

Flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos con conductividad finita.

Parte I. Geometría esférica.

Néstor O. Rotstein

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires
Medrano 951 (C1179AAQ), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
nrotstein@cedi.frba.utn.edu.ar

Recibido el 31 de Mayo de 2011, aprobado el 15 de Julio de 2011

Resumen

En este trabajo analizamos flujos magnetohidrodinámicos salientes, rotantes, estacionarios, axisimétricos, en geometría esférica, suponiendo no nula la resistividad del plasma que, por lo demás, se encuentra congelado a un campo magnético de líneas parcialmente abiertas. La colimación del flujo es una condición previa, pues de hecho analizamos estructuras generales que suponemos funcionalmente de variables separadas y con una particular dependencia angular. Se hallan todas las soluciones que autoconsistentemente soportan el flujo, con la casi exclusiva condición de que el flujo sea colimado. Se muestra que, dentro de este contexto, la deflexión de las líneas de campo magnético se asocia a un parámetro de curvatura. Se escriben también las ecuaciones de las componentes de la velocidad del flujo y de la distribución de masa, cuya dependencia angular muestra que se acumula en el ecuador, precisamente en la zona sin viento. Se muestra que, a diferencia de los modelos con conductividad infinita, las isosuperficies de flujo másico no coinciden con las isosuperficies de flujo magnético. Este trabajo forma parte del proyecto UTN-FRBA/1234 "Detección remota y análisis de cambio de patrones de radiación medioambientales"

PALABRAS CLAVE: MHD – PLASMAS – RESISTIVIDAD – FLUJO MÁSIKO

Abstract

In this paper we analyze magnetohydrodynamic, rotating, stationary axisymmetric outflows, in spherical coordinates, assuming finite conductivity of the outflowing plasmas, for all purposes embedded and freeze in partially open magnetic fields. The field collimation is a previous condition, because in fact we study general structures that are formally assumed as separated variables functions and with a given angular dependence. We find all the possible outflowing solutions, with the only condition of the collimation of the flux. Within this framework, the magnetic field deflection is related to a curvature parameter. We find also the expressions of the velocity field components as well as the mass distribution function, which angular dependence shows an equatorial enhancement, precisely in the quiet zone of the wind. We show that, unlike infinite conductivity models, magnetic flux isosurfaces are not aligned with mass flux function isosurfaces. This paper belongs to UTN-FRBA/ 1234 project "Remote detection and change analysis of environmental radiation patterns."

KEYWORDS: MHD – PLASMAS – RESISTIVITY – MASS FLUX

Introducción

En muchas de las modelizaciones de los diversos fenómenos que estudia la Física se invoca algún particular grupo de simetrías. Las ventajas que presentan los fenómenos que pueden estudiarse de esta forma son muchas, sobre todo porque suponen una primera integral del movimiento y, por lo demás, ofrecen en general la posibilidad de mantener el problema en un nivel matemático a la vez riguroso, elegante y tratable.

En este trabajo estamos interesados en estudiar flujos magnetizados de resistividad no nula que muestran simetría de rotación alrededor de un eje, es decir, flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos, en los que la coordenada ignorable es el ángulo azimutal Φ (y, en consecuencia, las ecuaciones de movimiento no pueden depender de esa coordenada y el momento angular alrededor del eje polar es una constante de movimiento).

Tengamos presente que axisimetría no implica necesariamente simetría cilíndrica. Una estrella, por ejemplo, es un objeto autogravitante que a primer orden puede considerarse simétrico según su rotación alrededor del eje que pasa por sus polos, es decir, la coordenada azimutal es ignorable, pero claramente se trata de un objeto "esférico". Las máquinas de fusión (*tokamaks* y *spheromaks*), así como los arcos coronales, los filamentos o los jets de diferentes objetos astrofísicos, son sistemas en los que el flujo posee básicamente simetría cilíndrico-anular, es decir, una suerte de cilindro cerrado en forma de circunferencia. Dejando de lado por el momento, los *tokamaks* (en los que el intenso campo magnético requerido para confinar el plasma es generado por bobinados externos) el resto de los sistemas mencionados puede pensarse como configuraciones magnetohidrodinámicas en las que las dos componentes del campo magnético, la poloidal y la toroidal, son generadas por las mismas corrientes de plasma vía efecto dínamo. El campo magnético generado se "congela" al plasma y lo confina, induciendo más corriente, que a su vez refuerza el campo magnético.

A escala estelar los plasmas también se "congelan" al campo magnético, lo "estiran" y eventualmente rompen las líneas de campo, pero las rápidas rotaciones marcan una característi-

ca esencial: los flujos se coliman hacia los polos, y en esas regiones escapan, provocando la persistente pérdida de masa de la estrella y, de esta manera, gobernando sus tiempos evolutivos.

En esta primera parte del trabajo abordaremos el problema de los plasmas de resistividad no nula en coordenadas esféricas. Las configuraciones esféricas están relacionadas con las envolturas estelares o con las ionósferas de las atmósferas planetarias, y en este caso nos interesa estudiar la expansión de la atmósfera exterior, es decir, los procesos de pérdida de masa. La primera evidencia observacional de un proceso de eyección de masa en una estrella (Deutsch, 1956) movió el interés por los procesos de escape de flujo en las atmósferas de diferentes objetos, entre ellos, naturalmente, el de la atmósfera solar. El viento solar fue extensamente tratado desde el trabajo clásico de Parker (1958) que describe la expansión unidimensional de un fluido (no magnetizado) con un punto crítico que corresponde, en este caso, a ondas sónicas. Diferentes autores, desde entonces, han prestado atención a los procesos de eyección de masa en objetos de tipo solar (de la extensísima bibliografía rescataremos aquí apenas los trabajos clásicos y pioneros de Lucy y Solomon, 1970; Castor, Abbott y Klein, 1975; Casinelli, 1979; Sakurai, 1990) en atmósferas de estrellas de tipo temprano (Hearn, 1975; Mihalas y Conti, 1980; Friend y MacGregor, 1984; Tsinganos y Trussoni, 1991; Rotstein y Ferro Fontán, 1995; Rotstein y Giménez de Castro, 1996; Lima et al, 2001; Sauty et al, 2002; Holzwarth, 2005) en púlsares (Ray, 1980; Beskin, Gurevich e Istomin, 1986; Bucciantini, Amato y Del Zanna, 2005; Contopoulos, 2007) e incluso en jets extragalácticos (Chiuderi, Pietrini y Torricelli – Ciamponi, 1989; Corbelli y Torricelli-Ciamponi, 1990; McCarthy et al, 1997; Dubois y Teyssier, 2010).

Mihalas y Conti (1980) sugirieron desde un principio que los valores de los campos magnéticos estelares capaces de interactuar con el plasma saliente, y eventualmente gobernar el flujo, estarían muy por debajo de los valores necesarios para ser detectados observacionalmente vía efecto Zeeman. Este es un ingrediente más que se agrega a las dificultades que plantea el tratamiento teórico de un viento magnetizado proveniente de un objeto en rotación. Tal vez por esta razón, más allá del

tratamiento general de Tsinganos (1982) o la brillante formulación de Heyvaerts y Norman (1989, 2003) y su extensión relativista (Chiueh, Li y Begelman, 1991) pocos trabajos teóricos (Weber y Davies, 1967; Pneumann y Kopp, 1972; Tsinganos, Trussoni y Sauty, 1993; Rotstein y Ferro Fontán, 1995, a, b; Preuss et al, 2004) o numéricos (Sakurai, 1990; Vilkoviskij y Tambovtseva, 1992; Okamoto, 1975 y 2003) han sido propuestos. De hecho, la gran mayoría de estos trabajos apela al tratamiento de simetría de rotación en atmósferas esféricas, donde se consideran plasmas de conductividad infinita. La ruptura de la hipótesis de esfericidad en los vientos estelares recién aparece en el modelo computacional numérico de Sakurai (1990) y en la teoría desarrollada por Rotstein y Ferro Fontán (1995, b) en la que la hipótesis de oblicuidad permite reproducir con mayor precisión la marcha de temperatura en las atmósferas de objetos tempranos, transformándolas en atmósferas más estables cuyo tiempo de vida medio en secuencia principal, por consiguiente, sería más largo de lo que sugiere el tratamiento general. Sin embargo, en este tipo de tratamientos se trabaja siempre con plasmas de conductividad infinita, y bien vale la pena analizar cuáles son las consecuencias inmediatas que se derivan de abandonar esta hipótesis. En primer lugar, y aunque nosotros no habremos de hacerlo en este trabajo, porque a la hora de computar la marcha de temperatura en las atmósferas bajo estudio estamos agregando un fenómeno más, es decir una fuente más, por lo que necesariamente habrán de modificarse los mecanismos de intercambio de calor a lo largo de la región de expansión del viento. En segundo lugar, porque en todo caso se trata de una aproximación más confiable a un modelo más general de envoltura. Y en tercer lugar, aunque no por ello menos importante, porque el análisis (como mostraremos en el desarrollo) permite descartar cierto tipo de estructuras magnéticas que, sin resistividad, serían sin embargo aceptables.

En este artículo habremos de concentrarnos en los flujos axisimétricos con conductividad finita con simetría esférica, dejando para un próximo artículo (Rotstein, 2011b) la axisimetría en coordenadas cilíndricas. Para ello, en la siguiente sección presentamos la formulación del problema, luego abordamos el tratamiento matemático mientras que dejamos para el final el análisis de las implicaciones de esta formula-

ción y la discusión de sus resultados.

Tratamiento general

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas que gobiernan la evolución estacionaria de fluidos de conductividad σ (o, equivalentemente, resistividad η), compresibles, magnetizados, sin viscosidad, en presencia de un campo gravitatorio, independientemente de la geometría propia del fenómeno, se escriben como

$$1) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$2) \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

$$3) \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) = 0$$

$$4)$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho g \mathbf{e}_r$$

donde, como es habitual, ρ representa la densidad volumétrica de masa, \mathbf{v} el campo de velocidades, \mathbf{B} el campo de inducción magnética, g la aceleración gravitatoria generada por una fuente externa, \mathcal{P} representa la presión del fluido y $\eta = 1/\sigma$ la resistividad intrínseca del plasma.

Eventualmente, las ecuaciones (1)-(4) se cierran con una ecuación de balance termodinámico, que no hemos incluido porque la distribución de fuentes de calor que de manera consistente cierra el sistema de ecuaciones MHD no forma parte de este estudio.

Es fácil ver que en coordenadas esféricas, con simetría axial, el flujo magnético y el flujo másico, representados por las expresiones (1) y (2), pueden escribirse en las formas

$$5) \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla A(r, \theta) \times \mathbf{e}_\theta + B_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$6)$$

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \psi(r, \theta) \times \mathbf{e}_\theta + \rho v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

donde hemos introducido la función de flujo magnético $A(r, \theta)$ (la simetría de rotación, esto es, en la coordenada Φ , lleva a que la función A sólo dependa de las coordenadas r y θ) que gobierna la existencia de superficies de flujo

magnético, y la función de flujo másico $\psi(r,\theta)$ con un significado funcional similar al flujo magnético. Obsérvese que la función de flujo magnético $A(r, \theta)$ es constante sobre cada superficie de flujo (o sea, define las isosuperficies de flujo magnético) y describe el flujo poloidal entre las diferentes superficies.

En general, la elección de la función de flujo magnético se realiza en función de la estructura magnética que se desea obtener. Por ejemplo, los campos magnéticos de estructuras esféricas tales como estrellas o planetas son globalmente dipolares, colimados por el arrastre del plasma congelado al campo (o el campo congelado al plasma, como se prefiera). El mismo campo magnético terrestre es muy aproximadamente dipolar, pero se ve "achataado" en el frente y alargado en la parte posterior debido a su interacción con el viento solar. Lo usual, entonces, es elegir la función flujo magnético en la forma

$$7) A(r, \theta) = \mathcal{W}(r) \text{sen}^2 \theta$$

que, además de su sencillez, posee la enorme virtud de separar variables, y a partir de las ecuaciones (5) y (7) escribir las componentes poloidales del campo magnético en las formas

$$8) B_r = \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{2\mathcal{W}}{r^2} \cos \theta$$

$$9) B_\theta = -\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mathcal{W}'}{r} \text{sen} \theta$$

donde hemos indicado la derivación en la dirección radial primando la función $\mathcal{W}(r)$. La correcta modelización de la estructura magnética pertinente depende ahora de la elección de la función $\mathcal{W}(r)$. Por ejemplo, la elección

$$10) \mathcal{W}(r) = \mathcal{W}_0 \left(\frac{\lambda}{r} + a + b \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right)$$

donde \mathcal{W}_0 , λ , a , y b son constantes y r_0 una distancia particular introducida para adimensionalizar la distancia radial, genera configuraciones que simulan las estructuras magnéticas estelares típicas de flujos salientes colimados, es decir, vientos colimados (una discusión detallada al respecto puede hallarse en Heyvaerts

y Norman, 1989; Tsinganos y Trussoni, 1991). Obsérvese que la forma (10) genera un campo magnético poloidal cuyas componentes adoptan las formas

$$11) B_r = \frac{2\mathcal{W}_0}{r^2} \left(\frac{\lambda}{r} + a + b \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \cos \theta$$

$$12) B_\theta = \frac{\mathcal{W}_0}{r^2} \left(\frac{\lambda}{r} - b \right) \text{sen} \theta$$

en las que el término asociado a la constante λ es el dipolar, superpuesto a un campo potencial radial (asociado al coeficiente a) en tanto que el factor b representa el término de colimación polar. Las formas (11) y (12) pueden redefinirse respecto a la distancia radial definiendo la distancia adimensionalizada $x = r/r_0$, en cuyo caso las dos últimas expresiones resultan

$$11') B_r = \frac{2\mathcal{W}_0}{x^2 r_0^2} \left(\frac{\lambda}{x r_0} + a + b \ln(x) \right) \cos \theta$$

$$12') B_\theta = \frac{\mathcal{W}_0}{x^2 r_0^2} \left(\frac{\lambda}{x r_0} + b \right) \text{sen} \theta$$

Rotstein y Ferro Fontán, (1995, a), reemplazan los últimos dos términos de la expresión (11') por uno único de la forma kx^q , $0 \leq q \leq 2$. En este caso se gana en sencillez y simetría, y las ecuaciones de las líneas de campo

$$13) \frac{dr}{B_r} = r \frac{d\theta}{B_\theta}$$

en las condiciones de las expresiones (8) y (9) conducen a la forma

$$14) -dx \frac{\mathcal{W}'}{\mathcal{W}} = 2 \cot g \theta d\theta$$

Para $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 (\lambda/r_0 x + kx^q)$ la expresión de las líneas de campo resulta en la ecuación

$$15) \frac{\epsilon - qkx^q}{\epsilon + kx^{q+1}} dx = 2 \cot g \theta d\theta$$

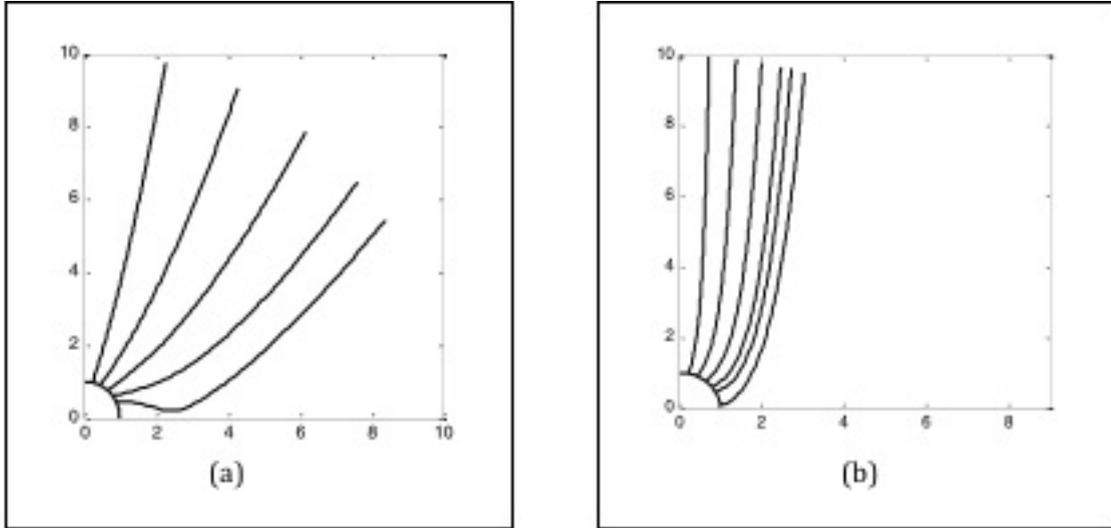


Fig. 1. Líneas de campo magnético colimado hacia el polo de un objeto esféricamente simétrico central (obsérvese que en este caso r_0 es el radio del objeto) en términos de la ecuación (15). En el caso (a) se ha tomado $\varepsilon=2$, $k=q=1$; el caso (b) corresponde a $\varepsilon=2$, $k=1$, $q=1,5$

donde hemos definido la cantidad adimensional $\varepsilon = \lambda/r_0$. En la fig. 1 mostramos para ulterior comparación las estructuras colimadas que se obtienen con la expresión (15) para diferentes valores de los parámetros involucrados.

En todos los casos a los que estamos haciendo referencia el campo magnético se modeliza e impone *a priori* y las ecuaciones magnetohidrodinámicas se cierran autoconsistentemente con un conjunto mínimo de hipótesis adicionales, como por ejemplo, que la conductividad del plasma es infinita. En este trabajo hemos de operar al revés, esto es, hemos de asumir que el plasma tiene resistividad no nula y buscaremos la forma funcional de la función W que cierra autoconsistentemente el problema, con una inevitable condición de contorno: el campo poloidal debe estar colimado.

Desarrollemos la expresión (3). Dado que la densidad de corriente se escribe como

$$16) \mathbf{j} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} =$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(\frac{1}{r \sin \theta} \nabla A(r, z) \times \mathbf{e}_\theta + B_\theta \mathbf{e}_\theta \right)$$

podemos escribir las tres componentes de la densidad de corriente en la forma

$$17) j_r = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \sin \theta)$$

$$18) j_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta)$$

$$19) j_\phi = \frac{1}{\mu_0 r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]$$

Definamos ahora las cantidades

$$20) \beta = \frac{x B_\theta \sin \theta}{r_0}$$

$$21) W = \frac{\mathcal{W}}{r_0^2}$$

$$22) \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial x}$$

Es fácil ver que en términos de estas cantidades las ecuaciones (17) – (19) resultan

$$23) j_r = \frac{1}{\mu_0 x^2 \sin \theta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}$$

$$24) j_\theta = -\frac{1}{\mu_0 x \sin \theta} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$25) \quad j_\theta = \frac{1}{\mu_0 r_0 x} \left[\frac{2W}{x^2} - W'' \right] \text{sen } \theta$$

donde ahora la derivación se efectúa respecto a la distancia adimensionalizada x . Regresemos a la expresión (3) para escribirla en la forma

$$26) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} = \nabla \phi$$

Parece inmediato que es lo mismo que escribir

$$27) \quad \eta (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \phi = 0$$

$$28) \quad \phi(x, \theta) = F(x) \cos \theta$$

en cuyo caso la ecuación (27) se desarrolla como

$$29) \quad \frac{\eta}{\mu_0} \left[\frac{\partial \beta / \partial \theta}{x^2 \text{sen} \theta} \frac{2W \cos \theta}{x^2} + \frac{\beta'}{x \text{sen} \theta} \frac{W' \text{sen} \theta}{x} + \frac{\beta}{x^2} \left(\frac{2W}{x^2} - W'' \right) \right] + \frac{2WF'}{x^2} \cos^2 \theta + \frac{2WF'}{x^2} \text{sen}^2 \theta = 0$$

Definamos ahora una forma funcional para la función $\beta(x, \theta)$. Parece razonable pensar que la componente toroidal del campo magnético varíe como $\text{sen } \theta$, de manera tal que asumiremos

$$30) \quad \beta(x, \theta) = \beta_r(x) \text{sen}^2 \theta$$

A partir de esta hipótesis, parece evidente que la identidad (29) pasa a ser

$$31) \quad \frac{\eta}{\mu_0} \left[\frac{4W}{x^4} \beta_r \cos^2 \theta + \frac{\beta_r' W'}{x^2} \text{sen}^2 \theta + \frac{\beta_r}{x^2} \left(\frac{2W}{x^2} - W'' \right) \text{sen}^2 \theta \right] + \frac{2WF'}{x^2} \cos^2 \theta + \frac{2WF'}{x^2} \text{sen}^2 \theta = 0$$

Ahora bien, las identidades trigonométricas

$$32) \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$33) \quad \text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

nos permiten separar la ecuación (31) en dos formas similares, a saber

$$34) \quad \left\{ \left[\frac{\eta}{\mu_0} \frac{4W}{x^4} \beta_r + \frac{2WF'}{x^2} \right] - \left[\frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\beta_r' W'}{x^2} + \frac{\beta_r}{x^2} \left(\frac{2W}{x^2} - W'' \right) \right) + \frac{W'F}{x^2} \right] \right\} \cos 2\theta + \left\{ \left[\frac{\eta}{\mu_0} \frac{4W}{x^4} \beta_r + \frac{2WF'}{x^2} \right] + \left[\frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\beta_r' W'}{x^2} + \frac{\beta_r}{x^2} \left(\frac{2W}{x^2} - W'' \right) \right) + \frac{W'F}{x^2} \right] \right\} = 0$$

Parece evidente que la única manera de satisfacer el desarrollo (34) es que cada uno de los corchetes dentro de cada llave se anule por separado, pues de otro modo no podrían ser ambas llaves nulas. Esto significa que obtenemos formalmente las relaciones

$$35) \quad F' = - \frac{\eta}{\mu_0} \frac{2\beta_r}{x^2}$$

$$36) \quad \frac{\eta}{\mu_0} \left(\beta_r' W' + \beta_r \left(\frac{2W}{x^2} - W'' \right) \right) +$$

$$W'F = 0$$

La expresión (35) conduce a una primera integral de la función de potencial eléctrico, a saber

$$37) \quad F = - \frac{2\eta}{\mu_0} \int \frac{\beta_r}{x^2} dx + C$$

en tanto que la expresión (36) lleva a la forma

$$38) \quad \frac{\eta}{\mu_0} (\beta_r' + \beta_r f(W)) + F = 0$$

donde hemos definido la función $f(W)$ como

$$39) \quad f(W) = \frac{\frac{2W}{x^2} - W''}{W'}$$

Podemos resolver formalmente la expresión (36) derivándola respecto a la variable x y utilizando la identidad (35) para el potencial $F(x)$. Al cabo de un álgebra decididamente sencilla obtenemos

$$40) \quad \frac{\eta}{\mu_0} (\beta''_r + \beta'_r f(W) + \beta_r f'(W)) - \frac{\eta}{\mu_0} \frac{2\beta_r}{x^2} = 0$$

que puede escribirse en la forma más compacta

$$41) \quad \beta''_r + \beta'_r f(W) + \beta_r \left[f(W) + \frac{2}{x} \right]' = 0$$

Obsérvese que todavía no disponemos de la forma funcional de $W(x)$, y de hecho sólo podremos obtener alguna forma si realizamos alguna hipótesis adicional sobre la función $\beta(x)$ para resolver la ecuación (41), algo que haremos en la próxima sección.

Campos resistivos sin componente toroidal de la fuerza de Lorentz

Que la componente toroidal de la fuerza de Lorentz se anule significa

$$42) \quad (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\phi = j_r B_\theta - j_\theta B_r = 0$$

expresión esta que a partir de las ecuaciones (8), (9), (23) y (24) puede escribirse sucintamente como

$$43) \quad \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0 \equiv [\beta, A] = 0$$

Dado que hemos adoptado las formas funcionales $A = W(r) \sin^2 \theta$ y $\beta = \beta_r \sin^2 \theta$, parece evidente que la ecuación (43) impone la condición

$$44) \quad \beta_r(x, \theta) = b_0 W(x)$$

Por lo demás, la ecuación (41) impone un vínculo formal entre las funciones β_r y $W(x)$, de manera tal que la función $W(x)$ debe verificar la expresión

$$45) \quad W''' + W' f(W) + W \left[f(W) + \frac{2}{x} \right]' = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$46) \quad W''' + [W f(W)]' - \frac{2}{x^2} W = 0$$

La ecuación (46) desarrollada resulta en la forma

$$47) \quad W' f(W) + W f'(W) = \frac{2}{x^2} W - W''$$

Pero la ecuación (39) define la relación entre $f(W)$ y W

$$48) \quad W' f(W) = \frac{2}{x^2} W - W''$$

de manera tal que debe cumplirse

$$49) \quad W f'(W) = 0 \implies f(W) = m \quad (m = \text{constante}; [m] = 1/r)$$

y la ecuación para $W(x)$ resulta

$$50) \quad W''' + m W' - \frac{2W}{x^2} = 0$$

Para hallar la solución de $W(x)$ proponemos

$$51) \quad W(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+s}$$

de manera tal que después de pocos pasos rutinarios la ecuación (50) puede llevarse a la forma

$$52) \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s} + m \sum_{n \geq 0} (n+s) a_n x^{n+s+1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+s} = 0$$

Obsérvese ahora que el término central puede cambiarse en la forma

$$53) m \sum_{n \geq 0} (n+s) a_n x^{n+s+1} = m \sum_{n \geq 1} (n+s-1) a_{n-1} x^{n+s}$$

$$54) \left\{ \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) a_n + m \sum_{n \geq 1} (n+s-1) a_{n-1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n \right\} x^{n+s} = 0$$

Es evidente que el polinomio indicial para $n=0$ resulta en la ecuación

$$55) [s(s-1) - 2] a_0 = 0$$

que naturalmente lleva a los resultados $s_1 = -1$ y $s_2 = 2$.

Solución con $s = -1$

El término general a_n resulta de resolver la ecuación

$$56) \sum_{n \geq 0} [(n-1)(n-2) - 2] a_n + m \sum_{n \geq 1} (n-2) a_{n-1} = 0$$

Por simple inspección resulta evidente que a_0 es arbitrario, $a_1 = -ma_0/2$ y que a_2 es nulo. Luego, a_3 también es arbitrario y un álgebra más bien tediosa lleva a la forma del término general en función de a_3

$$57) a_n = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{3! m^{n-3}}{n!} \right\} a_3 \quad n \geq 3$$

En consecuencia, la solución $W_1(x)$ resulta

$$58) W_1(x) = \frac{1}{x} \left\{ a_0 \left(1 - \frac{mx}{2} \right) + \sum_{n \geq 3} (-1)^{n+1} (n-2) \frac{3! m^{n-3}}{n!} a_3 x^n \right\}$$

Esta última ecuación puede llevarse a una forma más práctica abriendo la sumatoria en las dos sumas que involucra el paréntesis $(n-2)$

$$59) W_1(x) = \frac{a_0}{x} \left(1 - \frac{mx}{2} \right) + \frac{3! a_3}{x} \left[\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^{n+1}}{m^3} \frac{m^n}{n-1!} x^n - 2 \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^{n+1}}{m^3} \frac{m^n}{n!} x^n \right]$$

$$60) W_1(x) = \frac{a_0}{x} \left(1 - \frac{mx}{2} \right) + \frac{3! a_3}{x}$$

$$\left(\frac{x}{m^2} \sum_{n \geq 3} (-1)^{n-1} \frac{m^{n-1}}{n-1!} x^{n-1} \right) + \frac{2}{m^3} \sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{m^n}{n!} x^n$$

Ahora parece evidente que las sumas que aparecen en la ecuación (60) son exponenciales

$$61) \sum_{n \geq 3} (-1)^{n-1} \frac{m^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} =$$

$$-1 + mx + e^{-mx}$$

$$62) \sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{m^n}{n!} x^n = -1 +$$

$$mx - \frac{m^2 x^2}{2} + e^{-mx}$$

de manera tal que la primera solución para $W(x)$ resulta

$$63) W_1(x) = \frac{a_0}{x} \left(1 - \frac{mx}{2}\right) +$$

$$\frac{3! a_3}{m^2} \left[e^{-mx} \left(1 + \frac{2}{mx}\right) + \left(1 - \frac{2}{mx}\right) \right]$$

Solución con $s = 2$

La ecuación a resolver es

$$64) \sum_{n \geq 0} [(n+1)(n+2) - 2] b_n +$$

$$m \sum_{n \geq 1} (n+1) b_{n-1} = 0$$

en la que se observa de manera inmediata que el término b_0 es arbitrario y que el término general resulta

$$65) b_n = (-1)^n \frac{3!(n+1)}{(n+3)!} m^n b_0$$

de manera tal que la solución W_2 , después de algunos pasos rutinarios, se escribe como

$$66) W_2(x) = 3! b_0 x^2 \left[\frac{e^{-mx}}{m^2 x^2} \left(1 + \frac{2}{mx}\right) + \frac{1}{m^2 x^2} - \frac{2}{m^3 x^3} \right]$$

Luego de algunas pocas y sencillas operaciones, la solución general buscada puede llevarse a la forma

$$67) W(x) = W_1(x) + W_2(x) =$$

$$A_0 e^{-mx} \left(1 + \frac{2}{mx}\right) + \frac{a_0}{x} \left(1 - \frac{mx}{2}\right) + A_0 \left(1 - \frac{2}{mx}\right)$$

o, más sucintamente aún

$$68) W(x) = A_0 e^{-mx} \left(1 + \frac{2}{mx}\right) + A_1 \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{x}\right)$$

con

$$69.a) A_0 = \frac{3!}{m^2} (a_3 + b_0)$$

$$69.b) A_1 = 2 \frac{A_0}{m} - a_0$$

Es fácil comprobar que el campo (68) verifica la ecuación diferencial (50). Algunas soluciones son inmediatas, no todas físicamente aceptables en este contexto. Por ejemplo, si $m=0$ en la ecuación (50), el polinomio indicial es nuevamente el de la ecuación (55), pero ahora la función $W(x)$ es inmediata y resulta en las componentes poloidales de las ecuaciones (11) y (12) con $b=0$, o sea, reobtenemos el campo globalmente dipolar superpuesto a un campo potencial que varía como x^{-2} propuesto por Low y Tsinganos (1986). Esta situación puede también pensarse como el caso extremo $q=2$ en las ecuaciones (11') y (12') y que resulta en campos colimados como los de la figura 1(b).

El caso $A_1=0$ (la expresión (69.b) muestra que siempre es posible tal elección) conduce a líneas de campo colimadas en el caso $m<0$ y deflectadas al ecuador (cerradas sobre la región sin viento) si $m>0$. Pero el primer caso, que es el único que muestra algún interés teórico, lleva a componentes poloidales del campo que crecen sin límite, una situación verdaderamen-

te inaceptable. Luego, parece razonable que la solución general, numérica, sea de interés y físicamente plausible en el caso de ecuaciones completas con $m > 0$. Para hallar estas soluciones, obsérvese que la ecuación de las líneas de campo, que ya escribimos en la ecuación (13),

$$70) \quad \frac{dx}{B_r} = x \frac{d\theta}{B_\theta}$$

para la forma $W(x)$ dada por la ecuación (68) y teniendo en cuenta las formas generales de las componentes del campo

$$B_r = \frac{2W}{x^2} \cos \theta$$

$$B_\theta = -\frac{W'}{x} \sin \theta$$

resulta en la ecuación

$$71) \quad \int \frac{mA_0 \left(1 + \frac{2}{mx} + \frac{2}{(mx)^2}\right) e^{-mx} - \frac{A_1}{x^2}}{A_0 \left(1 + \frac{2}{mx}\right) e^{-mx} + A_1 \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{x}\right)} dx = \ln \sin^2 \theta + C$$

en la que ya hemos integrado la parte angular. En la fig. 2 mostramos algunos resultados de la integración de la ecuación (71). En los primeros tres casos hemos tomado $A_0=A_1=1$ a los efectos de analizar sólo el rol del parámetro m en la colimación del viento. Es notable que para $m=0.5$ las líneas no coliman sino que, por el contrario, tienden a cerrarse sobre el ecuador, en tanto que para $m \geq 1$ la tendencia a la colimación es evidente. Téngase en cuenta que hemos simplificado la tarea tomando las dos constantes arbitrarias iguales a la unidad, aunque, por su carácter arbitrario, hay tantos como se deseen. Ya hemos dicho que el caso $A_1=0$ lleva a soluciones físicamente inaceptables, y es fácil ver que si tomamos $A_0=0$ la ecuación (71) (que en tal caso puede integrarse fácil y analíticamente) conduce inmediatamente a las soluciones que mostramos en la fig. 2(d). La única condición es que las líneas conecten al objeto central en la base del viento, de manera tal que debe ser $m > 2$.

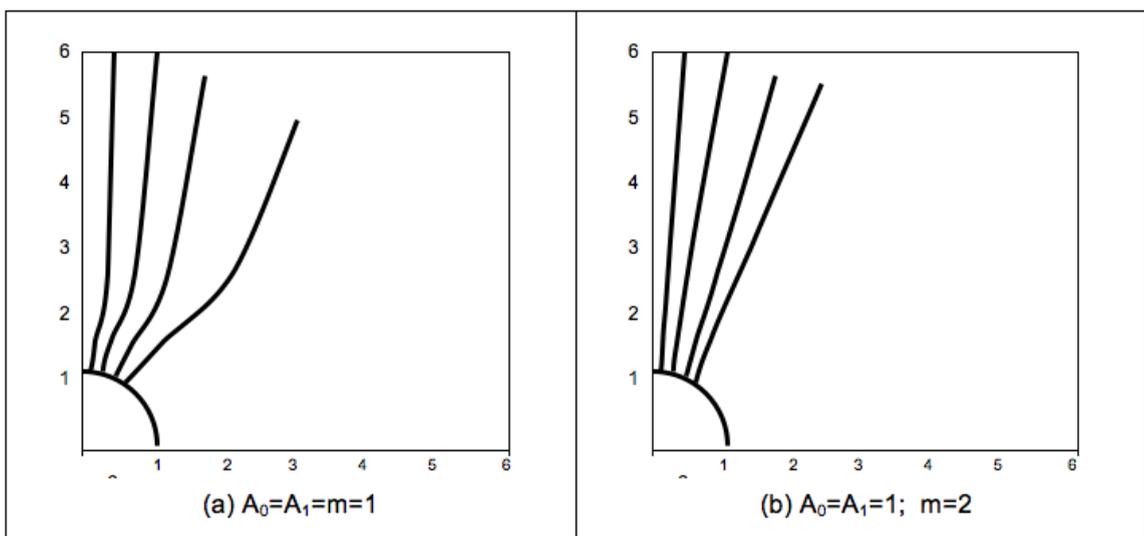


Fig. 2. (inicio) Líneas de campo magnético que surgen de la ecuación (71).

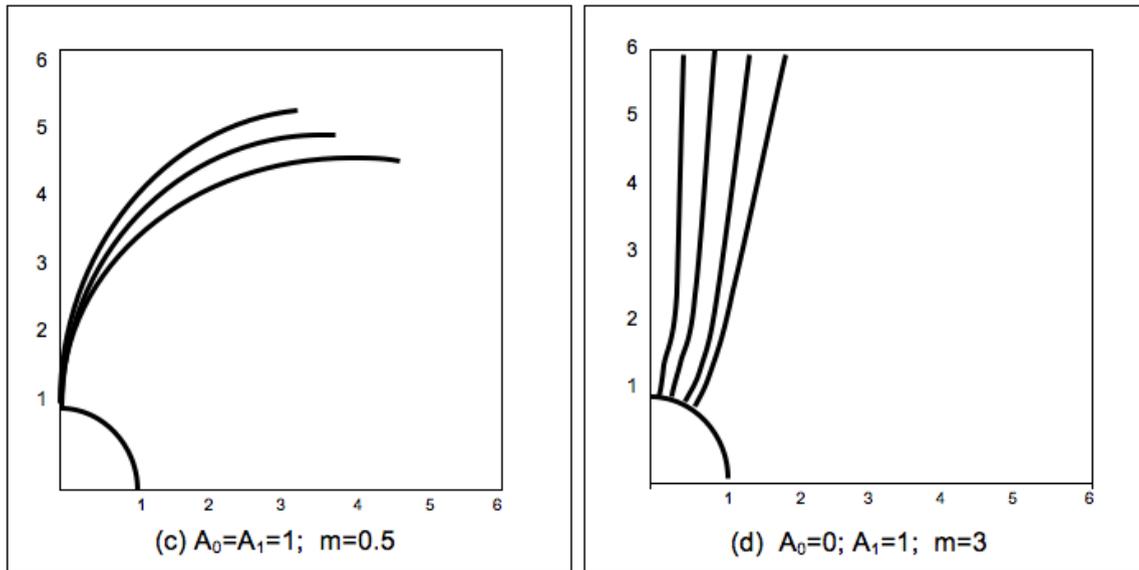


Fig. 2. (continuación) Líneas de campo magnético que surgen de la ecuación (71) para diferentes valores del parámetro m y de los coeficientes A_0 y A_1 . Parece evidente que para $0 < m < 1$ las líneas de campo no coliman (figura c), en tanto que la tendencia a la colimación para $m \geq 1$ pareciera agudizarse con el incremento del parámetro m .

Análisis y conclusiones

En este artículo hemos analizado el flujo estacionario de fluidos magnetizados con conductividad finita. Para ello, hemos escrito las ecuaciones completas y hemos hallado la forma de las estructuras magnéticas que autoconsistentemente soportan ese flujo. En este punto vale la pena detenerse para hacer un par de comentarios. En primer lugar, si bien las soluciones admiten curvaturas arbitrarias, las únicas admisibles son aquellas en las que el parámetro m es positivo, pues de otra manera produce estructuras magnéticas poloidales divergentes. Más aún, este parámetro parece tener un valor límite (de hecho, cercano a la unidad) por debajo del cual no provoca flujos polares abiertos y salientes sino que el flujo se cierra en la zona ecuatorial. Por el otro lado, es necesario notar que aunque las soluciones tipo viento halladas dependen de sólo dos constantes arbitrarias (además del parámetro de curvatura, m) estas constantes admiten en principio un número ilimitado de combinaciones posibles, no todas resolubles, no todas aceptables. En tal sentido basta escribir las ecuaciones que definen a las variables del flujo que no hemos considerado hasta aquí, a saber, las componentes de la velocidad del viento y la distribución de masa en el flujo.

Para hacerlo, notemos que de la ecuación (2) de conservación de la masa se deduce de manera inmediata

$$72) \quad \nabla(\rho v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{\partial \psi / \partial \theta}{\rho x^2 \operatorname{sen} \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\rho x \operatorname{sen} \theta} \end{cases}$$

Por su lado, la componente azimutal de la ecuación (3) conduce naturalmente a una relación definida entre la velocidad y el campo poloidales y la componente toroidal de la corriente en la forma

$$73) \quad v_r B_\theta - v_\theta B_r = \eta j_\phi$$

En la ecuación (19) hemos establecido el valor de j_ϕ en términos del campo B , de manera tal que combinado las expresiones (8), (9), (19), (72) y (73) obtenemos

$$74) \quad \frac{\partial \psi / \partial \theta}{\rho x^2 \operatorname{sen} \theta} = \frac{\partial \psi / \partial x}{\rho x \operatorname{sen} \theta} \frac{2W}{W'x} \cotg \theta + \alpha(x)$$

donde hemos introducido la función $\alpha(x)$ definida en la forma

$$75) \alpha(x) = \eta \frac{j_\phi}{B_\theta} = -\frac{\eta}{\mu_0} f(W)$$

con $f(W)$ definida en la ecuación (39). Ahora bien, si reordenamos la ecuación (74) podemos expresar la densidad de masa en la forma

$$76) \rho(x, \theta) = \frac{1}{\alpha(x) x^2 \operatorname{sen}\theta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{2W}{W'} \cotg \theta \right]$$

Parece evidente la conveniencia de que la función de flujo másico dependa del ángulo polar como $\operatorname{sen}^2\theta$, de la misma manera en que lo hace la función de flujo magnético. Sin embargo, podemos ver rápidamente que ahora las isosuperficies de flujo y de masa no están alineadas como en el caso de conductividad infinita (para un análisis completo de esta alineación véase, por ejemplo, Tsinganos 1982). Y por supuesto, las constantes de la función $W(x)$ ya no pueden ser absolutamente libres porque podrían provocar densidades de masa negativas.

Prestemos ahora atención a las componentes de la velocidad. La componente azimutal de la ecuación (4) se escribe como

$$77) \rho \left[v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} (v_r + v_\theta \cotg \theta) \right] = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_\phi$$

que en términos de las expresiones (17) a (19) de las componentes de la corriente, las componentes (72) de las velocidades y la expresión (76) de la densidad másica puede escribirse sucintamente como

$$78) [\omega, \psi] = \frac{1}{\mu_0} [\beta, A]$$

donde la cantidad ω se define como

$$79) \omega = x v_\phi \operatorname{sen}\theta$$

y hemos utilizado la notación

$$80) [G, H] = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial x}$$

Con la notación introducida, y teniendo en mente la expresión (78), es fácil ver que si ahora usamos la ecuación (73) podemos escribir

$$81) [\psi, A] = \eta j_\phi \rho x^3 \operatorname{sen}\theta$$

que sólo se anula en el caso $\eta=0$, con lo cual queda demostrado que las isosuperficies de flujo magnético y flujo másico, en este caso, no coinciden.

No hemos discutido la energética del flujo porque centramos el interés en las estructuras que sostienen el viento. Obsérvese que desde esta perspectiva hemos establecido la topología de los "canales" de flujo sin pretender analizar los mecanismos que lo gobiernan. Sin embargo, no está de más recalcar que en este contexto la energética del viento podría estar cogobernada por la estructura del campo, pues de hecho tendríamos que incluir disipación resistiva en las ecuaciones de energía. Ni falta hace decirlo, toda modificación de la estructura de campo magnético modifica la dinámica del flujo.

Asimismo, es necesario recordar que en este contexto la estructura magnética depende de demasiadas constantes que no hemos anulado sino resumido en otras dos más sencillas. A pesar de estas dificultades, queda claro que el campo hallado es importante en sí mismo y por derecho propio, en primer lugar porque introduce por vez primera una manera de tratar plasmas de resistividad no nula y en segundo lugar porque, en líneas generales, indica la forma funcional de las estructuras magnéticas que debemos esperar dentro de esta modelización de flujos. Desde ya, nuevos esfuerzos serán necesarios para tratar las partes que aquí no hemos discutido y, por otro lado, introducir nuevas geometrías.

Referencias

- BESKIN, V.; GUREVICH, A. y ISTOMIN, Y., (1986) *Soviet Phys*, 29, 946.
- BUCCIANTINI, N; AMATO, E; DEL ZANNA, L., (2005) *Astron. Astrophys*, 434, 189
- CASTOR, J.; ABBOTT, D. y KLEIN, R., (1975) *Astrophys. J*, 195, 157.
- CASINELLI, J., (1979) *Annual Review Astron. Astrophys*, 17, 275.
- CHIUDERI, C.; PIETRINI, P.; TORRICELLI-CIAMPONI, G., (1989) *Astrophys. J*, 339, 70.
- CHIUEH, T.; LI, Z. y BEGELMAN, M., (1991) *Astrophys. J*, 377, 462.
- CONTOPOULOS, I., (2007) *Astron. Astrophys*, 472, 219.
- CORBELLI, E.; TORRICELLI-CIAMPONI, G., (1990) *Phys. Fluids B*, 2, 828.
- DEUTSCH, A., (1956) *Astrophys. J*, 123, 210.
- DUBOIS, Y. y TEYSSIER, R., (2010) *Astron. Astrophys*, 523, 72.
- FRIEND, B. y MACGREGOR, K. (1984) *Astrophys. J*, 282, 591.
- HEARN, A. (1975) *Astron. Astrophys*, 40, 335.
- HEYVAERTS, J. y NORMAN, C., (1989) *Astrophys. J*, 347, 1055.
(2003) *Astrophys. J*, 596, 1270.
- HOLZWARTH, V., (2005) *Astron. Astrophys*, 440, 411.
- LIMA, J.; PRIEST, E. y TSINGANOS, K., (2001) *Astron. Astrophys*, 371, 240.
- LOW, B. y TSINGANOS, K., (1986) *Astrophys. J*, 302, 163.
- LUCY, L. y SOLOMON, P., (1970) *Astrophys. J*, 159, 879.
- MCCARTHY, J.; KUDRITZKI, R.; LENNON, D.; VENN, K. y PULS, J., (1997) *Astrophys. J*, 482, 757.
- MIHALAS, D. y CONTI, P., (1980) *Astrophys. J*, 235, 515.
- OKAMOTO, I., (1975) *MNRAS*, 173, 357.
- OKAMOTO, I., (2003) *Astrophys. J*, 589, 671.
- PARKER, E., (1958) *Astrophys. J*, 128, 664.
- PNEUMANN, G. y KOPP, R., (1972) *Solar Phys*, 18, 258.
- PREUSS, O.; HOLZWARTH, V.; SOLANKI, S. y SCHÜSSLER, M., (2004) *Astron. Astrophys*, 417, 987.
- RAY, A. (1980) *Phys. Fluids*, 23, 898.
- ROTSTEIN, N. y FERRO FONTÁN, C., (1995 a) *Astrophys. J*, 449, 745.
- ROTSTEIN, N. y FERRO FONTÁN, C., (1995 b) *Astrophys. J*, 449, 764.
- ROTSTEIN, N. y GIMÉNEZ de CASTRO, G., (1996) *Astrophys. J*, 464, 859.
- SAKURAI, T., (1990) *Comp. Phys. Rep*, 12, 247.
- SAUTY, C., TSINGANOS, K. y TRUSSONI, E., (2002) *Astron. Astrophys*, 389, 1068.
- TSINGANOS, K., (1982) *Astrophys. J*, 252, 775.
- TSINGANOS, K. y TRUSSONI, E., (1991) *Astron. Astrophys*, 231, 270.
- TSINGANOS, K.; TRUSSONI, E. y SAUTY, C., (1993) en *Physics of solar and stellar coronae*, ed J.F. Linsky y S. Serio (Dordrecht: Kluwer), 615.
- VILKOVISKIJ, E. y TAMBOVTSEVA, I., (1992) *Astron. Astrophys Sup. Series*, 94, 109.
- WEBER, E. y DAVIES, J., (1967) *Astrophys. J*, 148, 217.

