

# Modelo elemental de flujo de un fluido viscoso elástico. El glaciar Bahía del Diablo. Parte II\*

Néstor O. Rotstein<sup>1</sup>, Sebastián Marinsek<sup>1, 2</sup>, Mohamed J. Ríos<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, Medrano 951 (C1179AAQ), Buenos Aires, Argentina

<sup>2</sup> Instituto Antártico Argentino- Balcarce 290 (CP 1064), Buenos Aires, Argentina

*nrotstein@cedi.frba.utn.edu.ar*

*Recibido el 28 de Noviembre de 2013, aprobado el 27 de Diciembre de 2013*

## Resumen

A lo largo de este trabajo nos abocamos al estudio detallado de la dinámica propia de un cuerpo de hielo de densidad variable que, apoyado sobre un lecho inclinado, se deforma y fluye debido a los esfuerzos derivados de su propio peso. Esta aproximación a primer orden del comportamiento general de un glaciar la realizamos suponiendo conocida la forma matemática del perfil transversal del lecho. Aplicamos los resultados obtenidos al glaciar "Bahía del Diablo" (isla Vega, Antártida Argentina) cuyo fondo ha sido registrado por medio de mediciones efectuadas con un radar de hielo. El fondo glaciario lo aproximamos por medio de funciones biyectivas, y de hecho en este caso aproximamos la parte del lecho que analizamos por una curva de la forma  $z = a^{-1}y^{3/2}$ . Suponemos que la variación de densidad del hielo en profundidad es una función lineal. Las diferencias que existen entre los valores calculados y los valores medidos en el glaciar podrían deberse a la velocidad de la base del glaciar, que posiblemente responde a mecanismos de deslizamiento que no habremos de contemplar en el modelo.

**PALABRAS CLAVE:** FLUJO MÁSSICO - FLUIDOS - VISCOELASTICIDAD - GLACIAR

## Abstract

Throughout this paper we focus the detailed study of the dynamics of a large body of ice of non-uniform density that, owing to the stresses produced by its own weight, deforms and flows over an inclined bed. This first-order approximation to the overall behavior of a glacier is achieved by assuming that the mathematical profile of the glacier bed is known. We apply the formalism to "Bahía del Diablo" glacier (Vega island, located in the Argentinean sector of Antarctic) whose bed profile was derived from measurements made by means of a portable radar. The part of the glacier bed that we shall analyze is approximated by a bijective function, in this case a curve of the form  $z = a^{-1}y^{3/2}$ . We introduce ice density variations through a linear function. Surface velocities were also measured *in situ*. We find differences between measured and calculated values, which likely arise from glacier base sliding velocity, a mechanism that we do not consider in this work.

**KEYWORDS:** MASS FLUX - FLUIDS - VISCOELASTICITY - GLACIER

\* El presente trabajo se desarrolla en el marco de un PID denominado "Detección de cambios de patrones de radiación medioambientales", en el ámbito de la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva, de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

## Introducción

La evolución de las masas glaciarias se halla directamente emparentada con los cambios climáticos que se producen a nivel global en el planeta. De hecho, la ablación de masas glaciarias es una medida fuertemente correlacionada con el calentamiento global de la atmósfera.

Sin embargo, la elevación de la temperatura del aire a nivel global no implica necesariamente un incremento de pérdida de masa a nivel local. De hecho, si bien pocos, algunos glaciares alrededor del planeta han mostrado un balance de masa positivo (Servicio Mundial de Monitoreo de Glaciares (WMGS), 2013), sólo por usarlo como referencia diremos que el glaciar Perito Moreno no ha presentado grandes cambios en los últimos años, en tanto que los glaciares de la Península Antártica han experimentado en los últimos 50 años un marcado retroceso (Cook *et al.*, 2005; Cook y Vaughan, 2010).

El aspecto a destacar de los glaciares antárticos es su marcada sensibilidad al cambio climático. Esta característica los transforma de por sí en indicadores fieles e inmediatos de las variaciones climatológicas regionales y, por extensión, de los cambios a nivel global, de donde se desprende la necesidad del seguimiento permanente de la evolución de sus balances de masa.

Sin embargo, a las dificultades generadas por accesos riesgosos, difíciles y limitados sólo a los veranos, se le suma la falta de un modelo detallado de la manera en que actúan e interactúan las diferentes variables climáticas en la evolución de cualquier glaciar. Por lo pronto, lo más que cabe, posiblemente, sea medir *in situ* la mayor cantidad de variables asociadas al problema, y procurar un modelo dinámico de deslizamiento que haga uso de (y eventualmente acople) los valores medidos.

Si bien es de esperar que la dinámica de cada glaciar se halle directamente correlacionada con su entorno (porque toda variación de las condiciones climatológicas y atmosféricas habrá de afectar directa o indirectamente el comportamiento del sistema completo) también es esperable que bajo condiciones similares evolucionen de manera análoga, esto es, dejadas de lado las características del medio

circundante, en términos generales la dinámica debería depender sólo de la masa del glaciar y de la topología del terreno.

En esta línea se inscriben las diversas aproximaciones que tienden a simplificar el tratamiento general de la evolución de glaciares (véase por ejemplo Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010). En este artículo continuamos la línea de trabajo introducida en un artículo anterior (Rotstein y Marinsek, 2013, de aquí en más RM2013) que consiste en definir matemáticamente el perfil del lecho del glaciar a partir de las imágenes de radar obtenidas por uno de nosotros (S. Marinsek) caminando sobre la superficie del glaciar, en este caso el Bahía del Diablo, en la Península Antártica. El perfil del lecho lo aproximamos por una función biyectiva de las variables espaciales perpendiculares a la dirección del flujo. A la par, y abandonando la hipótesis de densidad constante, permitimos eventualmente pequeñas variaciones en la densidad de masa del hielo glaciario con la profundidad, que habremos de modelizar como lineales (porque nada hay en la dinámica del hielo que indique que la densidad se incrementa de manera más complicada).

Con estas premisas en mente, habremos de presentar en primer lugar, el tratamiento general del problema. Las ecuaciones dinámicas resultan en un conjunto de ecuaciones que, en principio y a la luz de las simplificaciones que proponemos, se reducen a una ecuación diferencial para los elementos de la parte deviatorica del tensor de esfuerzos. El tratamiento matemático de esta ecuación requiere en general de dos integraciones de las variables dinámicas que dependen de la particular forma funcional que resulte para el esfuerzo en la dirección de avance del glaciar. Por esta razón no cualquier perfil que se proponga es capaz de mantener el problema en un nivel matemático tratable, aunque siempre debe tratarse de una función plausible, consistente con los perfiles de lechos conocidos. En la siguiente sección presentaremos la forma del perfil del lecho de un sector del glaciar Bahía del Diablo y diversas aproximaciones propuestas.

Posteriormente, en el Análisis dinámico habremos de estudiar el comportamiento general del flujo suponiendo el perfil propuesto ( $z=ay^{3/2}$ ) y dejaremos para las Conclusiones la comparación de los resultados obtenidos con diferentes perfiles, para el análisis de las implicaciones

de esta formulación y para la discusión de sus resultados.

### Tratamiento general

Un glaciar se comporta como un fluido de tipo plástico, viscoso, sometido a esfuerzos de tensión y de cizalladura, los que en definitiva gobiernan su evolución dinámica. El glaciar evoluciona por deformación de la estructura cristalina del hielo que lo forma, y en función de su elevadísimo coeficiente de viscosidad  $\eta$  (de alrededor de  $10^{13}$  Pa s) lo trataremos como un fluido no newtoniano comparativamente lento, con velocidades del orden de entre 1 a 100 m/año.

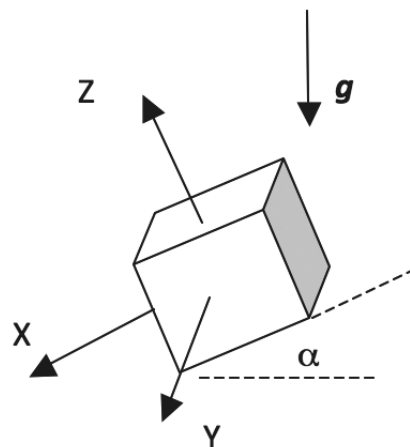
Aun cuando un glaciar fluye viscosamente, su enorme masa hace esperable que en el lecho el hielo puede alcanzar el punto de fusión (sea por fricción, por calentamiento geotérmico, combinación de ambos factores o algunos otros que se han propuesto, véase por ejemplo Liboutry, 1979; Iken, 1981, Fowler, 2010) y en tal caso no sólo derrama sino que además desliza. De esta manera no existiría un único régimen sino que habría que acoplar ambos, el de deformación y el de deslizamiento, en la capa límite de fusión. Los aspectos matemáticos de este tratamiento, formidables en cuanto a su complejidad, por un lado no están bien comprendidos y por el otro nos apartarían de nuestro objetivo central, de modo que por el momento obviaremos su tratamiento. Por lo demás, es posible que la densidad del hielo sufra ligeras variaciones en profundidad, o que exista alguna región en la que la viscosidad pueda ser razonablemente considerada independiente de las tensiones y los esfuerzos de corte, esto es, que localmente se comporte como un fluido newtoniano (Fontelos, Muñoz y Schiavi 2007). Nosotros habremos de introducir ligeras variaciones de la densidad con la profundidad del glaciar, variaciones que podrían simular la compresión gravitatoria.

Para ello, supondremos que el fluido viscoso derrama gravitatoriamente sobre una superficie inclinada, de manera tal que describiremos la evolución cuasiestacionaria del flujo ( $\partial/\partial t = 0$ ) en el sistema de ejes cartesianos XYZ de la Figura 1, orientados en la dirección X del flujo. Obsérvese que la dirección del vector aceleración gravitatoria ya no coincide localmente con el eje Z, sino que forma un ángulo  $\alpha$  que

es precisamente el ángulo de inclinación del glaciar. Por lo demás, las ecuaciones de evolución dinámica serán en este caso:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nabla \underline{\sigma} - \rho \nabla G \quad (2)$$



**Fig.1: Sistema coordenado en el que se describe el modelo.**

donde  $\rho$  representa la densidad del fluido,  $\vec{U}=(u,v,w)$  es su velocidad,  $\sigma$  representa el tensor de esfuerzos y  $G$  el potencial gravitatorio. Obsérvese que en el sistema de coordenadas cartesianas propias que hemos adoptado, las componentes del vector  $\vec{U}$  se refieren a las velocidades en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

Definamos ahora los esfuerzos en términos de la parte deviatorica del tensor de esfuerzos en la forma:

$$\sigma_{ij}^{(D)} = \sigma_{ij} - P \bar{1} = \eta \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

donde  $P$  es la presión hidrostática,  $\bar{1}$  es la matriz identidad,  $[\sigma_{ij}^{(D)}]$  es la parte deviatorica del tensor y  $\eta$  la viscosidad del fluido. La expresión (3) puede escribirse en términos del tensor de la tasa de esfuerzos  $D_{ij}$  (Cuffey y Paterson, 2010) como:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Como en (Rotstein y Marinsek, 2003, en adelante citado como RM2013), en lo que sigue supondremos que el flujo avanza uniformemente en la dirección X, sin deformaciones en las direcciones perpendiculares, restricciones que matemáticamente se traducen en las formas:

$$v = w = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

En términos de estas restricciones (que equivalentemente pueden pensarse como los vínculos  $\sigma_{yy}^{(D)} = \sigma_{zz}^{(D)} = \sigma_{zy}^{(D)} = \sigma_{xz}^{(D)} = 0$ )

las componentes no nulas de la parte deviatorica del tensor resultan ser:

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8)$$

Como ya hemos adelantado, habremos de trabajar sobre perfiles del lecho de forma conocida, lo que equivale a decir que existe una relación definida entre las coordenadas perpendiculares a la dirección de avance del flujo, esto es, al menos localmente puede definirse una relación funcional  $z=\varphi(y)$  que determine el perfil del lecho. En tales condiciones es fácil definir las derivadas respecto de una variable en términos de la otra, esto es:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial z} dz = f'_z dz \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{f'_z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv F \frac{\partial}{\partial z} \quad (10)$$

Ahora podemos escribir las expresiones (7) y (8) en la forma:

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \eta F \frac{\partial u}{\partial z} \quad (11)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{F} \sigma_{xy}^{(D)} \quad (12)$$

y desarrollar las ecuaciones (1) y (2) en sus

componentes no nulas (los detalles pueden verse en RM2013):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(D)}}{\partial z} &= -\rho(z) g \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial \sigma_{xy}^{(D)}}{\partial y} \equiv \\ &\equiv (1 + F^2) \frac{d\sigma_{xz}^{(D)}}{dz} + [F F'] \sigma_{xz}^{(D)} = \\ &- \rho(z) g \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho(z) g \cos \alpha \quad (14)$$

En las expresiones (10) y (11) hemos escrito  $\rho(z)$  porque como en RM2013 habremos de trabajar con una función de densidad de masa, perturbada a primer orden, en la forma:

$$\rho(z) = \rho_0 \left[ 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \right] \quad (15)$$

donde H es la altura del sistema, es decir, la variable que localmente define la cantidad de masa sobre el lecho del glaciar. Obsérvese que  $z=0$  representa el punto inferior del glaciar en contacto con el lecho, en tanto que  $z=H$  es el extremo superior del sistema, abierto a la atmósfera.

En principio, es posible resolver la expresión (13) para el esfuerzo  $\sigma_{xz}^{(D)}$  y calcular el perfil de velocidades resultante a partir de la ley general de flujo (Glenn, 1952; Nye, 1957)

$$D_{ij} = A(T) \tau^{n-1} \sigma_{ij}^{(D)} \quad (16)$$

donde A(T) es un coeficiente que depende de la temperatura (aunque en sistemas como los glaciares es constante en amplios rangos de temperatura), n es un factor constante empírico, del orden de 3 (Budd and Jacka, 1989) y  $\tau$  es el segundo invariante del tensor de esfuerzos, definido como:

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(D)} \sigma_{ij}^{(D)} \quad (17)$$

que en nuestro caso se reduce a la forma:

$$\tau = \sqrt{(\sigma_{xy}^{(D)})^2 + (\sigma_{xz}^{(D)})^2} = \sqrt{1 + F^2} |\sigma_{xz}^{(D)}| \quad (18)$$

y resulta en una ecuación para velocidad de avance del glaciar (véase RM2013):

$$\frac{du}{dz} = 2A(T)(1 + F^2)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{xz}^{(D)})^n \quad (19)$$

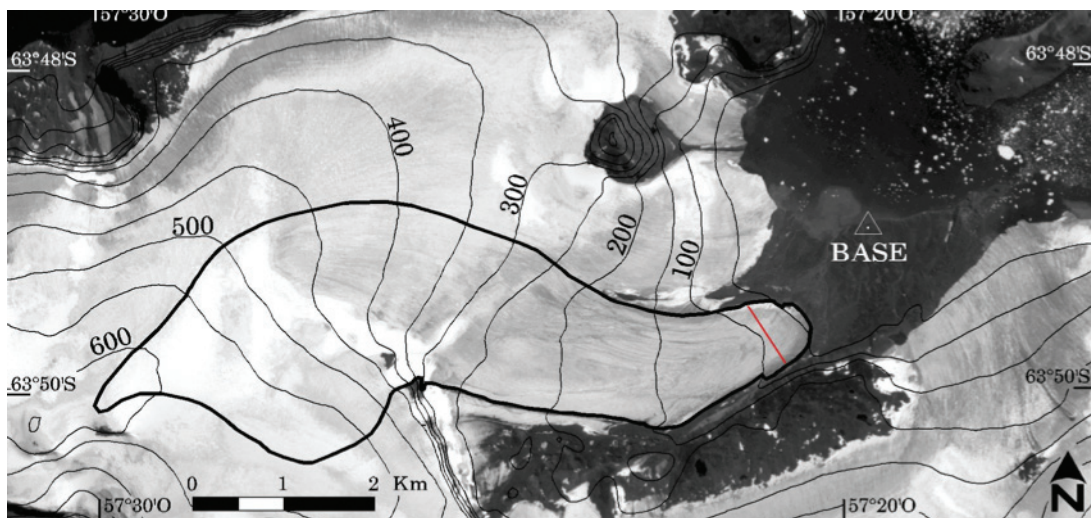
El procedimiento consiste entonces en resolver la ecuación (13) para la componente  $\sigma_{xz}$  y, luego, introducir la solución en la expresión (19) para integrar la función velocidad en términos de la profundidad. Por ello es que no cualquier función parece admisible, o por lo menos no es manejable analíticamente. En la próxima sección discutimos estos detalles.

### El glaciar Bahía del Diablo

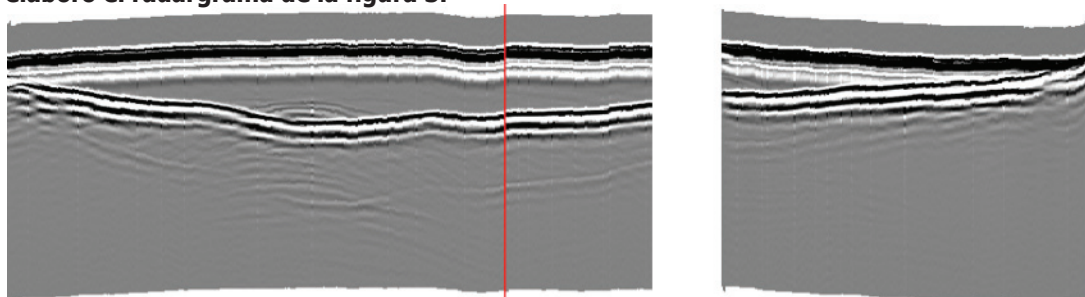
El glaciar Bahía del Diablo (de aquí en adelante GBD), cuya imagen satelital mostramos en

la Figura 2, tiene una superficie de aproximadamente 12 km<sup>2</sup> y se localiza en la isla Vega, al oeste de la Base Marambio. Una de las características salientes del GBD es que termina en tierra, y al ser comparativamente pequeño, aun dentro de las limitaciones logísticas propias del acceso y del clima, puede ser recorrido a pie para efectuar diversas mediciones (además de las que se registran con el instrumental permanente).

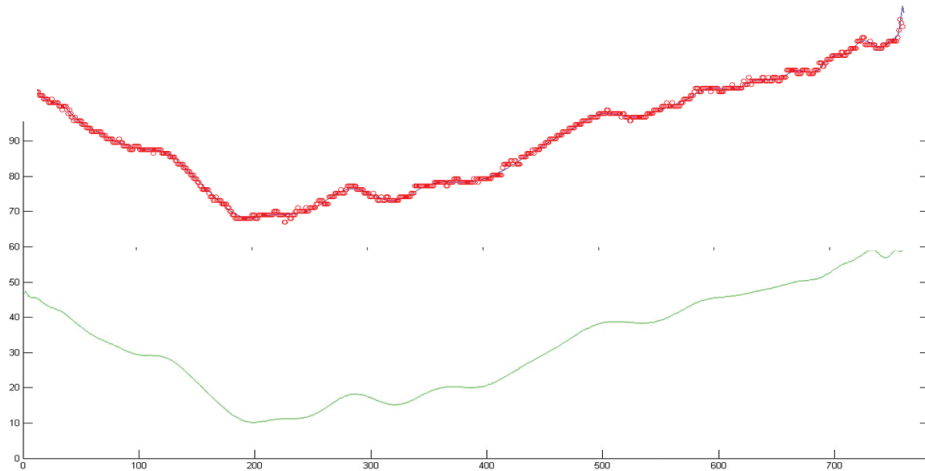
Por lo demás, el GBD no es un glaciar de desprendimiento, de manera tal que las variaciones de su balance de masa, pueden asociarse directamente con el cambio climático. Actualmente se trata del único glaciar de la Antártida que aporta datos detallados al Servicio de Monitoreo Mundial de Glaciares (*World Glacier Monitoring Service-WGMS*), auspiciado por la UNESCO. Este servicio recopila los datos de balance de masa de una amplia diversidad de



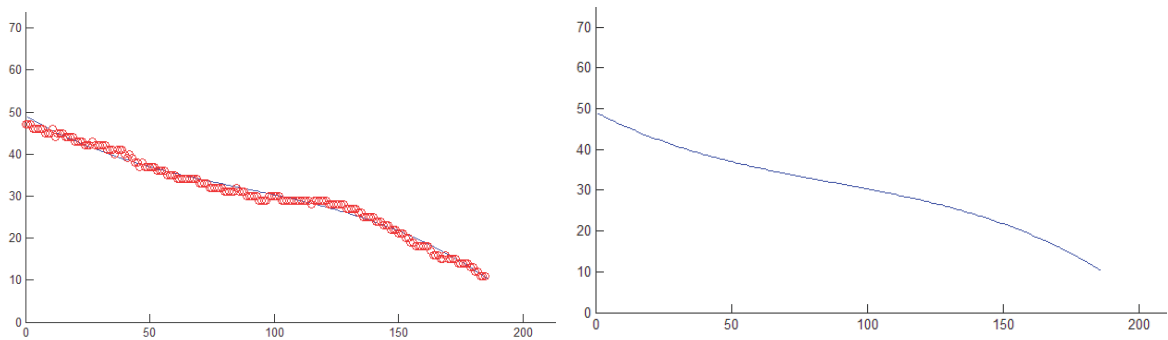
**Fig. 2:** Imagen satelital del sector de la isla Vega donde se encuentra el glaciar Bahía del Diablo (recortado con línea de trazo grueso negro). La línea roja que se muestra en la parte inferior es el camino seguido por S. Marinsek con un radar de mano en Marzo de 2013, sobre el que se elaboró el radargrama de la figura 3.



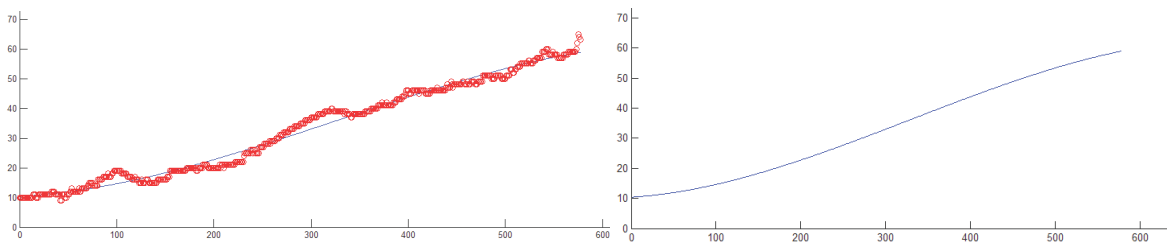
**Fig. 3:** Perfil de datos de radar tomados en la sección transversal de la lengua del GBD. Se pueden observar las reflexiones del lecho del glaciar. La línea roja indica la posición en la superficie de una baliza nivométrica. El sector en blanco se debe a una falla en el radar mientras se realizó la medición.



**Fig. 4: Perfiles del fondo en la región estudiada del GBD. La curva superior es la obtenida con radar (para detalles véase RM2013), y la inferior a la que resulta de interpolar un polinomio de grado 23.**



**Fig. 5: Perfiles real (a la izquierda) y aproximado por una función de tercer grado (a la derecha) del lado izquierdo del fondo del GBD en la región estudiada (la línea roja en la figura 3).**



**Fig. 6: A la izquierda el perfil real del lado derecho del fondo del GBD, y a la derecha el perfil aproximado por una función de tercer grado. El perfil corresponde a la región del GBD estudiada ( la línea roja en la figura 3).**

glaciares ubicados en distintos puntos de la Tierra, lo que permite evaluar el impacto del cambio climático en todo el planeta. La importancia de este tipo de resultados es tal que el WGMS de la Comisión Internacional de Nieve y Hielo (ICSI/IAHS) recolecta y publica datos estandarizados de glaciares como aporte al *Global Climate/Terrestrial Observing System (GCOS/GTOS)*,

establecido por la Organización Meteorológica Mundial (WMO), al Programa Medioambiente de Naciones Unidas (UNEP), al *International Council of Science (ICSU)* y al Programa Hidrológico Internacional (PHI) de la UNESCO.

A lo largo de la línea gruesa sobreimpresa en la parte inferior del GBD (en la punta de la

“bota”) uno de nosotros (S. Marinsek) tomó imágenes de radar del lecho de la lengua glaciar durante la última campaña de verano del Instituto Antártico Argentino (Febrero - Marzo 2013). El radargrama se muestra en la Figura 3, y del tratamiento de esas imágenes y su traducción en profundidades y espesores, resulta el perfil del lecho y las profundidades correspondientes, como el que mostramos en la Figura 4 (para los detalles véase RM2013). Obsérvese la línea vertical gruesa en el radargrama de la Figura 3: representa la localización de una baliza nivométrica por medio de la cual se ha medido el desplazamiento anual (la velocidad en superficie) y allí la profundidad corresponde a 73 m.

El primer paso para la aplicación de nuestro formalismo es transformar el perfil del fondo en una expresión matemática biyectiva. De hecho, el perfil completo ajusta por un polinomio de grado 23, como mostramos en la parte superior de la Figura 4, donde los puntos corresponden a los valores del fondo del lecho elegidos para la interpolación y la curva de trazo grueso al perfil obtenido con el radar. La curva inferior corresponde a la interpolación de los puntos del polinomio obtenido.

Una tal función supone un problema de formidable complejidad matemática, toda vez que calcular la velocidad del glaciar supone integrar esa función, elevarla al cubo y con los factores de la expresión (13) volver a integrarla. Por esa razón, elegimos trabajar con funciones aproximantes, como el perfil compuesto que mostramos en las Figuras 5 y 6. Se trata de dos funciones diferentes a derecha e izquierda, con el exclusivo y casi evidente vínculo de que deben empalmar en  $z=0$ . En ambos casos se trata de polinomios de grado 3.

Pero aún tratándose de polinomios de tercer grado, el tratamiento analítico sigue siendo muy complicado porque son completos. El objetivo de este trabajo es comparar los resultados que se obtienen con diferentes curvaturas, de modo tal que aun dentro de los errores propios de ajuste no proponemos funciones arbitrarias sino plausibles y, por lo demás, mantendremos siempre la posibilidad de comparación.

En este artículo investigamos el costado derecho del radargrama. Visto corriente arriba, a la derecha de  $y=200$  m el perfil puede aproximarse por una curva de la forma:

$$z = a^{-1}y^{3/2} \quad (20)$$

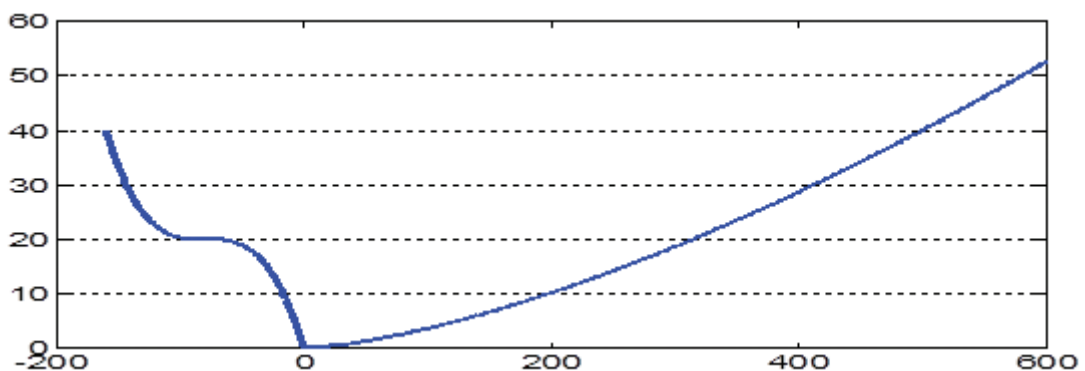
donde  $a$  es una constante cuyas unidades son  $m^{1/2}$ . La figura 7 muestra el perfil resultante con  $a^{-1}=0,00357 m^{-1/2}$ , al que por razones de completitud se le agregó la forma:

$$z = -3,9 \cdot 10^{-5}(y + 80)^3 + 20 \quad (-160 < y < 0) \quad (21)$$

para el lado izquierdo del fondo.

Comparando con la Figura 4 puede verse que el lado derecho empalma satisfactoriamente hasta 500 m de  $z=0$ , a partir de donde la diferencia llega a ser del 5% en exceso aproximadamente, respecto del perfil medido.

En el resto de este artículo trabajaremos el lado derecho expresado en la ecuación (20) y, como quedó dicho, compararemos al final los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos en RM2013.



**Fig.7: Curva resultante del empalme de las funciones (24) y (25) en  $z=0$  (que corresponde a la posición  $y=200$ m medidos desde el borde izquierdo del glaciar).**

## Análisis dinámico para $z = a^{-1}y^{3/2}$

Con el perfil definido en la expresión (20) resulta:

$$y = (az)^{2/3} \quad (22)$$

de modo tal que las expresiones para los esfuerzos resultan en las expresiones:

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2a^{2/3}} z^{1/3} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (23)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2}{3} \frac{a^{2/3}}{z^{1/3}} \sigma_{xy}^{(D)} \quad (24)$$

que llevan a escribir la ecuación (13) en la forma:

$$\frac{d\sigma_{xz}^{(D)}}{dz} \left(1 + \frac{9}{4a^{4/3}} z^{2/3}\right) + \left(\frac{3}{4a^{4/3}} \frac{1}{z^{1/3}}\right) \sigma_{xz}^{(D)} = -\rho(z) g \operatorname{sen} \alpha \quad (25)$$

donde hemos escrito ahora derivadas totales en lugar de parciales porque  $z$  es la única variable espacial que sobrevive. La solución de la parte homogénea de la ecuación (25),  $\sigma_{xz,h}^{(D)}$ , es inmediata y resulta en la identidad:

$$\frac{d\sigma_{xz,h}^{(D)}}{\sigma_{xz,h}^{(D)}} = -\frac{b}{z^{1/3}} \frac{dz}{1 + 3bz^{2/3}} \quad (26)$$

donde hemos definido  $b=3/4a^{4/3}$ . La solución de la expresión (26) es inmediata en la forma:

$$\ln \sigma_{xz,h}^{(D)} = -\frac{1}{2} \ln \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right) + cte \Rightarrow \Rightarrow \sigma_{xz,h}^{(D)}(z) = \frac{C}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \quad (27)$$

donde  $C$  es una constante a determinar con las condiciones de contorno. La solución particular  $\sigma_{xz,p}^{(D)}(z)$  de la ecuación (25) resulta en la forma:

$$\sigma_{xz,p}^{(D)}(z) = D \frac{C}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \quad (28)$$

donde el coeficiente indeterminado  $D$  se obtiene resolviendo la ecuación:

$$D' \frac{C}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} = -\rho_0 g \operatorname{sen} \alpha \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{z}{H}\right)\right] \quad (29)$$

es decir:

$$D = -\frac{B}{C} \left\{ \int \gamma dz \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2} - \int \beta z dz \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2} \right\} \quad (30)$$

donde  $B = \rho_0 g \operatorname{sen} \alpha$ ,  $\gamma = 1 + \varepsilon$  y  $\beta = \varepsilon/H$ . La primera integral, con el cambio de variables  $z^{1/3} = s$ , admite como primitiva a la función que se transforma en:

$$3\gamma \left\{ s \left(s^2 + \frac{1}{3b}\right)^{1/2} \left[ \frac{1}{4} \left(s^2 + \frac{1}{2(3b)}\right) \right] - \frac{1}{8(3b)^2} \ln \left( s + \left(s^2 + \frac{1}{3b}\right)^{1/2} \right) + cte \right\} \quad (31)$$

La segunda integral es casi inmediata y resulta en la expresión:

$$\frac{3\beta}{105} \left( 15 z^{4/3} - \frac{12}{3b} z^{2/3} + \frac{8}{(3b)^2} \right) \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{3/2} \quad (32)$$

En total, el coeficiente  $D$  resulta en la forma

$$D = -\frac{B}{C} \left\{ 3(1 + \varepsilon) z^{1/3} \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2} \left[ \frac{1}{4} \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right) - \frac{1}{8(3b)} \right] - \frac{1}{8(3b)^2} \ln \left( \frac{z^{1/3} + \left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}}{H^{1/3}} \right) - \frac{3\varepsilon}{105 H} \left( 15 z^{4/3} - \frac{12}{3b} z^{2/3} + \frac{8}{(3b)^2} \right) \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{3/2} \right\} \times \frac{C}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \quad (33)$$



La solución particular del término deviatórico que estamos trabajando resulta en consecuencia:

$$\sigma_{xz,p}^{(D)}(z) = - \frac{\rho_0 g \operatorname{sen} \alpha [G(z, \varepsilon)]}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \quad (34)$$

donde la función  $G(z, \varepsilon) = G_1(z, \varepsilon) + G_2(z, \varepsilon)$  está definida en la ecuación (33) por sus dos partes:

$$G_1(z, \varepsilon) = 3(1 + \varepsilon) \left\{ z^{1/3} \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{4} \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right) - \frac{1}{8(3b)} \right] - \frac{1}{8(3b)^2} \ln \left( z^{1/3} + \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \right) + cte \right\} \quad (35)$$

$$G_2(z, \varepsilon) = - \frac{3\varepsilon}{105H} \left( 15z^{4/3} - \frac{12}{3b} z^{2/3} + \frac{8}{(3b)^2} \right) \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{3/2} \quad (36)$$

Como ya se dijo, C es una constante a determinar, que podemos evaluar de inmediato a partir del hecho de que en la superficie del sistema ( $z=H$ ) el esfuerzo se reduce a la componente de la presión atmosférica a lo largo del eje x, esto es:

$$\sigma_{xz}^{(D)}(z = H) = P_0 \operatorname{sen} \alpha =$$

$$\frac{C - \rho_0 g \operatorname{sen} \alpha [G(H, \varepsilon)]}{\left(H^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \quad (37)$$

de manera tal que resulta:

$$C = \left( P_0 \left( H^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} + \rho_0 g [G(H, \varepsilon)] \right) \operatorname{sen} \alpha = C_1 \operatorname{sen} \alpha \quad (38)$$

$$\tau = \sqrt{\left(\sigma_{xy}^{(D)}\right)^2 + \left(\sigma_{xz}^{(D)}\right)^2} =$$

Resolvamos ahora el perfil de velocidades. A partir de la expresión (16) de la ley de Glenn, y teniendo en cuenta que el invariante (18) en este caso se reduce a la forma:

$$\sqrt{1 + \frac{9}{4a^{4/3}} z^{2/3}} \left| \sigma_{xz}^{(D)} \right| \quad (39)$$

resulta (recordemos que trabajamos con  $n=3$ ):

$$\frac{du}{dz} = 2A(T) \left( 1 + \frac{9}{4a^{4/3}} z^{2/3} \right) \left( \sigma_{xz}^{(D)} \right)^3 \quad (40)$$

$$\frac{du}{dz} = 2A(T) \left( 1 + 3bz^{2/3} \right) \left\{ \frac{C - \rho_0 g \operatorname{sen} \alpha [G(z, \varepsilon)]}{\left(z^{2/3} + \frac{1}{3b}\right)^{1/2}} \right\}^3 \quad (41)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{2A(T)(3b)^{3/2}}{\left(1 + 3bz^{2/3}\right)^{1/2}} \operatorname{sen}^3 \alpha \left\{ C_1 - \rho_0 g [G(z, \varepsilon)] \right\}^3 \quad (42)$$

Analizaremos a continuación soluciones con densidad constante y luego analizaremos las soluciones con densidad de masa perturbada por medio de la expresión (15).

### 1 Soluciones con $\varepsilon = 0$

De manera casi evidente la expresión (36) es idénticamente nula y la ecuación (42) puede llevarse a la forma:

$$\frac{du}{dz} = \frac{2A(T)(3b)^{3/2}}{\left(1 + 3bz^{2/3}\right)^{1/2}} \operatorname{sen}^3 \alpha \left( \psi[P_0, H, 0] - \rho_0 g [G_1(z, 0)] \right)^3 \quad (43)$$

donde:

$$\psi[P_0, H, 0] = P_0 \left( H^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} + \rho_0 g [G_1(H, 0)] \quad (44)$$

es una constante que depende de los valores que se adopten para los diferentes parámetros involucrados, y  $G_1(z, 0)$  se refiere a la función

(34) con  $\varepsilon=0$ , esto es:

$$G_1(z, 0) = 3z^{1/3} \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{4} \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right) - \frac{1}{8(3b)} \right] - \frac{3}{8(3b)^2} \ln \left( \frac{z^{1/3} + \left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2}}{H^{1/3}} \right) \quad (45)$$

La función (45) puede escribirse de manera matemáticamente más amena. Para ello tengamos en cuenta que si bien no conocemos en detalle el valor del parámetro de curvatura  $3b$ , sabemos de su definición (26) en términos de la curvatura  $a^{-1}$  de la expresión (20), que aún a máxima profundidad resulta  $3bz^{2/3} \ll 1$ , lo que permite desarrollar Taylor las raíces y el logaritmo conservando sólo el primer orden.

$$G_1(z, 0) = 3 \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \left( \frac{3bz^{5/3}}{2} + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} z^{2/3} \right) - \frac{\ln \left( \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \frac{1}{H^{1/3}} \right)}{8(3b)^2} \right\} \quad (46)$$

El término logarítmico que sobrevive es en verdad irrelevante porque aparecerá con igual valor y signo contrario en los términos (44) y (46), y para los valores de curvatura con los que estamos trabajando podemos todavía re-

ducir un orden la igualdad (46) en la forma:

$$G_1(z, 0) = 3 \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \left( \frac{5}{4}z - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} z^{2/3} \right) - \frac{\ln \left( \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \frac{1}{H^{1/3}} \right)}{8(3b)^2} \right\} \quad (47)$$

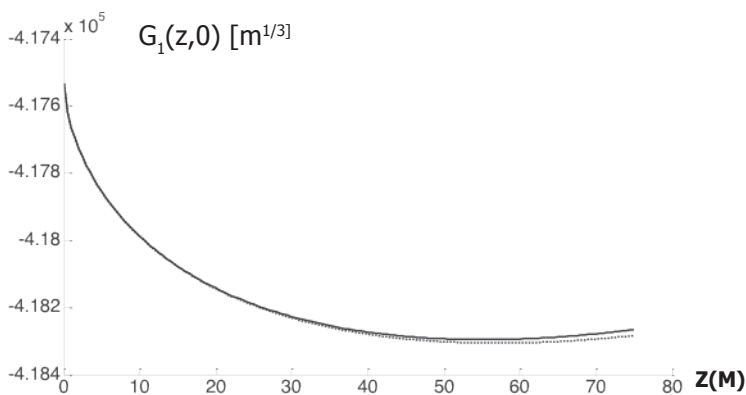
En la Figura 8 mostramos las funciones (46) y (47) para el  $3b=1,2 \times 10^{-3} \text{m}^{-2/3}$  (el valor que surge del parámetro  $a^{-1}$  que usamos para una primera aproximación del perfil del lecho del GBD). Obsérvese que la diferencia entre las funciones no supera el 0,1% en la parte más profunda del sistema (que suponemos de alrededor de 75 m de profundidad).

Con estas consideraciones en mente, la ecuación (43) resulta:

$$\frac{du}{dz} = \frac{Q}{\left( z^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2}} \left( q + z^{2/3} - 5(3b)^{1/2}z \right) \quad (48)$$

donde hemos definido las cantidades:

$$q = \frac{\psi[P_0, H, 0]}{\rho_0 g \frac{3}{16} \left( \frac{1}{3b} \right)} \quad (49)$$



**Fig. 8:** La línea superior es la función real, ecuación (44), prácticamente superpuesta a su primera aproximación (ecuación (46), en línea de puntos). La máxima desviación del valor real está por debajo de 0,09%.

$$Q = 2A(T)3b \operatorname{sen}^3 \alpha \left( \rho_0 g \frac{3}{16} \left( \frac{1}{3b} \right) \right)^3 \quad (50)$$

Ahora bien, la expresión (48) define las derivadas de la velocidad. Por lo pronto, deben ser positivas. Y esta condición impone una relación definida entre la profundidad del glaciar y la curvatura. De allí que, el término cúbico de la expresión (48) sea definido positivo implica:

$$\frac{P_0 \left( H^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} + 3\rho_0 g \left[ \frac{5}{16} \left( \frac{1}{3b} \right)^{1/2} \right]}{3\rho_0 g \frac{1}{16} \left( \frac{1}{3b} \right)} \quad (51)$$

que se traduce en la condición suficiente:

$$3b > \left( \frac{1}{5H^{1/3}} \right)^2 \quad (52)$$

Para  $H \approx 75$  m, esta condición se transforma en  $3b \approx 2,25 \times 10^{-3} \text{m}^{-2/3}$ , algo así como el doble de la curvatura sugerida en una primera modelización. Para la región del GBD que estamos analizando este es un valor ligeramente elevado, toda vez que supone que la altura máxima se alcanza a unos 455 m del punto de máxima profundidad, esto es, unos 150 m de diferencia respecto del radargrama procesado de la Figura 4.

La condición necesaria y suficiente se expresa

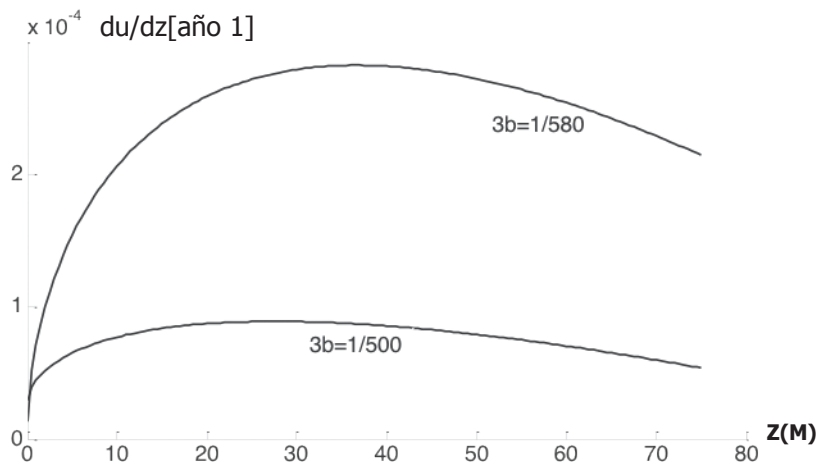
como:

$$\frac{16P_0}{3\rho_0 g} \left( H^{2/3} + \varepsilon \right)^{1/2} > \varepsilon H^{2/3} - 5\beta^{1/2} H \quad (53)$$

donde hemos definido  $\beta = (3b)^{-1}$ . La curva del miembro izquierdo, para los valores típicos de presión y densidad del hielo y  $H = 75$  m, es mayor que la del miembro derecho a partir de  $\beta \approx 590 \text{m}^{-2/3}$ . Para el valor mínimo de  $\beta$  resulta una altura del glaciar del orden de 5 m mayor que la medida; un valor absolutamente tolerable porque queda todavía la curvatura de la capa de hielo por sobre la superficie.

En la Figura 9 graficamos las derivadas de la función velocidad para dos valores diferentes de curvatura. Es casi inmediato que en ambos casos la curva de velocidad exhibirá un punto de inflexión y en ese punto cambiará su concavidad. No deja de ser siempre una velocidad positiva y creciente en altura, pero respecto del caso del perfil parabólico analizado en RM2013 puede verse que la velocidad crece más rápidamente en los primeros metros.

Por lo pronto, aunque tediosa y más bien extensa, la integración de la ecuación (47) es posible. El principal problema que enfrentamos es la falta de convergencia entre métodos diferentes (desarrollo de las curvas en series de potencias, integración por tramos, etc.) que, además, parecen mostrar diferente sensibilidad a los valores de curvatura.



**Fig.9: Derivadas de la velocidad en función de la curvatura. Obsérvese que al cambiar el valor del parámetro de curvatura se modifica el punto de inflexión de la curva de velocidad, que a su vez significa que cambia la profundidad a la cual ocurre este cambio.**

Los valores extremos que podemos evaluar con cualquiera de los métodos dependen naturalmente de la curvatura, y a pesar de la diferente sensibilidad, para los casos analizados están por debajo de los valores medidos en la baliza nivométrica de la figura 3. Esto significa que siempre es posible pensar que existe algún mecanismo extra de deslizamiento sobre una capa de hielo fundido en la base del glaciar (Fowler, 2010).

## 2 – Solución con $\varepsilon \neq 0$

Un breve análisis del orden de magnitud de las expresiones (35) y (36) muestra que la perturbación en la masa es importante sólo por su presencia en la segunda de estas expresiones. De hecho, podemos desarrollar  $G_2(z)$  como:

$$G_2(z, \varepsilon) \approx -\frac{3\varepsilon}{105 H(3b)^{3/2}} \left( \frac{8}{(3b)^2} - \frac{12}{(3b)} z^{2/3} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} (3b) z^{2/3} \right) \approx -\frac{3\varepsilon}{105 H(3b)^{3/2}} \left( \frac{8}{(3b)^2} - 18 z^{4/3} \right) \quad (54)$$

de manera tal que la ecuación (43) ahora se escribirá como:

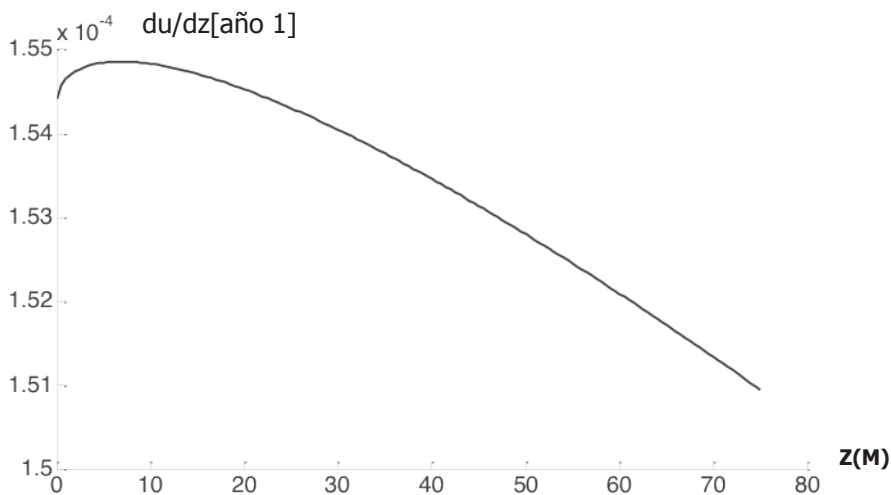
$$\frac{du}{dz} = \frac{2A(T)(3b)^{3/2}}{(1 + 3bz^{2/3})^{1/2}} \operatorname{sen}^3 \alpha (\psi[P_0, H, \varepsilon] - \rho_0 g [G(z, \varepsilon)])^3 \quad (55)$$

donde ahora definimos:

$$\psi[P_0, H, \varepsilon] = P_0 \left( H^{2/3} + \frac{1}{3b} \right)^{1/2} + \rho_0 g [G(H, \varepsilon)] \quad (56)$$

y  $G(z, \varepsilon)$  viene dado por:

$$G(z, \varepsilon) \approx 3 \left\{ \frac{1}{4(3b)^{1/2}} \left( \frac{5}{4} z - \frac{1}{4(3b)^{1/2}} z^{2/3} \right) - \frac{\varepsilon}{105 H(3b)^{3/2}} \left( \frac{8}{(3b)^2} - 18 z^{4/3} \right) \right\} \quad (57)$$



**Fig. 10: Derivadas de la velocidad en función de la curvatura para  $\varepsilon=0,01$  y  $3b=1/500$ . Obsérvese que el punto de inflexión de la curva de velocidad se halla prácticamente en la base.**

En la Figura 10 hemos graficado la curva de derivadas de la velocidad. Obsérvese que, a diferencia del caso  $\varepsilon=0$ , ahora el punto de inflexión se localiza cerca de la base del glaciar, de manera tal que la velocidad misma es prácticamente una función de curvatura única.

## Análisis y conclusiones

En este artículo hemos estudiado el perfil de velocidad de avance de un glaciar, conocida la forma matemática del lecho. Esta es la diferencia fundamental respecto del tratamiento estándar, porque en este caso, el perfil del lecho ha sido registrado in situ. En principio, conocidas las funciones que ajustan el perfil del lecho sería siempre posible construir su perfil de velocidades, pero esa construcción es por momentos insalvablemente compleja. De hecho, analizamos sólo un costado de un sector del glaciar, y aún así, el cálculo es muy complicado.

Como en RM2013 hemos introducido un parámetro de perturbación de masa en profundidad porque parece razonable suponer que la densidad del hielo se modifique por efectos de la presión a que lo somete su propio peso. Sin embargo, a diferencia de aquel trabajo, ahora debemos realizar una serie de aproximaciones que, aunque ajustan razonablemente, nos desvían del perfil original. Vale decir, que en todo caso esas desviaciones son comparativamente pequeñas y mantienen el problema dentro del marco de error que introduce la aproximación del perfil del lecho con una curva biyectiva.

La función de perturbación de masa que introducimos es lineal con la profundidad. Salvo la simplificación que se logra con esta forma, no tenemos evidencia empírica que permita asegurar que la elección es correcta. Sin embargo, representa un paso más allá del tratamiento usual, que considera densidad de masa constante en toda la profundidad del glaciar, y por lo demás, en vista de los valores relativamente pequeños que permitimos al parámetro de perturbación  $\varepsilon$ , siempre sería posible desarrollar la función a primer orden.

La dependencia de la velocidad con la curvatura que resulta de este tratamiento es interesante. En primer lugar, debemos apresurarnos a comentar que el perfil completo de velocidad no es fácil de obtener, particularmente porque

no existen primitivas para las funciones involucradas, y porque los métodos de aproximación no parecen ser convergentes. Pero parece evidente que la velocidad del conjunto tiene un cambio de concavidad que se emparentaría con la curvatura del glaciar, lo que parece razonable porque el cambio de curvatura (a ancho glaciario constante) representa un cambio en la masa total del sistema. Y, con la introducción de la perturbación de masa parecería evidente que el punto de inflexión se corre hacia la base del glaciar.

Las curvas de velocidad muestran valores por debajo de los medidos en el lugar, mediante balizas nivométricas. Esto significa que podemos pensar que la base del glaciar se desliza sobre hielo fundido. Como quedó dicho, diferentes mecanismos podrían provocar la fusión del hielo en contacto con el lecho y provocar deslizamiento. A partir de las diferencias entre los valores de velocidad medidos en la superficie y los que brinda el modelo, podría estimarse la velocidad por deslizamiento. Dicho de otro modo, si se conocen en detalle todos los parámetros que intervienen en las ecuaciones de flujo y se fija la curva del perfil de manera segura, es posible utilizar estos modelos para medir la velocidad de la base.

Demás está decirlo, nuevos y mayores esfuerzos serán necesarios para tratar las partes que aquí no hemos discutido y, por otro lado, introducir nuevos métodos de análisis.

## Referencias

- COOK, A. J.; FOX, A. J.; VAUGHAN, D. G. and FERRIGNO, J. G. (2005): *Science*, 308, 541.
- COOK, A. J. and D. G. VAUGHAN. (2010): *The Cryosphere*, 4, 77.
- CUFFEY, K. and PATERSON, W. (2010): "The Physics of Glaciers" (Elsevier: Amsterdam)
- FONTELOS, M.; MUÑOZ, A. y SCHIAVI, E. (2007): *Anales del XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones y X Congreso de Matemática Aplicada*, Sevilla (España), 1.
- FOWLEr, A. (2010): *Journal of Glaciology*, 56, 965.
- HOOKE, R. (2005): "Principles of glacier mechanics" (Cambridge University Press: Cambridge)
- IKEN, A (1981): *Journal of Glaciology*, 27, 407.
- LLIBOUTRY, L (1979): *Journal of Glaciology*, 23, 67.
- OERLEMANS, J (2001): "Glaciers and climate change" (Taylor & Francis: London)
- ROTSTEIN, N. y MARINSEK, S (2013): *Proyecciones*, 11, No. 2, 67.
- World Glacier Monitoring Service (2013): *Glacier fluctuations series*, pag. 24