la tensión aplicada ($\phi = 0$) queda establecido en la expresión (10.15) por la relación $X = 0$, esto es, para el valor ω_0 de la figura 10.2 que satisface la relación

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (10.31)$$

que es lo mismo que decir

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.32)$$

que en términos de la frecuencia se escribe como

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (10.33)$$

y que queda definida solamente por los valores de inductancia y capacidad. Si la frecuencia de la señal de entrada al circuito *RLC* serie coincide con la frecuencia definida por la ecuación (10.33) se dice que el sistema entra en *resonancia*, y al valor de esa frecuencia se lo conoce como *frecuencia de resonancia* del circuito.

Obsérvese que para este valor de frecuencia, es decir, con $\phi = 0$, se cumple

$$i_0 \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{R} \quad (10.34)$$

y que en consecuencia el circuito se comporta idénticamente a un circuito resistivo puro. Dicho sea de paso, las ecuaciones (10.13) y (10.14) (para $\phi = 0$) nos garantizan estos valores, es decir, $R = Z$ y $X = 0$.

10.3.2 – Circuito inductivo: podemos transformar el circuito *RLC* en un circuito *RL* cortocircuitando el capacitor. Prestemos atención a la expresión (10.15): con $X_C = 0$ el ángulo de fase resulta en un valor acotado entre 0 y $\pi/2$, esto es

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L}{R} > 0 \Rightarrow 0 < \phi < \pi/2 \quad (10.35)$$

en tanto que la ecuación (10.27.d) permite calcular la expresión de la corriente como

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \quad (10.36)$$

Observemos la ecuación (10.35): la fase es positiva, de manera tal que sin más podemos asegurar que en un circuito inductivo la corriente atrasa respecto de la tensión o, equivalentemente, que la tensión adelanta respecto de la corriente.

Todavía más, en un circuito ideal en el cual fuera $R = 0$, es decir, si considerásemos un circuito puramente inductivo, y llamáramos ϕ_L al ángulo de desfase entre tensión y corriente, la expresión (10.36) conduciría al valor

$$\operatorname{tg} \phi_L = \infty \quad (10.37)$$

Por debajo del valor de frecuencia de resonancia el carácter de un circuito RLC serie es capacitivo, es decir, $X_C > X_L$ independientemente de los valores de C y L. A la inversa, por encima de la frecuencia de resonancia predominan los efectos inductivos, es decir, cualesquiera sean los valores de C y L será $X_L > X_C$.

que corresponde a un desfase de $+\pi/2$ de la tensión aplicada respecto de la corriente. Para decirlo de otro modo, al atravesar una bobina la corriente se atrasa en $\pi/2$.

Teniendo en cuenta la identidad (10.35), para un circuito inductivo puro expresamos matemáticamente esta conclusión en la forma

$$i_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.38)$$

de manera tal que, en general, dado un circuito *RLC* serie, si ϕ representa la fase de la tensión aplicada (la fase que figura en la ecuación (10.27.d), por ejemplo) la corriente que circula por una bobina se escribe como

$$i_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \operatorname{sen}\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.39)$$

Equivalentemente, si se prefiere, la forma

$$\mathcal{E}_L(t) = i_0 \omega L \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.40)$$

representa la caída de tensión en una bobina en un circuito serie RLC .

10.3.3 – Circuito capacitivo: si tomamos $L = 0$ de la ecuación (10.2) en adelante transformamos el circuito RLC serie en un circuito RC . En este caso la relación entre la corriente y la tensión se reduce a la forma

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (10.41)$$

y el ángulo de fase resulta

$$\text{tg} \phi = -\frac{1}{\omega RC} < 0 \Rightarrow -\pi/2 < \phi < 0 \quad (10.42)$$

Obsérvese que en un circuito capacitivo puro resulta

$$\text{tg} \phi_c = -\infty \quad (10.43)$$

y en consecuencia $\phi = -\pi/2$, es decir, la corriente está desfasada en adelanto respecto de la tensión (o, equivalentemente, la tensión atrasa en $\pi/2$). Nuevamente, a partir de la identidad (10.35), para un circuito capacitivo puro expresamos matemáticamente esta conclusión como

$$i_c(t) = \varepsilon_0 \omega C \text{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (10.44)$$

de manera tal que, en general, dado un circuito RLC serie, si ϕ representa la fase de la tensión aplicada (téngase en cuenta que en este caso la fase es negativa) la corriente que circula por un capacitor se escribe como

$$i_c(t) = \varepsilon_0 \omega C \text{sen} \left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (10.45)$$

o, equivalentemente, la corriente que circula por un capacitor en un circuito serie RLC se escribe en la forma

$$\varepsilon_c(t) = \frac{i_0}{\omega C} \text{sen} \left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (10.46)$$

En la figura 10.3 mostramos las gráficas de tensión y corriente en un circuito puramente inductivo y en uno puramente capacitivo. La línea de trazo lleno, a su vez, puede

interpretarse como la corriente en un circuito puramente resistivo (por ejemplo en resonancia) para una resistencia $R = 1\Omega$.

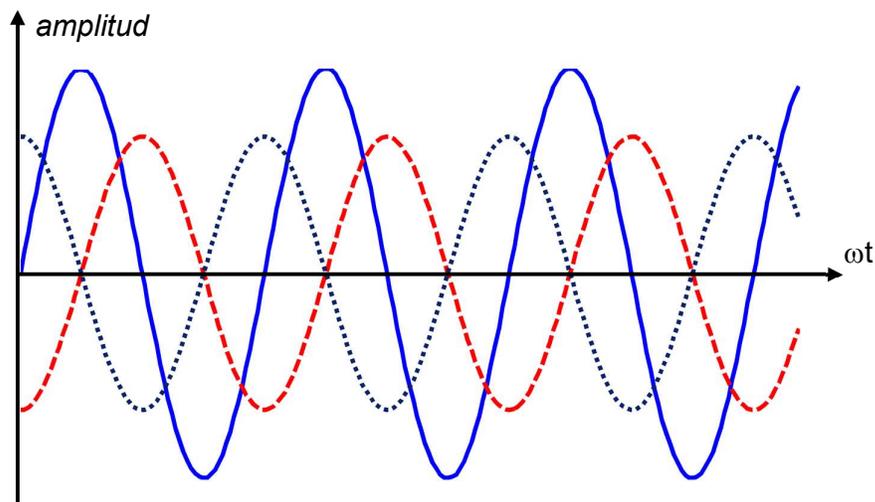


Fig. 10.3: para una tensión senoidal $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ (en línea de trazo lleno) se muestran la corriente en un circuito puramente capacitivo (línea de puntos) y en uno puramente inductivo (línea de trazos). En ambos casos se ha tomado $\varepsilon_0 = 1V$, con $|X_C| = X_L = 1,5\Omega$. En resonancia, para $R=1\Omega$, la corriente estaría en fase con la tensión y la línea de trazo lleno sería común a ambas funciones.

10.4 – Valores eficaces y diagramas

Como ya hemos mencionado, la impedancia Z define la relación entre las amplitudes de tensión y corriente. En la ecuación (10.24) queda definida la relación entre los valores de pico (o amplitudes máximas) aunque es casi evidente que puede ser cualquier otro tipo de magnitud a condición de que sean equivalentes. Cuando se trata de formas de onda senoidales (como las que estamos tratando) resulta cómodo y práctico definir la relación entre los valores eficaces de tensión y de corriente. En general, se define *valor eficaz* de una señal periódica $k(t)$ cualquiera, de periodo T , al valor

$$k_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [k(t)]^2 dt} \quad (10.47)$$

En el caso de funciones senoidales o cosenoidales es muy fácil calcular el valor eficaz. De manera casi inmediata resulta

$$k_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [k_0 \text{sen}(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{k_0^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T} \quad (10.48)$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia angular y el período están relacionados como $\omega = 2\pi/T$, resulta inmediatamente

$$k_{ef} = \sqrt{\frac{k_0^2}{T} \left(\frac{T}{2} \right)} = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \quad (10.49)$$

En función de los valores eficaces, podemos escribir entonces

$$\mathcal{E}_{ef}(t) = \mathcal{E}_{ef} \text{sen}(\omega t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{2}} \quad (10.50)$$

$$i_{ef}(t) = i_{ef} \text{sen}(\omega t - \phi) = \frac{i(t)}{\sqrt{2}} \quad (10.51)$$

$$Z = \frac{\mathcal{E}_0}{i_0} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{i_{ef}} \quad (10.52)$$

Habitualmente la relación entre las magnitudes involucradas en un circuito de corriente alterna se explicita en dos gráficos que se conocen como *diagrama de impedancia* y *diagrama fasorial de tensiones*, respectivamente, en el que cada una de las cantidades de interés se asocia a un vector. Es muy importante notar que las leyes circuitales (Ohm, Kirchhoff, etc.) siguen valiendo en circuitos de

El valor eficaz de una función periódica cualquiera representa el valor cuadrático medio de los valores instantáneos tomados durante todo un período. En el caso de la corriente senoidal, se traduce en el valor de corriente continua que, al circular por una resistencia dada, disipa igual potencia que la corriente alterna con la que se está trabajando.

corriente alterna, pero ahora hay que prestar especial atención a que se refieren a los valores instantáneos de corriente y tensión. Esto significa que ahora las leyes de Kirchhoff se escriben para los fasores, es decir, la suma ya no es algebraica como en el caso de corriente continua sino que es vectorial, lo que se traduce en el hecho de que la tensión aplicada no resulta ahora en la suma de las caídas en cada elemento. Por ejemplo, en la figura 10.4 mostramos las relaciones vectoriales entre las tensiones en los circuitos *RL* y *RC* que hemos discutido en la sección 10.3. Puede verse que en

ambos casos, si \mathcal{E} es el valor de pico de la tensión suministrada por la fuente, resultan

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_R^2 + \mathcal{E}_L^2} \quad (10.53)$$

en el caso del circuito RL , y

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_R^2 + \mathcal{E}_C^2} \quad (10.54)$$

en el caso del circuito RC .

En el diagrama de impedancias la resistencia se asocia a un vector en la dirección positiva del eje horizontal, en tanto que las reactivas se asocian a vectores en el eje vertical; la inductiva, por ser positiva, en el sentido positivo y la capacitiva en sentido inverso. La suma (vectorial) de los vectores resistencia y reactancia definen la impedancia (obsérvese que por su definición el valor de la impedancia coincide con el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo que queda definido por estos vectores). En la figura 10.5 mostramos los diagramas de impedancias para un circuito inductivo y para uno de carácter capacitivo. Obsérvese de paso que el ángulo que la impedancia forma con el semieje horizontal positivo es igual al ángulo de fase definido en la ecuación (10.15).

En circuitos de corriente continua el teorema de conservación de la energía lleva a que la suma algebraica de las caídas de potencial sea igual a la tensión que suministran las fuentes. En corriente alterna esa suma algebraica ya no es válida, la suma ahora es vectorial, y al haber sólo una resistencia y una reactancia, se reduce a un triángulo rectángulo.

En el diagrama de fases se representan la intensidad de corriente y la tensión a través de vectores que se conocen como *vectores de*

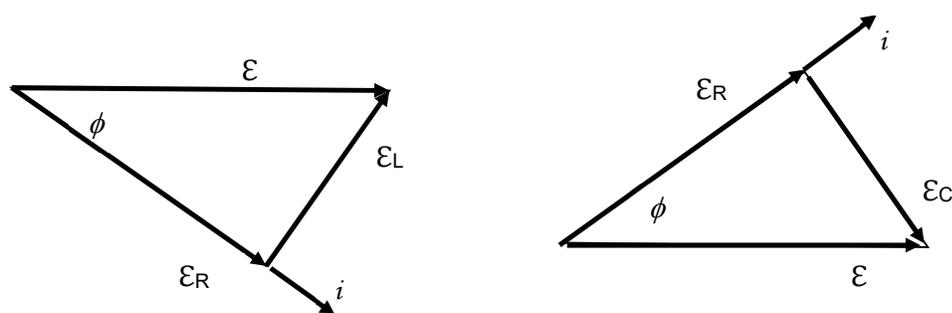


Fig. 10.4: a la izquierda se muestra la relación entre las tensiones en un circuito RL . Obsérvese que la tensión en la resistencia atrasa o, lo que es igual, la tensión en la bobina adelanta. En el panel derecho se muestran las tensiones en un circuito RC , y puede verse que la tensión en el capacitor se retrasa 90° respecto de la tensión en la resistencia. Nótese de paso que no vale la suma directa de tensiones porque se trata de fasores, la suma es vectorial, de modo tal que resultan $\mathcal{E} = [\mathcal{E}_R^2 + \mathcal{E}_L^2]^{1/2}$ en el primer caso y $\mathcal{E} = [\mathcal{E}_R^2 + \mathcal{E}_C^2]^{1/2}$ en el segundo caso.

fase o *fasores*. Los fasores son en realidad vectores rotatorios cuyos módulos representan su intensidad (de corriente o tensión) y sus proyecciones sobre el eje vertical indican su valor instantáneo (de corriente o tensión). En los gráficos 10.5(b) y 10.5(d) mostramos los fasores (en un instante arbitrario) para un circuito inductivo y para uno capacitivo, respectivamente. En ambos casos la impedancia es mayor que la unidad, de manera tal que la amplitud de la corriente es esquemáticamente menor que la amplitud de la tensión.

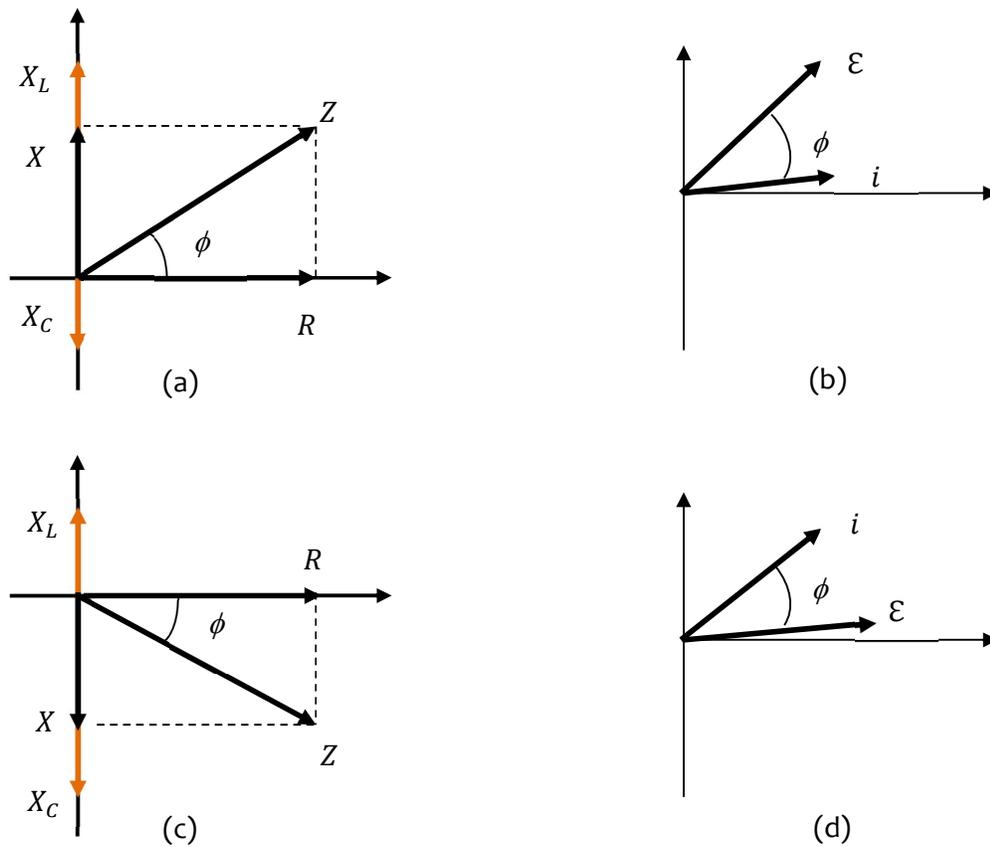


Fig. 10.5: la figura (a) muestra los vectores de fase de las reactancias inductiva y capacitiva (en líneas de color), de la reactancia, de la resistencia y de la impedancia, en el caso de un circuito inductivo. A la derecha, en (b), se muestran los fasores de tensión \mathcal{E} y corriente i , asociados a este circuito, como así también el ángulo de fase. Obsérvese que al ser un circuito de carácter inductivo la corriente está retrasada respecto de la tensión. La ubicación de los fasores es arbitraria, pero debe tenerse en cuenta que giran en sentido antihorario. Los gráficos (c) y (d) esquematizan la situación en el caso de un circuito de carácter capacitivo, en el que la corriente adelanta a la tensión y la fase es negativa.

Ejemplo 10.2: El generador de la figura 10.6 entrega una tensión de pico de $100V$ a una frecuencia de 60 Hz . Si $R = 4\Omega$, $L = 8\text{mH}$ y $C = 442\ \mu\text{F}$, calculemos los valores de las reactancias, la impedancia, valores eficaces de tensión y corriente, y realicemos los diagramas de impedancia y de tensiones.

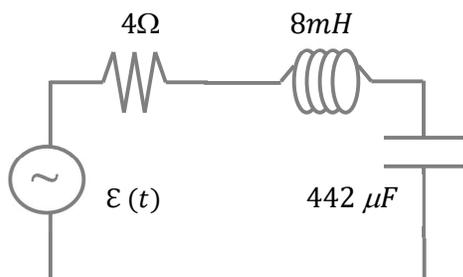


Fig. 10.6: circuito RLC serie del ejemplo 10.2

En primer lugar notemos que la frecuencia angular vale

$$\omega = 2\pi f = 376,8\ \text{seg}^{-1} \quad (10.55)$$

de manera tal que para los valores propuestos podemos calcular sin más las reactancias como

$$X_L = \omega L = 3\Omega \quad (10.56)$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -6\Omega \quad (10.57)$$

La impedancia del circuito, de acuerdo a la definición (10.25) resulta

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 5\Omega \quad (10.58)$$

y el ángulo de fase, a partir de la identidad (10.15), lo evaluamos como

$$\phi = \arctg \left[\frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \approx -37^\circ \quad (10.59)$$

Obsérvese que siendo un ángulo de desfase negativo corresponde a un circuito de carácter capacitivo. Para decirlo de otra manera, como la fase es negativa la tensión retrasa respecto de la corriente del circuito. O, si se prefiere, la corriente circuital adelanta. Por lo demás, la intensidad de pico de la corriente vale

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z} = 20\text{A} \quad (10.60)$$

en tanto que los valores eficaces resultan

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ V} \quad (10.61)$$

$$i_{ef} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 14,14 \text{ A} \quad (10.62)$$

Hay dos maneras alternativas de escribir los valores temporales de tensión y corriente, y depende de cuál sea la variable a la que le asignamos la fase. En términos de la decisión que hemos adoptado de asignar la fase a la corriente (como anotamos en la ecuación (10.27.d)) debemos escribir

$$\mathcal{E}(t) = 100 \text{ sen } (2\pi 60 t) \text{ V} \quad (10.63)$$

$$i(t) = 20 \text{ sen } (2\pi 60 t - (-37^\circ)) \text{ A} \quad (10.64)$$

o bien

$$\mathcal{E}_{ef}(t) = 70,7 \text{ sen } (2\pi 60 t) \text{ V} \quad (10.65)$$

$$i_{ef}(t) = 14,14 \text{ sen } (2\pi 60 t + 37^\circ) \text{ A} \quad (10.66)$$

Como hemos insistido en todo momento, es posible que se convenga en asignar la fase a la tensión. En tal caso, las ecuaciones (10.63) y (10.64) se traducen como

$$\mathcal{E}(t) = 100 \text{ sen } (2\pi 60 t - 37^\circ) \text{ V} \quad (10.67)$$

$$i(t) = 20 \text{ sen } (2\pi 60 t) \text{ A} \quad (10.68)$$

Hemos mencionado que a medida que la corriente avance por el circuito sufrirá diferentes desfases debido a la presencia de los diferentes elementos pasivos. De acuerdo a las expresiones (10.34), (10.39) y (10.45), teniendo en cuenta la expresión (10.63), la tensión en cada elemento resulta ser

$$\mathcal{E}_R(t) = i(t)R = 80 \text{ sen } (2\pi 60 t + 37^\circ) \text{ V} \quad (10.69)$$

$$\mathcal{E}_L(t) = 60 \text{ sen } \left(2\pi 60 t + 37^\circ + \frac{\pi}{2} \right) \text{ V} = 60 \text{ sen } (2\pi 60 t + 127^\circ) \text{ V} \quad (10.70)$$

$$\mathcal{E}_C(t) = 120 \text{ sen } \left(2\pi 60 t + 37^\circ - \frac{\pi}{2} \right) \text{ V} = 120 \text{ sen } (2\pi 60 t - 53^\circ) \text{ V} \quad (10.71)$$

Los diagramas de impedancia y de fasorial de tensiones que corresponden a esta particular configuración circuital se muestran en la figura 10.7. Obsérvese que las caídas de tensión (10.69)-(10.71) valen en cada instante y para todo instante. Es fácil verificar, por ejemplo en $t = 0$, que la suma de las tres caídas resulta en una tensión de $100V$, precisamente la tensión aplicada.

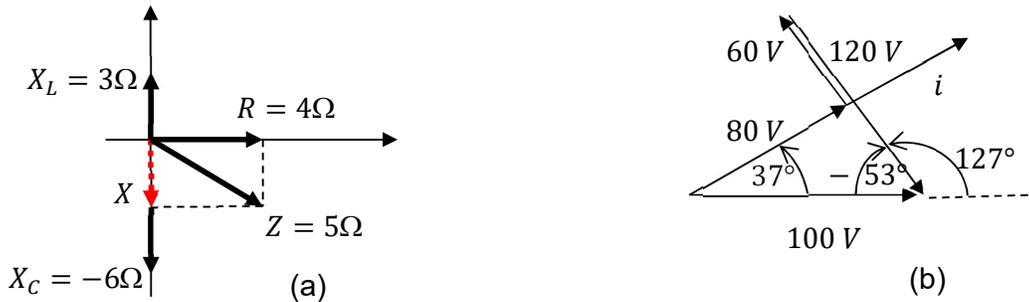
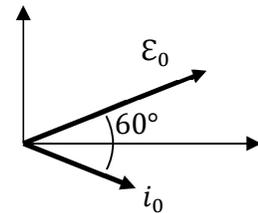


Fig. 10.7: (a) diagrama de impedancias; (b) diagrama de tensiones del ejemplo 10.2

Ejemplo 10.3: La figura 10.8 muestra el diagrama fasorial de un circuito RLC serie, en el que la fuente entrega $100V$ de tensión de pico a 50 Hz , $R = 20\Omega$ y $L = 250\text{ mH}$. Calculemos el valor de C y realicemos los diagramas de impedancia y de tensiones.



Ante todo notemos que dado que el diagrama de fases gira en sentido antihorario, la tensión adelanta a la corriente. A su vez, esto significa que el circuito posee carácter inductivo. Para calcular el valor de la capacidad podemos partir de la expresión (10.15) y escribir

Fig. 10.8: diagrama de fases del ejemplo 10.3

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 1,73 \quad (10.72)$$

Como el circuito está operando a 50 Hz resulta $\omega = 314\text{ seg}^{-1}$ y, en consecuencia, con los valores de resistencia e inductancia disponibles resulta inmediatamente

$$C = 72,5\ \mu\text{F} \quad (10.73)$$

Los valores de las impedancias son inmediatos a partir de las identidades (10.20) y (10.21), en tanto que los valores de caídas de tensión en cada elemento pueden calcularse a partir de las expresiones (10.27). Obsérvese que a la frecuencia de trabajo propuesta (por encima de la de resonancia, que fácilmente puede verificarse con la igualdad (10.33) es del orden

de 37Hz) el circuito es inductivo, de manera tal que lo que ya sabemos es que la corriente atrasa respecto de la tensión. Con los valores de reactancia obtenidos podemos finalmente armar el esquema de tensiones de la figura 10.9(b). En efecto, resultan

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 39,94\Omega \tag{10.74}$$

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = 2,5 A \tag{10.75}$$

$$\mathcal{E}_R(t) = i(t)R = 50 \text{ sen } (2\pi 50 t - 60^\circ) V \tag{10.76}$$

$$\mathcal{E}_L(t) = i \omega L \text{ sen } \left(2\pi 50 t - 60^\circ + \frac{\pi}{2}\right) V = 196,25 \text{ sen } (2\pi 50 t + 30^\circ) V \tag{10.77}$$

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{i}{\omega C} \text{ sen } \left(2\pi 50 t - 60^\circ - \frac{\pi}{2}\right) V = 110 \text{ sen } (2\pi 50 t - 150^\circ) V \tag{10.78}$$

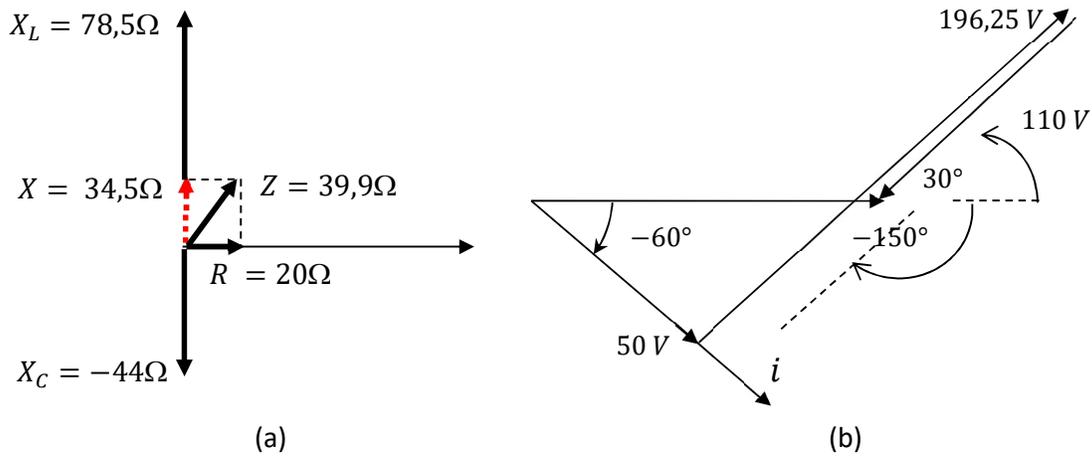


Fig. 10.9: (a) diagrama de impedancia y (b) diagrama de tensiones del ejemplo 10.3. Los valores de tensión en los elementos son aproximados.

Ejemplo 10.4: Supongamos un circuito RLC serie que opera con una impedancia $Z = 1000\Omega$ y que entra en resonancia a $1000Hz$. Hallemos la relación entre inductancia y frecuencia que permiten estas características si se trabaja con una resistencia $R = 600\Omega$.

Los valores de capacidad y de inductancia quedan relacionados por la frecuencia de resonancia (expresión (10.33)). En nuestro caso tenemos

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1000 \text{ Hz} \quad (10.79)$$

es decir

$$LC = 2,53 \times 10^{-8} \text{ seg}^2 \quad (10.80)$$

Por otro lado, deseamos que la impedancia del circuito sea de 1000Ω , de manera tal que debe cumplirse

$$X^2 = Z^2 - R^2 = 64.000\Omega^2 \quad (10.81)$$

La reactancia debe adoptar ese valor, pero eso puede darse en un circuito capacitivo o en un circuito inductivo, esto es, en un circuito que opere a una frecuencia por debajo o por encima de la frecuencia de resonancia, respectivamente (véase la figura 10.2). Para frecuencias por encima de la de resonancia debe cumplirse

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 800\Omega \quad (10.82)$$

en tanto que para frecuencias por debajo de la resonancia la relación debe ser

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = 800\Omega \quad (10.83)$$

La figura 10.10 muestra las curvas correspondientes a las expresiones (10.82) y (10.83) para el producto LC dado por la ecuación (10.80). Por ejemplo, si el circuito operara a 159 Hz ($\omega \sim 1000 \text{ seg}^{-1}$) y resonara a 1000 Hz , el par de valores a partir de las expresiones (10.72) y (10.75) sería

$$L(1000) \approx 20,78 \text{ mH} \quad C(1000) \approx 1,2 \mu\text{F} \quad (10.84)$$

en tanto que si operara a 1274 Hz ($\omega \sim 8000 \text{ seg}^{-1}$) manteniendo su frecuencia de resonancia en 1000 Hz , los valores se obtienen de las identidades (10.80) y (10.82)

$$L(8000) \approx 0,26 \text{ H} \quad C(8000) \approx 97 \text{ nF} \quad (10.85)$$

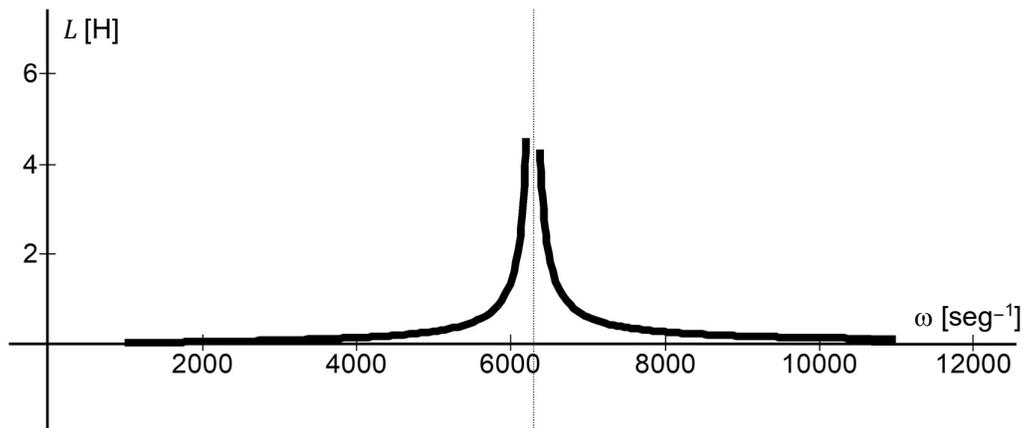


Fig.10.10: inductancia en función de la pulsación en el ejemplo 10.4. Con una línea de puntos se ha marcado la pulsación de resonancia (6280 seg^{-1}). Obsérvese que la función cambia según se trate de frecuencias menores o mayores a la de resonancia, porque el circuito cambia su carácter de capacitivo a inductivo, respectivamente.

10.5 – Potencia en un circuito serie

En la sección 7.7 analizamos la potencia que entrega una pila conectada a un arreglo de resistores. El resultado en particular interesante es que la energía que suministra la batería

$$dU = iVdt \quad (10.86)$$

se disipa completamente en las resistencias en forma de calor. En el caso de un circuito RLC serie el resultado no parece tan inmediato, por lo menos en lo que tiene que ver con la expresión (10.86), porque ahora hay tres elementos, y las funciones tensión y corriente dependen del tiempo.

En todo caso, lo que debemos hacer es tomar un promedio sobre todo un ciclo, integrando las funciones tensión y corriente en la forma

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_0 i_0 \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega t + \phi) dt \quad (10.87)$$

donde ϕ es la diferencia de fase (positiva o negativa, tanto da). La integración de la expresión (10.87) es inmediata si la escribimos en la forma

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_0 i_0 \operatorname{sen}(\omega t) [\operatorname{sen}(\omega t) \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos(\omega t)] dt = \\
 &= \frac{\mathcal{E}_0 i_0}{T} \cos\phi \int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t) dt + \frac{\mathcal{E}_0 i_0}{T} \operatorname{sen}\phi \int_0^T \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) dt
 \end{aligned} \quad (10.88)$$

que, para un período de duración $2\pi/\omega$, resulta en las soluciones

$$P = \omega \frac{\mathcal{E}_0 i_0}{2\pi} \cos\phi \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} + \omega \frac{\mathcal{E}_0 i_0}{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\omega t)}{2\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} \quad (10.89)$$

de las que de manera inmediata se obtiene

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos\phi \quad (10.90)$$

Esta es la *potencia media* (o *potencia activa*) que entrega la batería al circuito en cada ciclo. Obsérvese que depende de la fase a través del factor $\cos\phi$, que precisamente se denomina factor de potencia. Inmediatamente se observa que en un circuito puramente capacitivo o puramente inductivo ($\phi = \pm\pi/2$) el factor de potencia (y en consecuencia la potencia disipada) es nulo. La razón por la que estos elementos no disipan potencia neta puede verse en la figura 10.3: en cada ciclo de tensión, la corriente tiene el mismo signo en dos cuartos de ciclo, y signo opuesto a la tensión en los otros dos cuartos, de manera tal que

El factor de potencia representa la porción de energía realmente utilizada respecto de la energía total suministrada al circuito. Claramente, si el circuito está en resonancia el factor de potencia es máximo ($\cos\phi=1$) y es nulo en un circuito capacitivo puro o inductivo puro ($\phi=\pm\pi/2$)

en total la suma de los productos de tensión y corriente de pico se anula. En un circuito puramente resistivo (en resonancia) la tensión y la corriente tienen en todo instante el mismo signo y eso hace que la potencia disipada sea no nula (y, por supuesto, positiva).

En términos de los valores eficaces de tensión y corriente (ecuaciones (10.50) y (10.51)) podemos también definir

$$P = \mathcal{E}_{ef} i_{ef} \cos\phi \quad (10.91)$$

y como la potencia es disipada únicamente en la resistencia, en términos de nuestra discusión a propósito de las expresiones (10.50) y (10.51), en el sentido de que la potencia disipada en una resistencia se asocia al valor eficaz de la corriente (porque representa el

valor de corriente continua que, al circular por esa resistencia, disipa igual potencia que la corriente alterna) parece evidente que vale la relación

$$P = i_{ef}^2 R \quad (10.92)$$

En los siguientes ejemplos ponemos de manifiesto estas propiedades.

Ejemplo 10.5: Pensemos en un circuito RLC serie en el que la potencia activa que entrega el generador es de 49 W . El circuito trabaja a 50 Hz y el factor de potencia vale $0,96$. L es variable, $C = 90\ \mu\text{F}$, y $R = 98\ \Omega$. Supongamos que se modifica el factor de potencia de modo tal que la nueva potencia activa es de 51 W . Calculemos la tensión eficaz en la resistencia antes de modificar el factor de potencia y los valores de L que hacen posible la segunda situación (asumiendo que los demás parámetros circuitales y las características del generador no se modifican).

De acuerdo a la expresión(10.92) debe ser

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{P}{R}} = 0,707\text{ A} \quad (10.93)$$

de modo tal que de inmediato resulta

$$\mathcal{E}_{ef,R} = 0,707\text{ A} \times 98\ \Omega \approx 69,3\text{ V} \quad (10.94)$$

Cuando se modifica el factor de potencia del circuito (sin cambiar la tensión de la fuente) cambia el valor de la potencia y, en consecuencia, de la corriente que circula por el circuito

$$i'_{ef} = \sqrt{\frac{P'}{R}} = 0,72\text{ A} \quad (10.95)$$

El valor de la impedancia también cambia. Obsérvese que, antes de cambiar el valor de la inductancia, a partir de la identidad (10.91) resulta

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{49}{0,707 \times 0,96}\text{ V} = 72,2\text{ V} \quad (10.96)$$

y que por hipótesis este valor no cambia, de manera tal que ahora debe ser

$$Z' = \frac{72,2\text{ V}}{0,72\text{ A}} \approx 100\ \Omega \quad (10.97)$$

Ahora, para los valores de capacidad y resistencia dados, es sencillo hallar el valor de la reactancia como

$$(100 \Omega)^2 = (98 \Omega)^2 + \left(314 \text{ seg}^{-1}L - \frac{10^6}{314 \times 90} \Omega \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{\pm 19,9 + 35,38}{314} H \quad (10.98)$$

donde el doble signo se debe al hecho de que la reactancia puede ser inductiva (signo positivo) o capacitiva (signo negativo), según la corriente retrase o adelante respecto de la tensión, respectivamente. Obsérvese que nada se dice al respecto, se enuncia que el desfase es del orden

$$\phi = \text{arc cos} \left[\frac{51}{72,2 \times 0,72} \right] \sim 11^\circ$$

pero no ese estipula si en adelante o en atraso, de manera tal que debemos prestar atención a las dos posibilidades. Así, de manera casi inmediata resultan los valores

$$L_{IND} = \frac{55,28}{314} H \approx 176mH \quad L_{CAP} = \frac{15,48}{314} H \approx 49,3mH \quad (10.99)$$

Ejemplo 10.6: Imaginemos un circuito *RLC* serie, con $R = 1000 \Omega$, $C = 10\mu F$, $L = 58,8mH$, alimentado por una fuente que opera a $50Hz$ y que entrega una tensión de pico de $50V$. Podríamos preguntarnos las características generales del circuito, en particular por el valor de la potencia que se le entrega y cuánto de esa potencia no aprovecha (valores que se conocen como *potencia aparente* y *potencia reactiva*, respectivamente).

Ante todo, notemos que las reactancias capacitiva e inductiva valen

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 318,47\Omega \quad (10.100)$$

$$X_L = 2\pi f L = 18,47\Omega \quad (10.101)$$

de manera tal que la reactancia del circuito resulta ser

$$X = X_L - X_C = -300\Omega \quad (10.102)$$

y la impedancia vale

$$Z = \sqrt{(1000)^2 + (-300)^2} = 1044\Omega \quad (10.103)$$

En el caso que estamos analizando el ángulo de fase vale

$$\phi = \arctg \left[\frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \approx -16,7^\circ \quad (10.104)$$

y como se trata de un ángulo negativo resulta que la corriente adelanta a la tensión, algo que era de esperar porque, el circuito opera a 50 Hz y resuena a una frecuencia

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = 205,6 \text{ Hz} \quad (10.105)$$

que está por encima de la de trabajo. Luego, de acuerdo al gráfico 10.2, el circuito tiene carácter capacitivo. Teniendo en cuenta que el valor de pico de la corriente resulta

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = 47,8 \text{ mA} \quad (10.106)$$

las funciones de tensión y de corriente pueden entonces escribirse como

$$\mathcal{E}(t) = 50 \text{ sen}(314 t) V \quad (10.107. a)$$

$$i(t) = 0,0478 \text{ sen}(314 t + 16,7^\circ) A \quad (10.107. b)$$

o alternativamente

$$\mathcal{E}(t) = 50 \text{ sen}(314 t - 16,7^\circ) V \quad (10.107. c)$$

$$i(t) = 0,0478 \text{ sen}(314 t) A \quad (10.107. d)$$

Si optamos por las formas (10.107.a) y (10.98.b) (porque decidimos trabajar asignando la diferencia de fase a la corriente) las caídas de tensión en cada elemento se evalúan como

$$\mathcal{E}_R(t) = i(t) R = 47,8 \text{ sen}(314 t + 16,7^\circ) V \quad (10.108)$$

$$\mathcal{E}_L(t) = i_0 X_L \text{ sen}(314 t + 16,7^\circ + 90^\circ) V = 0,883 \text{ sen}(314 t + 106,7^\circ) V \quad (10.109)$$

$$\mathcal{E}_C(t) = i_0 X_C \text{ sen}(314 t + 16,7^\circ - 90^\circ) V = 15,22 \text{ sen}(314 t - 73,3^\circ) V \quad (10.110)$$

medidas todas respecto de la caída de potencial en la resistencia. De hecho, los diagramas de impedancia y de tensiones son los de la figura 10.11

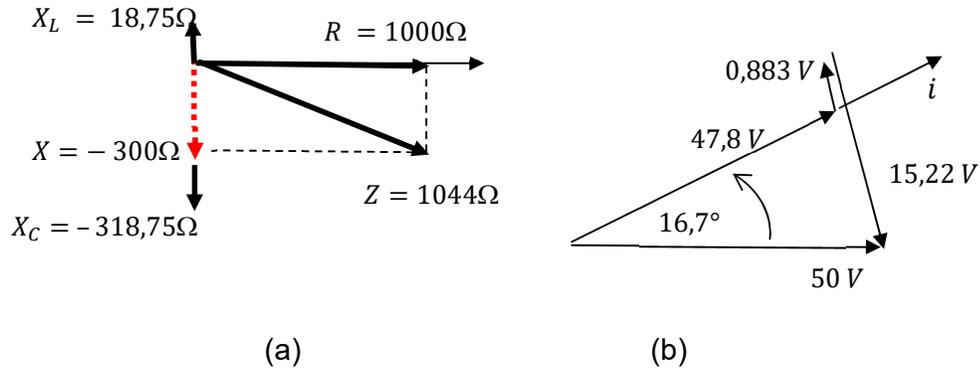


Fig. 10.11: (a) diagrama de impedancia (no se respetan las escalas, es sólo ilustrativo) y (b) diagrama de tensiones del ejemplo 10.6.

Ahora bien, la potencia activa vale

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 i_0 \cos \phi = 1,14W \tag{10.111}$$

que es la parte útil de la potencia real (o potencia aparente) suministrada al circuito. Parece evidente que la máxima transferencia de potencia se dará en resonancia, esto es, cuando la corriente entre en fase con la tensión. Para cualquier otro factor de potencia, la potencia que se utiliza en la carga reactiva para generar los campos magnético y eléctrico que almacenan (potencia reactiva) es no nula y no puede emplearse para realizar trabajo alguno. De hecho, se definen las potencias aparente S y reactiva Q como

$$P = S \cos \phi \tag{10.112}$$

$$Q = S \sin \phi \tag{10.113}$$

cuyas unidades son VA (volt-ampere) y VAR (volt-ampere reactivo) respectivamente, de manera tal de establecer que la máxima transferencia de potencia de la fuente a la carga se da en resonancia ($\cos \phi = 1$). Claramente, de su propia definición puede verse que es

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{10.114}$$

En el ejemplo que estamos analizando, puede verse que sólo se emplean $1,14W$ de los $1,195W$ que entrega la fuente.

10.6 – Circuito RLC paralelo

Sea el circuito de la figura 10.12, en el que las resistencias R_L y R_C representan las resistencias internas de la bobina y del capacitor, respectivamente. En el análisis de un circuito serie no las hemos anotado porque implícitamente las absorbimos en la resistencia R propia del circuito, pero por ahora resulta conveniente expresarlas de manera explícita.

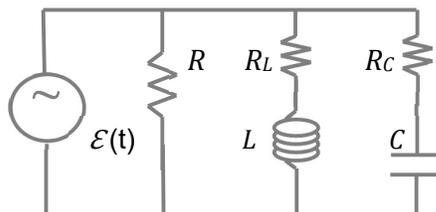


Fig. 10.12: circuito RLC paralelo. Las resistencias R_L y R_C representan las resistencias internas propias de la bobina y del capacitor, respectivamente.

Parece evidente que la tensión en cada rama es la que suministra el generador, de manera tal que si llamamos i_R , i_L e i_C a las corrientes en las ramas de la resistencia, la bobina y el capacitor, respectivamente, resulta

$$i_R(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \text{sen}(\omega t) \quad (10.114. a)$$

$$i_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}} \text{sen}(\omega t - \phi_L) \quad (10.114. b)$$

$$i_C(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi_C) \quad (10.114. c)$$

donde hemos llamado ϕ_L y ϕ_C a los desfases en las ramas de la bobina y del capacitor, respectivamente. Obsérvese que no añadimos fase alguna a la rama de la resistencia porque en esa rama la corriente y la tensión están en fase, y que hemos tomado ambas fases, ϕ_L y ϕ_C , como positivas, porque la corriente retrasa respecto de la tensión en la rama de la bobina y adelanta en la del capacitor. De hecho, sabemos que valen

$$\phi_L = \text{arctg} \left(\frac{\omega L}{R_L} \right) \quad (10.115. a)$$

$$\phi_C = \text{arctg} \left(\frac{-1}{R_C \omega C} \right) \quad (10.115. b)$$

Por lo demás, en virtud de la hipótesis de conservación de la carga, la corriente total que circula por el circuito es la suma de las tres corrientes de rama, esto es

$$i_{CIRC}(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \quad (10.116)$$

Para continuar adelante y poder resolver explícitamente la suma temporal de la última ecuación, resulta conveniente expresar la impedancia de cada rama de forma ligeramente diferente. De acuerdo a la manera en que la hemos graficado en los diagramas correspondientes, la impedancia consiste de una parte resistiva y una parte reactiva, como recordamos en la figura 10.13. Hasta aquí hemos usado siempre el módulo de la impedancia, aunque bien podríamos apelar a una forma “polar”, esto es, en lugar de expresar la impedancia en la manera habitual

$$Z = (R, X) \quad (10.117)$$

hacerlo en la forma[†]

$$Z = (|Z|, \phi) \quad (10.118)$$

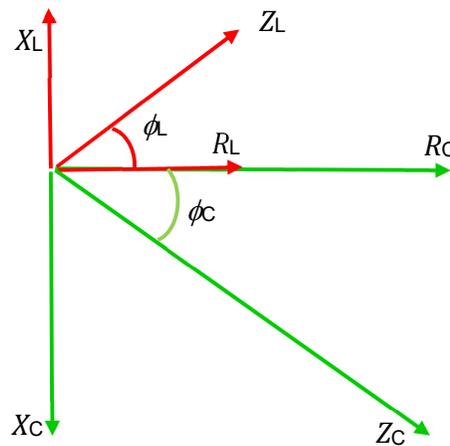


Fig.10.13: impedancias de la rama inductiva (en rojo) y capacitiva (en verde). Cuando se trata de impedancias en serie no hay dificultades en hallar la impedancia equivalente porque ésta se reduce a la suma de las componentes. En paralelo, esa operación ya no es válida porque se trata de la suma de inversas de vectores.

[†] Esta forma de escribir la impedancia es equivalente a hacerlo en notación compleja. Aquellos lectores que estén familiarizados con esta notación posiblemente la encuentren más sencilla, aunque no necesariamente más natural.

Definamos ahora la *admitancia*, Y , como la inversa de la impedancia, en forma polar

$$Y = \frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{|Z|}, -\phi \right) \quad (10.119)$$

y en forma de par

$$Y = (G, B) = \left(\frac{1}{|Z|} \cos \phi, -\frac{1}{|Z|} \operatorname{sen} \phi \right) \quad (10.120)$$

donde las funciones G y B se denominan *conductancia* y *susceptancia*, respectivamente. Obsérvese que tanto la admitancia como la conductancia y la susceptancia se miden en unidades inversas de resistencia, esto es, Ω^{-1} , unidad que suele denominarse *mho* y se anota como \mathfrak{U} .

Una vez definida la impedancia en forma vectorial, la admitancia queda definida como su inversa. Sin embargo, ni la conductancia es la inversa de la resistencia, ni la susceptancia la inversa de la reactancia.

Por lo pronto, la ventaja de trabajar con admitancias en lugar de hacerlo con impedancias, es que las admitancias en paralelo se suman (de la misma manera en que lo hacen las impedancias en serie). Luego, en nuestro circuito de tres ramas, será

$$Y_{eq} = Y_R + Y_L + Y_C = [(G_R + G_L + G_C); (B_L + B_C)] \quad (10.121)$$

donde los subíndices L y C se refieren a las ramas inductiva y capacitiva, respectivamente, y no hemos escrito la susceptancia de la rama resistiva porque es nula. Teniendo en cuenta los valores de los ángulos respectivos, tal y como se ven en la figura 10.13, los valores de los elementos del vector admitancia son

$$Y_R = \left(\frac{1}{R}; 0 \right) \quad (10.122. a)$$

$$Y_L = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}; \frac{-\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right) \quad (10.122. b)$$

$$Y_C = \left(\frac{R_C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \frac{1/\omega C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right) \quad (10.122. c)$$

De esta manera, la corriente circuital (la suma temporal de la ecuación (10.116)) será

$$i_{CIRC} = \mathcal{E} |Y_{eq}| \left(\text{sen } \omega t + \phi_{eq} \right) \quad (10.123)$$

donde hemos definido

$$\phi_{eq} = \text{arctg} \left(\frac{B_{eq}}{G_{eq}} \right) \quad (10.124)$$

En el siguiente ejemplo ponemos de manifiesto la manera de usar estos conceptos.

Ejemplo 10.7: sea el circuito de la figura 10.14, que opera con una fuente que entrega 75V eficaces a 212Hz. Calculemos la corriente que circula por cada rama, la corriente circuital, y realicemos un diagrama de corrientes (del mismo modo que realizábamos un diagrama de tensiones en el caso de un circuito serie).

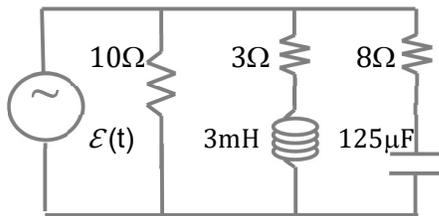


Fig. 10.14: circuito RLC paralelo del ejemplo 10.7.

Ante todo, calculemos las admitancias de cada rama

$$Y_R = \left(\frac{1}{10}; 0 \right) \text{ U} \quad (10.125. a)$$

$$Y_L = \left(\frac{3}{25}; \frac{-4}{25} \right) \text{ U} \quad (10.125. b)$$

$$Y_C = \left(\frac{8}{100}; \frac{6}{100} \right) \text{ U} \quad (10.125. c)$$

De esta forma, la admitancia equivalente es

$$Y_{eq} = (0,3; -0,1) \text{ U} \quad (10.126)$$

Es fácil verificar que los vectores impedancia de cada rama valen

$$Z_R = 10\Omega; \phi_R = 0 \equiv Z_R = (10\Omega; 0^\circ) \quad (10.127. a)$$

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} = 5\Omega; \phi_L = \text{arctg} \frac{\omega L}{R_L} = 53^\circ \equiv Z_L = (5\Omega; 53^\circ) \quad (10.127. b)$$

$$Z_C = \sqrt{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} = 10\Omega; \phi_L = \text{arctg} \frac{-1}{\omega C R_C} = -37^\circ \equiv Z_C = (10\Omega; -37^\circ) \quad (10.127. c)$$

y en consecuencia, las corrientes de cada rama, sea utilizando las igualdades (10.125) o las identidades (10.127), resultan

$$i_R = \frac{\mathcal{E}}{R} \text{sen}(\omega t) = 10,6 \text{ sen}(\omega t) A \quad (10.128. a)$$

$$i_L = \frac{\mathcal{E}}{|Z_L|} \text{sen}(\omega t - \phi_L) = 21,2 \text{ sen}(\omega t - 53^\circ) A \quad (10.128. b)$$

$$i_C = \frac{\mathcal{E}}{|Z_C|} \text{sen}(\omega t - \phi_C) = 10,6 \text{ sen}(\omega t + 37^\circ) A \quad (10.128. c)$$

Por su parte, a partir de la expresión (10.126) resulta

$$i_{CIRC} = 106V \times 0,316U \text{ sen}(1331t + (-18,4^\circ)) = 33,5 \text{ sen}(1331t - 18,4^\circ) A \quad (10.127)$$

La figura 10.15 ilustra el diagrama de corrientes del circuito. Obsérvese que hemos usado la corriente de la rama resistiva como referencia porque es la que está en fase con la tensión de la fuente.

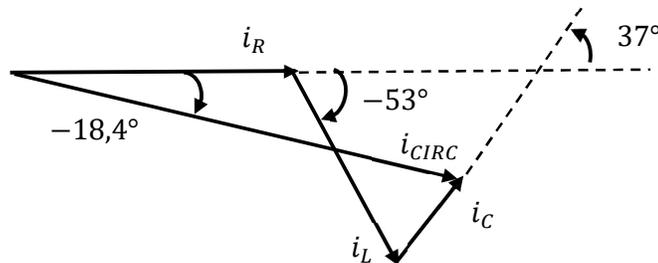


Fig.10.15: diagrama de corrientes del ejemplo 10.7. La corriente de la rama resistiva es la de referencia porque está en fase con la tensión aplicada.

10.7 – Resonancia y potencia en un circuito RLC paralelo

Regresemos por un momento a nuestro circuito paralelo elemental de la figura 10.12, y supongamos que los elementos inductivo y capacitivo son ideales, esto es, consideremos que las resistencias R_L y R_C son nulas. En tal caso las expresiones (10.121) y (10.122) nos dicen que la admitancia del circuito será de la forma

$$Y_{eq} = \left(\frac{1}{R}; \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \tag{10.128}$$

La susceptancia es la que introduce el desfase entre tensión y corriente, de manera tal que es casi evidente que estarán en fase para susceptancia nula, esto es, a la pulsación

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10.129}$$

El resultado podría parecer sorprendente porque es el mismo que para un circuito *RLC* serie. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que lo que se anula es la susceptancia y no la reactancia, de manera tal que la gráfica 10.2 ya no es válida. En realidad las funciones son las mismas, pero ahora hay que intercambiar coherentemente reactancias por susceptancias, como mostramos en la figura 10.16.

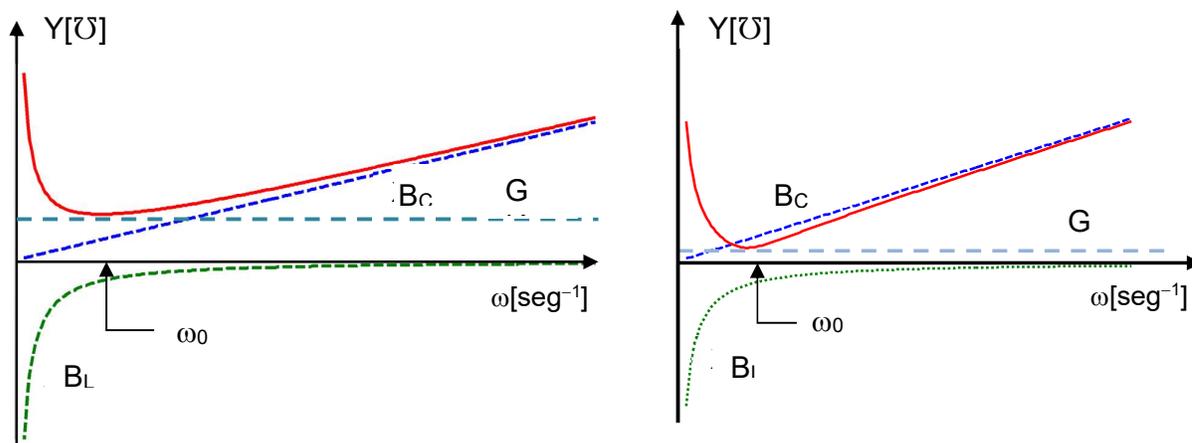


Fig. 10.16: impedancia (línea llena) en función de la pulsación ω para dos relaciones diferentes de admitancia. El gráfico es el mismo que el de la figura 10.2, sólo que ahora se intercambian los roles de inductor y capacitor. A la izquierda, $C/L = 50\Omega^2$ y a la derecha $C/L = 250\Omega^2$. En ambos casos el valor de la conductancia G es el mismo. En el mínimo ($\omega = \omega_0$) la transferencia de potencia es máxima porque el circuito está en resonancia.

Por lo demás, en un circuito *RLC* serie era irrelevante si el capacitor y la bobina eran ideales, porque en todo caso cargábamos su resistencia interna al valor de la resistencia R . Ahora, si no son ideales, debemos tener en cuenta las resistencias R_L y R_C . Pero en tal caso la admitancia equivalente se modifica de manera notable. En efecto, resulta

$$Y_{eq} = \left(G_{eq}; \frac{-\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{1/\omega C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right) \tag{10.130}$$

y anular la susceptancia implica la relación

$$\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (10.131)$$

Luego de unos pocos pasos algebraicos, se llega a la expresión de la pulsación de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \quad (10.132)$$

que evidentemente se reduce a la identidad (10.129) en el caso de elementos ideales. Obsérvese que en el caso que estamos tratando la resonancia ya no depende solamente

Dados dos circuitos RLC de elementos ideales, uno serie y el otro paralelo, ambos entran en resonancia a la misma frecuencia. Pero si los elementos son reales, no sólo las frecuencias de resonancia podrían ser diferentes sino que de hecho podría no existir frecuencia alguna a la que el circuito paralelo pueda resonar.

de los valores de inductancia y capacidad, y que la modificación de la frecuencia de resonancia del circuito puede hacerse variando uno (o más) de cuatro parámetros (y no sólo dos como en el caso serie o de elementos ideales). Más aún, los signos negativos dentro del radicando de la expresión (10.132) nos anticipan que es posible que un circuito como este podría no entrar en resonancia a ninguna frecuencia.

Debe notarse, además, que si las resistencias de cada rama son iguales el circuito posee una condición de resonancia idéntica a la del circuito ideal, de manera tal que la relación no es biunívoca, esto es, elementos ideales implican la condición (10.129) pero que un circuito *RLC* paralelo entre en resonancia a esa frecuencia no implica que los elementos son ideales.

Ahora bien, si el circuito paralelo entra en resonancia transfiere máxima potencia porque la corriente entra en fase con la tensión. Si no fuera este el caso, la pregunta es cuánta potencia de la que se le suministra puede aprovechar. Esto es lo mismo que preguntarse cuánto vale la potencia activa (y en consecuencia cuánto valen la potencia aparente y la potencia reactiva), que en definitiva es la potencia disipada en las resistencias. De manera tal que la primera idea que surge es que dos circuitos *RLC*, uno serie y el otro paralelo, conformado por elementos ideales, consumen la misma potencia si las corrientes circuales son las mismas.

De no ser este el caso, el cálculo del valor de la potencia no debería ofrecer dificultades, porque a través de las expresiones (10.122) –(10.124) podemos calcular la impedancia equivalente, la corriente circuital, el ángulo de fase y, luego, la potencia activa que consume el circuito. Veámoslo con un par de ejemplos.

Ejemplo 10.8: regresemos al circuito de la figura 10.14, que opera con una tensión de pico $\mathcal{E}_0 = 106V$ (la tensión eficaz es de $75V$) a $212 Hz$ (o sea, a una pulsación $\omega = 1331,4 \text{ seg}^{-1}$). Calculemos el valor que debe adoptar la resistencia R_L para que el circuito entre en resonancia a $100 Hz$ y a $500 Hz$, y la potencia activa que emplea a la frecuencia de trabajo.

Es fácil ver que a la frecuencia de trabajo, el circuito no puede resonar. En efecto, para los valores de los elementos del circuito, la frecuencia de resonancia

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \quad (10.133)$$

es imaginaria. Ahora bien, podemos variar la resistencia asociada al inductor, de forma tal que para los valores

$$R_L = \sqrt{\left(R_C^2 - \frac{L}{C}\right) LC(2\pi f_0)^2 + \frac{L}{C}} = \begin{cases} 5,47 \Omega & \text{a } 100 \text{ Hz} \\ 13,1 \Omega & \text{a } 500 \text{ Hz} \end{cases} \quad (10.134)$$

el sistema entrará en resonancia a las frecuencias propuestas. Pero el comportamiento del circuito será bien distinto en un caso y en el otro, porque a $100 Hz$ está por debajo de la frecuencia de trabajo y a $500 Hz$ está por encima de esa frecuencia. Luego, mostrará carácter inductivo en el primer caso y carácter capacitivo a $500 Hz$.

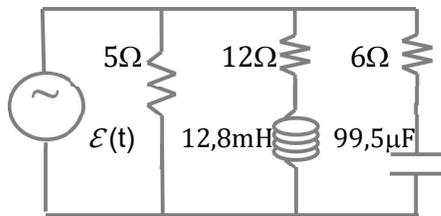
Por lo demás, a la frecuencia de trabajo sabemos que la corriente vale $33,5A$ y que atrasa $18,4^\circ$. Luego,

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos(-18,45^\circ) \approx 1.684W \quad (10.135)$$

Ejemplo 10.9: sea el circuito de la figura 10.17, en el que la resistencia de 5Ω disipa una potencia de $0,45W$ cuando el circuito opera a $200Hz$. Calculemos los valores de las corrientes de rama, sus impedancias, sus admitancias, la potencia disipada por todo el circuito y construyamos el diagrama de corrientes y el triángulo de potencia (un esquema en el que figuran las tres potencias, activa, aparente y reactiva)

Ante todo, notemos que la pulsación a la que trabaja el circuito es $\omega = 1256 \text{ seg}^{-1}$, de manera tal que las reactancias valen

$$X_L = \omega L = 16\Omega \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = -8\Omega \quad (10.136)$$



Por lo demás, corriente que circula por la resistencia de 5Ω es

$$i_{ef,R} = \sqrt{\frac{P_R}{R}} = 0,3A \quad (10.137)$$

Fig. 10.17: circuito RLC paralelo del ejemplo 10.9.

de manera tal que la fuente entrega una tensión eficaz

$$\mathcal{E}_{ef} = i_{ef,R} R = 1,5V \quad (10.138)$$

Las impedancias (vectoriales) de cada rama, por su lado, valen

$$Z_R = (5; 0)\Omega \equiv |Z_R| = 5\Omega \quad \phi_R = 0^\circ \equiv (5\Omega; 0^\circ) \quad (10.139)$$

$$Z_L = (12; 16)\Omega \equiv |Z_L| = 20\Omega \quad \phi_L = 53^\circ \equiv (20\Omega; 53^\circ) \quad (10.140)$$

$$Z_C = (6; -8)\Omega \equiv |Z_C| = 10\Omega \quad \phi_C = -53^\circ \equiv (10\Omega; -53^\circ) \quad (10.141)$$

y de acuerdo a las expresiones (10.122), las admitancias resultan

$$Y_R = \left(\frac{1}{|Z_R|} \cos \phi_R; \frac{-1}{|Z_R|} \operatorname{sen} \phi_R \right) \mathcal{U} \equiv (G_R; B_R) = (0,2; 0)\mathcal{U} \equiv (0,2\mathcal{U}; 0^\circ) \quad (10.142)$$

$$Y_L = \left(\frac{1}{|Z_L|} \cos \phi_L; \frac{-1}{|Z_L|} \operatorname{sen} \phi_L \right) \mathcal{U} \equiv (G_L; B_L) = (0,03; -0,04)\mathcal{U} \equiv (0,05\mathcal{U}; -53^\circ) \quad (10.143)$$

$$Y_C = \left(\frac{1}{|Z_C|} \cos \phi_C; \frac{-1}{|Z_C|} \operatorname{sen} \phi_C \right) \mathcal{U} \equiv (G_C; B_C) = (0,06; 0,08)\mathcal{U} \equiv (0,1\mathcal{U}; 53^\circ) \quad (10.144)$$

Obsérvense las ecuaciones (10.142)–(10.144) y compárense con las expresiones (10.139)–(10.141) a la luz de la igualdad (10.119). Los vectores admitancia van como la inversa del módulo de la impedancia y el ángulo es el opuesto. Utilizando un grupo de igualdades o el otro, suponiendo fase nula en el generador de tensión, y para $\omega = 1256 \operatorname{seg}^{-1}$, las corrientes en cada rama resultan

$$i_{ef,R}(t) = 0,3 \operatorname{sen}(\omega t) A \quad (10.145)$$

$$i_{ef,L} = \mathcal{E}_{ef} Y_L \operatorname{sen}(\omega t - 53^\circ) = 0,075 \operatorname{sen}(\omega t - 53^\circ) A \quad (10.146)$$

$$i_{ef,C} = \mathcal{E}_{ef} Y_C \operatorname{sen}(\omega t + 53^\circ) = 0,15 \operatorname{sen}(\omega t + 53^\circ) A \quad (10.147)$$

A su vez, la admitancia equivalente del circuito vale

$$Y_{eq} = [(0,2 + 0,03 + 0,06); (-0,04 + 0,08)] \text{U} = (0,29; 0,04) \text{U} \equiv (0,293 \text{U}; 7,85^\circ) \quad (10.148)$$

y, en consecuencia, la corriente circuital

$$i_{ef,CIRC} = \mathcal{E}_{ef} Y_{eq} = 0,44 \operatorname{sen}(\omega t + 7,85^\circ) A \quad (10.149)$$

Por otro lado, la potencia activa se evalúa como

$$P = \mathcal{E}_{ef} i_{ef,CIRC} \cos \phi = 0,653 W \quad (10.150)$$

Debe notarse que esta es la potencia que se disipa en las resistencias del circuito. Desde ya que hubiéramos arribado al mismo resultado sumando todas esas contribuciones, esto es, dado que las corrientes que figuran en las expresiones (10.145)–(10.147) son todas eficaces, haciendo

$$P = i_R^2 R + i_L^2 R_L + i_C^2 R_C \quad (10.151)$$

Por otro lado, las ecuaciones (10.112) a (10.114) definen las potencias aparente y reactiva. En nuestro caso, resultan

$$S = \frac{P}{\cos \phi} = 0,659 VA \quad (10.152)$$

$$Q = P \operatorname{tg} \phi = 0,09 VAR \quad (10.153)$$

Es fácil corroborar que resulta $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Claramente, la validez de esta igualdad debe extenderse a cada rama, de donde concluimos que el triángulo de potencias del circuito debe ser la suma de los triángulos de potencias de cada rama, como mostramos en la figura 10.18

Posiblemente sea ilustrativo mencionar que los triángulos de potencia de cada rama fueron hallados con los valores de corrientes eficaces en cada rama y sus respectivas resistencias. De hecho, resultan

$$P_L = i_{ef,L}^2 R_L = 0,0675 W \quad (10.154. a)$$

$$S_L = \frac{P_L}{\cos \phi_L} = 0,1125 \text{ VA (en retraso)} \quad (10.154. b)$$

$$Q_L = P_L \operatorname{tg} \phi_L = 0,089 \text{ VAR} \quad (10.154. c)$$

$$P_C = i_{ef,c}^2 R_C = 0,135 \text{ W} \quad (10.155. a)$$

$$S_C = \frac{P_C}{\cos \phi_C} = 0,225 \text{ VA (en adelanto)} \quad (10.155. b)$$

$$Q_C = P_C \operatorname{tg} \phi_C = 0,179 \text{ VAR} \quad (10.155. c)$$

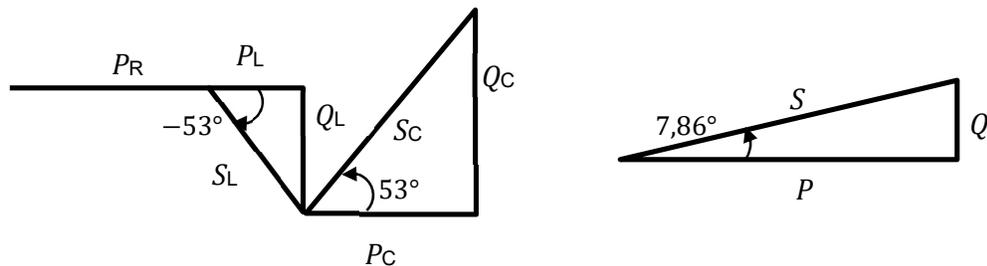


Fig.10.18: triángulos de potencia de cada rama y del circuito completo (a la derecha, fuera de escala para exagerar el ángulo de fase). Obsérvese que la rama inductiva tiene un factor de potencia en retraso, en tanto que en la rama capacitiva el factor de potencia está en adelanto.

Resumen del capítulo

En este capítulo hemos analizado con algún detalle las propiedades de las asociaciones serie y paralelo de resistencia, capacitor y bobina conectados a un generador de tensión alterna. Las diferencias con el régimen de tensión continua son evidentes, y para convencerse basta con comparar los resultados obtenidos con los de la sección 9.4 del capítulo anterior.

En principio, la corriente alterna ofrece considerables ventajas a la hora de transportarla, ya que se disminuyen notablemente las pérdidas resistivas que ocurrirían a la hora de conducir corrientes elevadas. Posee además un elevado número de características que torna ventajosa su utilización frente a la corriente continua. Pero no debería implicarse que se trata sólo de ventajas. De hecho, los aparatos electrónicos con los que estamos familiarizados (computadoras, televisores, radios) funcionan todos con

corriente continua. De manera tal que siempre habrá que convertir la corriente alterna de línea en corriente continua de valor adecuado.

Esto lleva a pensar en el concepto mismo de lo que significa una corriente alterna, en la que necesariamente las cargas oscilan de un modo dado (particularmente periódico) pero no necesariamente se desplazan. De hecho, sería impensable esperar el establecimiento de régimen estacionario con las cargas que oscilan en una fuente muy alejada. Lo que se desplaza es el campo electromagnético generado por las cargas oscilantes (en nuestro caso electrones), un concepto que estudiaremos recién en el próximo capítulo. Pero podemos adelantar que una restricción natural al empleo de los conceptos introducidos es el valor de la frecuencia de trabajo (esto es, el valor de las oscilaciones de las cargas eléctricas) porque para valores muy elevados de frecuencia (del orden de los MHz) impone restricciones que se originan en la potencia que el circuito puede radiar. En nuestros ejemplos estuvimos siempre muy lejos de esas cotas.

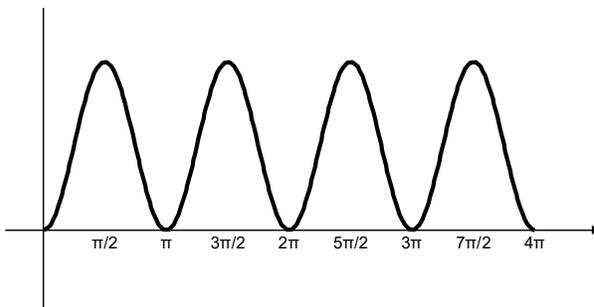
Una propiedad inmediata de un circuito de corriente alterna es su posibilidad de entrar en resonancia, y de hecho no existe contraparte en un circuito similar de corriente continua. Hemos visto incluso que en términos generales un circuito serie y uno paralelo pueden entrar en resonancia a la misma frecuencia (de hecho lo hacen si se trata de elementos ideales), pero a diferencia de un circuito serie (para el que siempre existe una frecuencia de resonancia) el circuito paralelo podría diseñarse para que no exista frecuencia alguna a la que pueda resonar.

Hemos visto además que la máxima transferencia de potencia ocurre en resonancia, y esto es así porque a esa frecuencia de alguna manera, por decirlo de algún modo, se cancelan los efectos de la bobina y el capacitor. Fuera de resonancia, debe emplearse parte de la energía para generar los campos eléctrico y magnético de esos elementos, y esa energía no puede ser empleada en la carga.

Ni falta hace decirlo, las aplicaciones y consecuencias de estos temas elementales no se agotan en estas pocas páginas, pero su desarrollo y tratamiento excede largamente los propósitos que nos hemos impuesto.

Ejercicios propuestos

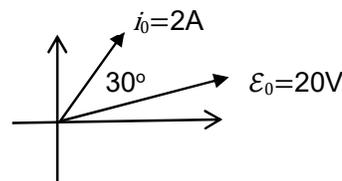
Ejercicio 1: Halle los valores eficaces de las funciones periódicas de la figura, a saber, $f(x) = \sin^2(x)$ (a la izquierda), y $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) \{1 + \text{sg}[\sin(x)]\}$. Observe que la primera función tiene período π , en tanto que el de la segunda vale 2π , y que el valor máximo de ambas funciones es 1.



Ejercicio 2: Un circuito RC serie, con $R=50\Omega$ y $C=2\mu\text{F}$, tiene aplicada una tensión $\mathcal{E}(t)=47 \sin(\omega t)\text{V}$ y opera a 1000 Hz. Halle la expresión de la corriente, y calcule la frecuencia a la que debería operar la fuente para que la corriente adelante 37° . Realice los diagramas de tensión del circuito.

Ejercicio 3: Suponga que al circuito RC del ejercicio anterior ($R=50\Omega$ y $C=2\mu\text{F}$) se le agrega en serie una bobina. El circuito opera con la misma fuente y a la misma frecuencia. Calcule cuál debe ser el valor de la inductancia para que la corriente a) adelante 37° ; b) atrase 37° .

Ejercicio 4: La figura muestra el diagrama de fases de un circuito RL serie que opera a 100 Hz. Escriba las expresiones de tensión y corriente sabiendo que el circuito opera a 500 Hz, calcule los valores de los elementos pasivos del circuito y realice el triángulo de potencias.

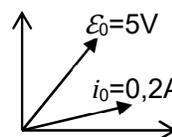


Ejercicio 5: Un circuito RLC serie opera a 200Hz y resuena a 100Hz. La resistencia es de $1\text{k}\Omega$, la fuente entrega una tensión de 220V eficaces, y la potencia activa es de 10W.

- escriba las expresiones de tensión y corriente;
- halle los valores de L y C.

Ejercicio 6: El diagrama de fasores corresponde a un circuito RLC serie, que resuena a 30,24 Hz y que disipa una potencia activa de 0,3W trabajando a 50Hz. Sabiendo que $L=35\text{mH}$

- realice el diagrama de impedancias del circuito;
- realice el diagrama de tensiones que corresponde a la frecuencia de 40Hz.



Ejercicio 7: El generador del circuito RLC serie tiene una tensión eficaz $\mathcal{E}_{ef} = 220\text{V}$ y opera a 50 Hz. La bobina es ideal, su inductancia es $L = 0,4\text{H}$, la resistencia es $R = 72\Omega$ y el capacitor es variable. Se ajusta la capacitancia del capacitor a un valor C y, en esas condiciones, se mide un voltaje eficaz en la bobina, que resulta ser $V_L = 314\text{V}$. Calcule:

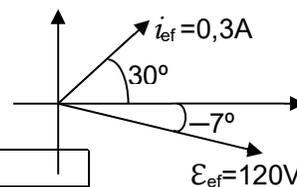
- la capacitancia C del capacitor sabiendo que el circuito tiene un comportamiento capacitivo.

b) la tensión eficaz que se mediría en el inductor si el circuito se pusiera en resonancia cambiando el valor de la capacitancia del capacitor. Suponga que los demás parámetros circuitales y las características del generador permanecen inalteradas.

Ejercicio 8: La potencia activa que entrega un generador a un circuito RLC serie es de 49 W. El circuito trabaja a 50 Hz y el factor de potencia vale 0,96. L es variable, $C = 90 \mu\text{F}$, y $R = 98\Omega$. Se modifica el factor de potencia de modo tal que la nueva potencia activa es de 51W. Calcule:

- a) la tensión eficaz en la resistencia antes de modificar el factor de potencia;
- b) los valores de L que hacen posible la segunda situación (Suponga que los demás parámetros circuitales y las características del generador no se modifican).

Ejercicio 9: El diagrama fasorial de la figura corresponde a un circuito de sólo dos elementos pasivos que opera a 50Hz. Entonces es cierto que (los valores son aproximados y dos opciones son correctas)



Los elementos son $R=320 \Omega$, $L=764\text{mH}$, y $P=28,8\text{W}$
Los elementos son $R=320 \Omega$, $C=13,2 \mu\text{F}$, y $P=28,8\text{W}$
Los elementos son $R=400 \Omega$, $C=240\mu\text{F}$, y $P=14,4\text{W}$
Los elementos son $R=320 \Omega$, $C=13,2\mu\text{F}$, y $P=14,4\text{W}$
El circuito no puede resonar a 50Hz y $\mathcal{E}_c = 102 \text{sen}(314\text{seg}^{-1}t + 37^\circ)\text{V}$
$\mathcal{E}_R = 96 \text{sen}(314\text{seg}^{-1}t + 37^\circ)\text{V}$ y el circuito podría resonar a 50Hz
Los elementos son $R=320 \Omega$, $L=240 \text{mH}$, y $P=14,4\text{W}$
$\mathcal{E}_R(t) = 96 \text{sen}(314\text{seg}^{-1}t - 37^\circ)\text{V}$ y el circuito podría resonar a 50Hz

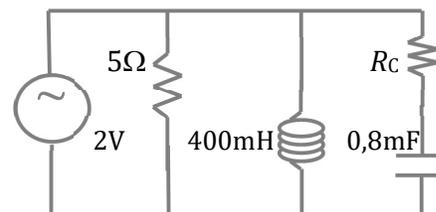
Ejercicio 10: Un circuito RLC serie opera a 500 Hz, con $R=80\Omega$, $L=25,5 \text{mH}$, $C=16\mu\text{F}$. Un amperímetro conectado al circuito indica que la corriente que circula es de 2A.

- a) realice el diagrama de impedancia de este circuito;
- b) realice el diagrama de tensiones que corresponde a este circuito;
- c) construya el triángulo de potencias del circuito;
- d) escriba la expresión de la corriente $i(t)$ que circularía por el circuito si
 - d1) la capacidad del capacitor se redujera a la quinta parte
 - d2) se duplicara la frecuencia de trabajo

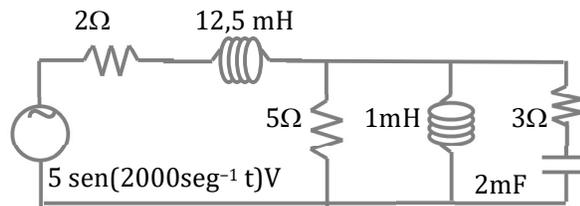
En ambos casos realice el diagrama de tensiones que correspondería a cada situación.

Ejercicio 11: El circuito RLC paralelo de la figura opera a 500Hz y resuena a 1kHz.

- a) calcule el valor de R_c ;
- b) calcule el vector admitancia de cada rama;
- c) escriba las expresiones de las corrientes de rama y de la corriente del circuito;
- d) realice el diagrama de corrientes.

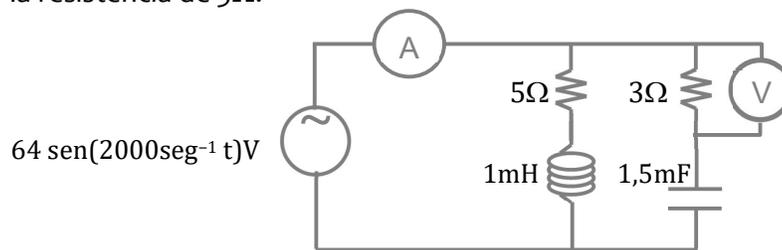


Ejercicio 12: Halle los vectores impedancia y admitancia equivalente del circuito de la figura

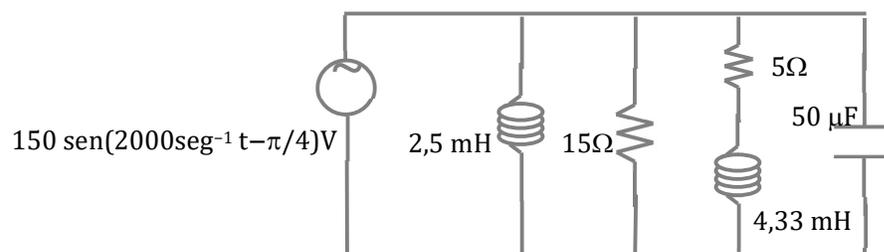


Ejercicio 13: Suponga que en el circuito del ejercicio 12 se cortocircuita la bobina de 12,5mH. Halle la condición necesaria sobre el valor que debería tener la inductancia en paralelo para que el circuito resonara a la frecuencia de trabajo, y calcule ese valor.

Ejercicio 14: Dado el circuito de la figura, halle los valores que indican el amperímetro y el voltímetro conectado a la resistencia de 3Ω.



Ejercicio 15: Dado el circuito de la figura, halle el valor de la impedancia equivalente y la corriente total que circula.

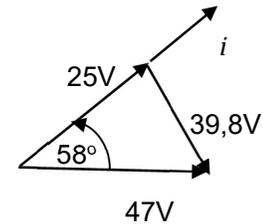


Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: 0,45 y 0,159, respectivamente.

Ejercicio 2: $i(t) = 0,5 \text{ sen}(\omega t + 58^\circ)A$;

$$\phi = \arctg(-1/2\pi fCR) = -0,75 \Rightarrow f \approx 2,12 \text{ kHz}$$



Ejercicio 3: $\text{tg } \phi = \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \mp 0,75 \Rightarrow L = \frac{1}{\omega}(\mp 0,75 R + \omega C) \Rightarrow$

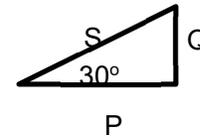
a) $L=6,7 \text{ mH}$; b) $18,2 \text{ mH}$

Ejercicio 4: a) $\mathcal{E}(t) = 20 \text{ sen}(3.140 \text{ seg}^{-1} t)V$

$i(t) = 2 \text{ sen}(3.140 \text{ seg}^{-1} t + \pi/6)A$

b) $Z=10\Omega \Rightarrow R=Z \cos\phi = 8,66\Omega \quad C = Z \text{ sen}\phi/\omega = 1,6\text{mF}$

c) $P=17,32W \quad S=20VA \quad Q= 10VAR$ (en adelante)



Ejercicio 5: a) $\mathcal{E}_{ef}(t) = 220 \text{ sen}(1.256 \text{ seg}^{-1} t)V$

$$i_{ef} = \sqrt{P/R} = 0,1A$$

$$\cos\phi = P/(\mathcal{E}_{ef}i_{ef}) \approx 63^\circ$$

$$i_{ef}(t) = 0,1 \text{ sen}(1.256 \text{ seg}^{-1} t - 63^\circ)A$$

Obsérvese que la corriente está en retraso porque el circuito es inductivo (opera a una frecuencia mayor que la de resonancia)

$$b) L = 1/(2\pi 100)^2 C \quad \text{y} \quad 2\pi 200 L - \frac{1}{2\pi 200 C} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{i_{ef}} \text{ sen } 63^\circ \Rightarrow L = 3,12 \text{ H} \quad C = 0,8\mu F$$

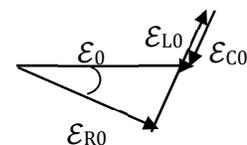
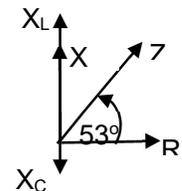
Ejercicio 6: a) $\cos\phi = 2P/\mathcal{E}_0 i_0 = 0,6$ (en retraso porque el circuito es inductivo, \mathcal{E} adelanta a i)

$$Z = 25\Omega \Rightarrow R = Z \cos\phi = 15\Omega \quad X = Z \text{ sen}\phi = 20\Omega \quad C = 1/(2\pi 30,24)^2 L \sim 792\mu F.$$

$$X_L = 2\pi 50 L = 22\Omega \quad X_C = -1/2\pi 50 C = -2\Omega$$

$$b) \text{ a } 40\text{Hz} \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = 15,47\Omega$$

$$i_0 = \mathcal{E}_0/Z = 0,323A \Rightarrow \mathcal{E}_{R0} = 4,85V \quad \mathcal{E}_{L0} = 2,84V \quad \mathcal{E}_{C0} = 1,6V$$



Ejercicio 7: a) $C=42,4 \mu F$; b) $\mathcal{E}'_{ef,L} \approx 384V$.

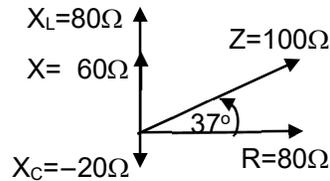
Ejercicio 8: a) $\mathcal{E}_{ef,R} \approx 69,3V$;

b) $L_{IND} = \frac{55,28}{314} H \approx 176mH$ (corriente en atraso); $L_{CAP} = \frac{15,48}{314} H \approx 49,3mH$

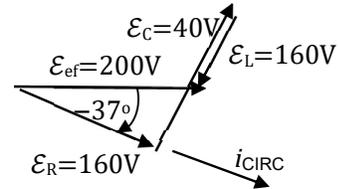
Ejercicio 9: Los elementos son $R=320 \Omega$, $C=6,6 \mu F$, y $P=28,8W$

$\mathcal{E}_R(t)= 96 \text{ sen } (314\text{seg}^{-1}t - 37^\circ) V$ y el circuito podría resonar a 50Hz

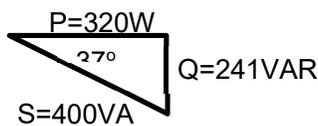
Ejercicio 10: a)



b)



c)



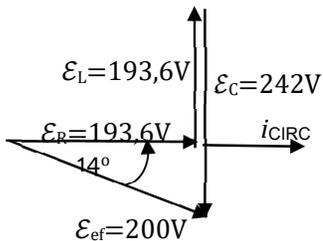
d1) $X'_C=-100\Omega$ $X'=-20\Omega$ $Z'=82,5\Omega \Rightarrow i'_{ef}= 2,42A$

$\phi'=-14^\circ$ $i'_{ef}(t)= 2,42 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t +14^\circ) A$

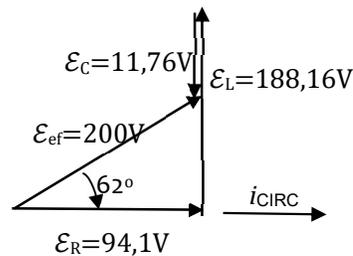
($i_{ef}(t)= 2 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t -37^\circ) A$)

d2) $X''_L=160\Omega$ $X''_C=-10\Omega$ $X''=150\Omega$ $Z''=170\Omega \Rightarrow i''_{ef}= 1,176A$

$\phi''=62^\circ$ $i''_{ef}(t)= 1,176 \text{ sen } (6280 \text{ seg}^{-1}t - 62^\circ) A$



d1)



d2)

Ejercicio 11: a) $R_C \sim 22\Omega$;

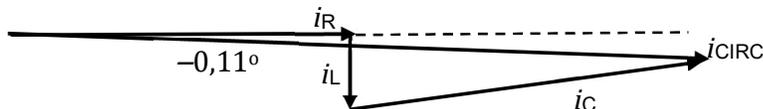
b) $Y_R=(0,2 \bar{U}; 0^\circ) \equiv (0,2; 0)\bar{U}$; $Y_L=(0,00126\bar{U}; -\pi/2) \equiv (0; -0,00126)\bar{U}$;

$Y_C=(0,045 \bar{U}; 1^\circ) \equiv (0,045; 0,00078)\bar{U}$

c) $i_R= 0,4 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t) A$; $i_L= 0,0025 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t - 90^\circ) A$

$i_C= 0,09 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t +1^\circ) A$; $i_{CIRC}= 0,49 \text{ sen } (3140 \text{ seg}^{-1}t - 0,11^\circ) A$

d)



(fuera de escala)

Ejercicio 12: $Y_{eq}=(0,135\bar{U}; -62^\circ)\equiv(0,063; -0,119)\bar{U}$; $Z_{eq}=(7,42\Omega; 62^\circ)\equiv(3,47; 6,56)\Omega$

Ejercicio 13: $R_L=0$ impone la condición $L/C > R_C^2 \equiv L > 0,018H$. Para $\omega_0=2000\text{seg}^{-1}$ resulta $L=0$ (imposible) o $L=0,01812 H$ (valor adecuado).

Ejercicio 14: La corriente circuital es de 24A y el voltímetro indica una caída de tensión de 45V.

Ejercicio 15: $Y_{eq}=(0,22\bar{U}; -58^\circ)\equiv(0,116; -0,186)\bar{U}$; $Z_{eq}=(4,55\Omega; 58^\circ)\equiv(2,41; 3,86)\Omega$
 $i_{CIRC}= 33 \text{ sen}(2000 \text{ seg}^{-1} t - 13^\circ) \text{ A}$



Ondas electromagnéticas

11.1 – Introducción

A partir de nuestra experiencia cotidiana estamos habituados al concepto intuitivo de onda. Coloquialmente, de hecho, relacionamos las ondas con cualquier movimiento ondulatorio, oscilante o recurrente (en el sentido de que posee cierta periodicidad), o que al menos sospechamos que lo sea. Así, hablamos de ondas sonoras, ondas marinas, ondulaciones del terreno, el movimiento ondeante de los cultivos o de ondas de radio.

Desde ya que algunas de estas frases se aproximan más y mejor al concepto de onda que otras. En general suele asociarse una onda a todo movimiento que de alguna manera recrea la forma de las ondas que se producen en la superficie de las aguas de un estanque cuando dejamos caer una piedra. Por ejemplo, hablamos del movimiento ondeante de una bandera porque la forma que adopta la tela recuerda la forma de las ondas superficiales de las aguas del estanque.

No está mal (de hecho, cuando una tela queda sometida a la acción del viento hay ondas que se propagan en su superficie) pero desde el punto de vista físico, y en términos apenas un poco más estrictos, el concepto es algo diferente. Una onda es en realidad una perturbación espacial que se transporta a través de algún medio, esto es, se trata de la propagación de un conjunto de propiedades de un dado sistema que han sido modificadas, *perturbadas*, a partir de un conjunto de interacciones o fenómenos determinados (el impacto de la piedra en la superficie del agua, el viento en la tela, la pulsación de un teclado o una cuerda en el caso de ondas sonoras).

Y aun cuando no estemos familiarizados con la definición exacta, nos parece evidente que el medio mismo donde se produce la onda no sufre desplazamientos generales, sino más bien locales. Por ejemplo, que las mieses ondulen no significa que se trasladan, esto es, oscilan en el lugar sin desplazamiento del campo en el que están sembradas. Las ondas que se producen en la superficie del agua de un estanque provocan movimientos de locales de “sube y baja” pero no observamos que la superficie del agua misma se desplace de manera permanente.

Pero de nuestras observaciones no parece inmediato inferir que no haya desplazamiento de masa. Sin embargo, si lo que se propagan son las propiedades modificadas de una región del medio (aire, agua, tela), debe tratarse al cabo del transporte de un dado conjunto de condiciones dinámicas, esto es, cantidad de movimiento y energía. De hecho, si asociamos la luz a un movimiento ondulatorio (y a lo largo del capítulo demostraremos por qué lo es) parece evidente que hay cierto tipo de ondas que pueden propagarse en el vacío, esto es, en ausencia de un medio material. Pero si lo único que puede desplazarse es energía, parece razonable asociar una onda a un fenómeno perturbativo a través del cual la energía se traslada de un punto a otro.

A través de este capítulo estudiaremos las propiedades principales de las ondas. Para ello habremos de estudiar el transporte de un pulso para luego generar un tren periódico de pulsos y estudiar la propagación de ondas periódicas. Y para el final del capítulo dejaremos el estudio las ondas electromagnéticas, de hecho las únicas ondas que pueden propagarse en vacío.

11.2 – El concepto de onda

Imaginemos por un momento una persona arrojando una piedra a un estanque de aguas quietas. Entre muchos otros, existen dos fenómenos en los que pretendemos centrar la atención: al cabo de algún tiempo se escucha el sonido de la piedra golpeando el agua y una ondulación (circular) se ha desplazado sobre la superficie libre del líquido.

Los dos procesos que aquí describimos tienen en común el hecho de que existe una propiedad física que ha sido perturbada y al cabo de un cierto tiempo esa perturbación se percibe en otra región del espacio. La propiedad física en un caso es la presión del aire sobre la superficie del estanque (relacionada con la onda sonora) y en el otro la tensión superficial del agua (asociada a la “ola” que se ve después del impacto de la piedra), y es notable no sólo que se trata de eventos diferentes sino que además la velocidad con que se ha propagado cada perturbación ni siquiera es la misma.

En términos generales, una perturbación es una modificación temporal de las condiciones de un sistema físico en una dada región del espacio. Por ejemplo, el aire sobre el estanque es un sistema que sufre un apartamiento de su estado de equilibrio en el momento en que la piedra impacta el agua; la transmisión o propagación de las condiciones modificadas, a la que comúnmente llamamos *onda*, tiene que ver con la naturaleza del fenómeno físico y con las propiedades del medio circundante.

Para aclarar este punto basta pensar en una habitación con una lámpara y un timbre, en la que se ha practicado el vacío. Con una misma corriente eléctrica podemos encender la lámpara y hacer funcionar el timbre: en el primer caso la perturbación tiene que ver con la excitación de los electrones en los átomos del filamento de la lámpara, en tanto que la perturbación en el timbre se asocia al golpeteo de

un martillo sobre una campana. En ambos casos existe una perturbación, pero sólo la primera (la onda lumínica) se propaga por la habitación y llega a otros puntos. La onda sonora no se propaga en el vacío, aunque sí lo hace a través del metal de la campana (pero sin deformarla).

Obsérvese de paso que no imponemos condición alguna sobre la naturaleza de la perturbación: puede ser un pulso como en el caso de la piedra golpeando el agua, o puede originarse en un proceso estacionario y periódico como el que representa la corriente (alterna) que circula por la lámpara y el timbre.

Hasta aquí, entonces, tenemos que una onda puede definirse como una perturbación que a través de un medio se propaga de un punto a otro. Las características de la propiedad física modificada, a su vez, definen la naturaleza de la onda que se transmite. Y parece evidente que, al menos en el caso de las ondas luminosas y las ondas en un medio rígido, no es materia lo que se transmite sino energía.

Una perturbación es una modificación temporal de las propiedades de un sistema físico. Cuando esas propiedades modificadas se trasladan de una región del sistema a otra, decimos que se propaga una onda. Pero debe tenerse presente que lo que se propagan son las propiedades modificadas, no hay transporte de materia.

Sabemos que bajo condiciones completamente generales puede transportarse materia o energía. Cuando cae la piedra de nuestro primer ejemplo está claro que lo que se transporta a través del aire es materia, pero no parece evidente que sea materia lo que se propaga cuando la perturbación que provoca el golpe de la piedra sobre el agua viaja por la superficie libre del estanque. Es cierto que el agua no desaparece del punto de impacto sino que luego de un tiempo (que tiene que ver las propiedades elásticas del medio en el que viaja la onda, en este caso el agua del estanque) regresa a su situación de equilibrio original, la que existía antes del impacto de la piedra, pero esto podría asociarse a alguna propiedad de un medio fluido como es el agua. Si la piedra cae sobre un vidrio, no hay “corrientes de vidrio” que rellenen el agujero que provoca el impacto, precisamente porque el vidrio (sólido) es rígido y no fluido.

Si el caso fuera que se desplaza la materia tendría que haber corrientes convectivas que llevaran líquido de un lugar a otro, y no es eso lo que se observa. Para convencerse, basta dejar flotando un pedazo de corcho sobre el agua: si hubiera transporte de materia el corcho tendría que ser arrastrado lateralmente, y sabemos que lo único que hace es desplazarse verticalmente en el lugar. Dado que todos los medios elásticos muestran esta misma propiedad, concluimos en que independientemente del medio en que se propaguen, las ondas resultan en un transporte de energía y no de materia.

Una analogía, aunque un tanto burda, es la de un conjunto lineal de péndulos como los de la figura 11.1. El dispositivo es bastante conocido, y consiste en un arreglo en línea de más de dos péndulos iguales, esto es, hilos de igual longitud y bolas rígidas de idéntica

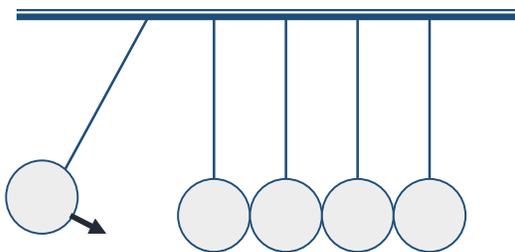


Fig. 11.1: el conjunto de péndulos transporta energía (a través de las colisiones) pero no hay transporte de materia.

masa (y en este caso, por no ser masas puntuales, esferas de igual radio). Se desplaza una esfera en alguno de los extremos y se la libera para que colisione con la esfera contigua.

Por ser esferas rígidas la colisión es elástica, y de la mecánica elemental de colisiones sabemos que del choque de una masa con velocidad v contra otro cuerpo de igual masa pero en reposo, en condiciones ideales resulta un sistema en el que el

primer cuerpo queda en reposo y el que estaba quieto adquiere (y se lleva) toda la energía cinética. Sin embargo, antes de poder desplazarse este cuerpo colisiona con el contiguo, transfiriendo así toda su energía cinética a la esfera de al lado.

Al cabo de un tiempo la esfera del extremo opuesto al del desplazamiento original se aparta de su posición de equilibrio (en condiciones ideales alcanza igual altura que la primera esfera) y reinicia el ciclo, pero las esferas intermedias no sufren desplazamiento alguno. Aceptando que las colisiones entre las esferas son idealmente elásticas, lo que hay al cabo de cada ciclo es un transporte neto de energía (mecánica) entre las esferas intermedias, pero en ningún momento se verifica transporte de materia.

Las esferas pueden pensarse como el medio a través del cual se transmiten la energía y la cantidad de movimiento involucradas en el proceso, y sólo en ese sentido

presentamos esta analogía; si no existe un medio adecuado la perturbación no se propaga (basta imaginar, en tren de analogías, lo que ocurriría con la esfera del extremo derecho del dibujo de la figura 11.1 si las bolas intermedias fueran de algún material blando y elástico, como por ejemplo arcilla). Ya hemos mencionado que la transmisión de una onda tiene que ver no sólo con la naturaleza del proceso físico que la origina sino también con las propiedades del medio que rodea a la región del espacio donde la onda se produce. De nuestro ejemplo del timbre y la luz en una habitación al vacío se desprende que, a diferencia del sonido, los fenómenos lumínicos no requieren de un medio elástico (como el aire o el agua) para propagarse, y es bien sabido que la opacidad del medio no afecta a una onda sonora aunque sí a una onda luminosa. Las ondas que, como las sonoras, requieren de un medio material para transmitirse, se denominan *ondas mecánicas*, en tanto que las que pueden transmitirse incluso en vacío se llaman *ondas electromagnéticas*.

Si bien una onda mecánica se transmite sin transporte neto de materia, no significa que no existan *desplazamientos locales* (oscilaciones) de los átomos y moléculas a lo largo del medio de propagación. De hecho, la interacción entre la perturbación y el medio define el *modo* en que se transmite la onda.

Bajo ciertas circunstancias, la oscilación del medio se produce en la misma dirección en que se propaga la energía, como en la figura 11.2.a. Este tipo de onda (típicamente el sonido) se denomina *longitudinal*, y su ejemplo emblemático posiblemente sea el de un resorte horizontal que ha sido comprimido en una región y luego liberado. Las ondas longitudinales son sólo de origen mecánico, y se transmiten por la sucesión de regiones donde la densidad y la presión alcanzan valores máximos (zona de compresión) y mínimos (*zona de enrarecimiento* o rarefacción).

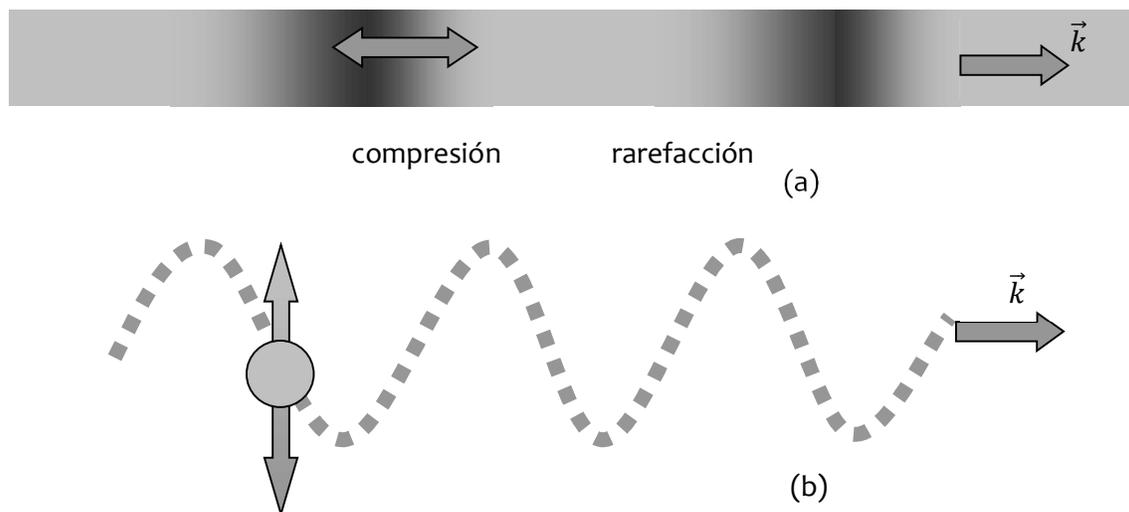


Fig. 11.2: (a) en una onda longitudinal las oscilaciones del medio se producen en el sentido de propagación de la energía, marcado con el vector \vec{k} (que suele denominarse vector propagación). Obsérvese que existe una sucesión de regiones de compresión (presión y densidad máximas) y rarefacción (presión y densidad mínimas) que van desplazándose. En (b) se ilustra una onda transversal, mostrando la oscilación típica de un elemento del medio por el que se transmite la onda. Obsérvese que el elemento en cuestión se desplaza localmente, pero en total no hay transporte de materia.

Cuando las oscilaciones en el medio son perpendiculares a la dirección de propagación, como en la figura 11.2.b, la onda se denomina *transversal*. Como demostraremos más adelante en este capítulo, las ondas electromagnéticas son siempre transversales, en tanto que las mecánicas pueden serlo, como en el caso de una cuerda de guitarra que ha sido pulsada o la ola que se desplaza sobre la superficie del estanque en el ejemplo que abrió esta sección.

11.3 – Propagación de ondas

Debemos hallar ahora la representación matemática del fenómeno de transporte de energía. Hemos dicho que una onda es una perturbación que se propaga, y en condiciones ideales debe hacerlo sin pérdida de energía, de manera tal de permanecer idéntica a sí misma en todo punto del espacio que alcance. De esta manera, sin importar su exacta forma funcional una onda debe estar representada por una función desplazada, esto es, una forma matemática que no cambia su imagen ni su perfil cuando se traslada su argumento.

Por ejemplo, las funciones

$$y(x) = \begin{cases} f(x) & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad y(x - x_0) = \begin{cases} f(x) & x_1 < x - x_0 < x_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tienen la misma imagen y el mismo perfil, y de hecho la función $y(x - x_0)$ es la misma función $y(x)$ pero definida en el intervalo $x_1 + x_0 \leq x \leq x_2 + x_0$, es decir, es la misma función pero desplazada: hacia la derecha si $x_0 > 0$ y hacia la izquierda si $x_0 < 0$. En la figura 11.3 mostramos una función arbitraria $f(x)$ y algunas funciones desplazadas asociadas.

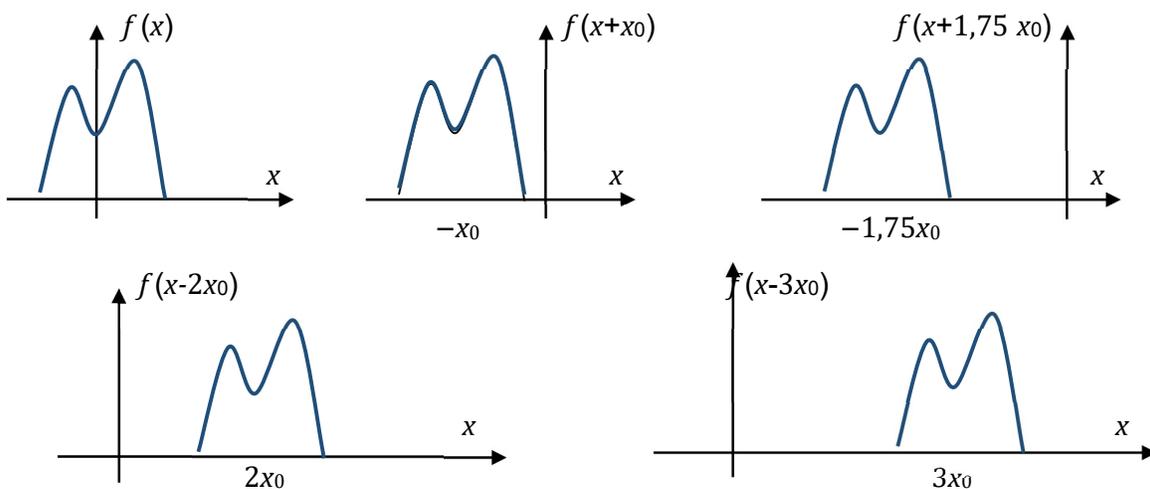
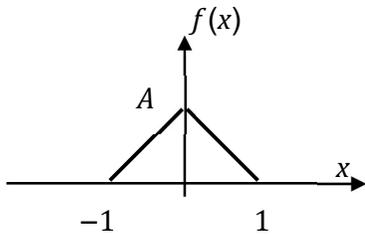


Fig. 11.3: una función arbitraria $f(x)$ y las funciones $f(x - qx_0)$ que resultan de desplazar la función original para diferentes valores del parámetro q . Obsérvese que para $q > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.

Ejemplo 11.1: Sea la función $f(x): [-1; 1] \rightarrow [0; A]$ definida por



$$f(x) = \begin{cases} A(x + 1) & -1 \leq x \leq 0 \\ A(1 - x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11.1)$$

que mostramos en la figura 11.4. La constante A , como es usual, define la *amplitud* de la función.

Fig.11.4: función triangular del ejemplo 12.1. Grafiquemos la funciones $f(x - 2n) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Es evidente que $n = 0$ corresponde a la función $f(x)$ original. Evaluemos ahora la función $f(x-2)$, definida por la relación

$$f(x - 2) = \begin{cases} A [(x - 2) + 1] & -1 \leq x - 2 \leq 0 \\ A [1 - (x - 2)] & 0 \leq x - 2 \leq 1 \end{cases} \quad (11.2)$$

que, operando elementalmente, puede expresarse de modo más sencillo como

$$f(x - 2) = \begin{cases} A(x - 1) & 1 \leq x \leq 2 \\ A(3 - x) & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (11.3)$$

que corresponde a una función idéntica a la definida por la expresión (11.1) pero en el intervalo $[1;3]$, esto es, el dominio de definición tiene la misma longitud que el de la función original y la forma funcional garantiza que su forma y su imagen son iguales a los de la función $f(x)$. En términos absolutamente generales, es casi inmediato que resulta

$$f(x-n): [-1 + 2n; 1 + 2n] \rightarrow [0; A] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x - 2) = \begin{cases} A[(1 - 2n) + x] & -1 + 2n \leq x \leq 2n \\ A[(1 + 2n) - x] & 2n \leq x \leq 1 + 2n \end{cases} \quad (11.4)$$

La gráfica de las funciones $f(x-n)$ corresponden al tren continuo de pulsos que se muestra en la figura 11.5 para diferentes valores del parámetro n .

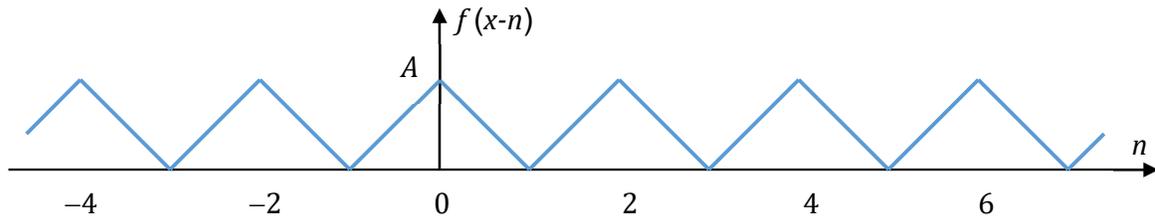


Fig. 11.5: conjunto de las funciones $f(x-n)$ definidas por la expresión (11.4), en función de n . Obsérvese que hemos formado un tren de pulsos triangulares por simple desplazamiento de la función original.

Imaginemos ahora que la función $f(x)$ definida por la expresión (11.4) corresponda a una perturbación *unidimensional* que se desplaza con velocidad v , de manera tal que en un tiempo t se desplaza una cantidad vt . En lugar del parámetro n debemos escribir ahora vt y dejar de lado la simplificación de que se trata de un número entero. Supongamos específicamente que se trata de una perturbación que viaja a 344 m/seg (esta es la velocidad del sonido en aire seco a 20°C de temperatura) con velocidad positiva, esto es, en la dirección positiva del desplazamiento (hacia la derecha en los gráficos de las figuras 11.4 y 11.5). En la figura 11.6 dibujamos la perturbación en diferentes instantes o, lo que es igual, para distintos valores del parámetro vt .

Desde ya que la perturbación podría viajar con velocidad negativa en nuestro sistema de referencia, en cuyo caso se desplazaría hacia la izquierda, en completo acuerdo con el hecho de que el argumento de la función desplazada sería de la forma $x + vt$. En síntesis, si $\xi(x, t)$ representa una perturbación que se propaga sólo a lo largo de la dirección x , esto es, una onda unidimensional, la ecuación más general capaz de representarla debe ser de la forma

$$\xi(x, t) = A f(x-vt) + B f(x + vt) \quad (11.5)$$

porque en principio puede desplazarse hacia la derecha (y esta propagación está representada por el primer sumando del miembro derecho) y/o hacia la izquierda. Las constantes A y B , por su lado, representan las amplitudes de las ondas hacia un lado y otro de la fuente. A los efectos prácticos, sin embargo, por el momento será suficiente tomar sólo uno de los sumandos.

Toda la discusión planteada hasta aquí sigue siendo válida aun en el caso en que la perturbación no se trate de un pulso sino de una función que se repite a intervalos regulares de tiempo, esto es, si se trata de una función *periódica*. La diferencia esencial entre ambos

casos es casi evidente: una pulsación simplemente se transmite y existe en consecuencia una región limitada del espacio perturbada; por el contrario, si la onda es una perturbación que se repite periódicamente, habrá un número definido de lugares del espacio mostrando el mismo tipo de perturbación, tanto más alejados de la fuente cuanto mayor sea el tiempo transcurrido.

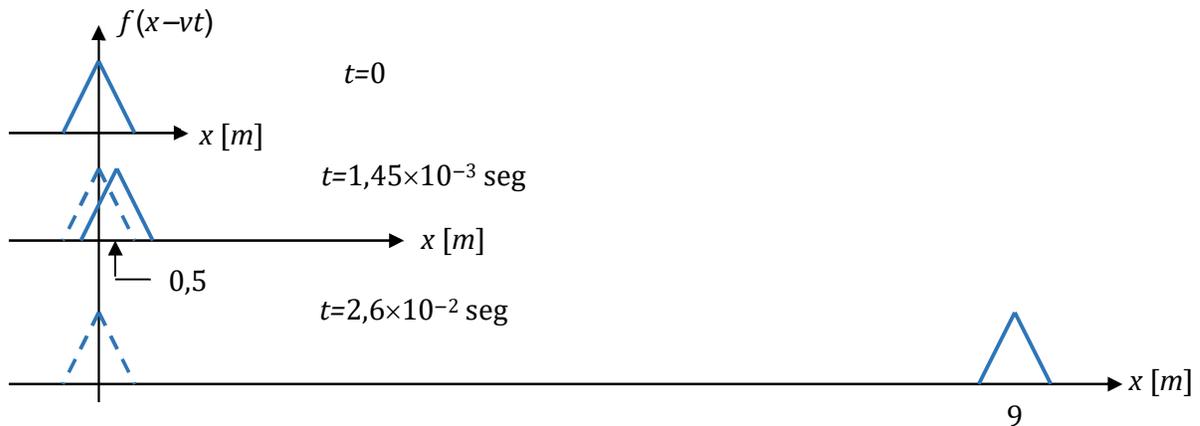


Fig. 11.6: una perturbación viajando a la velocidad del sonido, en distintos instantes. En las figuras inferiores se muestra en línea de puntos la perturbación original.

Por definición, una función temporal es periódica si para algún valor $\tau > 0$ resulta $f(t) = f(t + n\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. De acuerdo a lo que hemos discutido en relación con el desplazamiento de funciones, se trata de la misma función repetida en diferentes instantes. El valor τ define el período de la onda. Dado que la onda se propaga espacialmente, parece evidente que los puntos separados una distancia $\Lambda = n v \tau$, $n \in \mathbb{Z}$, deben encontrarse en idéntico estado dinámico, es decir, perturbados con igual amplitud e igual velocidad.

Un caso particularmente sencillo se presenta cuando la perturbación es de la forma

$$\xi(x, t) = A \text{sen} [\kappa(x - vt)] \tag{11.6}$$

donde, como es habitual, A es la amplitud de la onda y v su velocidad de propagación; a su vez, hemos introducido el parámetro κ para adimensionalizar el argumento de la función seno (κ recibe el nombre de *número de onda* y, obviamente, su unidad es inversa de longitud). La función (11.6) debe ser periódica en tiempo y repetirse espacialmente, de manera tal que debe cumplirse

$$\text{sen} (x + \Lambda, t) = \text{sen} (x, t) \tag{11.7}$$

$$\text{sen}(x, t + \tau) = \text{sen}(x, t) \quad (11.8)$$

Dado que $\text{sen } \alpha = \text{sen}(\alpha + 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$, la condición (11.7) impone

$$\begin{aligned} \text{sen}[\kappa(x + \Lambda - vt)] &= \text{sen}[\kappa(x + \Lambda - vt) + 2n\pi] = \\ &= \text{sen}\left[\kappa\left(x + \Lambda - vt + \frac{2n\pi}{\kappa}\right)\right] = \text{sen}\left[\kappa\left(x - vt + \frac{2n\pi}{\kappa}\right)\right] \end{aligned} \quad (11.9)$$

Comparando los argumentos del primer y último término de la expresión (11.9) parece evidente que debe ser

$$\Lambda = \frac{2n\pi}{\kappa} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (11.10)$$

La cantidad Λ , recordemos, representa la distancia entre dos puntos del espacio que se hallan en igual estado dinámico. Para $n = 1$ obtenemos la distancia mínima entre dos de tales puntos, y a esta distancia se la denomina longitud de onda, λ . Obsérvese que en términos del número de onda κ es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (11.11)$$

y las dimensiones de la longitud de onda son, precisamente, las de una longitud. A su vez, como establecimos renglones arriba de la ecuación (11.6), la distancia entre dos puntos en idéntico estado dinámico vale

$$\Lambda = nv\tau \quad (11.12)$$

donde τ es el período de la onda. Para $n = 1$, a partir de las expresiones (11.10) y (11.12), es inmediata la relación

$$v\tau = \lambda \quad (11.13)$$

que en términos de la frecuencia $f = 1/\tau$ puede escribirse como

$$v = f\lambda \quad (11.14)$$

En síntesis, en el caso de una perturbación senoidal viajando hacia la derecha la ecuación de onda (11.6) puede escribirse indistintamente en las formas

$$\xi(x, t) = A \text{sen}[\kappa(x - vt)] = A \text{sen} 2\pi\left(\frac{x - vt}{\lambda}\right) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t) \quad (11.15)$$

donde hemos definido la velocidad angular ω a través de la relación usual

$$\omega = 2\pi f \quad (11.16)$$

para escribir el término derecho de la igualdad (11.15). Finalmente, obsérvese que todo el razonamiento sigue siendo válido aún en el caso en que la onda se propague en más de una dirección, es decir, se trate de una onda bidimensional o tridimensional. En todo caso, lo que importa es la dirección de propagación de la energía, que en la figura 11.2 hemos denotado por el vector propagación \vec{k} . En consecuencia, definiremos el vector propagación como

$$\vec{k} = \kappa \hat{e}_\kappa \quad (11.17)$$

donde κ es el número de onda introducido en la expresión (11.6) y \hat{e}_κ es un vector unitario en la dirección de propagación. De esta manera, la expresión de la amplitud de la oscilación de los puntos que alcanza la onda en cualquier punto \vec{r} del espacio se escribe como

$$\xi(\vec{r}, t) = A \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (11.18)$$

El conjunto de puntos que la onda alcanza en un determinado instante se denomina *frente de onda*. De hecho, el frente de onda se define como la región del espacio en la que la onda toma idéntico valor en un dado instante de tiempo. La particular distribución de puntos alcanzados por este frente define la geometría de la onda: esférica, circular, cilíndrica, plana, etc. Obsérvese que si una onda es esférica las tres direcciones del espacio están igualmente privilegiadas, en el sentido que la onda se propaga por igual en todas direcciones. En una onda plana, por el contrario, existe una dirección de propagación privilegiada y el frente es un plano perpendicular a la dirección de avance de la onda. Por ejemplo, si la onda avanza en la dirección \hat{e}_z , como en la figura 11.7, los valores de la perturbación son los mismos en todos los puntos de cada plano XY perpendicular a la dirección de propagación, y sólo dependen de la coordenada z . Más adelante, en la sección 11.7, demostraremos esta propiedad en el caso particular de las ondas del campo electromagnético.

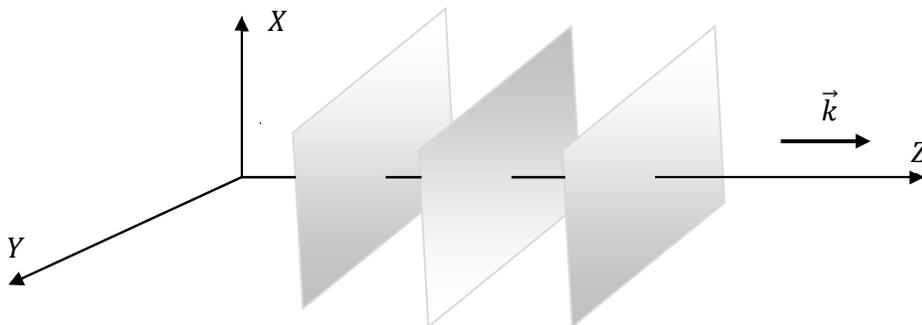


Fig.11.7: una onda plana avanzando en la dirección e_z . El valor de la propiedad física perturbada no es necesariamente la misma en todos los planos porque depende de la coordenada z , pero vale lo mismo en cada plano XY .

11.4 – La ecuación de onda

La ecuación (11.15) corresponde a una onda sinusoidal que se propaga a velocidad v . En términos absolutamente generales, la propagación de todo movimiento oscilatorio está regida por una ecuación de onda, esto es, por una ecuación diferencial que describe los modos y las maneras en que esa onda se transporta en un dado medio.

Si es armónica, siempre podremos describirla por una función de la forma $\psi(x \pm vt)$, y la tarea consiste en hallar la relación que existe entre la derivada segunda de la función respecto al tiempo (la aceleración) y el desplazamiento. Para ello notemos que para $\psi(x \pm vt)$ resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x \pm vt) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x \pm vt) \frac{\partial x}{\partial t} = v \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11.19)$$

de manera tal que se cumple

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (11.20)$$

porque, recordemos, la velocidad es constante, de manera tal que la ecuación diferencial que buscamos es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (11.21)$$

Luego, toda oscilación armónica cumple una ecuación de la forma (11.21), y a la inversa, toda función unidimensional que verifica la ecuación (11.21) es armónica.

Extendamos el análisis a tres dimensiones (manteniéndonos por simplicidad en coordenadas cartesianas). Imaginemos que la onda se propaga en una dirección cualquiera χ , con orientación arbitraria respecto de los ejes cartesianos. La ecuación de onda correspondiente en la dirección χ será de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = 0 \quad (11.22)$$

Proyectemos la dirección χ sobre los ejes cartesianos usando el vector de propagación que introdujimos en la ecuación (11.18), esto es,

$$\chi(x, y, z) = \vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x, k_y, k_z) \cdot (x, y, z) \quad (11.23)$$

Supongamos específicamente que el vector \vec{k} es unitario, es decir, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$ (nótese que tomar la raíz es irrelevante porque la suma es unitaria) de manera tal que

podemos extender la manera de proceder que nos llevó a la ecuación (11.20) de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(u, t) = \frac{\partial}{\partial \chi} \psi(u, t) \frac{\partial \chi}{\partial x} = k_x \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \quad (11.24)$$

y como k_x es una constante, podemos volver a derivar en la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(u, t) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(k_x \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} = k_x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \quad (11.25)$$

Podemos repetir el procedimiento para las otras dos variables, y obtener

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(u, t) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(k_y \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} = k_y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \quad (11.26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(u, t) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(k_z \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} = k_z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \quad (11.27)$$

Sumando las últimas tres expresiones resulta de manera inmediata

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \quad (11.28)$$

porque, recordemos, el vector propagación es unitario por hipótesis. Luego, podemos reescribir la ecuación (11.22) en términos de las componentes cartesianas como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = 0 \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (11.29)$$

y, observando que el término entre paréntesis representa el laplaciano de la función escalar $\psi(x, y, z)$,

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (11.30)$$

escribir en forma sucinta

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.31)$$

Sobre estas formas regresaremos en la sección 11.7 cuando analicemos con algún detalle las soluciones de ondas planas del campo electromagnético.

Ejemplo 11.2: apliquemos la expresión (11.21) a la onda de la ecuación (11.15)

$$\xi(x, t) = A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)$$

para verificar que efectivamente se trata de una oscilación armónica. De inmediato resultan las identidades

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -A \kappa^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) \quad (11.32)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A \omega^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) \quad (11.33)$$

y la expresión (11.31) se verifica idénticamente ya que

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A \kappa^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) + \frac{1}{v^2} A \omega^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = 0 \quad (11.34)$$

porque, de acuerdo a la expresión (11.14)

$$v = f \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{\omega}{\kappa} \quad (11.35)$$

Para decirlo de otro modo, toda oscilación armónica unidimensional admite como solución una expresión de la forma (11.15).

11.5 – Ondas polarizadas

Hemos definido una onda plana como aquella en la que la perturbación depende de una sola dirección, y esa perturbación no posee componentes en la dirección de propagación. En la figura 11.7 mostramos tres planos en los que los valores de la onda son los mismos. La figura 11.8 muestra dos posibilidades (dentro de las infinitas posibles) de ondas que cumplen con las condiciones impuestas para denominarlas planas.

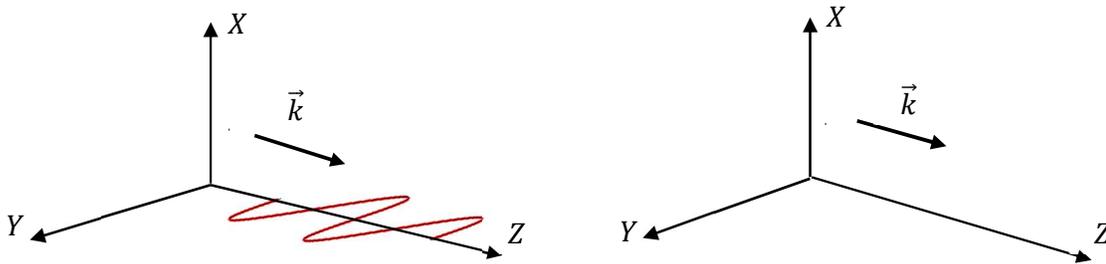


Fig.11.8: las dos ondas de la figura son planas, y se mueven en la dirección Z, pero en tanto la de la izquierda oscila en el plano YZ, la de la derecha lo hace en el plano XZ.

Cuando una onda oscila en un único plano se dice que está linealmente polarizada.

Las fuentes de luz son un ensamble de un número elevado de moléculas con orientaciones al azar. Por eso emiten luz que es una mezcla aleatoria de ondas polarizadas. Y como cualquier plano es equivalente, resulta que la luz natural no está polarizada. Pero puede polarizarse mediante filtros (polarizadores) que son dispositivos análogos a una ranura para las ondas mecánicas.

La onda de la izquierda de la figura 11.8 está linealmente polarizada en el eje Y , en tanto que la onda de la derecha está linealmente polarizada en la dirección X . Parece evidente que, en líneas generales, cualquier onda transversal que se propague en la dirección Z de la figura 11.8 podrá pensarse como polarizada linealmente en un plano que, en todo caso, formará un ángulo determinado respecto de los planos YZ y XZ . En la figura 11.9 mostramos esta situación.

En principio siempre es posible conseguir ondas transversales polarizadas, es decir, oscilando en un único plano. Esto se consigue con dispositivos filtradores que se conocen precisamente como polarizadores. Su mecánica es análoga a la de una reja sobre la que se arrojan barras al azar, formando ángulos aleatorios con alguna dirección particular y arbitraria. Estadísticamente habrá un conjunto de barras que tienen la orientación exacta de los barrotes de la reja y podrán pasar del otro lado, el resto no pasa, "rebota". Al otro lado de la reja, en lugar de tener un ensamble de barras con direcciones al azar, tendremos un tren de barras orientadas todas idénticamente.

Regresemos a la figura 11.9. A la izquierda, además del plano de polarización, mostramos un plano paralelo al plano XY sobre el que incide la onda (y que por eso se llama *plano de incidencia*) y el conjunto de amplitudes que adopta la onda a medida que avanza. Puede verse que se trata de una línea recta (la onda está linealmente polarizada) y al derecha mostramos las amplitudes de las componentes del vector amplitud en un instante determinado.

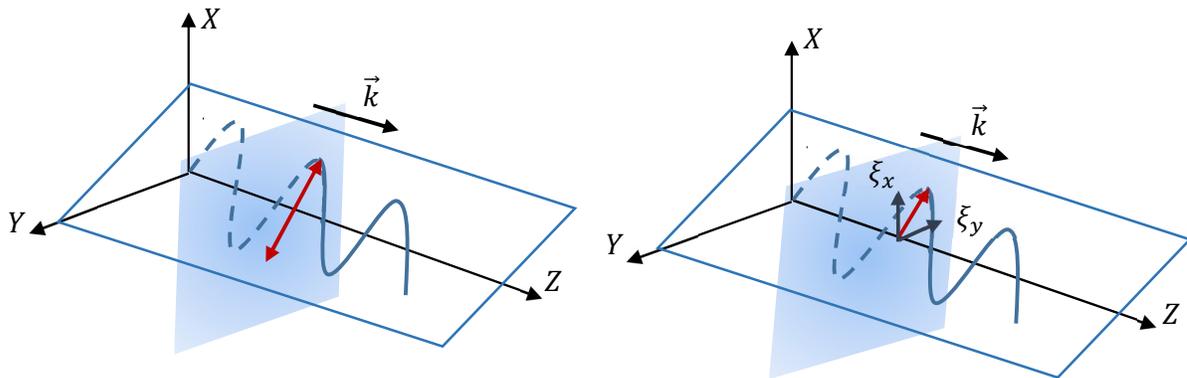


Fig. 11.9: la onda transversal está polarizada en el plano transversal respecto del plano XY. A la derecha, se muestran las amplitudes que toma la oscilación en un plano paralelo al XY, y a la derecha se muestra el vector amplitud y sus componentes según los ejes X e Y.

Parece evidente que, salvo en el caso en que el plano de polarización forme un ángulo de 45° respecto del de plano de incidencia, las amplitudes de las componentes habrán de ser diferentes, pero también es casi evidente que ambas componentes alcanzarán sus valores máximos y mínimos en el mismo instante porque al cabo se trata de una oscilación que descomponemos en dos componentes.

Si, a la inversa, pensamos ahora una onda como la composición de dos ondas mutuamente perpendiculares, debemos tener en cuenta, además de la amplitud relativa, la fase relativa de cada componente. Este es el caso que se da, por ejemplo, cuando pensamos en la luz natural, que consiste en una mezcla aleatoria de ondas polarizadas en todas las direcciones posibles (porque es generada por un elevadísimo número de fuentes no coherentes).

Esta onda puede pensarse siempre como la composición de dos ondas perpendiculares, cuyas amplitudes y fases no tienen por qué ser la misma, aunque es razonable pensar que estadísticamente habrán de transportar la misma cantidad de energía. En consecuencia, si se hace incidir luz natural sobre un filtro capaz de eliminar una de estas componentes (polarizador), es razonable pensar que la onda emergente estará polarizada y portará la mitad de la energía de la onda incidente. La figura 11.10 muestra esta situación en un caso particular, en la que dos ondas transversales mutuamente perpendiculares componen una única onda.

Toda onda no polarizada incidente sobre un polarizador puede descomponerse en una componente paralela al eje de polarización y otra perpendicular a dicho eje, que será eliminada por el polarizador. Como la onda incidente era mezcla aleatoria de todas las polarizaciones y pierde una de sus componentes, estadísticamente la emergente tendrá la mitad de su intensidad.

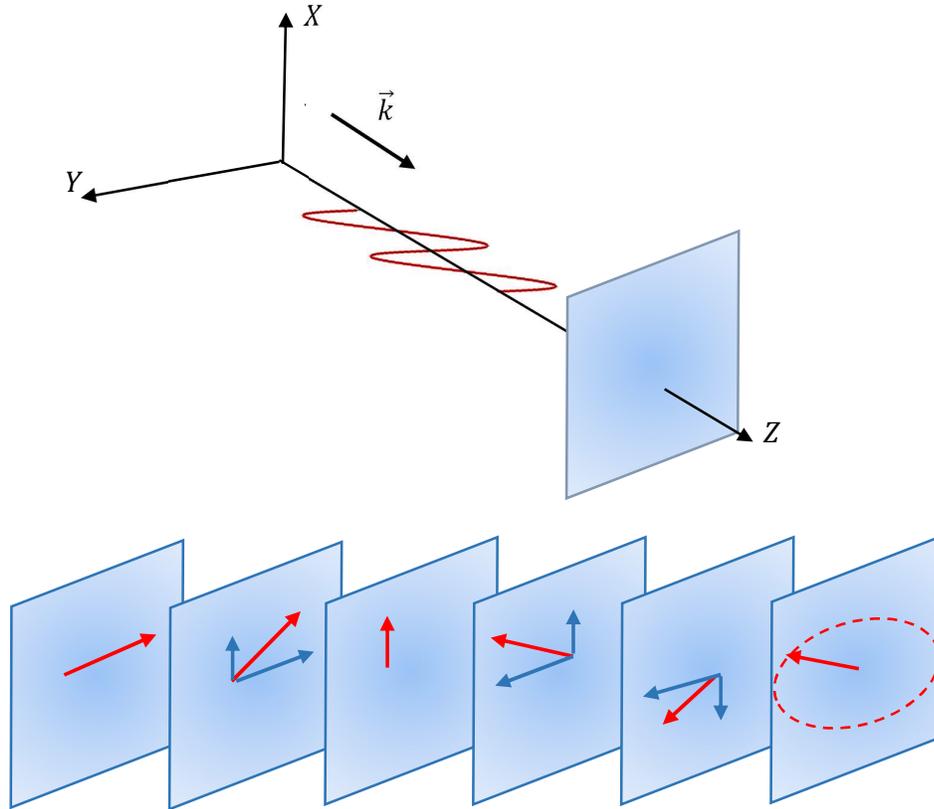


Fig. 11.10: la onda que atraviesa el plano de incidencia de la figura superior resulta de la composición de dos ondas transversales mutuamente perpendiculares. La gráfica inferior ilustra el vector amplitud en diferentes instantes. Puede verse que, en general, la figura que resulta de la composición de las amplitudes instantáneas será un elipse que, eventualmente, podrá degenerar en una circunferencia o en una línea recta.

Lo primero que puede observarse es que, además de tener amplitudes diferentes, las ondas no alcanzan sus máximos (ni mínimos) en el mismo instante. Esto produce que el vector amplitud suma no resulte en una recta sino en una elipse, como se muestra en la parte inferior de la figura 11.10. En términos de las componentes, dado que ambas son ondas transversales, la forma más general de la perturbación resultante se escribirá como

$$\vec{\xi}(z, t) = u_{0x} \text{sen}(kz - \omega t)\hat{e}_x + u_{0y} \text{sen}(kz - \omega t + \theta)\hat{e}_y \quad (11.36)$$

donde $\vec{\xi}(z, t)$ es el vector resultante, u_{0x} y u_{0y} son las amplitudes relativas, y θ es la diferencia de fase relativa entre las ondas componentes. El módulo de este vector y el ángulo ϕ sobre el plano de incidencia son, respectivamente

$$|\vec{\xi}(z, t)| = [u_{0x}^2 \text{sen}^2(kz - \omega t) + u_{0y}^2 \text{sen}^2(kz - \omega t + \theta)]^{1/2} \quad (11.37)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{u_{0y} \operatorname{sen}(kz - \omega t + \theta)}{u_{0x} \operatorname{sen}(kz - \omega t)} \right) \quad (11.38)$$

El estado de polarización de una onda que avanza en una determinada dirección (definida por el vector de propagación, \vec{k}) se define en términos de la curva que describe el vector amplitud $\vec{\xi}$ en función del tiempo sobre el plano de incidencia perpendicular a la dirección de propagación. Como la ubicación de ese plano es arbitrario, elegiremos por comodidad el plano $z = 0$, de manera tal que las expresiones (11.36) y (11.37) resultan inmediatamente

$$|\vec{\xi}(z, t)| = [u_{0x}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t) + u_{0y}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t + \theta)]^{1/2} \quad (11.39)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{u_{0y} \operatorname{sen}(-\omega t + \theta)}{u_{0x} \operatorname{sen}(-\omega t)} \right) \quad (11.40)$$

Los valores relativos de las amplitudes y la fase ϕ definen el estado de polarización, que se define por la curva que describe el vector amplitud.

11.4.1 – Polarización lineal

Supongamos que la diferencia de fase sea $\phi = 0$ (componentes en fase) o $\phi = \pi$ (componentes en contrafase). En tal caso, el vector amplitud se escribe como

$$\vec{\xi}(z, t) = [u_{0x} \hat{e}_x + u_{0y} \hat{e}_y] \operatorname{sen}(-\omega t) \quad (11.41)$$

y las expresiones (11.39) y (11.40) se reducen a las formas

$$|\vec{\xi}(y, t)| = [u_{0x}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t) + u_{0y}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t)]^{1/2} = [u_{0x}^2 + u_{0y}^2]^{1/2} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (11.42)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{u_{0y} \operatorname{sen}(-\omega t)}{u_{0x} \operatorname{sen}(-\omega t)} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{u_{0y}}{u_{0x}} \right) \quad (11.43)$$

en el caso de dos oscilaciones en fase, o

$$\vec{\xi}(y, t) = [u_{0x} \hat{e}_x - u_{0y} \hat{e}_y] \operatorname{sen}(-\omega t) \quad (11.44)$$

$$|\vec{\xi}(y, t)| = [u_{0x}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t) + u_{0y}^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t + \pi)]^{1/2} = [u_{0x}^2 + u_{0y}^2]^{1/2} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (11.45)$$

$$\phi = \arctg \left(\frac{u_{0y} \operatorname{sen}(-\omega t + \pi)}{u_{0x} \operatorname{sen}(-\omega t)} \right) = \arctg \left(-\frac{u_{0y}}{u_{0x}} \right) \quad (11.46)$$

en el caso de oscilaciones con diferencia de fase $\phi = \pi$. Obsérvese que en el caso de oscilaciones en fase la recta tiene pendiente positiva, en tanto que en el caso de oscilaciones en contrafase la pendiente es negativa. Por ejemplo, la onda del gráfico de la izquierda de la figura 11.9 está polarizada linealmente y tiene pendiente negativa (se desarrolla entre el 2º y el 4º cuadrante)

11.4.2 – Polarización circular

Si los módulos de las amplitudes de las oscilaciones componentes son iguales entre sí, digamos u_0 , y la diferencia de fase es $\theta = \pm \pi/2$, la figura geométrica que dibuja el extremo del vector amplitud resulta en una circunferencia y la polarización, en consecuencia, se denomina circular. El vector resultante se escribe como

$$\vec{\xi}(z, t) = u_0 \operatorname{sen}(-\omega t) \hat{e}_x + u_0 \operatorname{sen}\left(-\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \hat{e}_y \quad (11.47)$$

en tanto que el módulo y la fase resultan en las formas

$$|\vec{\xi}(y, t)| = \left[u_0^2 \operatorname{sen}^2(-\omega t) + u_0^2 \operatorname{sen}^2\left(-\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \right]^{1/2} = u_0 \quad (11.48)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctg \left(\frac{u_0 \operatorname{sen}\left(-\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)}{u_0 \operatorname{sen}(-\omega t)} \right) = \arctg \left(\mp \frac{\cos(\omega t)}{\operatorname{sen}(\omega t)} \right) = \mp \arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right) = \frac{\pi}{2} \pm \omega t \\ &\equiv \\ &\equiv \phi = \pm \omega t \end{aligned} \quad (11.49)$$

Obsérvese que sumar $\pi/2$ resulta irrelevante, de manera tal que la fase depende sólo del tiempo. Pero en el caso $\phi = +\omega t$ el ángulo aumenta con el tiempo, es decir, el vector gira en sentido antihorario. A tal polarización circular se la denomina *levógira*. Por el contrario, cuando la fase resulta $\phi = -\omega t$, el ángulo disminuye con el tiempo, el vector gira en sentido horario, y la polarización circular se denomina *dextrógira*.

11.4.3– Polarización elíptica

Cuando los módulos de las amplitudes de las oscilaciones componentes son diferentes, y la diferencia de fase es $\theta \neq 0, \pi, \pi/2$, la figura geométrica que dibuja el extremo del vector amplitud resulta en una elipse, y la polarización, en consecuencia, se

denomina elíptica. Este es el caso más general, y el módulo y la fase sobre el plano de incidencia $z=0$ son expresados por las ecuaciones (11.39) y (11.40), respectivamente.

La figura elíptica que dibuja el vector amplitud girará con a medida que la onda avanza (recuérdese que es función del tiempo) pero sus características se definen en términos de las amplitudes de las componentes y de la fase relativa entre ellas, como mostramos en la figura 11.11.

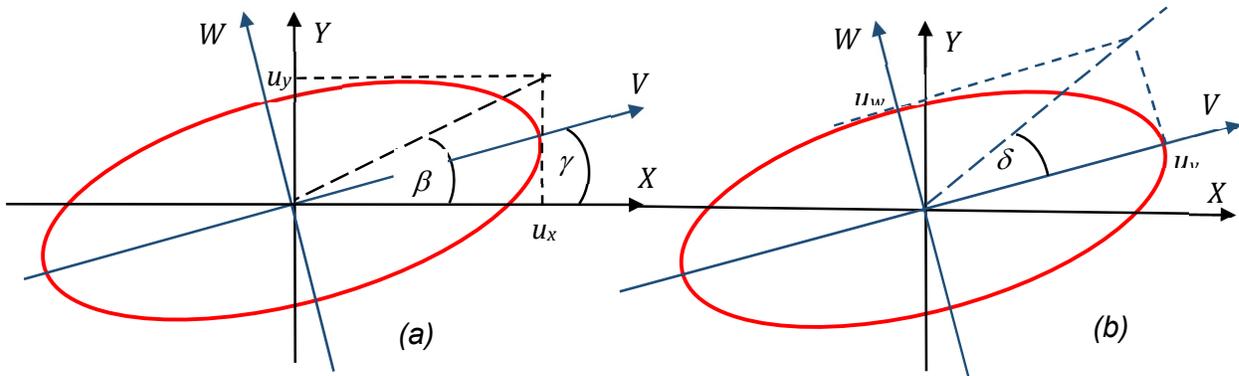


Fig. 11.11: parámetros característicos de la elipse. En el panel (a) se muestra el ángulo de rotación (γ) referido a los ejes XY, en tanto que el panel (b) muestra las amplitudes en el sistema propio de la elipse (ejes VW) y ángulo de elipticidad (δ). Las amplitudes u_v y u_w son las que corresponden a los semiejes mayor y menor, respectivamente.

El ángulo γ se conoce como *ángulo de rotación* y está referido al sistema fijo XY. De hecho, se mide en sentido antihorario a partir del semieje $X > 0$. La fase ϕ entre las componentes define el signo del ángulo de rotación: es positivo para $\cos \phi > 0$, y negativo si $\cos \phi < 0$. Por su parte, de la misma manera que el ángulo ψ queda definido por las amplitudes respecto del sistema fijo XY, el ángulo de elipticidad δ queda definido por las amplitudes referidas al sistema propio VW. De hecho, valen

$$tg (\beta) = \frac{u_{0y}}{u_{0x}} \tag{11.50}$$

$$tg (\delta) = \pm \frac{u_{0w}}{u_{0v}} \tag{11.51}$$

correspondiendo el signo positivo cuando la polarización es dextrógira (en cuyo caso se verifica la relación $\sin \phi > 0$) y negativo cuando es levógira ($\sin \phi < 0$). Sin demostración, diremos que las relaciones que existen entre los ángulos y la fase pueden escribirse como

$$tg(2\gamma) = tg(2\beta) \cos(\phi) \quad (11.52)$$

$$\text{sen}(2\delta) = \text{sen}(2\beta) \text{sen}(\phi) \quad (11.53)$$

Ejemplo 11.3: Supongamos una onda plana que se propaga según la relación

$$\vec{\xi}(z, t) = 2 \cos(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_x + 2 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_y \quad (11.54)$$

Dado que para todo ángulo se cumple $\cos(\alpha) = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$, podemos escribir el primer sumando en términos de la función seno, en la forma

$$\vec{\xi}(z, t) = 2 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ + 90^\circ) \hat{e}_x + 2 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_y \quad (11.55)$$

de donde puede verse que se trata de una onda con polarización circular levógira, porque las dos componentes tienen igual amplitud y la diferencia de fase entre las componentes es $+\pi/2$.

Ejemplo 11.4: Supongamos ahora que la onda plana se propaga según la ley

$$\vec{\xi}(z, t) = 8 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_x - 6 \cos(kz - \omega t + 45^\circ) \hat{e}_y \quad (11.56)$$

que puede escribirse como

$$\vec{\xi}(z, t) = 8 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_x - 6 \text{sen}(kz - \omega t + 135^\circ) \hat{e}_y \quad (11.57)$$

o, dado que $\text{sen}(\alpha \pm \pi) = \mp \text{sen}(\alpha)$, equivalentemente

$$\vec{\xi}(z, t) = 8 \text{sen}(kz - \omega t + 15^\circ) \hat{e}_x + 6 \text{sen}(kz - \omega t + 315^\circ) \hat{e}_y \quad (11.58)$$

Inmediatamente se ve que la diferencia de fase relativa entre las componentes (por lo demás, la única diferencia de fase que tiene sentido) es de 300° , y que los ángulos que resultan valen

$$tg(\beta) = \frac{u_{0y}}{u_{0x}} = 0,75 \Rightarrow \beta = 37^\circ \quad (11.59)$$

$$tg(2\gamma) = tg(2 \times 37^\circ) \cos(300^\circ) = 3,48 \times 0,5 = 1,74 \quad (11.60)$$

Ahora bien, existen dos ángulos que verifican la igualdad (11.60), a saber,

$$2\gamma = 60,11^\circ \Rightarrow \gamma \approx 30^\circ \quad 2\gamma = -119,89^\circ \Rightarrow \gamma \approx -60^\circ \quad (11.61)$$

Pero como $\cos \phi > 0$, debe ser $\gamma > 0$, de modo tal que el ángulo de rotación es $\gamma = 30^\circ$. Por otro lado,

$$\text{sen}(2\delta) = \text{sen}(2\beta) \text{sen}(\phi) = 0,96 \times (-0,867) = -0,83 \quad (11.62)$$

nos lleva a los valores

$$2\delta \approx -56^\circ \Rightarrow \delta \approx -28^\circ \quad 2\delta = 124^\circ \Rightarrow \delta \approx 62^\circ \quad (11.63)$$

pero como en el caso que estamos tratando es $\text{sen}\phi < 0$, debe ser $\text{tg} \delta < 0$, que a su vez indica que el ángulo de rotación es $\delta = -56^\circ$. En síntesis, estamos en presencia de una onda plana polarizada elípticamente y levógira.

11.6 – Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento

En reiteradas oportunidades hicimos referencia a lo largo del texto a la profunda simetría que existe entre las ecuaciones que describen los procesos relacionados con fenómenos eléctricos y magnéticos, y a pesar de nuestra insistencia en el aspecto meramente formal del tratamiento, algunas de esas simetrías las hemos explotado abiertamente, como por ejemplo en la deducción de las propiedades de los campos \vec{B} y \vec{H} al atravesar la superficie límite entre dos medios materiales (véase la sección 8.10) o la introducción misma de los campos vectoriales \vec{H} y \vec{M} (sección 8.9).

Aun cuando posiblemente no haya sido el primero en notar estas simetrías, el físico

escocés James Clerk Maxwell fue el primero en comprenderlas, y en el año 1873 sintetizó las propiedades de los fenómenos conocidos del electromagnetismo en un cuerpo compacto de ecuaciones donde se resumen las relaciones que existen entre los campos eléctrico y magnético, y las formas en que unos generan a los otros. De hecho, aceptó como válidas las leyes de Gauss y de conservación del flujo magnético. Estas dos leyes refieren a las propiedades espaciales de los campos estáticos en relación con las fuentes que lo generan, es decir, relacionan la intensidad del

Las ondas electromagnéticas son generadas por fuentes, y podemos considerarlas planas sólo en regiones suficientemente alejadas de esa fuentes. Que la onda sea plana significa que en superficies paralelas, normales a la dirección de avance, la fase es constante, es decir, las superficies de fase constante son planos paralelos.

campo que atraviesa una dada superficie cerrada con la carga almacenada en el volumen que encierra dicha superficie. El hecho de que el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada sea nulo taxativamente postula la inexistencia de monopolos magnéticos.

La relación de los campos dinámicos (o inducidos) con sus fuentes se expresan a través de las leyes de Faraday y de Ampere. La primera resume la forma de generar un campo eléctrico variable en el espacio a partir de un campo magnético variable en el tiempo, en tanto que la segunda resume la relación entre los campos magnéticos y las corrientes que lo originan. Ahora bien, si se aceptan como válidas estas leyes aparece una falta de simetría, en el sentido de que no parece posible inducir un campo magnético a partir de un campo eléctrico variable en el tiempo. Maxwell encontró una cierta dificultad en este resultado.

La idea es la siguiente: en la sección 8.7 hemos presentado algunas propiedades del campo magnético, que permiten comprender la particular manera en que interactúa con las corrientes y las cargas; en particular, a través de la ecuación (8.116) introdujimos la ley de Ampere, que por comodidad reproducimos aquí en sus formas integral y diferencial

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{CONC} \quad (11.64)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (11.65)$$

Posiblemente debamos recalcar que las dos ecuaciones expresan el mismo resultado, referido a la particular manera en que las líneas de campo magnético abrazan o se cierran alrededor de las corrientes que los originan. Recordemos que las líneas de campo magnético siempre son cerradas, y que matemáticamente esta propiedad se expresa a través de la ecuación (8.110)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.66)$$

Ahora bien, la divergencia del rotor de un campo vectorial es nula, de manera tal que la ecuación (11.66) es equivalente a

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot \vec{j} \quad (11.67)$$

La interpretación de la ecuación (11.67) es inmediata: si vale el teorema de Ampere, vale la ecuación (11.65); luego, como a la igualdad (11.67) arribamos por simple aplicación de una propiedad matemática, resulta que la validez del teorema de Ampere implica que las líneas de corriente *deben* ser cerradas. Para decirlo al revés, la ley de Ampere es válida sólo si las corrientes que generan el campo magnético son parte de un circuito que en alguna parte se cierra[†].

[†] Las corrientes que circulan por alambres infinitos se cierran precisamente por el infinito.

Sin embargo, y aun sin decirlo explícitamente, hemos trabajado en situaciones en las que las líneas de corriente no son cerradas. En particular, regresemos al primero de los complementos del capítulo 7, en el que analizamos el caso de un capacitor que se descarga a través de una resistencia luego de haberse cargado por intermedio de una pila.

Queda claro que la corriente circula a través del resistor pero no por el dieléctrico del condensador (independientemente del tipo de dieléctrico que llene el espacio entre sus placas) porque al cabo el condensador acumula carga en sus armaduras pero es un circuito abierto a la corriente continua.

Evidentemente, el problema en cuestión no es estacionario, y es posible que en tal caso la divergencia del vector \vec{j} se halle asociada a la variación temporal de alguna magnitud. Analicemos esta posibilidad. A partir de su definición (véase el pie de página asociado a la ecuación (7.8)) la intensidad de corriente se relaciona con el flujo de la densidad de corriente a través de una superficie abierta, esto es,

Las líneas de campo magnético son cerradas. La ley de Gauss sostiene en consecuencia que la divergencia del campo magnético es nula y, luego, que es imposible aislar un monopolo magnético. Pero una consecuencia inmediata de este resultado es que las líneas de corriente también deben ser cerradas, algo que no es evidente cuando descargamos un capacitor. Lo que cierra las líneas de corriente es la corriente de desplazamiento.

$$i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{11.68}$$

y en nuestro caso esa superficie abierta podría ser, por ejemplo, la superficie S de la figura 11.12. Por lo pronto, la corriente que circula por el circuito externo

$$i_{EXT} = \frac{dq}{dt} \tag{11.69}$$

debemos asociarla a la integral cerrada de la expresión (11.65). Para ello, pensemos en las superficies S (formada por la cara izquierda del paralelepípedo de la figura 11.12) y S' (formada por el resto de las caras de mismo paralelepípedo). Cada una de ellas es una superficie abierta, pero en conjunto conforman una superficie cerrada (condición necesaria para evaluar el miembro izquierdo de la ecuación (11.64)). Pensemos entonces el flujo de carga a través de la superficie del paralelepípedo como un balance entre lo que sale (a través de S') menos lo que entra (a través de la superficie S), esto es,

$$\frac{dq}{dt} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}' - \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S+S'} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \tag{11.70}$$

donde $\vec{\Sigma}$ representa la superficie cerrada suma de S y S' .

Observemos ahora la figura 11.12: la superficie orientada $d\vec{S}$ es la sección del cable por el que circula la corriente externa al capacitor. A su vez, la carga q del miembro izquierdo de la expresión (11.70) es la carga libre que estaba depositada en las placas del condensador, de manera tal que de acuerdo a las ecuación (6.32) y la definición (6.33) resulta

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dQ_L}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S}' = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' = - \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11.71)$$

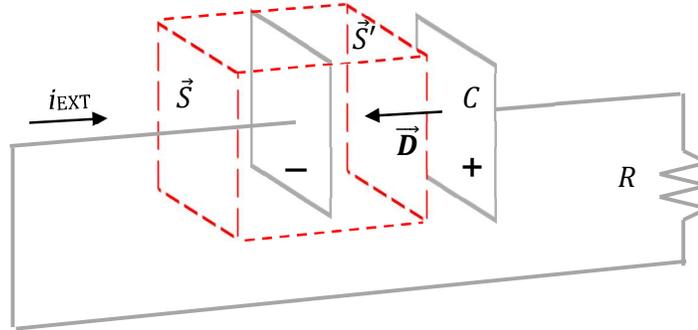


Fig. 11.12: en línea de puntos se ha dibujado la superficie a través de la cual se realiza el balance de carga. Cuando el capacitor se descarga a través de la resistencia R, el vector D (y, luego, la corriente interna al capacitor) tiene signo opuesto a la corriente externa, i_{EXT} .

Debemos prestar un poco de atención a la cadena de igualdades anterior. La carga libre se relaciona con el vector desplazamiento, y sólo nos interesa en la región interna del capacitor, de manera tal que la integración se realiza sobre la superficie S' , orientada de alguna manera (por lo demás carente de interés para nuestra discusión). Pero la orientación de S' es opuesta a la de la superficie S , de ahí a que aparezca un signo negativo en el miembro derecho (para decirlo de otra manera, los versores que definen las superficies S y S' son opuestos, esto es, $d\vec{S} = -d\vec{S}'$).

Escribamos ahora conjuntamente las expresiones (11.70) y (11.71) en la forma

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dQ_L}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11.72)$$

de donde se deduce la identidad

$$\oiint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.73)$$

que en forma diferencial puede escribirse como

$$\nabla \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (11.74)$$

El vector desplazamiento tiene unidades de una densidad superficial de corriente, de manera tal que su derivada temporal tiene las dimensiones de una densidad de corriente. De hecho, a la cantidad $\partial \vec{D} / \partial t$ se la denomina precisamente *densidad de corriente de desplazamiento*. Sus líneas conectan las placas del condensador, de manera tal que las líneas de \vec{j} (llamada *corriente de conducción*, porque está relacionada a cargas que efectivamente están en movimiento) prolongadas en las de la corriente de desplazamiento son líneas cerradas. Queda claro que en un proceso estacionario la derivada temporal es nula y la validez del teorema de Ampere no requiere de términos adicionales. En todo caso, si en la ecuación (11.65) reemplazamos la cantidad \vec{j} por la ecuación (11.74), es decir, si escribimos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (11.75)$$

su validez habrá de ser absolutamente general, recordando desde ya que la corriente \vec{j} es la corriente total, esto es, consiste en la suma de las corrientes libres más las de magnetización (véase la sección 8.9). La generalización de la ley de Ampere, esto es, la extensión al caso de fenómenos variables en el tiempo, se debe a Maxwell y por tal motivo se la conoce como ley de Ampere–Maxwell.

Se trata de una de las leyes fundamentales del electromagnetismo, sintetizadas en un cuerpo compacto de relaciones que se conocen como ecuaciones de Maxwell. En unidades MKSC el sistema de ecuaciones, en sus formas diferencial e integral, es el siguiente

<i>Ecuación</i>	<i>Forma diferencial</i>	<i>Forma integral</i>
<i>Ley de Gauss</i>	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$	$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \quad (11.76)$
<i>Ley de conservación del flujo magnético</i>	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.77)$
<i>Ley de Faraday</i>	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (11.78)$

Ley de Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\vec{j}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_L + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11.79)$$

Este conjunto de ecuaciones, junto a las relaciones constitutivas (que definen las propiedades del medio)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (11.80)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (11.81)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (11.82)$$

constituyen la base de la teoría electromagnética clásica y el punto de partida para la comprensión, estudio y explicación de la mayoría de los fenómenos electromagnéticos.

Algunas cuantas observaciones se hacen necesarias: en primer lugar, las cantidades $\rho_L, Q_L, \vec{j}_L, i_L, \mu, \sigma$, se refieren a la densidad volumétrica de carga libre, carga libre total, densidad volumétrica de corriente libre, corriente libre, permeabilidad y conductividad del medio, respectivamente.

Por lo demás, nótese que las relaciones constitutivas están escritas para medios lineales e isótropos, de manera tal que las ecuaciones de Maxwell resueltas con estas condiciones sólo valen en ese tipo de medios.

En tercer lugar, las ecuaciones (11.76) – (11.79) son ecuaciones diferenciales lineales, de manera tal que no sólo vale el principio de superposición sino que también habrá de valer para toda variable relacionada linealmente con los campos. Obsérvese por último que hemos optado por escribir las ecuaciones (11.78) y (11.79) indistintamente en términos del vector intensidad de campo magnético o del vector inducción, y esto para resaltar la analogía funcional con las otras dos ecuaciones. De hecho, escribir las ecuaciones en términos de los vectores \vec{D} y \vec{H} en lugar de hacerlo (casi tradicionalmente) en función de los campos \vec{E} y \vec{B} sólo se debe a cuestiones de practicidad, y en todo caso las relaciones constitutivas permiten reescribirlas en términos del campo eléctrico y del vector inducción.

Obsérvese que las ecuaciones (11.76) y (11.77) son funcionalmente análogas, y relacionan el campo que atraviesa una superficie con la cantidad de carga que existe en esa superficie. Así interpretada, la ecuación (11.77) postula que no existen cargas magnéticas aisladas (o, lo que es igual, que es imposible aislar un monopolo magnético). Por lo demás, en términos de las componentes de los campos podemos escribir

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint D_n dS = Q_L \quad (11.83)$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B_n dS = 0 \quad (11.84)$$

Las expresiones (11.77) (o su similar (11.84)) y (11.78) deben interpretarse con sumo cuidado. En la primera afirmamos que el flujo de campo magnético a través de una superficie *cerrada* es nulo, en tanto que la ley de Faraday relaciona las variaciones espaciales del campo eléctrico con las variaciones temporales del flujo magnético, función de la integral del campo magnético pero a través de una superficie *abierta*.

Es notable también la analogía funcional entre las ecuaciones de Faraday y Ampere-Maxwell. La primera postula que los campos magnéticos variables son fuentes de campo eléctrico. Ahora bien, en el caso electrostático (o campos magnéticos constantes) el trabajo para transportar una carga unidad a lo largo de una línea de campo es nulo, según se desprende de la forma integral de la expresión (11.78). Recuérdese que el trabajo para desplazar una carga unidad a lo largo de un camino cerrado es nulo, de manera tal que se cumple

$$\oint dV = - \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint E_T d\ell = 0 \quad (11.85)$$

Sin embargo, en el caso general es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} \quad (11.86)$$

de manera tal que cuando hay un flujo magnético variable en el tiempo el trabajo ya no es nulo, y la conclusión es que si existe una distribución de cargas fijas y corrientes variables, el trabajo para transportar una carga lo realizan las corrientes.

Por lo demás, la ley de Ampere-Maxwell es una generalización del caso en el que la circulación de campo magnético se calcula en una región del espacio en la que hay presente un medio dieléctrico. En tal escenario, en el dieléctrico se originan campos eléctricos variables que son fuentes de corrientes que, a su vez, modifican el campo eléctrico externo.

11.7 – El campo electromagnético

Por su completitud las ecuaciones de Maxwell resultan suficientes para describir y modelizar una gran variedad de fenómenos electromagnéticos. La dificultad que pueden presentar no reside tanto en la interpretación como en la resolución simultánea de las ecuaciones integro-diferenciales que conforman la teoría. Existen sin embargo fenómenos que pueden describirse adecuadamente una vez que se adopta un conjunto plausible de aproximaciones que llevan la matemática del problema a un nivel tratable.

Un caso particularmente sencillo se presenta si se resuelven las ecuaciones suponiendo que el campo electromagnético existe en una región lineal, isótropa y homogénea del espacio, libre de cargas y corrientes. En ese caso, usando las relaciones

constitutivas (11.80)–(11.82), la reducción del sistema de ecuaciones (11.76)–(11.79) no es muy complicada. Veamos cómo resulta en estas circunstancias el sistema de ecuaciones escrito en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} , que en principio asumiremos como campos que dependen tanto de la posición como del tiempo.

La ecuación (11.84)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

nos permite calcular la divergencia del vector campo eléctrico como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) \quad (11.87)$$

Como por hipótesis la región es isótropa y homogénea, la permitividad ε es un escalar que no depende de las coordenadas del punto (es decir, es una constante) y puede salir fuera del operador[†]. Dado que también por hipótesis la región se halla libre de carga, es decir $\rho_L = 0$, podemos escribir sin más la ley de Gauss (11.66) para el campo eléctrico como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) = \frac{\rho_L}{\varepsilon} = 0 \quad (11.88)$$

Por otro lado, vale la ley de inducción de Faraday (11.78)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

de manera tal que si tomamos el rotor de esta última expresión, resulta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (11.89)$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro es nulo en virtud de que sin carga libre la divergencia del vector desplazamiento (y, luego, la del campo eléctrico) es nula, en tanto que el segundo término representa el laplaciano del vector campo eléctrico. Trabajemos ahora el miembro derecho. La relación (11.81)

[†] En ninguna parte del texto, en los capítulos anteriores, mencionamos siquiera la posibilidad de que la permitividad ε fuera una función de la posición. En general, si el medio no es isótropo tiene distintos valores en distintas direcciones, y se halla asociada a fenómenos que no habremos de analizar en este texto.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

nos permite escribir el rotor del vector intensidad de campo magnético en términos del vector inducción como

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \quad (11.90)$$

porque, de nuevo, el medio es homogéneo e isótropo y en consecuencia la permeabilidad magnética no depende de las coordenadas del punto, es decir, es una constante. Dado que por hipótesis supusimos que el medio está libre de corrientes ($j = 0$) la ley de Ampere-Maxwell se escribe en este caso como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.91)$$

Reemplazando ahora la expresión (11.91) en la ecuación (11.89) llegamos finalmente a una ecuación para el campo eléctrico en la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.92)$$

Recordemos aquí que en coordenadas cartesianas el laplaciano de una magnitud vectorial cualquiera

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \hat{e}_x + A_y(x, y, z) \hat{e}_y + A_z(x, y, z) \hat{e}_z \quad (11.93)$$

se escribe como suma (vectorial) de los laplacianos de sus componentes (escalares), esto es

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{e}_x + \nabla^2 A_y \hat{e}_y + \nabla^2 A_z \hat{e}_z \quad (11.94)$$

y que el laplaciano de una función escalar (que introdujéramos en la ecuación (11.30)) va como las derivadas segundas de la función escalar, es decir, cada una de las componentes de la función vectorial cumple

$$\nabla^2 A_x(x, y, z) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \quad (11.95. a)$$

$$\nabla^2 A_y(x, y, z) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \quad (11.95. b)$$

$$\nabla^2 A_z(x, y, z) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (11.95. c)$$

de manera tal que, en coordenadas cartesianas, reconocemos la expresión (11.92) como tres identidades escalares funcionalmente idénticas, que (en coordenadas rectangulares) se escriben como

$$\nabla^2 E_x - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (11.96)$$

$$\nabla^2 E_y - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (11.97)$$

$$\nabla^2 E_z - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (11.98)$$

Antes de formalizar la solución, demostraremos primero que las componentes del vector inducción magnética \vec{B} , en un medio lineal, isótropo y homogéneo, cumplen con ecuación funcionalmente idénticas a las del campo eléctrico. Para ello, tomemos el rotor de la ecuación (11.79)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad (11.99)$$

que como hicimos en ocasión de la ecuación (11.89) podemos desarrollar como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (11.100)$$

Dado que el vector inducción tiene divergencia nula, la expresión anterior se reduce a la forma

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.101)$$

que, como vemos, es una forma funcional idéntica a la del campo eléctrico, es decir, sus tres componentes (en coordenadas cartesianas)

$$\nabla^2 B_x - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \quad (11.102)$$

$$\nabla^2 B_y - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \quad (11.103)$$

$$\nabla^2 B_z - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (11.104)$$

aceptan las mismas soluciones que las del campo eléctrico. Las ecuaciones (11.96)–(11.98) y (11.102)–(11.104) (en un todo similares a la ecuación (11.31)) son de la forma

$$\nabla^2 \psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.105)$$

donde en este caso ψ representa a las componentes de cada campo, y $\mu \varepsilon$ es una constante asociada a la velocidad de propagación de la onda. En el ejemplo 11.2 mostramos que una función de la forma

$$\xi(x, t) = A \text{ sen } (\kappa x - \omega t) \quad (11.106)$$

es solución para una onda unidimensional. Parece razonable pensar que una función de la forma

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_D \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) + \xi_I \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \omega t) \quad (11.107)$$

sea solución de cada una de las ecuaciones (11.96)–(11.98) y (11.102)–(11.104) (y que en todo caso es fácil corroborar por reemplazo directo). Como es usual, κ y ω representan el vector de propagación y la pulsación de la onda, respectivamente. Por su parte, las cantidades subindicadas con D e I denotan las amplitudes de las ondas que viajan a derecha e izquierda de la fuente, respectivamente. Luego, cada componente de cada uno de los campos admite una solución de la forma

$$E_n(\vec{r}, t) = E_{nD} \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) + E_{nI} \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \omega t) \quad (11.108)$$

$$B_n(\vec{r}, t) = B_{nD} \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) + B_{nI} \text{ sen } (\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \omega t) \quad (11.109)$$

donde $n = 1, 2, 3$ se refiere a cada componente del campo. Desde ya que a los efectos prácticos será suficiente por ahora tomar sólo la solución de la onda que se desplaza en un único sentido, digamos hacia la derecha, y escribir

$$E_n(\vec{r}, t) = E_{n0} \text{sen}(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (11.110)$$

$$B_n(\vec{r}, t) = B_{n0} \text{sen}(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (11.111)$$

donde E_{n0} y B_{n0} representan las intensidades de las componentes de la onda. Ahora bien, la velocidad de propagación de esta onda es $v = \omega/\kappa$. Comparando la expresión (11.105) con cualquiera de las ecuaciones de las componentes de cada campo, parece evidente que la velocidad de propagación resulta ser

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (11.112)$$

es decir, depende de las propiedades del medio en el que las ondas se propagan, y estas propiedades están determinadas por su permitividad eléctrica y su permeabilidad magnética. En particular, en el vacío (que cumple con nuestros requisitos de medio lineal, isótropo, homogéneo y libre de cargas y corrientes) la velocidad de propagación (a la que denotaremos c) resulta

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} (N/A^2) \times 8,85 \times 10^{-12} (C^2/Nm^2)}} = 2,998 \times 10^8 \frac{m}{seg} \quad (11.113)$$

que es la velocidad de la luz en el vacío.

Observemos que las ondas definidas por las ecuaciones (11.110) y (11.112) son transversales. En efecto, escribamos la solución (11.110) para el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \text{sen}(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_E \quad (11.114)$$

En la época en que Maxwell desarrolló la teoría electromagnética los valores de μ_0 y ε_0 se conocían a través de mediciones de laboratorio, pero no se asociaban a velocidad de propagación alguna. Maxwell propuso entonces que las ondas electromagnéticas se propagan incluso en el vacío, y lo hacen con la velocidad de la luz; y a partir de este razonamiento postuló que la luz misma debe ser una perturbación electromagnética.

donde \hat{e}_E es un versor que indica la dirección y el sentido del vector \vec{E} . Notemos que alcanza con demostrar que uno de los campos oscila en dirección perpendicular a la dirección de propagación porque el otro es funcionalmente similar y tendrá características similares. Ahora bien, todo el desarrollo que hemos realizado es válido en la hipótesis de un medio libre de cargas y corrientes, de manera que la divergencia del vector campo eléctrico es nula, esto es, en coordenadas

cartesianas escribimos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (11.115)$$

Obsérvese que como estamos derivando respecto de las coordenadas espaciales, si escribimos el vector de propagación $\vec{\kappa}$ como

$$\vec{\kappa} = \kappa_x \hat{e}_x + \kappa_y \hat{e}_y + \kappa_z \hat{e}_z \quad (11.116)$$

la divergencia (11.115), teniendo en cuenta la solución (11.114), resulta en la forma

$$E_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) (\kappa_x \hat{e}_x + \kappa_y \hat{e}_y + \kappa_z \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_E = 0 \quad (11.117)$$

de manera tal que la única solución posible es $\vec{\kappa} \cdot \hat{e}_E = 0$, esto es, la dirección de oscilación del campo eléctrico (y por consiguiente la del campo magnético) es perpendicular a la dirección de propagación, o dicho de otro modo, las ondas electromagnéticas son transversales.

Ejemplo 11.5: Hemos dicho que en una onda plana existe una dirección de propagación privilegiada y que el frente es un plano perpendicular a la dirección de avance de la onda. Por ejemplo, si se trata de un campo eléctrico avanzando en la dirección \hat{e}_z , como en la figura 11.10, los valores del campo son los mismos en todos los puntos de cada plano XY perpendicular a la dirección de propagación, y sólo pueden depender de la coordenada z . Pero esta dependencia no implica que el campo no pueda tener componente E_z . Apliquemos las ecuaciones de definición de los campos para demostrar que E_z debe ser nula.

Si el campo sólo depende de la coordenada z , las derivadas de cada componente del campo respecto de las coordenadas x, y deben ser nulas, de manera tal que las ecuaciones (11.96) – (11.98) se escriben como

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (11.118)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (11.119)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (11.120)$$

Ahora bien, sostuvimos en la expresión (11.115) que la divergencia del campo eléctrico (en un medio libre de cargas) es nula, esto es

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

que en este caso es equivalente a decir

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{11.121}$$

Pero entonces, de acuerdo a la identidad (11.120), las únicas soluciones posibles para la componente E_z son

$$E_z = c_1 t + c_2 \tag{11.122}$$

$$E_z = 0 \tag{11.123}$$

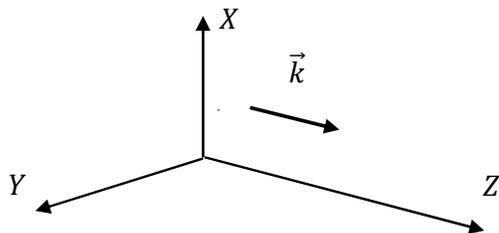
donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Pero la ecuación (11.122) no es solución de la ecuación de onda porque es una función creciente con el tiempo, incompatible con una señal que se propaga, de manera tal que la única solución posible es $E_z = 0$. Lo mismo cabe para el campo magnético, de manera tal que el campo electromagnético no tiene componentes a lo largo de la dirección de propagación.

Ejemplo 11.6: Del ejemplo 11.5 sabemos que el campo eléctrico y el campo magnético se propagan como ondas transversales, esto es, que no tienen componentes a lo largo de la dirección de propagación. O sea, se trata de ondas polarizadas. Nos preguntamos si ambos campos pueden oscilar en el mismo plano.

Supongamos que el campo eléctrico fuera de la forma

$$\vec{E}(z) = E_x \hat{e}_x \tag{11.124}$$

es decir, se trata de una onda que oscila paralela al eje X y se propaga en la dirección z .



Si el campo magnético oscilara también en el plano XZ , tendría una única componente en la dirección \hat{e}_x . Pero de la ley de inducción de Faraday, ecuación (11.78),

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Fig.11.13: la onda plana de la figura representa al campo eléctrico y está polarizada en el eje X .

vemos que la única componente del rotor que debe aparecer es la componente E_x , esto es, debería cumplirse

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (11.125)$$

Pero como $E_y = E_z = 0$, resulta que B_x debe ser una constante temporal. Pero por otro lado, la ley de Ampere-Maxwell en vacío (no hay corrientes) debe cumplirse, impone la condición

$$\nabla \times \vec{B} \propto -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.126)$$

y como la única componente de \vec{E} está en la dirección \hat{e}_x , E_x debe ser también una constante temporal. Esto es absurdo, porque ambos campos, \vec{E} y \vec{B} , son funciones del tiempo. Resulta entonces que los campos \vec{E} y \vec{B} no pueden ser paralelos. Ahora bien, una solución posible es que el campo magnético tenga componente B_y , porque no puede tener componente en z (es una onda plana propagándose en esa dirección). En tal caso sería

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (11.127)$$

de donde es inmediato

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (11.128)$$

porque, recordemos, E_x es función de la coordenada z . Si este fuera el caso, la expresión (11.126) nos llevaría a la identidad,

$$\nabla \times \vec{B} \propto -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \propto -\frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} \propto \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (11.129)$$

que también es aceptable. De hecho, es la única solución aceptable. Y como la particular elección del plano de polarización es arbitraria, concluimos en que los campos \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares entre sí, como ilustramos en la figura 11.14.

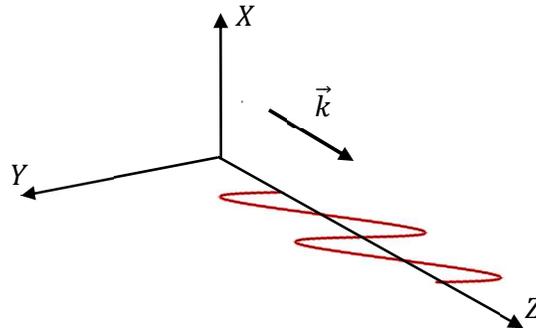


Fig.11.14: Los campos eléctrico y magnético oscilan en planos perpendiculares entre sí y, por ser ondas planas, conforman un plano perpendicular a la dirección de propagación.

Unos pocos comentarios antes de finalizar esta sección. En primer lugar, sabemos que la velocidad de propagación de una onda electromagnética es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (11.130)$$

Para la gran mayoría de los medios transparentes que no sean ferromagnéticos (por ejemplo, que no sea hierro) el valor de μ_r es prácticamente 1, de manera tal que con muy buena aproximación podemos escribir

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (11.131)$$

donde c , recordemos, es la velocidad de la luz en el vacío y n se define como el *índice de refracción*. Dos observaciones son muy importantes: en primer lugar, debemos recordar que para todo medio óptico la permitividad relativa es siempre mayor (o igual) a la unidad ($\epsilon_r \geq 1$) de manera tal que el índice de refracción siempre es mayor que la unidad (y es $n = 1$ precisamente en vacío, o en el aire, que tiene un índice muy similar). Luego, *la velocidad de la luz en cualquier medio es siempre menor que la velocidad de la luz en el vacío*.

En segundo lugar es necesario notar algo que parece una inconsistencia. Sabemos que la permitividad relativa del agua tiene un valor cercano a 81. Esto significaría que el índice de refracción debería ser $n_{AGUA} = 9$ y sin embargo es $n_{AGUA} \sim 1,33$. Lo que pasa es que la identidad (11.131) vale solamente en un medio no dispersivo, y el agua no es precisamente un medio con esa característica.

Por otro lado, podemos preguntarnos por lo que ocurre cuando un rayo de luz incide sobre la superficie de separación de dos medios ópticamente diferentes (o sea, con permitividades eléctricas diferentes). Caractericemos a los medios ópticos por sus

permitividades, digamos ϵ_1 y ϵ_2 . Podríamos caracterizarlas por sus índices de refracción, n_1 y n_2 , respectivamente, pero preferimos conservar por el momento la relación con las permitividades. De hecho, cuanto mayor es el índice de refracción se dice que el medio es ópticamente más denso, que es lo mismo que decir que tiene mayor permitividad. Por ejemplo, el agua es ópticamente más densa que el aire, y su permitividad es del orden de 80 veces más grande.

Imaginemos ahora un rayo de luz que incide desde un medio de permitividad ϵ_1 a la superficie que lo separa de otro, ópticamente más denso, caracterizado por ϵ_2 , como ilustramos esquemáticamente en la figura 11.15. La radiación incide con un *ángulo de incidencia* \hat{i} , se refleja parcialmente con un *ángulo de reflexión* \hat{r} y parcialmente se transmite con un *ángulo de transmisión o refracción* \hat{t} .

Sabemos que las componentes tangenciales del vector \vec{E} se conservan al pasar de un medio dieléctrico a otro (véase la sección 6.6). Además, si no hay cargas libres en la superficie de separación de los medios, sabemos que deben conservarse también las componentes normales del vector desplazamiento. Como el medio de incidencia contiene además a la componente reflejada (que para distinguirla de la incidente habremos de primarla) las dos ecuaciones que deben satisfacerse idénticamente son las condiciones (6.92) y (6.96) escritas en la forma

$$\epsilon_1(E_{N1} + E'_{N1}) = \epsilon_2 E_{N2} \tag{11.132}$$

$$(E_{T1} + E'_{T1}) = E_{T2} \tag{11.133}$$

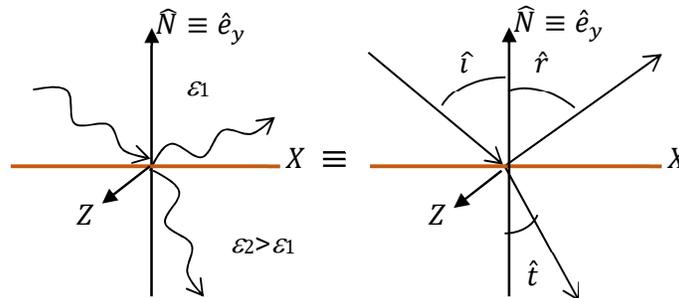


Fig. 11.15: sobre la superficie que separa dos medios ópticos diferentes incide radiación (desde el segundo cuadrante). Una parte se refleja y otra se transmite, como muestra el esquema simplificado (de rayos) de la derecha. La línea vertical es la normal a la superficie de incidencia. i, r, t se refieren a los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión, respectivamente. N es la normal al plano.

Ahora bien, de acuerdo a la expresión general (11.114), la forma general de los campos eléctricos será

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \text{sen}(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \hat{e}_{E1} \tag{11.134}$$

$$\vec{E}'_1(\vec{r}, t) = \vec{E}'_{01} \text{sen}(\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - \omega'_1 t) \hat{e}_{E'1} \quad (11.135)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \text{sen}(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \hat{e}_{E2} \quad (11.136)$$

donde $\kappa_1, \kappa'_1, \kappa_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ se refieren a los vectores de onda y velocidades angulares de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

Supongamos que el rayo incidente está en el plano XY . Claramente, tendrá proyección nula sobre el eje Z , de modo tal que podemos pensar los vectores de onda en la forma general

$$\vec{k}_1 = (\kappa_{1x}, \kappa_{1y}, 0) \quad (11.137)$$

$$\vec{k}'_1 = (\kappa'_{1x}, \kappa'_{1y}, \kappa'_{1z}) \quad (11.138)$$

$$\vec{k}_2 = (\kappa_{2x}, \kappa_{2y}, \kappa_{2z}) \quad (11.139)$$

En el punto de incidencia del rayo, esto es, en el punto $(x, 0, z)$, la expresión (11.133) impone la condición

$$\begin{aligned} & E_{01} \text{sen}(\kappa_{1x}x - \omega_1 t) + E'_{01} \text{sen}(\kappa'_{1x}x + \kappa'_{1z}z - \omega'_1 t) \\ &= E_{02} \text{sen}(\kappa_{2x}x + \kappa_{2z}z - \omega_2 t) \end{aligned} \quad (11.140)$$

Esta igualdad debe cumplirse en todo instante, y la fase misma debe ser igual para los tres rayos en la interface, de manera tal que simultáneamente deben cumplirse las condiciones

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 = \omega \quad (11.141)$$

$$\kappa_{1x} = \kappa'_{1x} = \kappa_{2x} \quad (11.142)$$

$$\kappa'_{1z} = \kappa_{2z} = 0 \quad (11.143)$$

La condición (11.141) significa que sin importar si el rayo se refleja y/o transmite su frecuencia no cambia. Y como el color de una radiación queda definido por su frecuencia y no por su longitud de onda, resulta que un rayo de luz se refleja y se transmite sin cambiar de color. Por ejemplo, si incide luz roja desde el aire sobre la superficie de una pileta de natación llena de agua, todos los observadores, fuera de la pileta o sumergidos en ella, verán un rayo de color rojo.

Pero como la velocidad de la luz varía al pasar de un medio óptico a otro y la frecuencia no cambia, debe cambiar la longitud de onda. Luego, se cumple que

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega}{2\pi} \lambda_1 = \frac{c}{n_1} \\ v_2 &= \frac{\omega}{2\pi} \lambda_2 = \frac{c}{n_2} \end{aligned} \right\} \frac{\omega}{2\pi} \lambda_1 n_1 = \frac{\omega}{2\pi} \lambda_2 n_2 \Rightarrow \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 \quad (11.144)$$

Por otro lado, la condición (11.143) implica que los rayos reflejado y transmitido no tiene componentes perpendiculares al plano definido por el rayo incidente y la normal a la superficie de separación de los medios, lo que implica que los tres rayos y la normal son coplanares. Todavía más, la condición (11.142) implica que las componentes de los vectores de onda paralelas al plano de separación son iguales, en particular

$$\kappa_1 \text{sen } \hat{i} = \kappa'_1 \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \hat{i} = \hat{r} \quad (11.145)$$

porque $\kappa_1 = \kappa'_1$ (los rayos incidente y reflejado están en el mismo medio óptico). Por otro lado

$$\kappa_1 \text{sen } \hat{i} = \kappa_2 \text{sen } \hat{t} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{sen } \hat{i} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \text{sen } \hat{t} \quad (11.146)$$

Usando la expresión (11.144) es inmediata la relación

$$n_1 \text{sen } \hat{i} = n_2 \text{sen } \hat{t} \quad (11.147)$$

que no es otra que la ley de Snell. En el párrafo que sigue aplicaremos estos conceptos.

11.8 – El espectro electromagnético

El conjunto de postulados que lleva a las soluciones de ondas electromagnéticas planas y sus consecuencias merecen una breve discusión. Ante todo, no parece evidente a partir de la igualdad (11.112) que la velocidad de la luz vaya a ser diferente en diferentes medios, porque el producto $\mu\epsilon$ podría ser constante. Por lo pronto, si las propiedades de un medio quedan determinadas por su permeabilidad y su permitividad, es imposible que dos medios diferentes posean idénticos valores de estos parámetros. Por ejemplo, si una hoja de papel tuviera los mismos valores de permeabilidad y permitividad que el aire, sería aire, y en consecuencia la hoja sería invisible.

Obsérvese de paso que la velocidad de propagación es la misma para los campos eléctrico y magnético (de manera tal que evolucionan sin desplazamiento relativo) y que por lo demás la misma expresión (11.112) parecería sugerir que la velocidad de propagación de la luz alcanza su máximo en el vacío. En efecto, de acuerdo a lo discutido en la sección 6.3, la susceptibilidad eléctrica χ_E es definida positiva, de manera tal que la permitividad ε de cualquier medio, $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_E)$, es siempre mayor que la del vacío, ε_0 . Por su lado, como ya dijimos en la sección 8.9, el valor absoluto de la susceptibilidad magnética χ_M de los medios lineales es del orden de $10^{-5} - 10^{-6}$, lo que hace que la permeabilidad $\mu = \mu_0(1 + \chi_M)$ sea del orden de la unidad.

Los campos E y B admiten una solución tipo onda en vacío, de manera tal que son ondas electromagnéticas. Que cada uno de los versores \mathbf{e}_E y \mathbf{e}_B sea perpendicular a la dirección de propagación es coherente con este resultado. Pero todavía más, puede demostrarse que los versores son mutuamente perpendiculares entre sí, es decir, la terna $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{\kappa})$ es ortogonal.

Aun en las sustancias diamagnéticas el incremento del valor de la permitividad es largamente superior al decremento de permeabilidad magnética, y en consecuencia la velocidad de propagación resulta menor que en el vacío; por ejemplo, la permitividad relativa del benceno (una sustancia diamagnética) es 1,84 y su permeabilidad relativa es apenas algunos millonésimos menor que la unidad, de forma tal que la velocidad de propagación de la luz en el benceno es $1/\sqrt{1,84} = 0,74$ veces la del vacío.

Es muy importante notar que el argumento de la solución (11.107) (o de la ecuación (11.108), es lo mismo) depende sólo de la velocidad de propagación, y en consecuencia que con la misma velocidad pueden propagarse ondas de diferente frecuencia a condición que el cociente ω/κ (o equivalentemente el producto $f\lambda$) se mantenga constante.

El conjunto de ondas electromagnéticas que sólo se diferencian por su frecuencia (o equivalentemente por su longitud de onda) se conoce como *espectro electromagnético*. Un esquema simplificado del mismo se muestra en la figura 11.16, en la que se han tomado inversa de segundo, esto es, seg^{-1} , y metro (m) como unidades de frecuencia y longitud de onda, respectivamente. A veces las frecuencias se encuentran en hertz (o hertzios), cuyo símbolo conocemos del capítulo anterior, esto es, Hz . De alguna manera la unidad seg^{-1} es más adecuada para temas físicos, y la razón para tomar la unidad Hz (en lugar de seg^{-1}) es para evitar confundir la frecuencia con la pulsación (que claramente coinciden a menos de un factor 2π) y es una unidad más bien práctica y que resulta más familiar (de hecho, es la unidad en que se denomina a las frecuencias de las emisoras de radio). A pesar de que en diversas ramas de la actividad científico-tecnológica se utilizan diferentes unidades, optaremos por estas, porque. Usualmente, en muchas ramas de Astronomía y Astrofísica las radiaciones suelen identificarse por su longitud de onda, aunque por practicidad se utiliza la unidad *angstrom* (\AA , $1 \text{\AA} = 10^{-10} m$), en tanto que en Astrofísica de muy alta energía, tal como la que estudia la radiación cósmica y radiación Cerenkov, normalmente se identifica a la radiación por su energía.

Volviendo a la figura 11.16, la parte del espectro que abarca hasta frecuencias del orden de $10^9 seg^{-1}$ es la que se conoce como *región de radiofrecuencias*; este intervalo comprende las frecuencias en las que se transmiten las señales de radio y televisión, y en

la que operan los radioaficionados. Estas frecuencias están muy por encima de las frecuencias *audibles*, esto es, las frecuencias comprendidas entre 20 y 20.000 seg^{-1} a las que es sensible el oído humano.

Las señales con longitud de onda entre 0,3 m y 0,001 m quedan comprendidas en la *región de microondas*; en estas frecuencias operan los radares y la atmósfera terrestre

Las ondas electromagnéticas se propagan con una determinada velocidad que depende básicamente de la permitividad del medio. Pero como la velocidad va como el producto $f\lambda$, toda combinación que conserve constante el producto corresponderá a una onda que puede propagarse en ese medio con esa velocidad. El continuo de ondas diferenciadas sólo por su frecuencia constituye el espectro electromagnético.

posee un par de *ventanas ópticas*, que es el nombre con el que se denomina a las bandas de frecuencia para las cuales la atmósfera es *transparente* a la radiación. En términos absolutamente generales, los gases que conforman una atmósfera planetaria absorben la radiación incidente y la atenúan; se dice entonces que la atmósfera es *opaca* a esas radiaciones. La profundidad a la que puede penetrar un determinado tipo de radiación depende de varios factores, entre ellos su intensidad (que en general varía con la frecuencia) y la densidad, temperatura y constitución química de la atmósfera. La particular dinámica de la interacción hace que algunas radiaciones (caracterizadas por su frecuencia) puedan atravesar la atmósfera

prácticamente sin ser absorbidas y llegar a la superficie del planeta. El conjunto de frecuencias que no son absorbidas constituye una ventana.

La radiación que incide sobre la atmósfera terrestre proviene de todo el conjunto de objetos estelares que constituyen lo que suele denominarse espacio extraterrestre. Estos cuerpos emiten radiación que abarca prácticamente todo el espectro electromagnético, y esa radiación contiene información acerca de la constitución y estado termodinámico del objeto emisor, de manera tal que la comprensión, análisis y estudio de las características y propiedades de todo objeto estelar requiere de la recolección de la radiación que emite. Los dispositivos que se utilizan para recolectar radiación se denominan *telescopios*, y se clasifican según las características de la radiación que pueden detectar. En particular, aquellos que son sensibles a la radiación en la región de las microondas se llaman *radiotelescopios*, y parece evidente que la principal ventaja de aprovechar las ventanas ópticas reside en que el telescopio puede ser basado en Tierra, a un costo de operación accesible y con tecnología comparativamente sencilla.

La región del espectro que abarca las longitudes de onda entre $10^{-3} m$ y $7,5 \times 10^{-7} m$ (frecuencias entre aproximadamente $3 \times 10^{11} \text{seg}^{-1}$ y $4 \times 10^{14} \text{seg}^{-1}$) se conoce como *infrarrojo*, y comprende la radiación térmica de cuerpos a partir de -270°C en el extremo inferior (que suele denominarse *infrarrojo lejano*), temperatura esta que representa el límite de interés a escala cosmológica y astrofísica y de la enorme mayoría de las aplicaciones tecnológicas. El extremo superior (o *infrarrojo cercano*) se relaciona con la radiación térmica de cuerpos a aproximadamente 3.700°C . Digamos aquí que la radiación térmica es la que

emite cualquier cuerpo por estar a temperatura mayor que el cero absoluto y tiene que ver con la excitación térmica de sus átomos y moléculas.

En el capítulo 1 hemos visto que todo cuerpo opaco refleja parte de la radiación que recibe y parte la absorbe, transformándola en energía térmica. El equilibrio termodinámico exige que la temperatura de un cuerpo y su entorno sean iguales, de manera tal que un cuerpo está en equilibrio térmico sólo si su tasa de absorción de radiación iguala a su tasa de emisión.

Nuestro planeta, por ejemplo, absorbe la fracción de la radiación solar que es capaz de atravesar la atmósfera (que como puede verse en la figura 11.16 se trata fundamentalmente de radiación en la región del visible) y alcanza el equilibrio a una temperatura del orden de -25°C , que corresponde a una radiación de aproximadamente 10^{-5} m ($0,01\text{ mm}$) de longitud de onda, bien en la región del infrarrojo. Sin embargo, las moléculas de agua y dióxido de carbono que se encuentran en la

Todo cuerpo a una temperatura por encima de cero emite radiación (radiación térmica). A la temperatura propia de los planetas, esa radiación se halla en la región del infrarrojo, que es fuertemente absorbida por la atmósfera terrestre y que en todo caso nuestros ojos no pueden detectar. Por eso, a ojo desnudo, vemos la luz que los planetas reflejan y no la que emiten.

parte inferior de la atmósfera (a una altura de entre 15 y 20 km , en el límite de la *tropósfera*, conocida como *tropopausa*) son opacas a la radiación de esa longitud de onda y la absorben, reemitiendo una parte hacia el espacio y otra fracción hacia la superficie del planeta, a través del familiar mecanismo conocido como efecto invernadero y que es responsable de que la temperatura de equilibrio del sistema planeta-atmósfera sea de alrededor de 15°C .

La radiación de equilibrio infrarroja no es exclusiva de la Tierra sino que por el contrario es la característica dominante en todos los planetas y planetoides del sistema solar. De hecho, los extremos corresponden a Mercurio, que emite en $9 \times 10^{-6}\text{ m}$ ($0,009\text{ mm}$) y Plutón, que emite radiación de cerca de $110 \times 10^{-6}\text{ m}$ ($0,11\text{ mm}$).

Obsérvese que estas radiaciones se hallan en la región del infrarrojo lejano, lo que explica por qué la emisión de los planetas en el visible es prácticamente nula, de manera tal que si se los ve no es por la radiación que emiten sino por la que reflejan. Debe quedar claro que cualquier otro objeto planetario que pueda existir más allá de Neptuno (planeta o planetoide, pero aún dentro del sistema solar) emitirá radiación térmica dentro de estos órdenes de magnitud. Para decirlo en términos cuantitativos, Plutón es un planetoide a unas $5,5\text{ horas} - \text{luz}$ (aproximadamente 5.900 millones de kilómetros) del Sol, a una temperatura de unos -240°C . Imaginemos que otro planetoide[†] existiera a una distancia doble del Sol, con la mitad de la masa de Plutón (que ya de por sí es más pequeño que la Luna): en estas condiciones su temperatura podría estar en alrededor de los -250°C , de manera tal que

[†] El sistema solar es miles de veces mayor que la distancia Sol-Plutón, de manera tal que es altamente probable que exista no ya uno sino un considerable número de planetoides, posiblemente producto de partes repelidas durante la formación de los grandes planetas gaseosos. De hecho, uno de esos planetoides es Plutón.

emitiría radiación térmica de longitud de onda de cerca de $144 \times 10^{-6} \text{ m}$ (0,14 mm), claramente muy por debajo del visible.

Como puede verse en la figura 11.16, existen en la región infrarroja tres ventanas atmosféricas, situadas en el infrarrojo cercano, en las bandas centradas en 12.500 Å, 22.000 Å y 34.000 Å, respectivamente, que resultan insuficientes para recolectar toda la información en la región del infrarrojo, de modo que las observaciones astrofísicas se realizan desde satélites exosféricos.

La banda ubicada entre aproximadamente 3.500 Å y 7.500 Å corresponde a la *luz*

La luz visible es la banda de frecuencias a las que es sensible nuestro sistema de detección (los ojos). El agua es transparente a estas frecuencias, de manera tal que los peces también “ven en el visible”. La diferencia fundamental es que en tierra seca se está en contacto con el aire ($n=1$) y no con el agua ($n=1,33$), que se manifiesta en fisiologías diferenciadas entre animales de tierra y de agua, sobre todo en lo que tiene que ver con la estructura de la córnea y el

visible, que comprende la parte del espectro electromagnético que es capaz de provocar en nosotros la sensación subjetiva de la vista. El origen de este tipo de radiación se relaciona con las transiciones de nivel de energía, principalmente de los electrones, en el interior de los átomos y las moléculas. La luz visible en realidad está compuesta por ondas de diferente frecuencia (o longitud de onda, como se prefiera), cada una de las cuales corresponde a un determinado color. Cuando todas las ondas de la región del visible se mezclan se produce lo que se conoce como *luz blanca* (son bastante populares y conocidas las experiencias de hacer girar rápidamente una rueda multicolor para verla blanca, o a la inversa, hacer pasar luz blanca por un prisma para descomponerla

en los diferentes colores que la conforman).

Si bien la percepción de color varía con cada persona, podemos establecer una suerte de valor medio de la longitud de onda capaz de provocar la sensación de cada color:

Rojo	$7.000 \text{ \AA} \equiv 700 \text{ nm}$
Anaranjado	$6.000 \text{ \AA} \equiv 600 \text{ nm}$
Amarillo	$5.800 \text{ \AA} \equiv 580 \text{ nm}$
Verde	$5.300 \text{ \AA} \equiv 530 \text{ nm}$
Azul	$4.700 \text{ \AA} \equiv 470 \text{ nm}$
Violeta	$4.200 \text{ \AA} \equiv 420 \text{ nm}$

Como se infiere de la figura 11.16, en esta banda se localiza la ventana óptica más importante de la atmósfera terrestre, de manera tal que es en esta región espectral por la que pasa y en la que se concentra la mayor cantidad de energía proveniente del Sol. Demás está decirlo, este hecho constituye la base de las formas de vida tal y cual las conocemos en nuestro planeta.

Las frecuencias por encima de $8 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}$ (o longitudes de onda por debajo de los 3.500 Å) corresponden al ultravioleta, que por comodidad también se subdivide en cercano (hasta aproximadamente 10^{16} seg^{-1}) y lejano. Este tipo de radiación se origina en

transiciones de electrones entre niveles atómicos y el continuo, de manera tal que, a la inversa, su energía es del orden de las requeridas para ionizar átomos y disociar moléculas. Esta es la razón por la que son nocivos para las formas de vida desarrolladas en el planeta, y la existencia de prácticamente toda forma viviente se relaciona con la presencia de la capa de ozono, que a una altura de unos 80 km por sobre la superficie terrestre absorbe buena parte de la radiación ultravioleta proveniente del Sol.

De hecho el ozono es el resultado de una serie de transformaciones químicas relacionadas con procesos de fotodisociación y recombinación que toman energía de la radiación ultravioleta, que de esta forma se ve atenuada. Una fracción de esta radiación, con todo, es capaz de atravesar la atmósfera y llegar a la superficie, aunque en una magnitud que, salvo exposición prolongada, no provoca lesiones mayores en células y tejidos. Como la piel humana posee una cierta “memoria” acumulativa, el daño provocado –por pequeño que sea– es irreversible, razón por la cual es necesaria una cobertura UV adecuada para quienes se exponen a los rayos solares, en particular en verano y en horarios en que el Sol está alto.

La ausencia de ventanas en esta región del espectro hace que la exploración ultravioleta del espacio extraterrestre se lleve adelante a través de plataformas exosféricas.

A partir de frecuencias del orden de $3 \times 10^{17} \text{ seg}^{-1}$ ($\lambda = 10^{-9} \text{ m}$) y hasta aproximadamente $3 \times 10^{20} \text{ seg}^{-1}$ se extiende la región de rayos X, relacionados con las transiciones de los electrones más internos de los átomos y con la radiación que se produce cuando un electrón muy energético es frenado muy rápidamente (*bremssstrahlung*). Las energías involucradas en estos procesos son capaces de provocar disociaciones moleculares y, en los seres vivos, necrosis celular y la destrucción masiva de tejidos cuando la exposición es prolongada. A nivel planetario la fuente más importante de irradiación es la corona solar, que emite de manera permanente radiación X de alta y baja energía relativa (que se conocen como rayos X duros y blandos, respectivamente). Esta radiación de alta energía es en parte responsable de la ionización de la atmósfera superior terrestre, que permanece en estado de plasma y se la conoce como *ionosfera*.

Las transiciones a nivel nuclear producen ondas electromagnéticas con frecuencias que van desde 10^{19} seg^{-1} (en la región de los rayos X duros) hasta 10^{23} seg^{-1} . Obsérvese que este tipo de radiación, conocida como radiación γ , tiene un origen bien distinto al de los rayos X aunque sus energías pueden ser similares. La fuente más importante de irradiación de este tipo de ondas son los rayos cósmicos[†].

[†] Los rayos cósmicos están compuestos por partículas subatómicas de gran energía, provenientes de fuera de la atmósfera terrestre. Si bien su origen todavía no está fehacientemente comprobado, hay serios indicios de que la mayor parte provendría del núcleo de una galaxia activa ubicada en la constelación del Centauro.

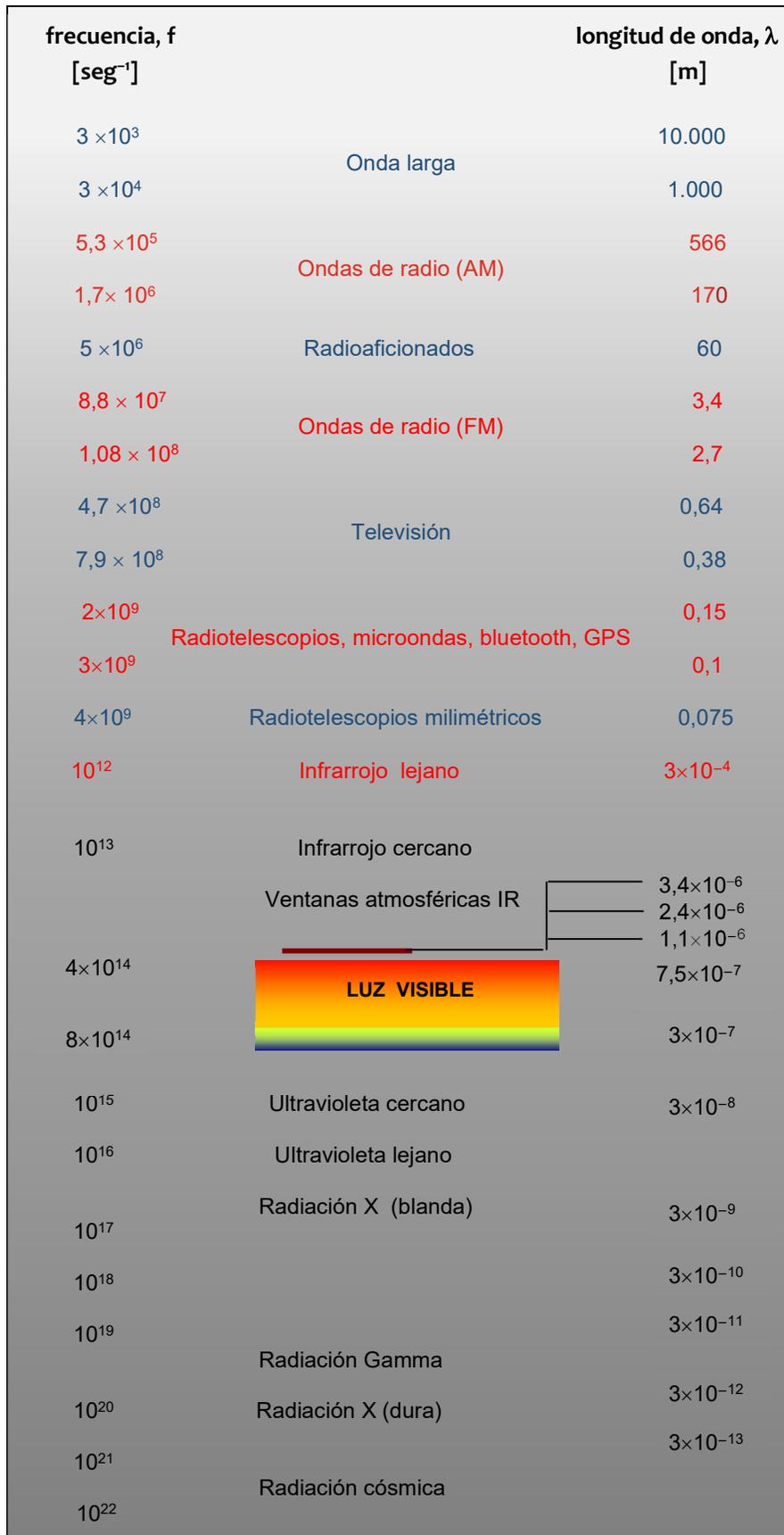


Fig. 11.16: espectro electromagnético.

11.9 – Energía de la onda. Vector de Poynting

Supongamos una superficie Σ que encierra un volumen \mathcal{V} dentro del cual existen cargas eléctricas inmersas en un medio lineal. Si el sistema no es dispersivo, el contenido de energía se halla necesariamente asociado al trabajo necesario para armar la particular configuración y llevarlo al estado en que se encuentra. Sin embargo, las cargas tienden a moverse como producto de la interacción con los campos, de manera tal que el contenido de energía tiende a variar en el tiempo. Como resultado neto, habrá una transferencia de energía a través de las paredes de la superficie Σ , porque la conservación de la energía impone que se reciba o se entregue trabajo para llevar de una configuración a otra.

Sea \vec{S} el vector que representa este flujo de energía por unidad de tiempo y de área. Parece evidente que el contenido energético del sistema se incrementa si al volumen \mathcal{V} entra más energía de la que sale, y dado que la divergencia de un vector es una medida del balance entre la “cantidad de magnitud vectorial” que sale de un volumen \mathcal{V} a través de sus paredes respecto de lo que entra a través de las mismas, parece razonable cuantificar la transferencia neta de energía a través de la cantidad $-\nabla \cdot \vec{S}$ (de nuevo, el signo negativo indica que si sale más energía que la que ingresa, la energía interna disminuye).

Parte de la energía disponible, por otro lado, debe emplearse para armar la nueva configuración de cargas. Esta energía se toma del total que puede existir dentro del sistema, de manera tal que si W representa el trabajo del sistema por unidad de volumen requerido para armar la nueva configuración dentro del volumen \mathcal{V} , la cantidad $-W$ es una medida del cambio de la energía (o del contenido energético de la nueva configuración): disminuye si el sistema realiza trabajo ($W > 0$) y aumenta si el sistema recibe trabajo ($W < 0$).

Si llamamos u a la cantidad de energía por unidad de volumen (o simplemente densidad de energía) de manera tal que la energía total sea $U = \iiint u d\mathcal{V}$, nuestro balance energético se reduce a la forma

$$\frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{dW}{dt} \quad (11.148)$$

que integrado en todo el recinto encerrado por la superficie Σ se escribe como

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} u d\mathcal{V} = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{S} d\mathcal{V} - \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} W d\mathcal{V} \quad (11.149)$$

Ahora bien, en presencia de campos eléctricos y magnéticos la fuerza que realiza trabajo es la de Lorentz, \vec{F}_{LOR} . Dado que W representa un trabajo por unidad de volumen, el término dW/dt representa una potencia por unidad de volumen, precisamente la que transfiere la fuerza de Lorentz. Cuantitativamente, debe ser

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}_{LOR} \cdot \vec{v}}{\mathcal{V}} = \frac{q}{\mathcal{V}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j}_L \cdot \vec{E} \quad (11.150)$$

donde ρ es la carga (libre) por unidad de volumen y \vec{j}_L , en consecuencia, la corriente (libre) que aparece dentro del volumen. Esta corriente \vec{j}_L puede relacionarse con la corriente de desplazamiento y la intensidad de campo magnético a partir de la ecuación de Ampere-Maxwell (11.79)

$$\vec{j}_L = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (11.151)$$

de manera tal que podemos desarrollar la expresión (11.150) en la forma

$$\frac{dW}{dt} = \vec{E} \cdot \left[\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (11.152)$$

El primer sumando del miembro derecho puede escribirse de manera diferente en la forma

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (11.153)$$

y en virtud de la ley de inducción de Faraday (11.78) hacerlo en términos del campo de inducción \vec{B}

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (11.154)$$

El primer sumando del miembro derecho de la última ecuación tiene una estructura similar a la del segundo sumando del miembro derecho de la ecuación (11.151). Como hemos supuesto que el medio es lineal, valen las relaciones constitutivas (11.80) y (11.81), de manera tal que resultan

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (11.155)$$

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \mu \vec{H}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (11.156)$$

Teniendo en cuenta estas dos últimas expresiones es que podemos escribir la expresión (11.152) en la forma

$$\frac{dW}{dt} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (11.157)$$

que reemplazada en la ecuación (11.149), después de un mínimo reordenamiento, resulta en el balance energético total

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} u \, d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{S} \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \, d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, d\mathcal{V} \quad (11.158)$$

Obsérvese que hemos reordenado el balance para poner de manifiesto la similitud funcional de los primeros y los segundos sumandos a cada lado de la igualdad. Por simple comparación resulta entonces

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (11.159)$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (11.160)$$

La expresión (11.159) representa la densidad de energía contenida en el volumen (con campos y cargas móviles), y resulta de la suma de las componentes energéticas eléctrica y magnética. Obsérvese que esta expresión es válida aun en el caso en que los campos \vec{E} y \vec{B} sean estáticos. Por su lado, la identidad (11.160) es una medida del flujo de energía a través del volumen donde se realiza el balance, y se conoce como *vector de Poynting*.

Valen la pena un par de comentarios acerca de esta última magnitud. En primer lugar,

como dijimos al principio de este parágrafo, el vector de Poynting representa un flujo de energía radiada, y se refiere a la conservación de la energía electromagnética de un sistema de cargas, de manera tal que en principio la radiación de un sistema de cargas puede calcularse una vez que se conoce en detalle el movimiento de esas cargas, porque de esa forma quedan determinados los campos \vec{E} y \vec{H} .

Recuérdese que hemos supuesto que el medio encerrado por la superficie Σ es lineal, de manera tal que todo el análisis vale sólo para ese tipo de medios. Por otro lado, siendo una magnitud vectorial, representa la dirección y el sentido en el que las ondas electromagnéticas transportan la energía del campo electromagnético. En el caso de las ondas planas ya hemos mencionado que los vectores \vec{E} , \vec{B} y \vec{k} forman una terna, de manera tal que el producto vectorial de los dos primeros (proporcional al vector de Poynting) resulta en el tercero, que es precisamente el vector de propagación.

Nótese por último que las dimensiones del vector de Poynting son las del producto de la unidad de campo eléctrico por la unidad de intensidad de campo magnético; en el sistema MKSC resulta $[S] = V \times A/m^2 = W/m^2$, que no es otra cosa que la medida de la potencia transmitida por el campo electromagnético por unidad de superficie. Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto estas propiedades.

Ejemplo 11.7: Imaginemos un alambre de longitud ℓ , rectilíneo y muy largo, de manera tal de poder trabajar lejos de los extremos y considerarlo infinito. Supongamos que el alambre está sometido a una diferencia de potencial V_{AD} entre sus extremos. Realicemos el balance de energía que corresponde a esta situación.

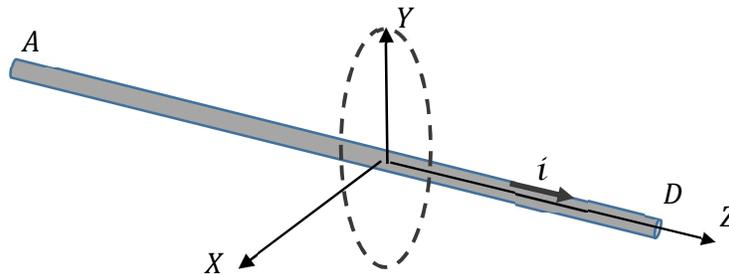


Fig. 11.17: El alambre AD está circulado por una corriente de intensidad i . El balance de energía se realiza a través de la superficie transversal (en línea de puntos) contenida en el plano XY.

Con la diferencia de potencial entre los extremos A y B se genera un campo eléctrico \vec{E} en la dirección \hat{e}_z de la forma

$$\vec{E} = \frac{V_{AB}}{\ell} \hat{e}_z \quad (11.161)$$

en tanto que el campo magnético generado por la corriente i a una distancia R del cable (digamos el radio de la superficie delimitada por línea de puntos en la figura 11.17) tiene intensidad

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{i}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (11.162)$$

de manera tal que el vector de Poynting, de acuerdo a la expresión (11.160), vale

$$\vec{S} = \frac{V_{AB} i}{2\pi R \ell} (-\hat{e}_R) \quad (11.163)$$

Que el vector de Poynting sea entrante en la dirección radial significa que se le está entregando potencia al alambre para que la corriente circule. De hecho, dado que el vector de Poynting representa la medida de la potencia intercambiada por unidad de área, la potencia total resulta del producto del módulo de \vec{S} por el área lateral del cable $A_{LAT} = 2\pi R\ell$ (la superficie que atraviesa la energía), esto es,

$$P = |\vec{S}|A_{LAT} = iV_{AB} \tag{11.164}$$

que coincide con la potencia disipada por el cable en forma de calor por efecto Joule.

Ejemplo 11.8: En la sección 6.6 concluimos en que la energía almacenada en un dieléctrico de permitividad ϵ vale $U = \frac{\epsilon}{2} \iiint |\vec{E}|^2 d\mathcal{V}$, de manera tal que la densidad de energía es simplemente $u = \epsilon |\vec{E}|^2 / 2$. A partir de la identidad (11.159) demostraremos que la potencia por unidad de volumen $P = du / dt$, puesta en juego para polarizar el dieléctrico, coincide con el valor de la divergencia del vector de Poynting.

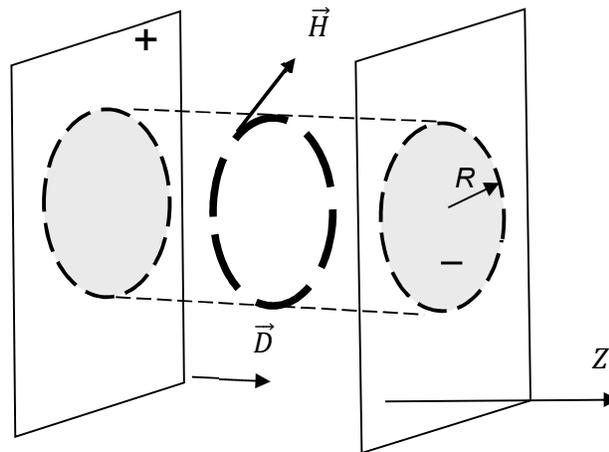


Fig. 11.18: se muestra una sección del dieléctrico entre las placas plano paralelas de un condensador. La línea gruesa es el camino de integración del miembro izquierdo de la ecuación (11.159).

Obsérvese ante todo que al no haber corrientes libres en el seno del dieléctrico no existe trabajo de reordenamiento de cargas, de manera tal que en la ecuación (11.148) es $W = 0$. Por otro lado, la ley de Ampere-Maxwell (11.79) en forma integral en el caso de corriente libre nula se reduce a la forma

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} \tag{11.165}$$

donde Σ representa la superficie (abierta) apoyada sobre el contorno de integración del miembro izquierdo. Si suponemos que en la región de integración de radio R los campos son uniformes (y esta aproximación es razonablemente válida lejos de los bordes de las placas y para $R \ll \ell$, la longitud típica de la placa) de la integración de la ecuación (11.165) obtenemos inmediatamente el módulo de \vec{H} como

$$2\pi R |\vec{H}| = \frac{d}{dt} \iint \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{d|\vec{D}|}{dt} \pi R^2 \quad (11.166)$$

Obsérvese en la figura 11.18 que el vector \vec{H} tiene sentido \hat{e}_ϕ , en tanto que el vector \vec{E} tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento, es decir, \hat{e}_z . Luego, el sentido del vector de Poynting es $(-\hat{e}_R)$ y su módulo vale

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{R}{2\epsilon} \frac{dD}{dt} = R \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) \quad (11.167)$$

En síntesis, el vector de Poynting resulta ser

$$\vec{S} = R \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) \hat{e}_R \quad (11.168)$$

en tanto que su divergencia, por tener sólo componente en la dirección radial, vale

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{\partial S}{\partial R} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) \quad (11.169)$$

que, en vista del balance de energía (11.148) con $dW/dt = 0$, completa nuestra demostración.

Ejemplo 11.9: El campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío se expresa como $\vec{E} = \vec{E}_0 \text{sen}(kx - \omega t) = 10 \text{sen}(1,27 \times 10^7 \text{m}^{-1}x - 3 \times 10^{15} \text{seg}^{-1}t) \text{V/m} \hat{e}_z$. Hallemos el vector de Poynting asociado y la potencia media que transporta la onda electromagnética.

Ante todo notemos que la onda se propaga en la dirección x con el campo eléctrico oscilando en la dirección z , y que siendo $k = 1,27 \times 10^7 \text{m}^{-1}$, la longitud de onda vale $\lambda = 496 \text{nm}$. Consecuentemente, la frecuencia asociada a la onda es $f = 6 \times 10^{14} \text{seg}^{-1}$ y la

pulsación vale $\omega = 3,8 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1}$. Por lo demás, la ecuación (11.78) relaciona el rotor del campo eléctrico con las variaciones temporales del vector inducción

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} = -\frac{\partial E}{\partial x} \hat{e}_y = -kE_0 \text{sen}(kx - \omega t) \hat{e}_y \quad (11.170)$$

Obsérvese que la única derivada que tiene valor no nulo es en la dirección x . En consecuencia, el vector inducción resulta

$$\vec{B} = -\int -kE_0 \text{sen}(kx - \omega t) \hat{e}_y dt = \frac{k}{\omega} E_0 \text{sen}(kx - \omega t) (-\hat{e}_y) \quad (11.171)$$

Pero como $k/\omega = 1/c$, resulta

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \text{sen}(kx - \omega t) (-\hat{e}_y) \quad (11.172)$$

El vector de Poynting se escribe como

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \text{sen}^2(1,27 \times 10^7 \text{ m}^{-1} x - 3 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1} t) \hat{e}_x \quad (11.173)$$

y la densidad media de potencia resulta de integrar en un período el vector de Poynting, esto es,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \text{sen}^2(kx - \omega t) dt = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T \quad (11.174)$$

Recordando que es $\omega = 2\pi/T$, es fácil corroborar que la integral es igual a $1/2$ y que en total resulta

$$P = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (11.175)$$

Es ilustrativo comparar este resultado con el que obtenemos de la ecuación (11.159) para los promedios temporales de las energías eléctrica y magnética y su suma, esto es,

$$u_E = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \text{sen}^2(kx - \omega t) dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \quad (11.176)$$

$$u_M = \frac{1}{T} \int \frac{B_0^2}{2\mu_0} \text{sen}^2(kx - \omega t) dt = \frac{B_0^2}{4\mu_0} = \frac{E_0^2}{4c^2\mu_0} \quad (11.177)$$

de manera tal que la suma de las energías resulta en

$$\frac{E_0^2}{4c^2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \quad (11.178)$$

que, a menos del factor c (la velocidad de la luz) coincide con la ecuación (11.175) (porque al cabo la densidad de energía debemos dividirla por una velocidad para obtener una potencia por unidad de superficie).

11.10 – Difracción e interferencia de ondas electromagnéticas

Una de las disputas más célebres de la Física tuvo lugar a fines del siglo XVII, a propósito de la naturaleza de la luz. Por un lado Cristian Huygens, en su *“Tratado de la luz”*, publicado en 1690, sostenía la idea de que se trata de un fenómeno ondulatorio, en tanto que Isaac Newton postulaba en su *“Óptica, tratado de las reflexiones, refracciones, inflexiones y colores de la luz”*, publicado en 1704, que se trata de un fenómeno corpuscular. Más allá de la moderna concepción de la dualidad onda-partícula (que aquí no trataremos) las dos teorías, la corpuscular y la ondulatoria, son irreconciliables, sencillamente porque predicen resultados diametralmente opuestos. Ya para la época de la controversia había, sin embargo, serios indicios a favor de la teoría ondulatoria, entre otras cosas porque en tanto la teoría newtoniana asegura que la luz se mueve en línea recta, la de Huygens permite predecir la desviación de la luz hacia el campo geométrico de la sombra, un fenómeno que ya había sido observado entre 1640 y 1650 por Francesco Grimaldi. Con el tiempo los experimentos le dieron la razón a Huygens, fundamentalmente el de Thomas Young en 1801, diseñado para establecer el carácter de la luz, y la de Newton fue definitivamente desechada cuando en 1850 Foucault midió la velocidad de la luz en el agua, un medio ópticamente más denso que el aire: de la teoría ondulatoria se deriva que la velocidad de la luz es menor en los medios ópticamente más densos, en tanto que de la teoría

Dos haces de luz pueden *interferir*, de la misma manera en que lo hacen las ondas mecánicas. Esta propiedad es la que puso de manifiesto Young en su experimento de 1801. Pero no puede ser cualquier par de ondas, deben ser coherentes (deben provenir de una fuente en común de manera tal de conservar la diferencia de fase constante) y el obstáculo (o la ranura) debe ser de tamaño comparable a la longitud de onda del haz de luz.

corpúscular se concluye en lo opuesto (el experimento de Foucault concuerda con el resultado que presentamos en la ecuación (11.130)). Más allá de esta edificante controversia histórica, vale la pena discutir el fenómeno de la desviación de la luz en presencia de obstáculos, digamos ahora, un típico fenómeno ondulatorio.

En general se denomina *difracción* al fenómeno que hace que una onda se desvíe por la presencia de un obstáculo. En el caso particular de un haz de luz, se desvía hacia la región de su sombra geométrica, debido a la presencia de un cuerpo opaco. Se denomina *interferencia* a las formas de interacción entre dos ondas en algún punto del espacio. Sin en lugar de un obstáculo se coloca una ranura en el paso de una onda, pueden apreciarse también los efectos de la difracción y la interferencia. Consideremos con algún detalle estas posibilidades.

11.10.1 – Difracción por una rendija

Imaginemos una rendija de ancho b , como la de la figura 11.19, desde la que emerge la radiación proveniente de alguna fuente lumínica monocromática (luz de un único color)

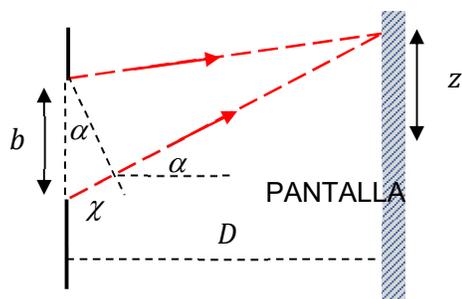


Fig. 11.19: esquema para observar la difracción de Fraunhofer cuando incide luz de longitud de onda λ . Se cumple la condición $b^2/D\lambda \ll 1$.

de longitud de onda λ . A una distancia D de la rendija se coloca la pantalla sobre la que se visualiza el fenómeno.

La primera condición para que la luz incidente difracte es que el ancho de la ranura sea comparable a la longitud de onda, esto es, $b \sim \lambda$. Si, por ejemplo, usted hace pasar un rayo láser rojo ($\lambda \sim 670nm$) por la puerta de su casa ($b \sim 2m$) no habrá de notar absolutamente nada. Si por el contrario, la abertura por la que hace pasar el láser es una rendija del tamaño de las de una red de difracción típica ($b \sim 4000nm$)

podrá ver que se produce una imagen sobre la pantalla que va cambiando a medida que la pantalla se aleja. Si la distancia rendija-pantalla es “pequeña”, se proyecta la sombra de la rendija con algunas pocas líneas iluminadas en los bordes. Mientras vamos alejando la pantalla, esto es, en tanto hacemos $b/D \ll 1$, la sombra de la ranura se hace cada vez menos visible y en su lugar aparece un patrón de líneas claras y oscuras que se conoce como *espectro de difracción*.

La manera de cuantificar la relación longitud de onda-ancho de ranura-distancia a la pantalla es a través de una cantidad adimensional conocida como número de Fresnel, $b^2/D\lambda$. Parece inmediato que nosotros pretendemos trabajar en el límite $b^2/D\lambda \ll 1$. (difracción de Fraunhofer) porque este límite nos permite estudiar la disposición de las líneas del espectro.

Calculemos la diferencia de fase entre las ondas o rayos extremos (los que se han marcado en la figura 11.19) que llegan a un punto de intersección sobre la pantalla (que hemos marcado a una altura z respecto del centro de la rendija). Los caminos que recorren los dos rayos extremos no son lo mismo, y de la figura 11.19 es casi evidente que la diferencia de caminos ópticos, χ , vale

La cantidad $b^2/D\lambda$ define el número de Fresnel, F . Si $F \sim 1$ el fenómeno se conoce como difracción de Fresnel, en tanto que el límite en el que trabajamos, $F \ll 1$, se conoce como difracción de Fraunhofer. La diferencia esencial entre uno y otro límite es que en el primero puede verse la imagen de la ranura y un patrón de líneas claras y oscuras en los extremos, en tanto que en el segundo caso sólo se observa un patrón de líneas claras y oscuras alternadas.

$$\chi = b \operatorname{sen} \alpha \quad (11.179)$$

Obsérvese que el ángulo α no es óptico, es puramente geométrico, depende sólo de la ubicación del punto z que se elija sobre la pantalla. Por lo demás, si la diferencia de caminos es χ , la onda inferior tardará un tiempo $\Delta t = \chi/c$ extra en llegar al punto de intersección en la pantalla. Esto implica que la onda que proviene del extremo inferior de la rendija de la figura 11.19 llega con una diferencia de fase δ , que se vincula con la diferencia de marcha (diferencia de caminos ópticos) a través de la relación definida por

$$\delta = \omega \Delta t = \omega \frac{\chi}{c} = 2\pi f \frac{\chi}{f\lambda} = \frac{2\pi b}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha \quad (11.180)$$

Las dos ondas que llegan desde los extremos de la rendija al punto z tienen igual amplitud, digamos a_0 , y sus ecuaciones de onda son

$$\xi_1 = a_0 \operatorname{sen}(k\ell - \omega t) \quad (11.181. a)$$

$$\xi_2 = a_0 \operatorname{sen}(k\ell - \omega t + \delta) \quad (11.181. b)$$

donde ℓ se refiere a la dirección de propagación. La onda que resulta en el punto z debido solamente a estas dos componentes, es de la forma

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = a_0 [\operatorname{sen}(k\ell - \omega t) + \operatorname{sen}(k\ell - \omega t + \delta)] = \\ &= \left\{ 2a_0 \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) \right\} \operatorname{sen} \left(k\ell - \omega t + \frac{\delta}{2} \right) \equiv A \operatorname{sen} \left(k\ell - \omega t + \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (11.182)$$

donde hemos definido $A = 2a_0 \cos(\delta/2)$. Una forma alternativa de llegar a este resultado es utilizando el teorema del coseno, como ilustramos en la figura 11.20 (a).

La amplitud resultante será

$$A = \sqrt{2} a_0 \sqrt{1 + \cos \delta} \quad (11.183)$$

y es inmediato corroborar que, cualquiera sea el ángulo δ , las dos amplitudes, la de la expresión (11.182) y la de la ecuación (11.183), coinciden.

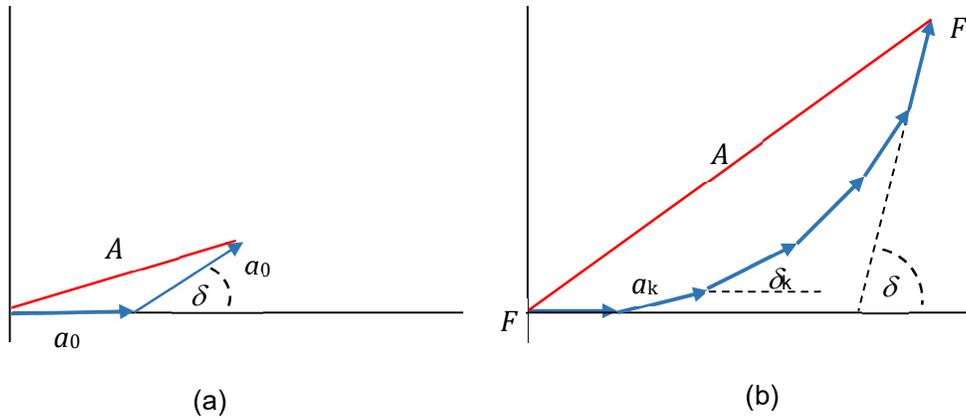


Fig. 11.20: a la izquierda se muestra la suma vectorial de dos amplitudes. En el panel (b) se han sumado seis vectores, todos de igual amplitud e idéntica fase relativa. Los vectores en rojo muestran el vector con la amplitud y fase resultantes.

Ahora bien, al punto z de la pantalla convergen también las infinitas ondas intermedias. Podemos pensarlas como un conjunto finito de ondas, todas de amplitud a_k desfasadas una respecto de la otra la misma cantidad δ_k . Parece evidente entonces que la amplitud de la onda que resulta con una diferencia de marcha χ resulta de la suma (vectorial) de todas las amplitudes a_k de todas las ondas elementales desfasadas δ_k , esto es, debe cumplirse

$$\delta = \sum_k \delta_k \tag{11.184}$$

$$A = \sum_k a_k \tag{11.185}$$

En la figura 11.20 (b) hemos efectuado la suma para seis ondas. El tren de vectores desfasados forma el arco FF' , y la recta que va entre los extremos mide, precisamente, la amplitud A de la interferencia de todos estos rayos. Cuando las amplitudes son infinitesimales, la figura de líneas rectas tiende a una circunferencia, de manera tal que la amplitud A es la medida de la cuerda delimitada por el arco de circunferencia FF' , a saber

$$A = FF' \frac{\text{sen}(\delta/2)}{(\delta/2)} \equiv FF' \text{sinc}(\delta/2) \tag{11.186}$$

donde hemos introducido la función

$$\text{sinc}(u) = \frac{\text{sen}(u)}{u} \quad (11.187)$$

Como en el centro de la pantalla es $\delta = 0$ y la función $\text{sinc}(\delta/2) \rightarrow 1$ para $\delta \rightarrow 0$, podemos definir A_0 como la amplitud de la onda en el punto de la pantalla enfrenteado al centro de la ranura, de manera tal de escribir la amplitud en cualquier punto como

$$A = A_0 \text{sinc}(\delta/2) \quad (11.188)$$

En la figura 11.21 (a) hemos graficado la función $\text{sinc}(\delta/2)$, que es una manera de decir que hemos graficado la amplitud de la onda que llega a un dado punto z con una diferencia de fase δ . Ahora bien, la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, de manera tal que la intensidad lumínica en los diferentes puntos de la pantalla será de la forma

$$J = J_0 [\text{sinc}(\delta/2)]^2 \equiv J_0 \text{sinc}^2(\delta/2) \quad (11.189)$$

o, en términos de la expresión (11.179)

$$J = J_0 \text{sinc}^2(\pi b \text{sen } \alpha / \lambda) \quad (11.190)$$

En la figura 11.21(b) hemos graficado la intensidad de la onda. Obsérvese que la función $\text{sinc}(\delta/2)$ se anula cada vez que sea

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \neq 0 \quad (11.191)$$

de manera tal que los mínimos de la función (y en consecuencia los ceros de intensidad, franja oscura), en términos de la expresión (11.179), se localizan en los puntos donde se cumple

$$\frac{\pi b \text{sen } \alpha}{\lambda} = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \neq 0 \quad (11.192)$$

Inmediatamente puede deducirse que los máximos de intensidad habrán de localizarse en el origen y en aquellos puntos de la pantalla donde se verifique

$$\frac{\pi b \text{sen } \alpha}{\lambda} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (11.193)$$

Parece razonable escribir estas ecuaciones en términos de los parámetros propios de las ondas, esto es, que no dependan del ángulo α . Para ello observemos que por simple construcción geométrica es

$$tg\alpha = \frac{z + b/2}{D} \tag{11.194}$$

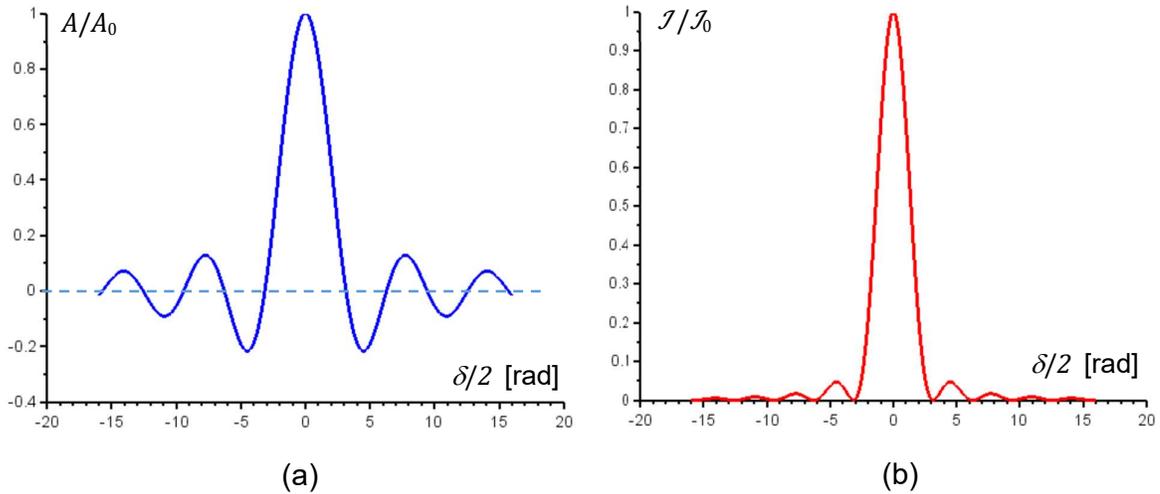


Fig.11.21: a la izquierda se muestra la función de amplitud y a la derecha la de intensidad, correspondientes a la onda resultante en un punto de la pantalla a la que llega con desfase de valor δ .

Entre las expresiones (11.193) y (11.194) es fácil ver que los mínimos de interferencia (zonas de mínima iluminación) ocurren en los puntos de altura z sobre la pantalla, en los que vale la relación

$$z = D \operatorname{tg} \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{m\lambda}{b} \right) \right] - \frac{b}{2} \tag{11.195}$$

y los máximos se ubican en los puntos que cumplen la condición

$$z = D \operatorname{tg} \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{(m + 1/2)\lambda}{b} \right) \right] - \frac{b}{2} \tag{11.196}$$

Como estamos trabajando en la aproximación de Fraunhofer ($b^2/D\lambda \ll 1$) el ancho de cualquier rendija capaz de mostrar los fenómenos de interferencia y difracción es mucho menor que las distancias involucradas, de manera tal que el término $b/2$ se torna prácticamente irrelevante y puede ignorarse sin más.

11.10.2 – Difracción por dos rendijas

De alguna pretendemos extender el método de cálculo que empleamos para una sola rendija. En el esquema de la figura 11.22 sintetizamos los aspectos más importantes. Se trata de dos rendijas iguales, de ancho b , separadas por un tabique opaco de ancho a . Obsérvese que ahora el ángulo α lo tomamos desde la mitad del tabique opaco, aunque la diferencia de marcha χ se refiere, como antes, a la que existe entre las ondas que provienen del extremo superior de la rendija superior, y del extremo inferior de la rendija inferior.

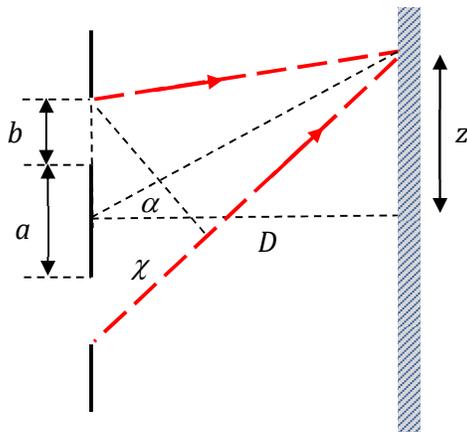


Fig. 11.22: esquema de dos rendijas. El ángulo α ahora lo medimos desde el centro de la pantalla opaca que separa las dos rendijas.

En el caso de una rendija trabajamos en la aproximación $b^2/D\lambda \ll 1$. Coherentemente extenderemos la aproximación a la forma $(a + b)^2/D\lambda \ll 1$, de manera tal que, siendo $D \gg (a + b)$, podemos aproximar la diferencia de caminos como

$$\chi = (a + 2b) \text{sen} \alpha \quad (11.197)$$

y la diferencia de fase, en consecuencia,

$$\delta = \kappa \chi = \frac{2\pi(a + 2b)}{\lambda} \text{sen} \alpha \quad (11.198)$$

Bien visto, el problema de la figura 11.22 trata de la interferencia de dos haces provenientes de dos focos. Como antes, resultado de la superposición de las vibraciones, la amplitud A será función tanto de la diferencia de fase δ como del ángulo de difracción α . En la figura 11.23 establecemos la situación general. Como se ve, tratamos el caso de dos rendijas como dos ondas, de amplitudes A_1 y A_2 , respectivamente, provenientes de cada rendija con un ángulo de desfase entre ellas de valor δ .

Para cada rendija ya hemos evaluado la amplitud (ecuación (11.188)). Y como las dos son iguales, y ambas son de ancho b , para cada una de ellas vale

$$A_1 = A_2 = A_0 \text{sinc} (\pi b \text{sen} \alpha / \lambda) \quad (11.199)$$

Como antes, podemos relacionar el ángulo de desfase δ con la amplitud resultante A , a partir de la relación

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta} = 2A_0 \cos(\delta/2) \quad (11.200)$$

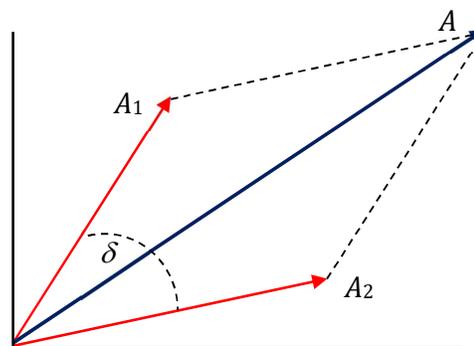


Fig.11.23: suma vectorial de las amplitudes de las ondas que provienen de cada una de las rendijas.

En términos de la expresión (11.199) la amplitud resultante vale

$$A = 2A_0 \frac{\text{sen}(\pi b \text{sen} \alpha / \lambda)}{(\pi b \text{sen} \alpha / \lambda)} \cos \left[\frac{\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha}{\lambda} \right] \quad (11.201)$$

y la intensidad resulta

$$J = J_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b \text{sen} \alpha}{\lambda} \right) \cos^2 \left[\frac{\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha}{\lambda} \right] \quad (11.202)$$

que puede interpretarse como la intensidad de interferencia provocada por dos fuentes (el término asociado a la función $\cos [\pi(a + 2b) \text{sen}(\alpha)/\lambda]$), modulada por la intensidad de difracción de una rendija (el término $\text{sinc}(\pi b \text{sen}(\alpha)/\lambda)$), como puede verse en la figura 11.24. Obsérvese que los máximos de interferencia se producen en los puntos para los que es máxima la función coseno y los máximos de difracción donde es máxima la función $\text{sinc}(u)$. De hecho, estos valores son

Máximos de interferencia

$$\frac{\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha}{\lambda} = m\pi \Rightarrow (a + 2b) \text{sen} \alpha = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (11.203)$$

Máximos de difracción

$$\frac{\pi b \text{sen} \alpha}{\lambda} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (11.204)$$

Mínimos de interferencia

$$\frac{\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha}{\lambda} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (11.205)$$

Mínimos de difracción

$$b \operatorname{sen} \alpha = m \lambda \quad m \in \mathbb{Z} \neq 0 \quad (11.206)$$

Como puede verse, el patrón de rayas claras y oscuras que se producen corresponde a los puntos (o conjunto de puntos distribuidos en las franjas verticales) de máxima y mínima iluminación. Cuando se emplean más de dos rendijas, las figuras y patrones resultantes son similares, pero surge una ligera dificultad matemática porque para $N > 2$ rendijas ya no podemos calcular la amplitud de la onda resultante como en la ecuación (11.201), aunque sí es posible hacerlo como una suma finita sobre las amplitudes de las rendijas. Aquí habremos de obviar los cálculos, más engorrosos que difíciles, de esa sumatoria. Basta decir que para $N > 2$ rendijas el resultado general es de la forma

$$A = A_0 \frac{\operatorname{sen}\left[N\delta/2\right]}{\operatorname{sen}\left[\delta/2\right]} \quad (11.207)$$

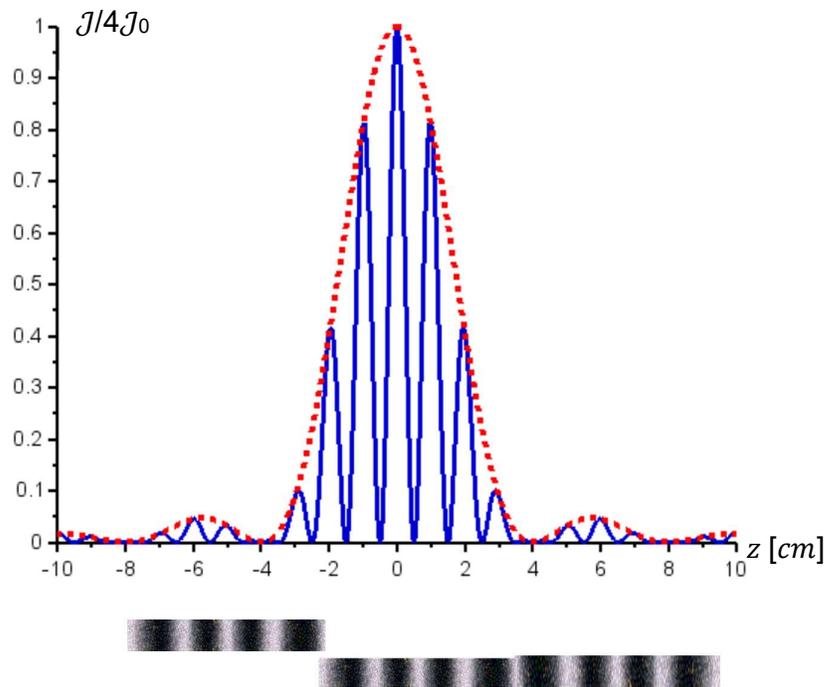


Fig.11.24: figura de difracción por dos rendijas. La línea azul corresponde a la interferencia de las ondas (cosenoidal) modulada por la figura de difracción por una rendija (en línea de puntos rojos). El patrón corresponde a dos ranuras de 1μ de ancho cada una, separadas una distancia $a=10b$, iluminadas con luz visible ($\lambda=500\mu$, color verde) y proyectadas sobre una pantalla situada a 4m de las ranuras. En la parte inferior se recrea la imagen sobre la pantalla.

donde δ es la diferencia de fase entre rendijas contiguas y $N \delta/2$ es la diferencia de fase total. De esta manera la intensidad de las ondas sobre la pantalla resulta ser

$$J = J_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi b \text{sen} \alpha/\lambda)}{(\pi b \text{sen} \alpha/\lambda)} \right]^2 \frac{\text{sen}^2[N\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha/\lambda]}{\text{sen}^2[\pi(a + 2b) \text{sen} \alpha/\lambda]} \quad (11.208)$$

En la figura 11.25 mostramos la figura que resulta para seis rendijas, que en definitiva se reduce a la modulación del patrón de interferencia por el patrón de difracción de una rendija (en línea de puntos rojos).

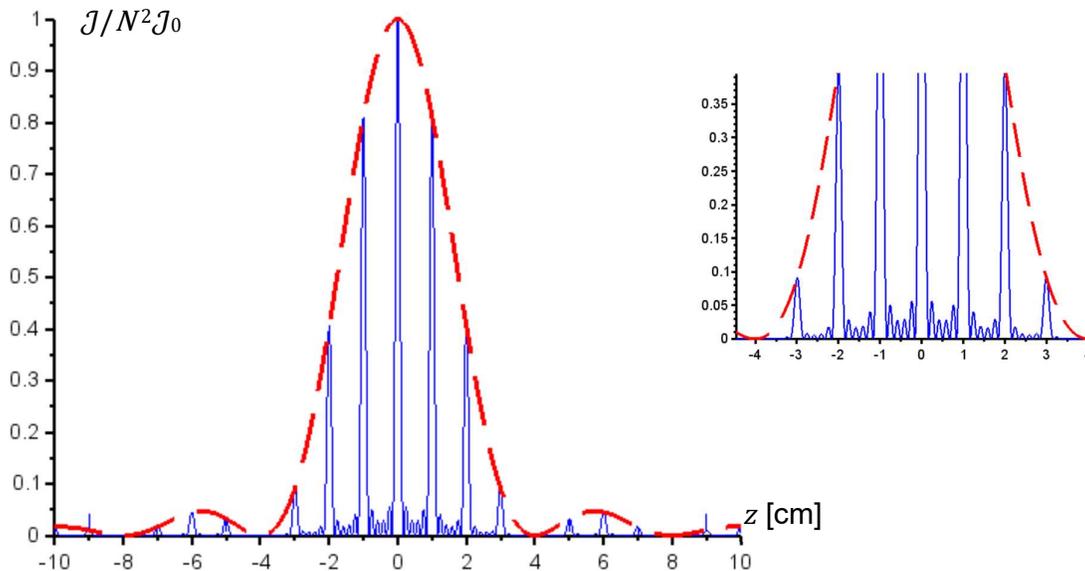


Fig.11.25: patrón de difracción e interferencia para una red de $N=6$ rendijas. En el panel superior a la derecha se muestra en detalle la parte inferior del lóbulo central, en el que pueden verse los máximos secundarios (4) entre máximos principales (7), y los mínimos (5) entre máximos principales). Obsérvese que para una red de N rendijas:

- hay $N-2$ máximos secundarios entre máximos principales
- hay $N-1$ mínimos entre máximos principales
- el número de máximos principales en el lóbulo central es $MP = 2 \lfloor 2a/b \rfloor - 1$. ($\lfloor 2a/b \rfloor$ es la parte entera de $2a/b$)

Resumen del capítulo

A lo largo del capítulo hemos presentado y discutido las características salientes de las ondas. En particular pusimos el énfasis en el hecho de que se trata de fenómenos de transporte de energía, independientemente de que se trate de un pulso, un tren de pulsos o una señal periódica (algo así como un tren infinito de pulsos).

Hemos prestado especial atención a las ondas planas, porque demostramos que el campo electromagnético (en vacío) se propaga como ondas planas. Un punto a destacar es que al ser planas, oscilan en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Pero bien sabemos que hay infinitos planos perpendiculares a un eje dado (si se prefiere, existen infinitos planos cuya intersección resulta en el eje de propagación) a lo largo del cual se propaga la onda, de manera que parece necesario destacar cuál es el plano en que oscila la onda, al que hemos llamado plano de polarización.

En este sentido, vale la pena destacar que los planos de polarización de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, esto es, existe naturalmente una terna ordenada que deriva del producto vectorial entre los vectores campo eléctrico y campo magnético, que resulta precisamente en el vector propagación. Y que además está asociado al vector de Poynting, que, recordemos, representa un flujo de energía radiada y se refiere a la conservación de la energía electromagnética de un sistema de cargas. Si se dispone de la información del movimiento completo de esas cargas es posible calcular los campos \vec{E} y \vec{H} y, luego, evaluar en detalle la radiación que genera ese sistema de cargas.

Finalmente, hemos presentado los fenómenos de difracción e interferencia, típicos de las ondas. Tal vez valga la pena mencionar que estos fenómenos son comunes a todo tipo de ondas, no sólo electromagnéticas, y que uno de los aspectos más salientes es que por momentos se tornan indistinguibles. De hecho, presentamos el problema suponiendo que un haz de luz incide sobre una rendija (o un arreglo de rendijas), de manera tal que se desvía en sus bordes, genera ondas desfasadas, y luego los frentes de onda interactúan en algún punto del espacio (a saber, sobre la pantalla). Pero no parece posible la interferencia sin la difracción, y los patrones que muestran se entrelazan hasta tal punto que terminan por hacer innecesaria su distinción formal.

Complementos del capítulo

Coeficientes de Fresnel – Polarización por reflexión

En el apartado 11.3 hemos presentado las características salientes de las ondas polarizadas. Vale la pena que profundicemos un poco estos aspectos, referidos específicamente al campo electromagnético.

Para ello, como en la figura 11.15 de la sección 11.4, supongamos que el campo electromagnético incide sobre la superficie de separación de dos medios dieléctricos (ópticos) diferentes. En general, el plano de polarización será arbitrario y posiblemente ni siquiera esté definido, pero siempre podemos considerar que cada uno de los campos puede descomponerse en una componente contenida en el plano de incidencia (definido por la normal a la superficie de separación y el vector propagación) y otra perpendicular a este plano, digamos $E_{\parallel}, E_{\perp}, B_{\parallel}, B_{\perp}$, donde los subíndices se refieren a las componentes paralela y perpendicular, respectivamente.

Por convención, el estado de polarización de una onda electromagnética se define en términos del vector eléctrico, esto es, se dice que la onda está polarizada paralela al plano de incidencia cuando el vector campo eléctrico sólo tiene componente E_{\parallel} (y en consecuencia el campo magnético tiene una única componente, a saber, B_{\perp}) en tanto que se dice que está polarizada perpendicularmente al plano de incidencia cuando sólo tiene componente E_{\perp} (y en consecuencia el campo magnético tiene una única componente, a saber, B_{\parallel}). El primer modo de polarización se conoce como *transverso magnético* (TM), en tanto que el segundo se conoce como modo *transverso eléctrico* (TE). En la figura 11.26 ilustramos estos modos.

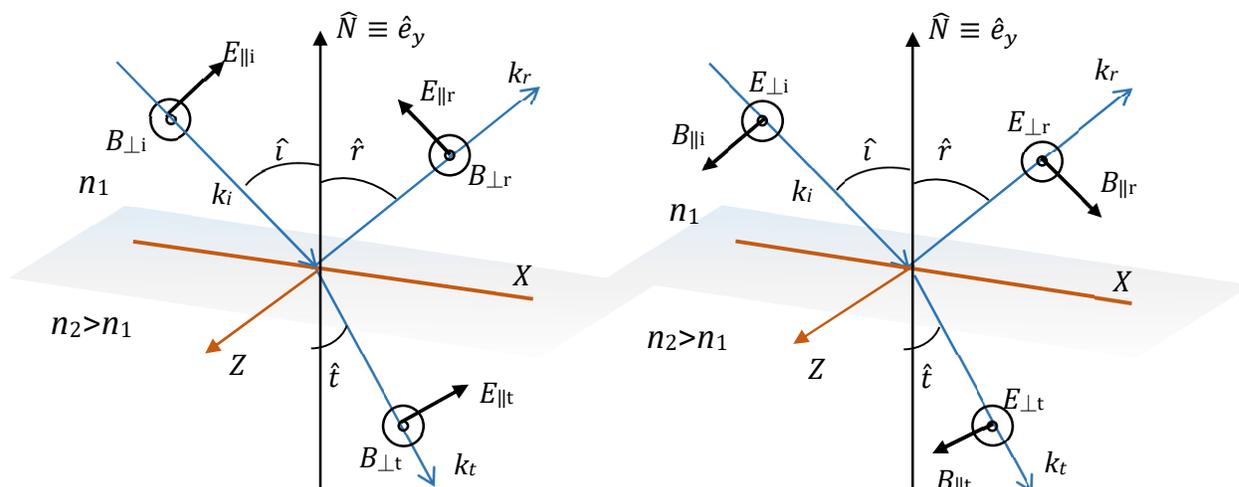


Fig.11.26: a la izquierda se muestra una onda en modo TM, y a la derecha una en modo TE. Ambos modos, por supuesto, representan ondas transversales, la única característica es que sólo tienen componentes en un plano perpendicular al plano de incidencia.

De la sección 6.6 sabemos que al pasar de un medio dieléctrico a otro se conservan las componentes tangenciales del vector \vec{E} . Y de la sección 8.10 sabemos que también se conservan las componentes normales del vector inducción, \vec{B} , y las componentes tangenciales del vector intensidad de campo magnético, \vec{H} (suponiendo, como aquí haremos, que no hay corrientes libres en la interface). En términos matemáticos, si adoptamos la convención de primar la componente reflejada (como en la sección 11.7) las condiciones de frontera pueden escribirse para cada uno de los modos de la siguiente manera

Modo TM:

$$(E_{T1} + E'_{T1}) = E_{T2} \equiv E_{\parallel 1} \cos \hat{i} - E'_{\parallel 1} \cos \hat{i} = E_{\parallel 2} \cos \hat{i} \quad (11.209)$$

$$H_{T1} - H_{T2} = 0 \equiv \frac{B_{T1}}{\mu_1} = \frac{B_{T2}}{\mu_2} \equiv \frac{B_{\perp 1}}{\mu_1} + \frac{B'_{\perp 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\perp 2}}{\mu_2} \quad (11.210)$$

Obsérvese el signo de la componente $E'_{\parallel 1}$, es negativo. Si fuera $n_2 < n_1$, existiría un ángulo de incidencia (\hat{i}_{LIM}) para el cual no existiría rayo transmitido. La única manera en que puede conservarse la componente tangencial del vector campo eléctrico es que al reflejarse conserve su sentido.

Modo TE:

$$(E_{T1} + E'_{T1}) = E_{T2} \equiv E_{\parallel 1} \cos \hat{i} - E'_{\parallel 1} \cos \hat{i} = E_{\parallel 2} \cos \hat{i} \quad (11.211)$$

$$\frac{B_{T1}}{\mu_1} = \frac{B_{T2}}{\mu_2} \equiv \frac{B_{\parallel 1}}{\mu_1} - \frac{B'_{\parallel 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel 2}}{\mu_2} \quad (11.212)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión que definimos en el capítulo 1 (sección 1.10.3, ecuación (1.68)) ahora cobran un significado más preciso. Parece inmediato definirlos como

$$r = \frac{E'_1}{E_1} \quad (11.213)$$

$$t = \frac{E_2}{E_1} \quad (11.214)$$

y es casi inmediato que en todo caso habrá que definirlos en cada uno de los modos de propagación. Analicemos primero el modo TM. De la ley de Faraday, expresión (11.78), es casi inmediata la relación

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (11.215)$$

y como los vectores de onda y eléctrico son perpendiculares entre sí, resulta

$$\frac{2\pi}{\lambda} E = \omega B \Rightarrow E = vB \quad (11.216)$$

Reemplazando la ecuación (11.216) en la expresión (11.212) resulta de inmediato

$$\frac{E_{\parallel 1}}{\mu_1 v_1} + \frac{E'_{\parallel 1}}{\mu_1 v_1} = \frac{E_{\parallel 2}}{\mu_2 v_2} \quad (11.217)$$

o, dividiendo por $E_{\parallel 1}$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (1 + r_{TM}) = \frac{t_{TM}}{\mu_2 v_2} \equiv t_{TM} = \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1} (1 + r_{TM}) \quad (11.218)$$

Reemplacemos ahora esta última ecuación en la igualdad (11.211), para obtener

$$r_{TM} = \frac{n_2 \mu_1 \cos \hat{i} - n_1 \mu_2 \cos \hat{t}}{n_2 \mu_1 \cos \hat{i} + n_1 \mu_2 \cos \hat{t}} \quad (11.219)$$

$$t_{TM} = \frac{2 n_1 \mu_2 \cos \hat{i}}{n_2 \mu_1 \cos \hat{i} + n_1 \mu_2 \cos \hat{t}} \quad (11.220)$$

que son los coeficientes de reflexión y transmisión en el caso del campo propagándose en modo TM. Las definiciones en el caso TE son en un todo similares, sólo que ahora debemos pensar en los coeficientes en la forma

$$r_{TE} = \frac{E'_{\perp 1}}{E_{\perp 1}} \quad (11.221)$$

$$t_{TE} = \frac{E_{\perp 2}}{E_{\perp 1}} \quad (11.222)$$

De la expresión (11.220) resulta

$$\frac{B_{\parallel 1}}{\mu_1} \cos \hat{i} - \frac{B'_{\parallel 1}}{\mu_1} \cos \hat{r} = \frac{B_{\parallel 2}}{\mu_2} \cos \hat{t} \quad (11.223)$$

que a partir de la relación (11.216) podemos escribir como

$$\frac{E_{\parallel 1}}{\mu_1 v_1} \cos \hat{i} - \frac{E'_{\parallel 1}}{\mu_1 v_1} \cos \hat{r} = \frac{E_{\parallel 2}}{\mu_2 v_2} \cos \hat{t} \quad (11.224)$$

$$\frac{n_1 \cos \hat{i}}{\mu_1} (1 - r) = \frac{n_2 \cos \hat{t}}{\mu_2} t \quad (11.225)$$

y como en modo TE es

$$E_{\parallel 1} + E'_{\parallel 1} = E_{\parallel 2} \equiv 1 + r = t \quad (11.226)$$

después de un álgebra rutinario se llega a las identidades

$$r_{TE} = \frac{n_1 \mu_2 \cos \hat{i} - n_2 \mu_1 \cos \hat{t}}{n_2 \mu_1 \cos \hat{i} + n_1 \mu_2 \cos \hat{t}} \quad (11.227)$$

$$t_{TE} = \frac{2 n_1 \mu_2 \cos \hat{i}}{n_2 \mu_1 \cos \hat{i} + n_1 \mu_2 \cos \hat{t}} \quad (11.228)$$

Las ecuaciones (11.219), (11.220), (11.227) y (11.228) definen los coeficientes de Fresnel, que debido a la presencia de las permitividades son válidas para cualquier medio plano transparente. Si apelamos a la aproximación (11.131), esto es, si trabajamos en la aproximación $\mu \approx \mu_0$, estas expresiones se simplifican y quedan como

$$r_{TM} = \frac{n_2 \cos \hat{i} - n_1 \cos \hat{t}}{n_2 \cos \hat{i} + n_1 \cos \hat{t}} \quad (11.229)$$

$$t_{TM} = \frac{2 n_1 \cos \hat{i}}{n_2 \cos \hat{i} + n_1 \cos \hat{t}} \quad (11.230)$$

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cos \hat{i} - n_2 \cos \hat{t}}{n_2 \cos \hat{i} + n_1 \cos \hat{t}} \quad (11.231)$$

$$t_{TE} = \frac{2 n_1 \cos \hat{i}}{n_2 \cos \hat{i} + n_1 \cos \hat{t}} \quad (11.232)$$

Es interesante notar el signo negativo en ambos coeficientes de reflexión. Significa que, en principio, podría desaparecer una de las componentes del campo reflejado, esto es, la onda podría polarizarse una vez que se refleja. Desde ya que ambas igualdades deben valer junto con la ley de Snell, de manera tal que, si la que se extingue para un cierto ángulo de incidencia \hat{i}_B es la componente TE, debemos plantear

$$n_1 \cos \hat{i}_B = n_2 \cos \hat{t}_B \quad (11.233)$$

$$n_1 \sen \hat{i}_B = n_2 \sen \hat{t}_B \quad (11.234)$$

Pero el cociente entre las ecuaciones nos lleva a la identidad

$$tg \hat{i}_B = tg \hat{t}_B \quad (11.235)$$

que resulta imposible porque significaría que el rayo transmitido tiene la misma dirección que el rayo incidente, o sea, no se difractó. De hecho, la ley de Snell prohíbe esta situación. Si la componente que se extingue es la TM, las ecuaciones a plantear son

$$n_2 \cos \hat{i}_B = n_1 \cos \hat{t}_B \quad (11.236)$$

$$n_1 \sen \hat{i}_B = n_2 \sen \hat{t}_B \quad (11.237)$$

o sea,

$$tg \hat{i}_B = \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \right) tg \hat{t}_B \quad (11.238)$$

Por su lado, la suma de los cuadrados de las expresiones (11.236) y (1.237) se traduce en la forma

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \hat{i}_B &= \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \cos^2 \hat{t}_B \\ \sen^2 \hat{i}_B &= \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \sen^2 \hat{t}_B \end{aligned} \right\} 1 = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \cos^2 \hat{t}_B + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 (1 - \cos^2 \hat{t}_B) \quad (11.239)$$

cuya solución, para $\alpha = (n_1/n_2)^2$, es

$$\cos^2 \hat{t}_B = \frac{1}{\alpha + 1} \quad (11.240)$$

de manera tal que resultan

$$\sen^2 \hat{t}_B = 1 - \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \quad (11.241)$$

$$tg \hat{t}_B = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} (\alpha + 1) = \sqrt{\alpha} = \frac{n_1}{n_2} \quad (11.242)$$

y, reemplazando en la expresión (11.237), llegamos a la identidad

$$\operatorname{tg} \hat{i}_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (11.243)$$

Si la luz llega a la interface de separación con este ángulo de incidencia, que se conoce como *ángulo de Brewster*, la onda reflejada sólo tendrá componente perpendicular al plano de incidencia, por lo que se alejará del plano linealmente polarizada. Por ejemplo, si incide luz no polarizada (o sea, tiene una componente dentro del plano de incidencia y otra perpendicular al mismo) desde el aire ($n_1=1$) sobre una superficie plana de agua ($n_2=1,3$), con un ángulo $\hat{i}_B = \operatorname{arctg} 1,3 = 52,4^\circ$, la luz reflejada se encuentra linealmente polarizada.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Supongamos una onda plana que se propaga según la ecuación

$$\vec{\xi}(z, t) = 3 \cos(kz - \omega t - 15^\circ)\hat{e}_x + 2 \sin(kz - \omega t + 75^\circ)\hat{e}_y$$

Decida si la onda está polarizada, y en caso afirmativo calcule el estado de polarización.

Ejercicio 2: Incide luz monocromática sobre la superficie de separación de dos medios transparentes de índices n_1 y n_2 , respectivamente. Lo hace con un ángulo de incidencia tal que no hay rayo transmitido al segundo medio. El campo eléctrico es de la forma

$$\vec{E} = 10 \sin(1,27 \times 10^7 m^{-1}x - 3 \times 10^{15} seg^{-1}t) V/m \hat{e}_z$$

- escriba la expresión del vector inducción magnético, si su valor de pico es de $5 \times 10^{-3} T$;
- halle el valor del índice de refracción del medio de incidencia, n_1 ;
- defina el intervalo de valores que puede tomar el índice de refracción n_2 ;
- calcule el valor de la densidad de potencia que transporta la onda.

Ejercicio 3: La tabla muestra la inclinación del Sol sobre el lago Nahuel Nuapi, en San Carlos de Bariloche, el día 21 de diciembre. El índice de refracción del agua del lago puede tomarse como 1,333. Estime el horario en que se polariza la luz reflejada en el lago.

7:00 18.15°	8:00 29.22°	9:00 40.5°	10:00 51.65°	11:00 62.06°	12:00 70.1°
13:00 71.97°	14:00 66.15°	15:00 56.5°	16:00 45.57°	17:00 34.3°	18:00 23.1°

Ejercicio 4: Desde el interior de una pileta con agua ($n=1,33$) se emite un rayo de luz hacia el exterior ($n=1$). Calcule el ángulo para el cual: a) la luz emerge polarizada; b) no emerge luz.

Ejercicio 5: La energía de un fotón se determina como $E=hf$, donde h es la constante de Planck, de valor $h=6,626 \times 10^{-34} J \text{ seg}$, y f es la frecuencia del haz de radiación electromagnética. En términos de la figura 11.16 estime el orden de magnitud de la energía de un fotón de microondas, infrarrojo, de la luz verde, de luz azul, X, de radiación Cerenkov.

Ejercicio 6: En términos del ejercicio anterior, estime el número de fotones que emite un láser rojo por segundo, sabiendo que su potencia es de 5 mW (piense que la energía de un haz es la energía de fotón multiplicada por el número N de fotones)

Ejercicio 7: Sobre una pantalla ubicada a una distancia $D=3m$ incide luz monocromática de longitud de onda $\lambda=600nm$, proveniente de dos rendijas de ancho $b=4\mu$, separadas una distancia $a=1mm$. Calcule la posición sobre la pantalla donde se producen los máximos de orden 1,2,3.

Ejercicio 8: Con los datos anteriores, calcule la distancia entre mínimos contiguos, esto es, mínimos de orden m y $m+1$.

Ejercicio 9: Se dispone un experimento de Young con dos rendijas de ancho b y separación a . Cuando las rendijas se iluminan con luz monocromática de longitud de onda $\lambda=650\text{nm}$, se ven 25 franjas brillantes en 1cm . Para $D=4\text{m}$, calcule la longitud total del grillado $(a+2b)$.

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: está polarizada linealmente, las amplitudes son diferentes pero están en fase, el ángulo es de $33,7^\circ$ y se desarrolla entre el 1er y el 3er cuadrante (pendiente positiva).

Ejercicio 2: a) $\vec{B} = 0,005 \text{ sen}(1,27 \times 10^7 \text{ m}^{-1}x - 3 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1}t) T (-\hat{e}_y)$;

b) $n_1 = 1,27$; c) $1 \leq n_2 < 1,27$; d) $\vec{S} = 4 \times 10^4 \text{ sen}^2(1,27 \times 10^7 \text{ m}^{-1}x - 3 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1}t) W/m^2 \hat{e}_x$.

Ejercicio 3: aproximadamente 10:30 y 15:30.

Ejercicio 4: a) 37° ; b) $48,5^\circ$.

Ejercicio 5: $E_{\text{microondas}} \sim 7 \times 10^{-25} \text{ J}$, $E_{\text{IR}} \sim 6 \times 10^{-21} \text{ J}$, $E_{\text{verde}} \sim 4 \times 10^{-20} \text{ J}$, $E_{\text{azul}} \sim 6 \times 10^{-20} \text{ J}$, $E_x \sim 5 \times 10^{-16} \text{ J}$, $E_{\text{c\u00f3smica}} \sim 5 \times 10^{-12} \text{ J}$

Ejercicio 6: $N \sim 2 \times 10^{16}$ fotones

Ejercicio 7: $y = 1,67 \text{ mm}$ ($m=1$), $3,33 \text{ mm}$ ($m=2$), $5,00 \text{ mm}$ ($m=3$).

Ejercicio 8: es siempre de $1,67 \text{ mm}$

Ejercicio 9: $a+2b = 6,5 \text{ mm}$

Unidad 1: Introducción a la Termodinámica

Parte 1. Conceptos preliminares

1.1 – Introducción	2
1.2 – Conceptos básicos	3
1.3 – Estados de agregación y energía	11
1.4 – Gases ideales	18
1.5– Escalas termométricas	22
1.6 – Respecto de las unidades de las ecuaciones	27

Parte 2: Calor y temperatura

1.7 – Calor y temperatura. Calor específico. Calor latente.	29
1.8 – Calor específico en gases ideales	35
1.9 – Temperatura de equilibrio. Equivalente en agua	38
1.10 – Transporte del calor	44
1.10.1 – Conducción	44
1.10.2 – Convección	51
1.10.3 – Radiación	56

Parte 3: Primer principio de la Termodinámica

1.11– Trabajo mecánico de un sistema	61
1.11.1 – Trabajo en una transformación a temperatura constante	64
1.11.2 – Trabajo en una transformación a presión constante	65
1.11.3 – Trabajo en una transformación a volumen constante	66
1.12 – Primer principio de la Termodinámica	66
1.13 – Algunos aspectos formales del primer principio	74
1.13.1 – El primer principio en forma diferencial	74
1.13.2 – Una forma general del primer principio	75
1.13.3 – Energía interna de un gas ideal	76
1.14 – Procesos adiabáticos	77

Parte 4: Segundo principio de la Termodinámica

1.15 – Máquinas cíclicas y segundo principio de la Termodinámica	82
1.16 – Irreversibilidad y entropía	91
1.17 – La entropía y el segundo principio de la Termodinámica	103

Complementos del capítulo

Ciclo de Carnot y ciclo generalizado de Carnot en el plano TS	115
Primer principio en términos de la entropía. Potenciales termodinámicos	117
Dilatación térmica	123

La ley de Fourier en coordenadas ortogonales	126
Una aproximación a los gases reales	129
Ejercicios propuestos	134
Respuestas a los ejercicios propuestos	139

Unidad 2: Fuerzas y campos eléctricos

2.1 – Introducción	142
2.2 – Primera ley de la electrostática	143
2.3 – Ley de Coulomb	146
2.4 – Generalización de la ley de Coulomb	149
2.5 – El campo eléctrico	154
2.6 – Campo eléctrico en los conductores	178
2.7 – Líneas de campo	179
Complementos del capítulo	
Ejercicio complementario 1	182
Ejercicio complementario 2	184
Ejercicios propuestos	187
Respuestas a los ejercicios propuestos	191

Unidad 3: Campo eléctrico: flujo y simetrías

3.1 – Introducción	195
3.2 – Flujo de un campo vectorial	195
3.3 – Flujo del campo eléctrico	199
3.4 – Simetrías	204
3.4.1: simetría esférica	205
3.4.2: simetría cilíndrica	206
Complementos del capítulo	
Cálculo del campo eléctrico generado por una placa cargada uniformemente en superficie con densidad σ utilizando el teorema de Gauss.	213
El teorema de Gauss en forma diferencial	215
Ejercicios propuestos	217
Respuestas a los ejercicios propuestos	218

Unidad 4: El potencial electrostático

4.1 – Introducción	220
4.2 – Campo y potencial electrostáticos	221
4.3 – El potencial y el trabajo de la fuerza electrostática	226
4.4 – Energía potencial electrostática	237
4.5 – Campo, potencial electrostático y superficies equipotenciales	244
4.6 – Potencial de un dipolo. Desarrollo multipolar	254
Complementos del capítulo	
Ecuaciones de Poisson y de Laplace	258
Sistema de conductores extensos. Coeficientes de capacidad e inducción	259
Principio de funcionamiento de una pila elemental	262
Potenciales biológicos y actividad neuromotriz	264
Ejercicios propuestos	267
Respuestas a los ejercicios propuestos	270

Unidad 5: Capacitores

5.1 – Introducción	273
5.2 – Concepto de capacidad. Condensadores (capacitores)	273
5.3 – Energía almacenada en un capacitor	280
5.4 – Asociaciones de capacitores	282
5.4.1 – Asociación en serie	282
5.4.2 – Asociación en paralelo	284
5.5 – Procesos a carga constante y a potencial constante	293
Complementos del capítulo	
Capacitores de muy alta capacidad	302
Ejercicios propuestos	305
Respuestas a los ejercicios propuestos	308

Unidad 6: Dieléctricos

6.1 – Introducción	310
6.2 – Polarización de un aislante en un campo eléctrico	311
6.3 – Dieléctrico en un campo eléctrico uniforme	316
6.4 – Dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme	320
6.5 – El vector desplazamiento	322
6.6 – Los campos \vec{E} y \vec{D} en la superficie límite de un dieléctrico	334

6.6 – Energía en los dieléctricos inmersos en un campo eléctrico	337
6.7 – Capacidad de un condensador con dieléctrico	339
Complementos del capítulo	
Campos eléctricos no uniformes. Polarización en volumen	347
Ejercicios propuestos	350
Respuestas a los ejercicios propuestos	353

Unidad 7: Elementos de corriente continua

7.1 – Introducción	356
7.2 – El concepto de corriente eléctrica	357
7.3 – Ley de Ohm	359
7.4 – Ley de Ohm microscópica	361
7.5 – Resistores	365
7.6 – Asociaciones de resistores	368
7.4.1 – Asociación en serie	369
7.4.2 – Asociación en paralelo	370
7.7 – Leyes de conservación (leyes de Kirchhoff)	374
7.8 – Potencia	389
7.9 – Circuito RC en corriente continua	397
Complementos del capítulo	
Capacitores parcialmente cargados	401
Teoremas de Thévenin y Norton	404
Puente de Wheatstone	408
Ejercicios propuestos	410
Respuestas a los ejercicios propuestos	414

Unidad 8: Fuerzas y campos magnéticos

8.1 – Introducción	417
8.2 – El campo magnético	418
8.3 – Fuerza sobre un elemento de corriente	424
8.4 – Primera ley de Ampere - Ley de Biot –Savart	428
8.5 – Campo magnético uniforme: solenoides y toroides	446
8.6 – Fuerza y momento sobre una espira	449
8.7– Algunas propiedades del campo magnético	452
8.7.1 – Fuerzas y campos magnéticos de corrientes en volumen	452
8.7.2 – la divergencia del vector inducción	452

8.7.3 – la circulación y el rotor del vector inducción	455
8.8 – Superposición de campos. Conservación de la energía	466
8.9 – Vector intensidad magnética y vector magnetización	469
8.10 – Los campos \vec{B} y \vec{H} en la superficie límite de un medio material	472
Complementos del capítulo	
Algunas propiedades magnéticas de los medios materiales	475
Aceleradores de partículas	479
La ley de Ampere y el principio de interacción de Newton	486
Ejercicios propuestos	488
Respuestas a los ejercicios propuestos	492

Unidad 9: Fenómenos de inducción electromagnética

9.1 – Introducción	494
9.2 – Ley de Faraday - Lenz	494
9.3 – Autoinducción e inducción mutua	512
9.4 – Arreglos con bobinas y resistores en corriente continua (circuitos RL)	519
9.5 – Circuitos RLC de corriente continua	522
Complementos del capítulo	
Efecto Hall	528
Contenido energético de un campo magnético	530
Energía de una configuración de espiras	534
Ejemplo complementario 1	536
Fuerza de un campo magnético sobre una espira	539
Ejemplo complementario 2	542
Balance energético de un sistema de espiras	543
Ejercicios propuestos	546
Respuestas a los ejercicios propuestos	549

Unidad 10: Elementos de corriente alterna

10.1 – Introducción	552
10.2 – Circuito RLC serie con corriente alterna	553
10.3 – Circuitos inductivos y capacitivos. Resonancia	560
10.3.1.– Resonancia	561
10.3.2 – Circuito inductivo	561
10.3.3 – Circuito capacitivo	563
10.4 – Valores eficaces y diagramas	564

10.5 – Potencia en un circuito serie	573
10.6 – Circuito RLC paralelo	579
10.7 – Resonancia y potencia en un circuito RLC paralelo	583
Ejercicios propuestos	591
Respuestas a los ejercicios propuestos	594

Unidad 11: Ondas electromagnéticas

11.1 – Introducción	598
11.2 – El concepto de onda	599
11.3 – Propagación de ondas	602
11.4 – La ecuación de onda	608
11.5 – Ondas polarizadas	611
11.5.1 – Polarización lineal	614
11.5.2 – Polarización circular	615
11.5.3 – Polarización elíptica	615
11.6 – Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento	618
11.7 – El campo electromagnético	624
11.8 – El espectro electromagnético	636
11.9 – Energía de la onda. Vector de Poynting	643
11.10 – Difracción e interferencia de ondas electromagnéticas	650
11.10.1 – Difracción por una rendija	651
11.10.2 – Difracción por dos rendijas	656
Complementos del capítulo	
Coeficientes de Fresnel – Polarización por reflexión	661
Ejercicios propuestos	667
Respuestas a los ejercicios propuestos	669

Apéndice	670
-----------------	-----

Néstor Rotstein

Introducción a la Termodinámica y el Electromagnetismo

Para estudiantes de Ingeniería

Muchos de los descubrimientos del hombre fueron obra de la casualidad. Sin nombrarlos a todos, podemos mencionar la radiactividad, los rayos X, la penicilina, y mucho tiempo antes, cuando la especie era apenas un grupo de tribus diseminadas por sólo algunas pocas partes del planeta, el fuego. Rápidamente el homo sapiens aprendió a dominar el ciclo completo del fuego, demostrando que estamos preparados para aprender de la experiencia y emplear los descubrimientos, casuales o no, en aplicaciones prácticas. Utilizar el fuego para preparar aleaciones metálicas no es producto de la suerte, es producto del ingenio.

Desde siempre nuestra especie pudo asociar los efectos del fuego con el calor, pero el desarrollo formal de las ciencias del calor recién ocurrió para el siglo XVII. Originalmente asociado a la caída de rayos, el fuego dejaba de ser un fenómeno celestial y pasaba a formar parte de las ciencias ilustradas. Y algo similar ocurrió con las descargas eléctricas. Origen del fuego para las tribus de sapiens, apenas una curiosidad en las cortes y palacios hasta la mitad del siglo XVIII, con la invención del pararrayos comenzó a interesar más por sus aplicaciones prácticas, la electricidad, que como fenómeno celestial.

Este libro trata de ambos, del fuego y del rayo, es decir, del calor y de la electricidad. A lo largo de los capítulos expone las ideas centrales de estos conceptos, buscando profundidad sin abandonar una presentación sencilla y su relación con los aspectos tecnológicos centrales asociados a la Termodinámica y al Electromagnetismo. De manera alguna este libro agota el temario completo, no es este un tratado de cada uno de los temas presentados, pero creemos que ilustra sus aspectos centrales, al menos en lo que tiene que ver con las aplicaciones tecnológicas.



Néstor Rotstein es Doctor en Ciencias Físicas, egresado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Profesor Titular e Investigador en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional, donde dirige un Proyecto de Investigación referido a estabilidad de plasmas confinados magnéticamente.

