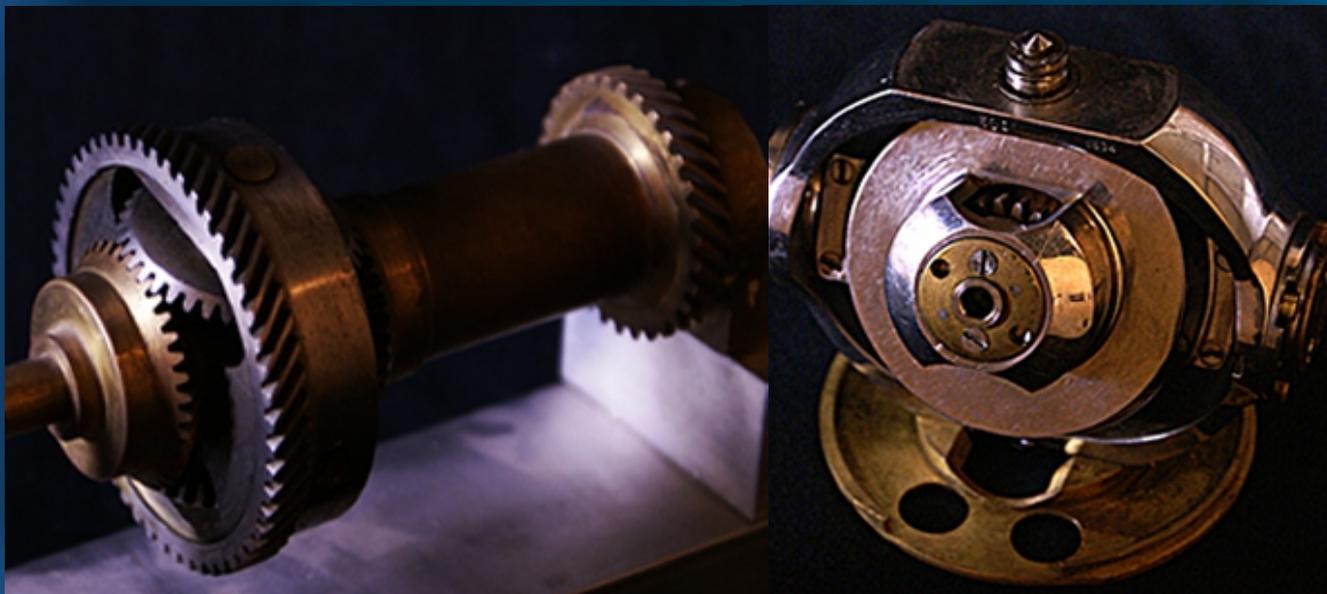
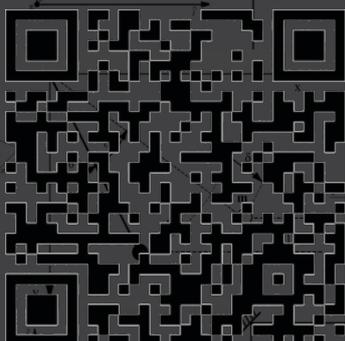


Liberto Ercoli
Virginia Azurmendi

MECÁNICA



RACIONAL



Universidad
Tecnológica
Nacional **UTN**



MECÁNICA RACIONAL

Liberto Ercoli - Virginia Azurmendi

edUTecNe
Buenos Aires, 2020

Ercoli, Liberto y Arzumendi, Virginia .
Mecánica racional / Liberto Ercoli ; Virginia Arzumendi. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2020.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-4998-44-6

1. Ingeniería Mecánica. I. Arzumendi, Virginia. II. Título.
CDD 621

Diseño de Tapa e Interior: Carlos Busqued, Fernando Cejas

Ilustraciones: Martín Calvento

Fotos de Portada: Macarena Verna

Ilustraciones del Apéndice 2: Cristian Vrizz



Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina

Rector: Ing. Héctor Eduardo Aiassa

Vicerrector: Ing. Haroldo Avetta

Secretaría Académica: Ing. Liliانا Raquel Cuenca Pletsch

Secretaría Ciencia, Tecnología y Posgrado: Dr. Horacio Leone



Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Bahía Blanca

Decano: Dr. Ing. Liberto ÉRCOLI

Vicedecano: Ing. Alejandro STAFFA



edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional

Coordinador General a cargo: Fernando H. Cejas

Área de edición y publicación en papel: Carlos Busqued

Colección Energías Renovables, Uso Racional de Energía, Ambiente: Dr. Jaime Moragues.



www.edutecne.utn.edu.ar

CiN REUN

Red de Editoriales
de Universidades Nacionales
de la Argentina

Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

© edUTecNe, 2020

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ) Buenos Aires, República Argentina

Publicado Argentina – Published in Argentina



ISBN 978-987-4998-44-6



Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

*El Agradecimiento
a nuestras familias, por su generosa cesión de
tiempo que pudo haber sido compartido.*

Contenido

Capítulo 1: **Cinemática del Punto**

Capítulo 2: **Cinemática de los Sistemas de Puntos**

Capítulo 3: **Cinética del Punto Material**

Capítulo 4: **Cinética de los Sistemas Materiales**

Capítulo 5: **Dinámica Analítica**

Apéndice 1: **Tensores Cartesianos**

Apéndice 2: **Problema Integrador**

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

El presente libro ha sido previsto para actualizar y expandir su contenido por medio de videos y otros recursos didácticos. Se accede a los mismos vía internet con dispositivos móviles o PCs

Video Introductorio

Presentación del libro por los autores, Dr. Ing. Liberto Ercoli e Ing. Virginia Azurmendi



<http://www.youtube.com/embed/CzXyQSxWWOc>

Videos y Complementos didácticos (en actualización permanente)



http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec_racional/mec_racion-anexos.html

Información sobre los autores



http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec_racional/mec_racion-cv.html

PRÓLOGO

El presente trabajo sobre *Mecánica Racional* constituye un aporte que es fruto de muchos años de experiencia en la materia y que ha sido concebido como una solución para el alumno en lo que respecta al seguimiento de las clases con un único texto. Busca evitar la necesidad de tomar apuntes que distraen la atención y a dejar abierta la opción de anotar en los márgenes conceptos o detalles sustanciales surgidos durante las clases teóricas y prácticas.

Siendo el objeto de la Mecánica la comprensión del movimiento de los cuerpos, la obra está organizada en cinco unidades: Cinemática del Punto Material, Cinemática de los Sistemas de Puntos Materiales y del Cuerpo Rígido, Cinética del Punto Material, Cinética de los Sistemas y del Cuerpo Rígido y Dinámica Analítica.

La asignatura pertenece al tercer nivel del diseño curricular de Ingeniería Mecánica y se halla inserta en el área de materias Tecnológicas Básicas, enlazando las materias del área de Ciencias Básicas como Física, Geometría Analítica, Álgebra y Cálculo y las del área de asignaturas Tecnológicas Generales, en las cuales se estudian las maquinarias e instalaciones que el ingeniero encontrará a lo largo de su vida profesional. Se trata de una materia integradora, en la cual confluyen no sólo los conocimientos previos analítico – teóricos adquiridos, sino también la capacidad técnica del alumno para tener en cuenta la realidad física

El carácter formativo de la Mecánica está vinculado con su capacidad para proveer bases conceptuales adecuadas para la incorporación de otros conocimientos de disciplinas como las que se desarrollan en las asignaturas de niveles superiores.

Así, la asignatura constituye un nexo entre el complejo físico – matemático creado por el Hombre en su búsqueda permanente de explicación racional para los fenómenos naturales y la realidad concreta de los mecanismos y sus movimientos, los que luego se reflejarán en cada parte de maquinaria.

Debido al constante avance en la tecnología de los materiales y a los modernos métodos de fabricación, se ha hecho posible fabricar máquinas cada vez más veloces con componentes livianos que soportan esfuerzos dinámicos significativos.

Tratándose en Mecánica Racional contenidos de naturaleza puramente dinámica –se excluye la Estática en su programa sintético- resulta obvio que el Ingeniero Mecánico debe acreditar los conocimientos enunciados en los objetivos de la asignatura para lograr la resolución de problemas tecnológicos en su área de conocimiento específica.

La presente versión constituye una actualización de la monografía original “Teoría de Mecánica” editada por el Laboratorio de Técnicas Educativas de la Facultad en 1998 y que merced al Programa Bibliotecas del Fondo para el Mejoramiento de la Educación –FOMEC 333- se halla disponible en internet desde entonces. En ésta se han incluido contenidos inherentes al cambio de nombre de la asignatura -de Mecánica del Sólido a Mecánica Racional- luego del primer proceso de acreditación ante la CONEAU de la carrera Ingeniería Mecánica que concluyera en 2004.

Así, se ha agregado un nuevo Capítulo –el quinto- sobre Dinámica Analítica, brindando otro punto de vista –el escalar- al del tratamiento eminentemente vectorial que predominaba hasta aquí; se han completado temas y corregido errores tipográficos presentes en la obra original.

Se ha reordenado y ampliado el Apéndice 1 sobre Tensores Cartesianos, con la intención de promover el aprendizaje significativo al relacionar las propiedades de las magnitudes tensoriales con los conocimientos previos de transformaciones lineales adquiridos en Álgebra Lineal.

Con el doble objeto de coadyuvar a la mejor comprensión de conceptos teóricos y de hacer hincapié en que los alumnos experimenten con total intensidad la excluyente relación teoría-práctica, valorando la consecuente necesidad de abordar las prácticas munidos de las herramientas brindadas por la teoría, se han agregado problemas ejemplos resueltos al final de cada apartado teórico sustantivo.

Con los mismos objetivos, también se ha sumado en un nuevo Anexo –el 2- un problema integrador ejemplo resuelto, el cual requiere para su análisis la aplicación progresiva de los conceptos principales de cinemática y cinética del cuerpo rígido con la intención de relacionar los temas estudiados en los distintos capítulos. Para cada expresión utilizada, se hace referencia a su localización en la teoría.

Se advierte a los alumnos la conveniencia de recurrir a la profusa bibliografía de la asignatura cuantas veces les sea necesario para una necesaria complementación y cabal comprensión de los temas.

La obra está dirigida a los cursantes de la asignatura Mecánica Racional del tercer nivel de la carrera de grado Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica Nacional, aunque podría ser usada como base por alumnos de otras ingenierías, quienes deberían adaptarla a los contenidos de sus programas.

Liberto Ercoli
Virginia Azurmendi

Departamento Ingeniería Mecánica
Facultad Regional Bahía Blanca
Universidad Tecnológica Nacional

INTRODUCCIÓN

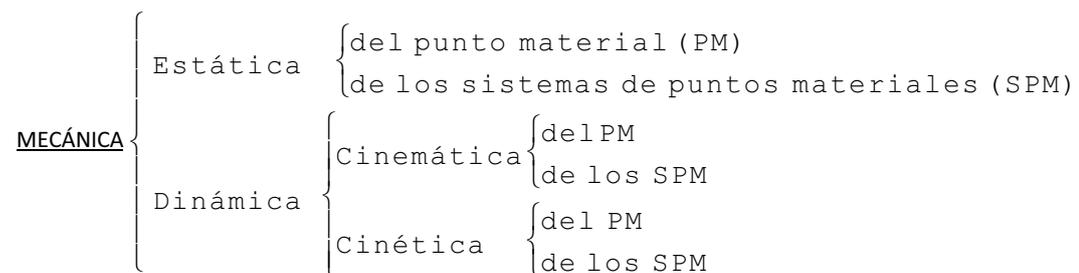
La Mecánica tiene por objeto el estudio del movimiento de los cuerpos, busca sus causas y las leyes que lo rigen, atendiendo las fuerzas que lo provocan.

El concepto de movimiento es relativo; para hablar de él debe tenerse en cuenta que un cuerpo se mueve cuando su posición cambia con respecto a otro cuerpo tomado como referencia.

Para la Mecánica, cuerpo es un conjunto continuo o discreto de puntos materiales o de partículas, que son entes desprovistos de dimensiones (punto geométrico en el sentido del tamaño), aunque se admite la abstracción de que pueden poseer masa.

En cuanto a las fuerzas que intervienen y que provocan el movimiento, son las de origen gravitatorio (acción de un cuerpo sobre otro), elástico, de rozamiento, de resistencia fluidodinámica; pero no entran bajo la consideración de la Mecánica las de origen electromagnético o térmico.

Es costumbre dividir a la Mecánica según el siguiente cuadro:



Con respecto al cuadro precedente, el presente curso de Mecánica Racional no contempla en su programa el estudio de la Estática (la cual, por otra parte, resulta un caso particular de la Dinámica).

De acuerdo a la definición de Mecánica dada más arriba, resulta que la misma es esencialmente Dinámica (movimiento).

La Cinemática consiste en estudiar el movimiento sin hacer referencia a las fuerzas que lo originan, mientras que la Cinética relaciona la acción de las fuerzas que se ejercen sobre los cuerpos con los movimientos resultantes.

Los avances en el conocimiento del movimiento de los cuerpos reconocen una concatenación de aportes por parte de diversos científicos con el correr del tiempo. Sólo por mencionar algunos hitos de la rica historia de la Mecánica, se presenta a continuación un breve resumen.

Leonardo da Vinci (1542-1519) relacionó los momentos estáticos con el equilibrio de los cuerpos. Prefiguró el trabajo de Galileo sobre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Se admite que la iniciación del conocimiento racional de la dinámica se debe a **Galileo** (1564-1642) para quien la falta de precisión en la medición del tiempo constituyó una seria dificultad. Enunció y verificó experimentalmente las leyes cinemáticas de la caída de los cuerpos, y otros movimientos

uniformemente acelerados. Descubrió la ley de inercia que más tarde fue formalizada por Newton. Observó que las fuerzas producen aceleraciones. Descubrió la composición vectorial del paralelogramo y obtuvo la trayectoria de un proyectil. Construyó el primer telescopio y con él efectuó profundos descubrimientos astronómicos.

Un contemporáneo de Galileo, **Kepler** (1571-1642), descubrió tres leyes empíricas fundamentales del movimiento planetario a partir de las observaciones del danés Tycho Brahe. Concibió la gravedad como la análoga de la atracción magnética.

La invención del reloj a péndulo por **Huygens** (1629-1695) en 1657 permitió posteriores avances de gran importancia en dinámica. Creó además la teoría del centro de oscilación, determinó el valor de g mediante mediciones pendulares, dedujo las ideas de fuerza centrífuga y aceleración centrípeta, estableció la conexión entre el trabajo y la energía cinética.

Es **Newton** (1642-1726) quien formula con precisión las leyes del movimiento y fundamenta sólidamente la dinámica. Descubrió la ley de gravitación universal. En 1686 enunció formalmente como axiomas las “leyes del movimiento”, que forman la base para describir matemáticamente la dinámica de un sistema. Generalizó la idea de fuerza; introdujo el concepto de masa; formuló claramente el principio del paralelogramo de fuerzas; estableció la ley de acción y reacción.

Después de Newton, aportaron grandes contribuciones a la Mecánica, Bernoulli (Jacob, John y Daniel), Euler, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poisson, Coriolis, Hamilton y otros.

Einstein (1878-1955), en sus teorías de la relatividad especial (1905) y general (1916), introdujo los nuevos conceptos de espacio-tiempo necesarios en el estudio de las partículas atómicas que se mueven en espacios muy pequeños a altas velocidades. La masa variable (dependiente de la velocidad) y el tiempo variable son conceptos originales.

La importancia de la Dinámica en la ingeniería se ha tornado superlativa con el desarrollo de las tecnologías en las últimas décadas; las máquinas y estructuras de soporte funcionan a grandes velocidades y con aceleraciones apreciables, mientras que los materiales que las constituyen se tornan más y más livianos y resistentes. Este hecho induce a pensar que excepcionalmente un ingeniero, cualquiera sea su campo de especialización, podrá prescindir de conocimientos básicos sobre Dinámica.

Capítulo 1

CINEMÁTICA DEL PUNTO

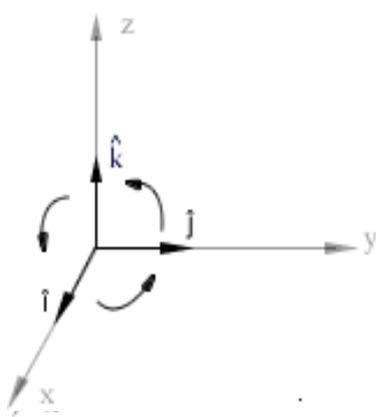
1. CINEMÁTICA DEL PUNTO

La Cinemática consiste en estudiar el movimiento sin hacer referencia a las fuerzas que lo originan analizando las sucesivas posiciones del punto en el espacio en función del tiempo.

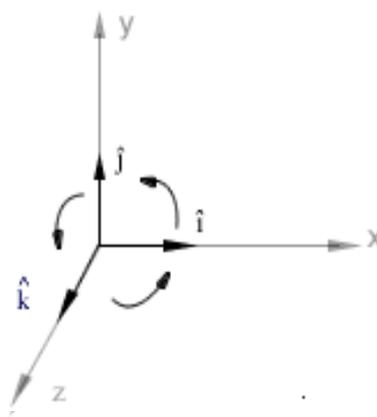
El movimiento de los puntos puede describirse especificando las coordenadas lineales y angulares y sus derivadas respecto a marcos de referencia que pueden ser *considerados* “fijos” (análisis del movimiento absoluto), o “móviles” (análisis del movimiento relativo).

Los sistemas de coordenadas se eligen arbitrariamente en el marco de referencia adoptado en función de la geometría del problema en cuestión. Las coordenadas más corrientes son: cartesianas, polares, cilíndricas, esféricas, intrínsecas y generalizadas.

Coordenadas cartesianas: (x, y, z)



a) Terna derecha o dextrógira



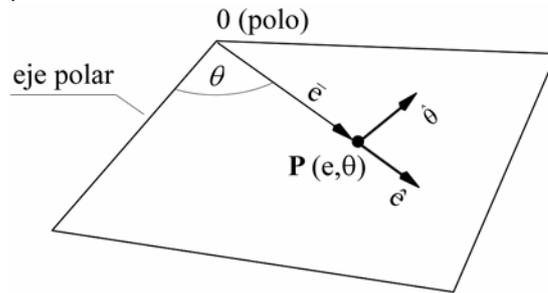
b) Terna izquierda o levógira

Mirando desde el afijo (flecha) de uno de los versores, el sentido de giro en el plano de enfrente debe ser antihorario.

Mirando desde el afijo (flecha) de uno de los versores, el sentido de giro en el plano de enfrente debe ser horario.

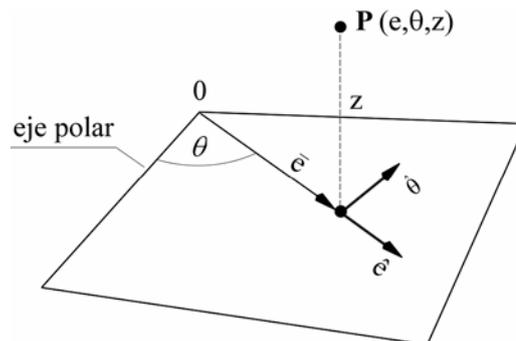
Como convención, se acuerda que en el caso de dibujar solamente dos ejes, el tercero sale de la hoja hacia el lector.

Coordenadas polares: Se define un polo, un eje polar y a partir de ellos, la posición lineal y angular de un punto.



La base está constituida por el versor radial \hat{e} que tiene sentido positivo alejándose del polo en la dirección del vector posición \vec{e} (con origen en el polo y extremo en el punto), y por el versor transversal $\hat{\theta}$ que es perpendicular al \hat{e} con sentido positivo en la dirección creciente del ángulo θ .

Coordenadas cilíndricas: Son las coordenadas polares $(\hat{e}, \hat{\theta})$ más la posición de la partícula en la dirección perpendicular (\hat{k}) al plano polar (cota z).

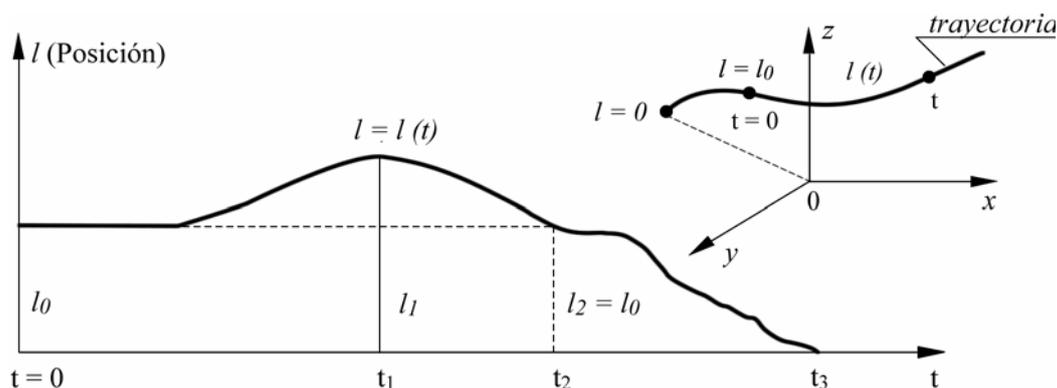


Como se verá más adelante, todos los sistemas coordenados son relacionables entre sí.

Trayectoria: es el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por un punto móvil con el transcurso del tiempo.

Ecuación del movimiento sobre la trayectoria:

Una forma de dar la posición de un móvil es suministrar el valor del camino recorrido sobre la trayectoria (o posición de la partícula respecto de un punto tomado como referencia). Es una forma escalar y gráficamente se tiene:



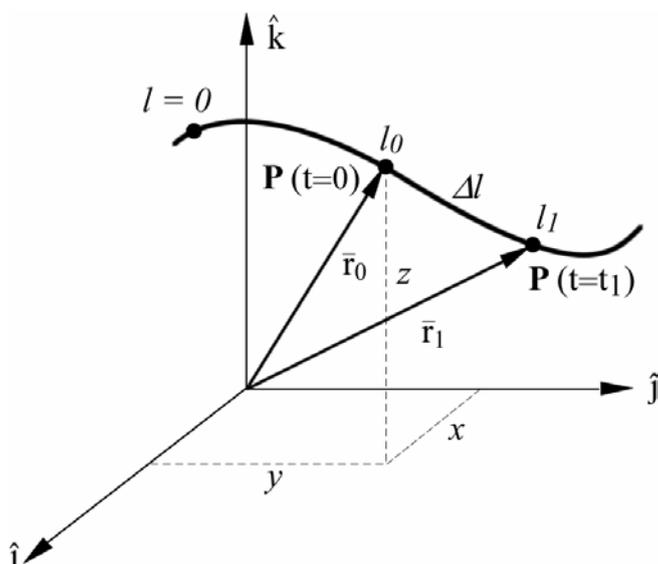
$l = l(t)$ es la ecuación del movimiento en forma escalar. Para el instante inicial ($t = 0$), el móvil ocupará en general una posición dada por el arco l_0 (espacio inicial) respecto al origen de la posición. l_1 es una posición de alejamiento máximo desde el punto tomado como referencia.

En t_2 el móvil está en la posición donde se comenzaron a medir los tiempos ($l_2 = l_0$). En t_3 el móvil pasa por el punto tomado como referencia para medir las posiciones.

La función $l = l(t)$ es continua por cuanto un punto no puede ocupar más de una posición para un instante dado. Esta forma de dar la posición se usa cuando se conoce la trayectoria.

Ley del movimiento:

Otra forma de dar la posición de un móvil es a través del vector posición $(P - 0) = \vec{r}$
 En un sistema de coordenadas cartesianas se tiene:



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Esta es la ecuación del movimiento en forma vectorial.

Cada una de las coordenadas será una función continua del tiempo, siendo las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

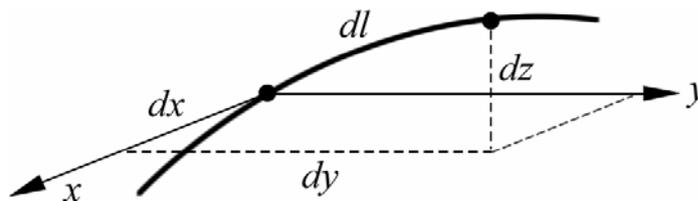
Las proyecciones del móvil sobre cada eje coordenado constituyen los movimientos proyectados:

$$\vec{r}_x = x(t) \cdot \hat{i} \quad ; \quad \vec{r}_y = y(t) \cdot \hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_z = z(t) \cdot \hat{k}$$

Al moverse el punto en su trayectoria, sus proyecciones sobre los ejes serán movimientos rectilíneos. El movimiento real puede así ser pensado como la composición de los 3 rectilíneos simultáneos.

La relación entre $l(t)$ y \vec{r} viene dada por:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv |d\vec{r}| \quad ; \quad l - l_0 = \int_{t=0}^{t=t} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



1.1 Concepto de velocidad:

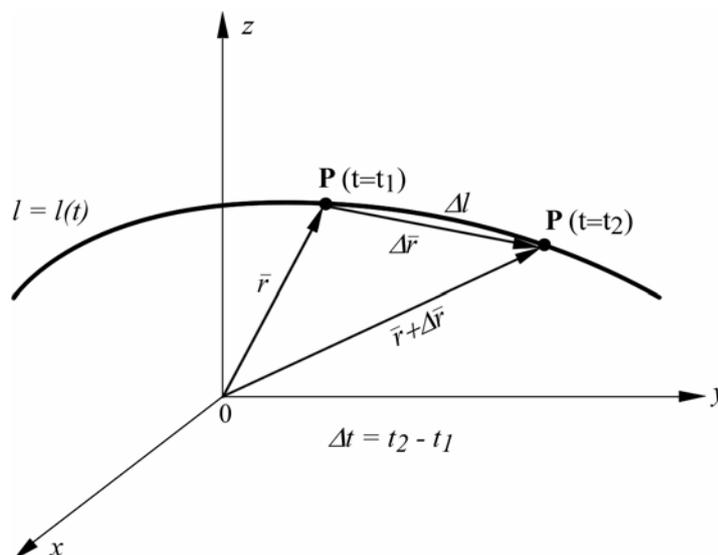
Sea el punto P que se mueve describiendo la trayectoria indicada en la figura según la ley $l = l(t)$

$$\text{en: } t = t_1 \rightarrow l_1 = l(t_1)$$

$$\text{en: } t = t_2 \rightarrow l_2 = l(t_1 + \Delta t)$$

En el intervalo de tiempo el móvil habrá recorrido un camino:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l(t_1 + \Delta t) - l(t_1)$$



A la relación $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ se la denomina expresión escalar de la velocidad media

$$Vm = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Luego, esta velocidad es una magnitud escalar y es la rapidez con que se recorren los espacios en el tiempo. Cuando esta expresión se mantiene constante cualquiera sea t y Δt , el movimiento es uniforme. De igual forma:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}m = \text{expresión vectorial de la velocidad media}$$

Para intervalos de tiempo muy pequeños ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt} = V \text{ expresión escalar de la velocidad instantánea.}$$

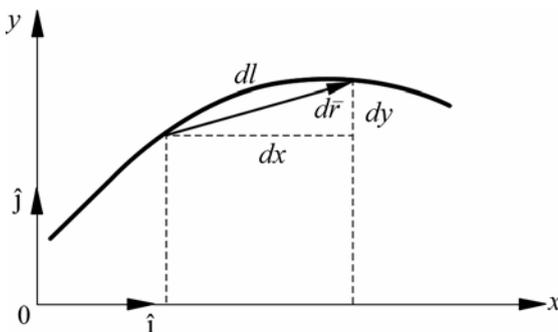
$$\text{y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \text{ expresión vectorial de la velocidad instantánea. Veamos}$$

si ambas expresiones se relacionan entre sí. Siendo r una función del tiempo a través de l , se tiene:

$$\vec{r} = \vec{r} [l(t)]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dl} \frac{dl}{dt} = V \frac{d\vec{r}}{dl}$$

pero en el límite $d\vec{r}$ es tangente a la curva y dl es el módulo de $d\vec{r}$ (y un vector sobre su módulo es un versor):

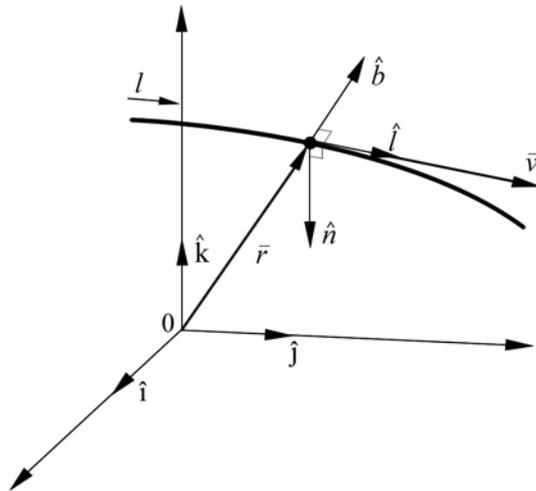


En el límite, es $|d\vec{r}| \equiv dl$

Luego, $\frac{d\vec{r}}{dl} = \hat{l}$ versor tangente a la trayectoria

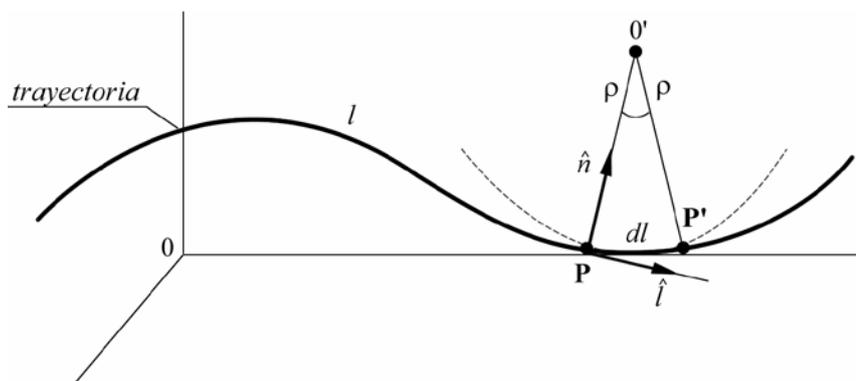
$$\text{y } \vec{V} = V \cdot \hat{l} \quad (1.1)$$

Es decir, el vector velocidad tiene siempre la dirección tangente a la trayectoria en el punto considerado, un sentido concordante con el del movimiento y un módulo dado por la expresión escalar de la velocidad. La ecuación (1.1) es la **expresión vectorial de la velocidad referida a una terna intrínseca**. Gráficamente:



Esta terna acompaña al punto en su movimiento. El versor tangente \hat{i} positivo está dirigido a lo largo de la curva espacial (trayectoria) en el sentido en que se incrementa l (t). Esta dirección está siempre unívocamente especificada.

En cuanto a la dirección normal, sin embargo, hay un número infinito de rectas perpendiculares a \hat{i} por P. Para hacer una elección única del versor \hat{n} es necesario considerar el hecho de que geoméricamente la curva consiste de una serie de "segmentos de arco diferencial" dl , cada uno de los cuales se construye según el arco de un "circulo único" que tiene un radio de curvatura ρ y un centro de curvatura O' .



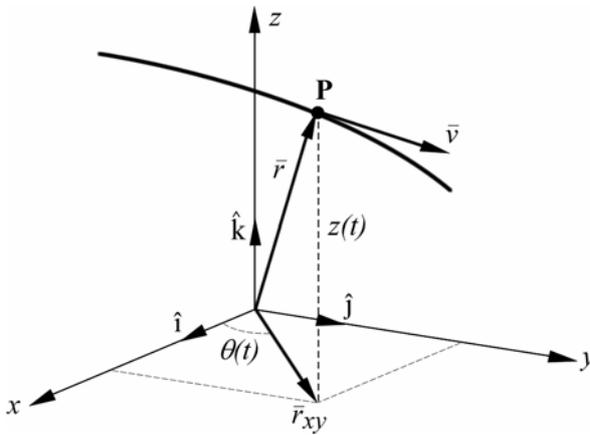
El versor normal \hat{n} que se elegirá está dirigido de P a O' y su recta de acción coincide con la normal principal a la curva en P.

El plano que contiene a l y \hat{n} se llama "plano osculador", el cual se mantiene fijo si el movimiento es plano, por lo que es en este tipo de movimiento donde estas coordenadas tienen su mayor aplicación.

El tercer versor de la terna, denominado binormal, queda definido por:

$$\hat{b} = \hat{l} \wedge \hat{n}$$

Expresión vectorial de la velocidad referida a una terna cartesiana:



Sea $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$

Luego

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = V_x \cdot \hat{i} + V_y \cdot \hat{j} + V_z \cdot \hat{k}$$

ó

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

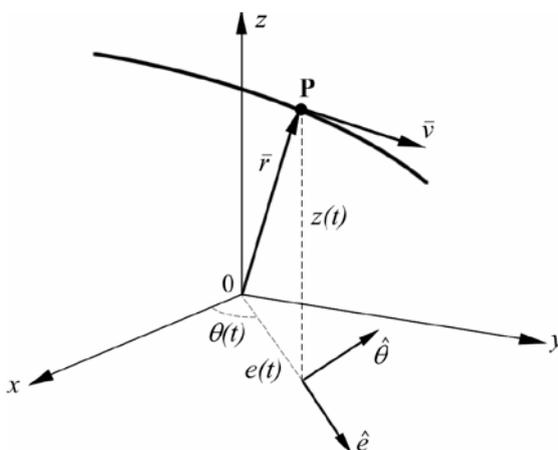
V_x, V_y, V_z , representan las proyecciones de la velocidad del punto sobre los ejes coordenados, siendo a su vez las

velocidades en los movimientos proyectados.

El módulo de \vec{V} es el valor encontrado para la velocidad escalar, ya que:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \text{y} \quad \frac{dl}{dt} = V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.1')$$

Expresión vectorial de la velocidad en coordenadas cilíndricas:



Sea \hat{e} = versor radial

$$\hat{e} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} = \hat{e}(t)$$

y $\vec{r}(t) = e \cdot \hat{e} + z \cdot \hat{k}$

luego:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{de}{dt} \hat{e} + \frac{d\hat{e}}{dt} e + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

pero:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} \\ &= \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \end{aligned}$$

donde $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ y $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$

Como se observa, $\hat{\theta}$ es un versor girado $\pi/2$ con respecto al versor \hat{e} en su plano y recibe el nombre de versor transversal. Así $\frac{d\hat{e}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$ y por lo tanto:

$$\vec{V} = \frac{de}{dt} \hat{e} + e \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad (1.2)$$

ó

$$\vec{V} = V_e \cdot \hat{e} + V_\theta \cdot \hat{\theta} + V_z \cdot \hat{k}$$

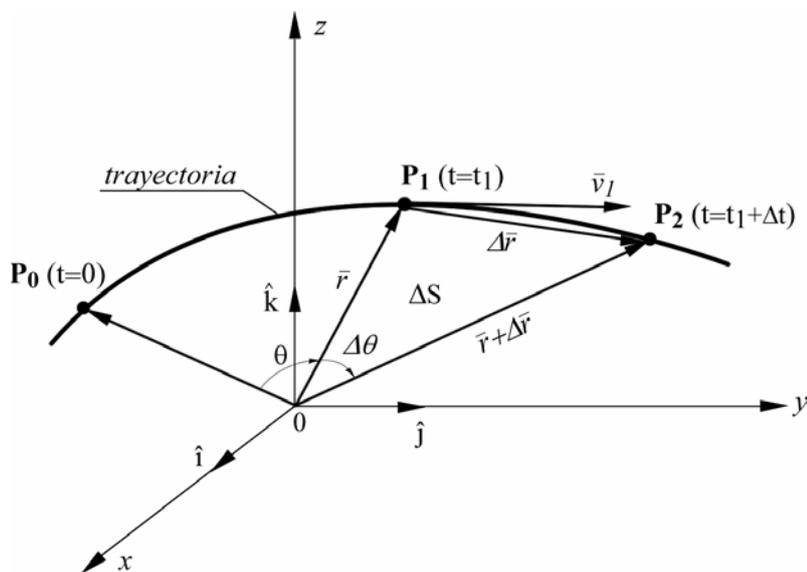
V_e se denomina velocidad radial o de desplazamiento y V_θ transversal o de circulación

El valor del módulo será:
$$\sqrt{\left(\frac{de}{dt}\right)^2 + (e \cdot \dot{\theta})^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.2')$$

1.2. Concepto de velocidades angular y areolar:

Al pasar el punto $P_1(t=t_1)$ a la posición $P_2(t=t_1+\Delta t)$ el vector \vec{r} experimenta una variación de dirección medida por el ángulo $\Delta\theta$ en el lapso Δt .

A la relación $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_m$ se la denomina velocidad angular media en el lapso t_1 a $t_1 + \Delta t$



Cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (1.3)$$

que se denomina velocidad angular instantánea

Estas expresiones valen para trayectorias planas (solo se necesita intensidad y sentido). Si la trayectoria es alabeada es necesario representar a ω por un vector normal al plano determinado por \vec{r} y $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ y cuyo módulo es la velocidad angular escalar.

El área Δs que describe r en Δt puede representarse por el semi producto vectorial entre \vec{r} y $\Delta \vec{r}$ (área de un triángulo).

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \Delta \vec{r}$$

obteniéndose un vector representativo del área. Armando el cociente incremental, se tiene:

$$\frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

que es el vector velocidad areolar media y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{V} = \dot{\vec{S}}; \quad \dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.4}$$

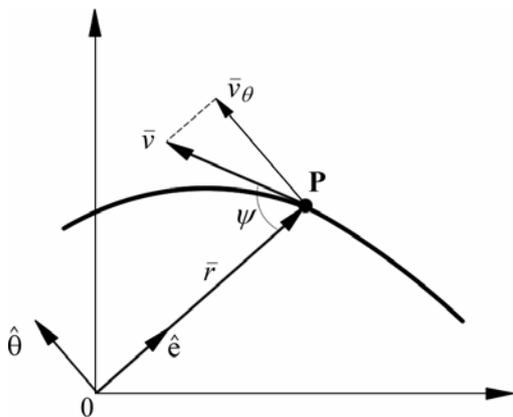
vector velocidad areolar instantánea (perpendicular al plano determinado por \vec{r} y \vec{V} , aplicado al punto 0, puesto que \vec{r} es aplicado).

El módulo será:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r V \text{sen} \psi = \frac{1}{2} r V_{\theta}$$

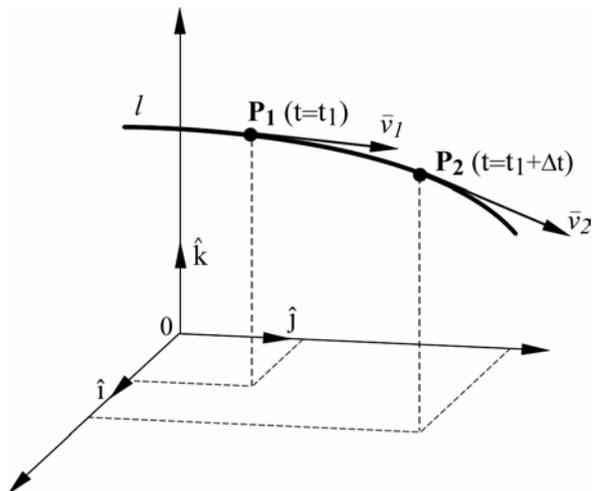
Por lo tanto:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \dot{\theta} \tag{1.4'}$$



1.3. Concepto de aceleración:

Se analizará ahora la rapidez con que varía la velocidad en el tiempo.



Para pasar de P_1 a P_2 la velocidad varió de \vec{V}_1 a \vec{V}_2 en:

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

A la relación $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{a}_m$

se la denomina expresión vectorial de la aceleración media.

Tomando límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.5)$$

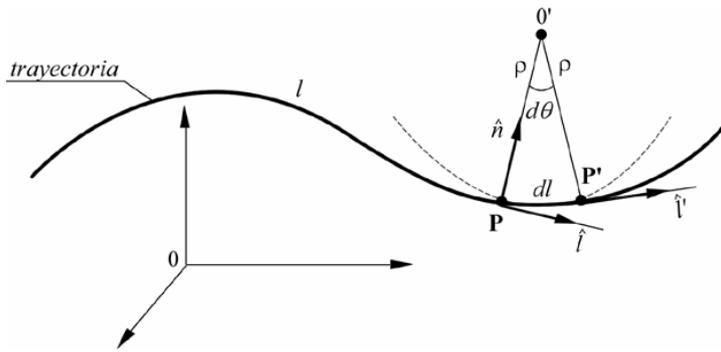
Pero, ¿qué dirección tendrá este vector? En la terna intrínseca, se sabe,

$$\vec{v} = V \cdot \hat{l} = \frac{dl}{dt} \hat{l}$$

luego:
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{dV}{dt} \hat{l} + V \cdot \frac{d\hat{l}}{dt}$$

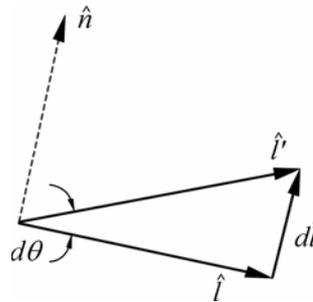
El primer sumando recibe el nombre de aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2}; \quad \vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \hat{l}$$



Para calcular $\dot{\hat{l}} = \frac{d\hat{l}}{dt}$ nótese que cuando la partícula se mueve a lo largo del arco dl en el tiempo dt , \hat{l} conserva su magnitud unitaria cambiando sin embargo su dirección, de modo que se vuelva \hat{l}' .

Si se grafica a continuación el cambio (variación) $d\hat{l}$ de \hat{l} :



Aquí $d\hat{l}$ se extiende entre dos puntos que están sobre un arco infinitesimal $d\theta$ de radio $|\hat{l}|=1$

Por lo tanto, $d\hat{l}$ tiene un módulo $dl=l d\theta$ y su dirección se define por \hat{n} . Consecuentemente:

$$d\hat{l} = d\theta \hat{n} \quad \text{ó} \quad \frac{d\hat{l}}{dt} = \dot{\hat{l}} = \dot{\theta} \hat{n}$$

y como: $dl = \rho d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{\dot{l}}{\rho} = \frac{V}{\rho}$

por lo tanto $\dot{\hat{l}} = \frac{\dot{V}}{\rho} \hat{n}$

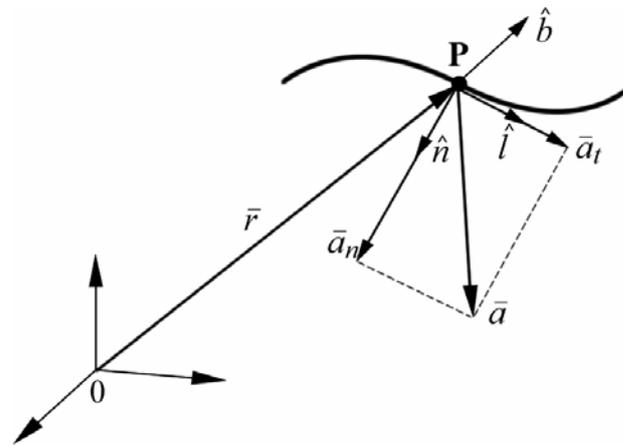
Por lo tanto, la expresión final del vector \vec{a} cuando se lo refiere a la terna intrínseca es

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \cdot \hat{l} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \hat{n} \tag{1.6}$$

Con $\vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \hat{l}$ y $\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \hat{n}$

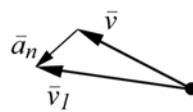
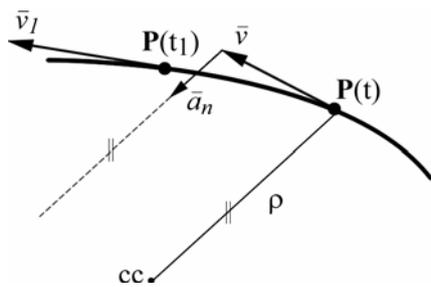
donde \vec{a}_n es la aceleración normal o centrípeta.

Gráficamente:



Conclusiones:

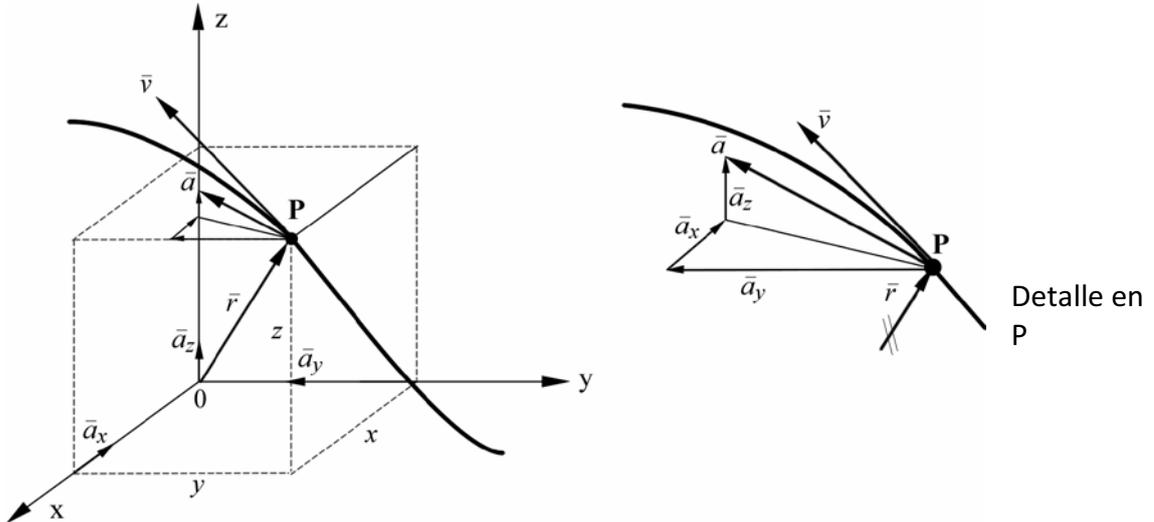
- El vector \vec{a} no tiene componente según la binormal y por lo tanto está contenido en el plano osculador en el punto considerado.
- La \vec{a}_t tendrá siempre la dirección de la velocidad y define la variación del módulo de la misma.
- La \vec{a}_t puede tener el mismo sentido o contrario que la \vec{V} de donde resultan los movimientos acelerados y desacelerados respectivamente.
- La \vec{a}_n está siempre orientada hacia el centro de curvatura y define el cambio de dirección del vector velocidad a lo largo de la trayectoria.



Análisis del cambio de dirección del vector velocidad en dos puntos próximos de la trayectoria

Componentes del vector aceleración cuando se lo refiere a un sistema de coordenadas cartesianas.

Si la ecuación del movimiento se refiere a una terna $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, es decir:



$$\vec{r} = P - O = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = V_x \cdot \hat{i} + V_y \cdot \hat{j} + V_z \cdot \hat{k} \quad y \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{r}^2}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} = \\ &= \frac{dV_x}{dt} \hat{i} + \frac{dV_y}{dt} \hat{j} + \frac{dV_z}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$

luego: $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ (1.7)

y su módulo $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

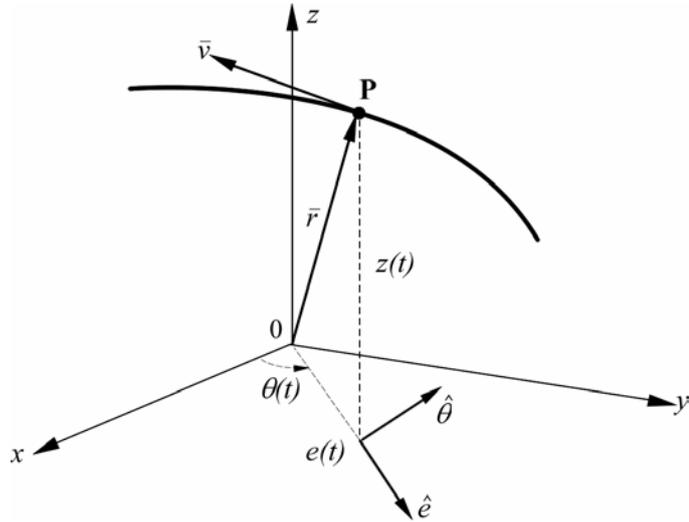
a_x, a_y, a_z son las aceleraciones de los movimientos proyectados.

Componentes del vector aceleración referido a un sistema de coordenadas cilíndricas:

Sea $\vec{r}(t) = e \cdot \hat{e} + z \cdot \hat{k}$

donde: $\hat{e} = \cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{de}{dt} \cdot \hat{e} + e \cdot \frac{d\hat{e}}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

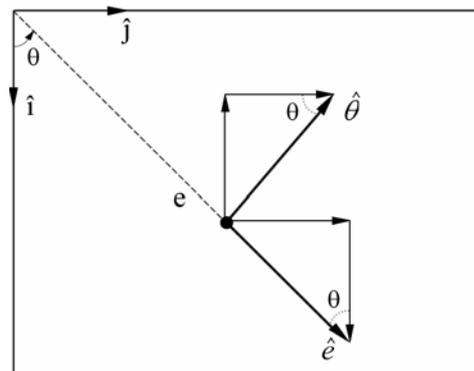


Analizando el plano polar:

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

con $\hat{\theta} \perp \hat{e}$

Luego: $\vec{V} = \frac{de}{dt} \hat{e} + e \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$



Y derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2} \hat{e} + \frac{de}{dt} \frac{d\hat{e}}{dt} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + e \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + e \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Pero:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = -\frac{d\theta}{dt} \hat{e}$$

Luego:

$$\vec{a} = \frac{d^2e}{dt^2} \hat{e} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + e \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - e \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{e} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Y agrupando:

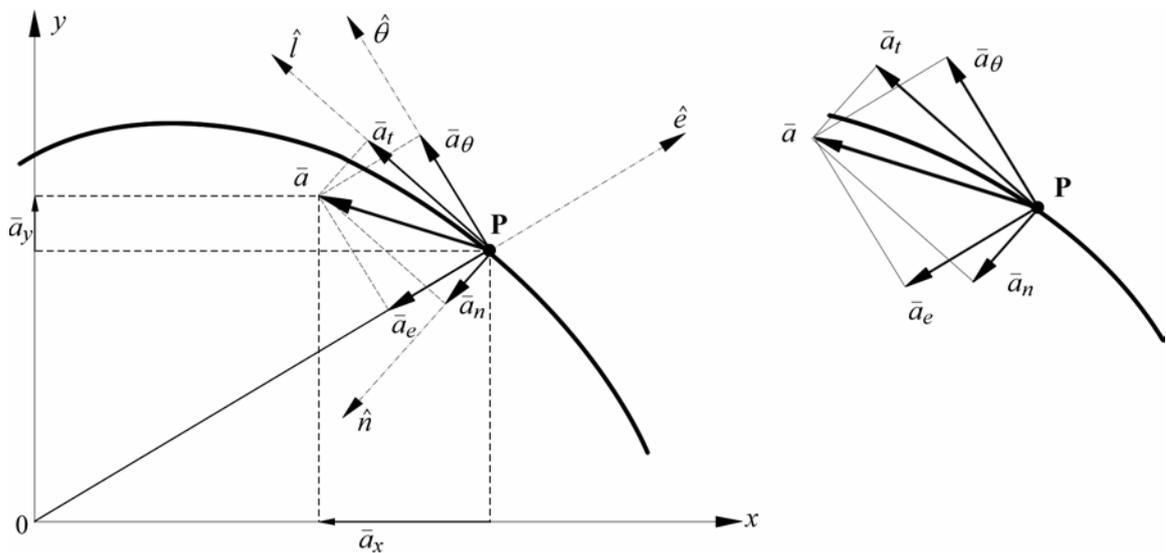
$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 e}{dt^2} - e \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{e} + \left[2 \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} + e \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \hat{\theta} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} \quad (1.8)$$

ó $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$

donde: \vec{a}_e es la aceleración radial y \vec{a}_θ la transversal

\vec{a}_z es la aceleración en el sentido de la cota y coincide en coordenadas cartesianas o cilíndricas.

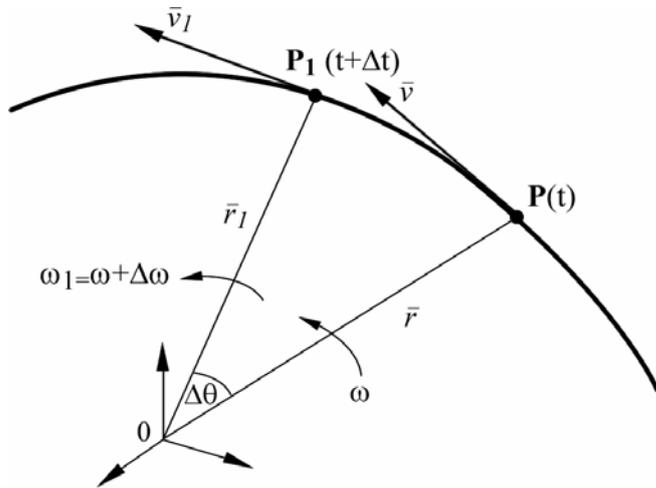
En resumen, para una trayectoria plana:



Este gráfico muestra las componentes de un mismo vector aceleración en los distintos sistemas de coordenadas. Obsérvese que las componentes varían de un sistema a otro, pero el vector \vec{a} es único.

1.4. Conceptos de aceleraciones angular y areolar

Repitiendo conceptos anteriores y teniendo en cuenta el apartado 1.2:



Al pasar de P(t) a P₁(t + Δt) la velocidad angular se incrementa de ω a $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$

A la relación: $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \gamma_m$ se la denomina aceleración angular media en el lapso Δt.

Si γ_m es **constante** cualquiera sea Δt el **movimiento angular es uniformemente variado**. En el límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.9}$$

Que se denomina aceleración angular instantánea y refleja la rapidez de variación de la velocidad angular en el tiempo.

Sean \vec{S}_1 y \vec{S} las velocidades areolares en los instantes (t + Δt) y t respectivamente. El vector:

$$\frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{\vec{S}_1 - \vec{S}}{\Delta t} \text{ define la } \underline{\text{aceleración areolar media.}}$$

y:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \ddot{\vec{S}} \tag{1.10}$$

es la aceleración areolar instantánea

Conociendo que $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{V}$ y derivando:

$$\ddot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{a} \rightarrow \ddot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{a} \tag{1.10'}$$

1.5. Expresiones de Gaston Darboux

Estas expresiones son sumamente importantes, puesto que permiten calcular en forma rápida las componentes de los vectores velocidad y aceleración según un sistema coordenado dado, cuando se tienen las ecuaciones horarias del movimiento en otro sistema, constituyendo una herramienta de transformación.

Sean dadas por ejemplo:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \\ \vec{V}(t) &= V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \\ \vec{a}(t) &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}\end{aligned}$$

Considerando las expresiones de \vec{V} y \vec{a} referidas a la terna intrínseca:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V \cdot \hat{t} \\ \vec{a} &= a_t \hat{t} + a_n \hat{n}\end{aligned}$$

Y efectuando el siguiente producto escalar:

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = V a_t$$

$$\text{luego: } a_t = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{V} \quad (1.11)$$

Utilizando ahora el producto vectorial:

$$\vec{V} \wedge \vec{a} = V a_n \cdot \hat{b} = \frac{V^3}{r} \cdot \hat{b} \quad \therefore a_n = \frac{|\vec{V} \wedge \vec{a}|}{V} \quad (1.12)$$

También puede determinarse el radio de curvatura de la trayectoria:

$$\rho = \frac{V^3}{|\vec{V} \wedge \vec{a}|} \quad (1.13)$$

Con esta expresión se puede hallar el radio de curvatura de una curva dada con independencia del movimiento. En efecto, suponiendo un movimiento según una de las coordenadas y conociendo la curva, se tiene la otra coordenada; luego se hallan \vec{V} y \vec{a} y se aplica la última expresión.

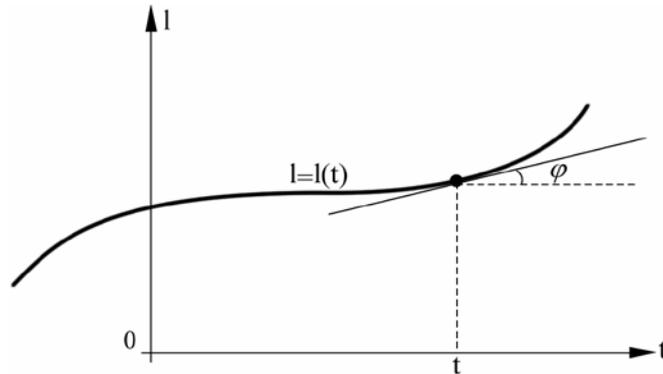
El mismo procedimiento puede emplearse para pasar de coordenadas cartesianas a polares o de polares a intrínsecas.

Para una mejor comprensión de las expresiones de Darboux se sugiere realizar la gráfica de la trayectoria y en el punto dibujar los vectores posición, velocidad y aceleración con sus respectivas componentes.

1.6. Diagramas:

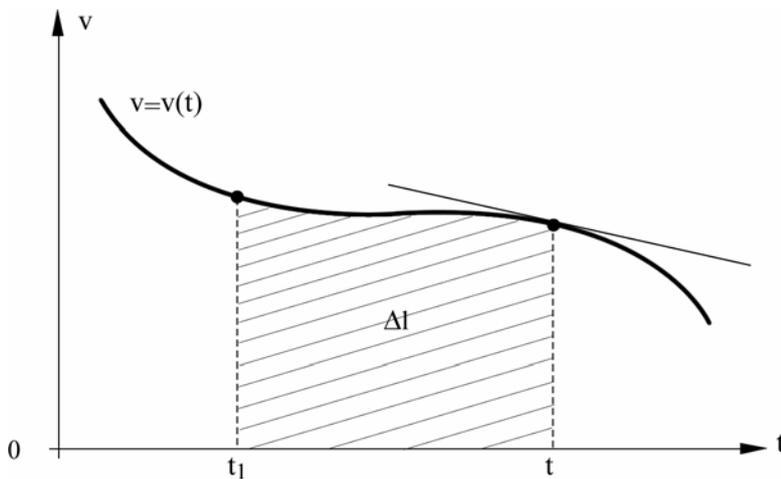
Es común en la mecánica representar gráficamente algunos de los parámetros estudiados. Los diagramas usados más comúnmente son:

a) Diagrama posición - tiempo:



Como $\frac{dl}{dt} = V$, la pendiente de la tangente a la curva $l = l(t)$ en cualquier instante representa el módulo de la velocidad instantánea: $V = \text{tg } \varphi$

b) Diagrama Velocidad-Tiempo:



aquí es $V = V(t)$

pero $V = \frac{dl}{dt}$

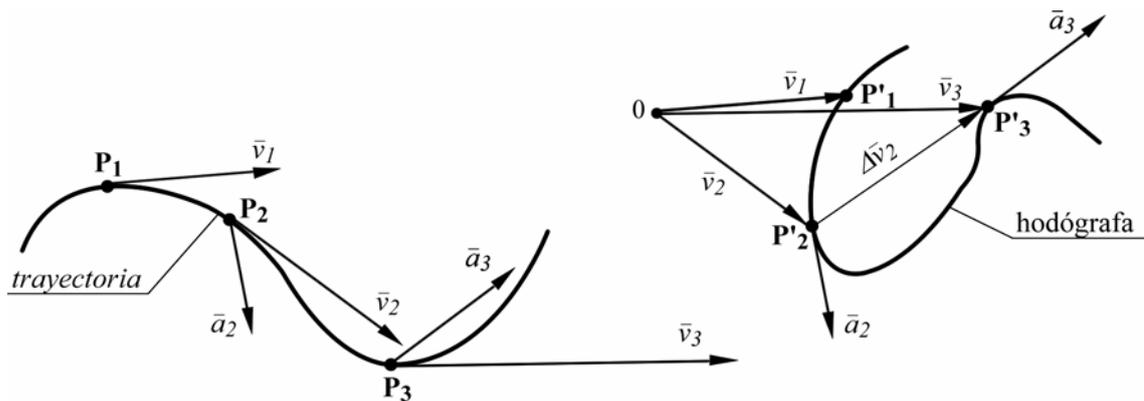
$\therefore dl = V dt$

$$l - l_1 = \int_{t_1}^t V dt$$

la superficie debajo de la curva $v = v(t)$ representa el desplazamiento sobre la trayectoria desde t_1 a t ; además, siendo $a_t = \frac{dv}{dt}$, la pendiente de la tangente en un punto representa el módulo de la aceleración tangencial: $tg\psi = a_t$.

c) Curva Hodógrafa:

Sea una trayectoria cualquiera sobre la que se dibujan los vectores velocidad;

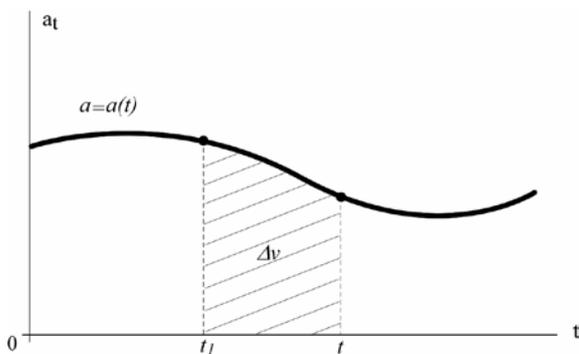


Tomando un polo 0 y trasladando a él los vectores velocidad paralelos a sí mismos, se observa que:

$$\frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t} = \vec{a}_{m2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t} = \vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

Es decir que la velocidad del punto P' que recorre la hodógrafa es la aceleración del punto P que describe la trayectoria.

d) Diagrama de aceleración-tiempo:



aquí es $a_t = a_t(t)$; y $dv = a_t dt$

$$V - V_1 = \int_{t_1}^t a_t dt$$

La superficie debajo de la curva $a = a(t)$ mide la variación de la rapidez en el intervalo de tiempo.

1.7. Movimientos - Estudio cinemático.

Puede decirse que en la Mecánica todo se reduce a dos tipos de problemas:

a) Problema inverso: Se tienen las ecuaciones del movimiento y se desea conocer la aceleración. Es el problema más sencillo, puesto que sólo implica derivar las ecuaciones de movimiento, pero el que menos se presenta.

b) Problema directo: Dada la aceleración, determinar la ecuación horaria. Aquí pueden presentarse problemas, ya que la integración puede resultar dificultosa. Este es el verdadero problema de la Mecánica, puesto que la naturaleza impone las causas del movimiento.

Se analizarán a continuación algunos tipos de movimientos de interés en Mecánica.

1.7.1 Movimientos periódicos:

Definición: un movimiento es periódico cuando en intervalos iguales de tiempo se repiten sus propiedades cinemáticas, es decir, posición, velocidad y aceleración $(\vec{r}, \vec{V}, \vec{a})$.

El intervalo de tiempo en que se repiten estas propiedades cinemáticas recibe el nombre de período (T).

Al número de períodos que se cumplen en la unidad de tiempo (el segundo) se lo llama frecuencia (f) del movimiento, y es:

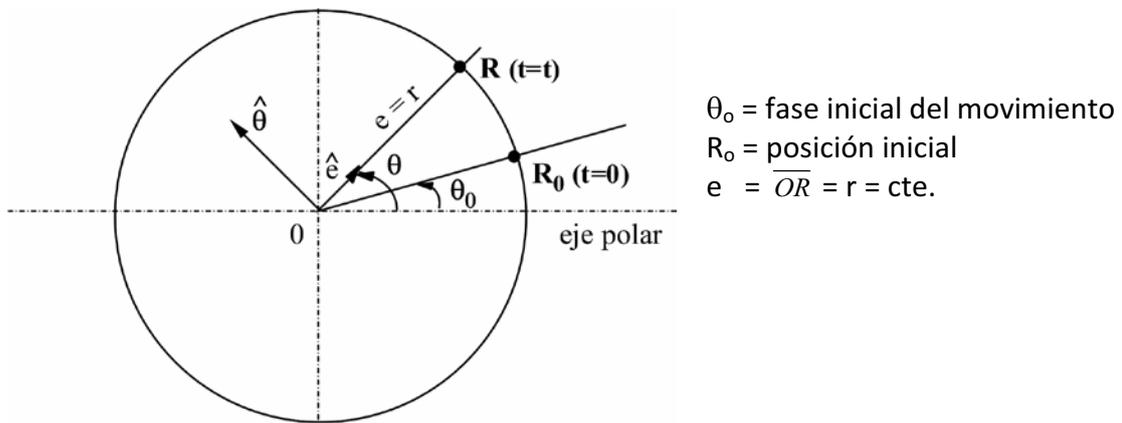
en T seg. → 1 ciclo de movimiento

$$\text{en 1 seg.} \rightarrow \frac{1}{T} = f \left[\frac{\text{ciclos}}{\text{seg.}} \right] \text{ o [Hertz]}$$

Como se verá, el más simple de los movimientos periódicos es el movimiento circular uniforme.

1.7.2. Movimientos Circulares:

Son aquellos en que la trayectoria del punto en movimiento es una circunferencia. Para el estudio de estos movimientos es más sencillo utilizar coordenadas polares, eligiendo como polo el centro del círculo.



Pueden presentarse varias alternativas particulares del caso general:

a) en el caso más general: $\theta = \theta(t) =$ función cualquiera del tiempo

$$\vec{e} = r \hat{e}$$

$$\vec{V} = \dot{e} \hat{e} + e \dot{\theta} \hat{\theta}$$

pero: $\dot{e} = 0$ y $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \therefore \vec{V} = e \omega \hat{\theta}$

Siendo en la trayectoria circular $\hat{\theta} \equiv \hat{l}$ (versor transversal coincide con el versor tangencial)

$$\vec{V} = e \omega \hat{l} \quad ; \quad V = e \omega = r \omega \tag{1.14}$$

es decir que el vector velocidad es siempre normal al radio.

Para la aceleración:

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right] \hat{e} + \left[2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right] \hat{\theta}$$

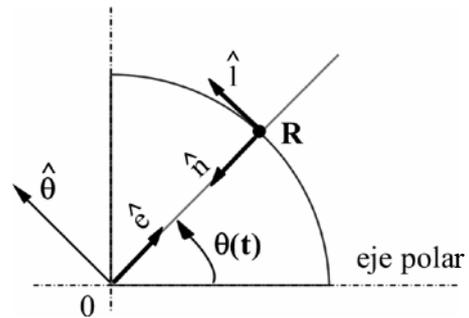
$$\vec{a} = -r \omega^2 \hat{e} + r \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

pero $\hat{e} = -\hat{n}$ (versor normal)

Luego:

$$\vec{a} = \gamma r \hat{l} + \omega^2 r \hat{n} \quad (1.15)$$

$$a_t = \gamma r; \quad a_n = \omega^2 r$$



b) si $\gamma = \text{cte}$, el movimiento circular se llama uniformemente variado y no es periódico:

$$\ddot{\theta} = \gamma \rightarrow d\omega = \gamma \cdot dt \quad \text{y} \quad \omega - \omega_o = \gamma (t - t_o)$$

$$\text{si } t_o = 0 \rightarrow \text{es: } \omega = \gamma \cdot t + \omega_o \quad \text{y} \quad \theta = \gamma \frac{t^2}{2} + \omega_o \cdot t + \theta_o$$

c) Si $\omega = \text{cte}$. ($\gamma = 0$), el movimiento es circular uniforme, aquí $a_t = 0$

Este movimiento resulta periódico puesto que si $\omega = \text{constante}$, a partir de cualquier posición y en tiempos iguales, se repetirán $\vec{r}, \vec{V}, \vec{a}$.

Aquí el período de tiempo empleado por el móvil para recorrer una vuelta con velocidad ω es:

$$\frac{\text{ángulo recorrido}}{\text{velocidad angular}} = t \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

y la frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

las expresiones de movimiento para este caso son:

$$\omega = \text{cte} = \dot{\theta} \therefore d\theta = \omega dt$$

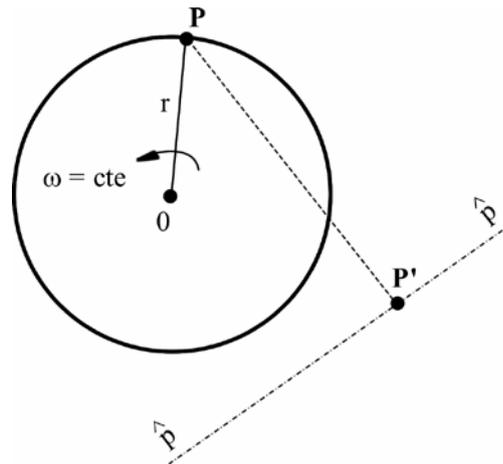
En $t = 0$, es $\theta = \theta_o \rightarrow$

$$\theta = \omega t + \theta_o \quad (1.16)$$

En movimientos circulares se acostumbra hablar más del número de vueltas por minuto (rpm) que de rad/seg. Es otra forma de expresar la frecuencia.

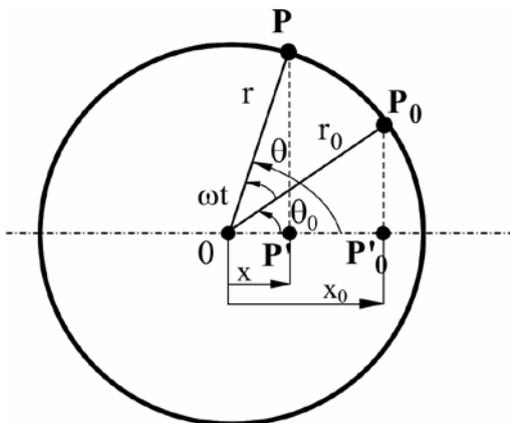
1.7.3. Movimiento oscilatorio armónico (MOA)

Es el movimiento de un punto P' que es proyección de otro P que describe un movimiento circular uniforme;



Así por ejemplo, el punto P' realizará sobre el eje $\hat{p}\hat{p}$ un movimiento oscilatorio armónico siempre que sea proyección del punto P que describe la circunferencia de centro O y radio r con $\omega = \text{cte}$ respecto de O . Para simplificar se acostumbra tomar el eje de proyección sobre uno de los diámetros y el origen en O :

$$\text{Para } P \text{ es: } \begin{cases} \omega = \text{cte} = \text{velocidad angular} \\ r = \text{cte} = \text{radio} \\ \theta = \omega t + \theta_0 = \text{argumento o fase} \end{cases}$$



Para P' es:
 O = centro de oscilación
 x = elongación o posición
 r = semiamplitud
 $2r$ = amplitud
 ω = pulsación o frec. circular = $\frac{2\pi}{T}$
 θ = fase o ángulo de fase

La elongación está dada por:

$$x = r \cos \theta = r \cos (\omega \cdot t + \theta_0) \tag{1.17}$$

y: $x_0 = r \cos \theta_0$

luego: $V = \dot{x} = -r \cdot \omega \cdot \text{sen} (\omega \cdot t + \theta_0)$ (1.18)

$$a = \ddot{x} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos (\omega \cdot t + \theta_0) \tag{1.19}$$

Puede demostrarse que este movimiento es periódico, para lo cual basta con evaluar x , V y a , a partir de un instante cualquiera tomando tiempos iguales al período del movimiento:

$$t = 0 \begin{cases} x_o = r \cos \theta_o \\ V_o = -\omega \cdot r \operatorname{sen} \theta_o \\ a_o = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta_o \end{cases}$$

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega} \begin{cases} x_t = r \cos(2\pi + \theta_o) = r \cdot \cos \theta_o = x_o \\ V_t = -r\omega \operatorname{sen}(2\pi + \theta_o) = -r\omega \operatorname{sen} \theta_o = V_o \\ a_t = -r\omega^2 \cos(2\pi + \theta_o) = -r\omega^2 \cos \theta_o = a_o \end{cases}$$

Así, el período de este movimiento es: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Valores Característicos del Movimiento Oscilatorio Armónico: reciben esta denominación los valores máximos y nulos de x , V y a . Veamos cuando se producen.

1) Elongación nula ($x = 0$)

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\omega \cdot t + \theta_o) \\ \therefore \cos(\omega \cdot t + \theta_o) &= 0 \\ \therefore \omega \cdot t + \theta_o &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

el instante de nulidad, será:

$$t^* = \frac{(2n+1) \pi / 2 - \theta_o}{\omega}$$

2) elongación máxima o velocidad nula:

$$\begin{aligned} x &= x_{\text{máx}} = r \rightarrow \dot{x} = V = 0 \\ V &= -\omega \cdot r \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_o) \\ \therefore \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_o) &= 0 \\ \therefore \omega \cdot t + \theta_o &= n \cdot \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$t^{**} = \frac{n \pi - \theta_o}{\omega}$$

3) Velocidad máxima o aceleración nula:

$$V = V_{\text{máx}} = \omega r \quad \dot{V} = a = 0$$

$$a = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_o)$$

$$\therefore \cos(\omega \cdot t + \theta_o) = 0 \quad \therefore \omega \cdot t + \theta_o = (2 \cdot n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$t^* = \frac{(2 \cdot n + 1) \frac{\pi}{2} - \theta_o}{\omega}$$

4) Aceleración máxima:

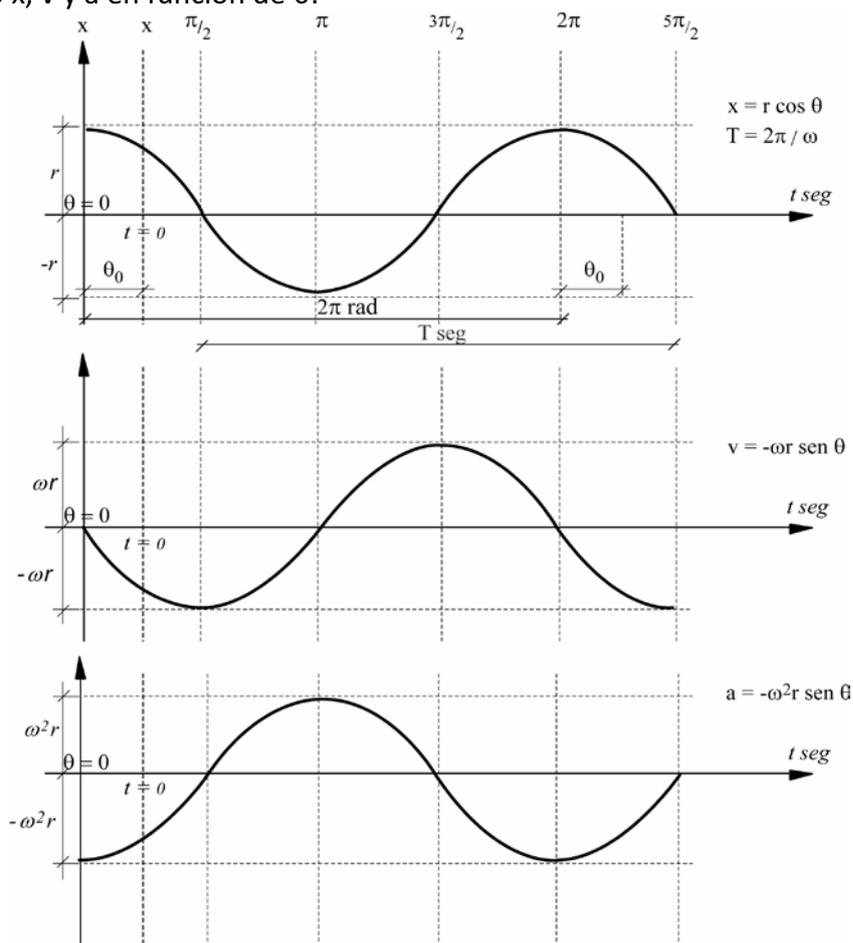
$$a = a_{m\acute{a}x} = \omega^2 r \rightarrow \dot{a} = 0$$

$$\dot{a} = \omega^3 r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o) \quad \therefore t^{**} = \frac{n \cdot \pi - \theta_o}{\omega}$$

Al hablar de x, V y a máximos, se entiende que se habla de módulos, por ello sólo se ha aplicado la primera derivada temporal como condición de extremo (máximo o mínimo).

Gráficas de las funciones correspondientes al MOA.

Graficando x, v y a en función de θ :



Dado que el eje de abscisas representa la fase del movimiento, el diagrama (V- θ) no constituye la gráfica (V-t), aunque $\theta = \theta(t)$. Para ello, debe reemplazarse θ por t en las escalas, luego:

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Para $t = 0$ (origen de tiempos) será $\theta = \theta_0$ por lo tanto, puede ubicarse el origen de los tiempos para el valor θ_0 en los gráficos anteriores. Con respecto a la escala, se está condicionado por aquella que se adoptó para los θ . Veamos por ejemplo: si se hubiese tomado Escala $\theta = \frac{2 \pi \text{ rad}}{10 \text{ cm}}$ correspondería tomar Escala $t = \frac{T \text{ seg}}{10 \text{ cm}}$.

En otras palabras, al segmento que representa $\theta = 2 \pi \text{ rad}$, le corresponde en el gráfico de tiempos, el mismo segmento pero representando $T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ seg.}$

Ecuación diferencial del MOA

El tratamiento precedente del MOA se basó en consideraciones gráficas y cinemáticas. Resulta importante también dar al mismo un tratamiento analítico equivalente.

La expresión de la aceleración (1.19) puede reescribirse como $a = -\omega^2 x$ o:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.20}$$

que es la ecuación diferencial del MOA (segundo orden, primer grado, homogénea)

Utilizando el criterio de Euler para hallar la solución, se propone la función $x = C e^{\lambda t}$, e introduciéndola en (1.20), se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

de donde: $\lambda_{1,2} = \pm i \omega$

Luego, existen dos valores de λ que hacen que la función propuesta sea solución de la (1.20). La solución general será una combinación lineal de ambas:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \\ &= A (\cos \omega t + i \text{sen } \omega t) + B (\cos \omega t - i \text{sen } \omega t) \\ &= (A + B) \cos \omega t + (A - B) i \text{sen } \omega t \end{aligned}$$

Para eliminar la parte imaginaria de la solución, se propone:

$$A + B = C_1 \quad ; \quad A - B = -i C_2$$

con lo que se obtiene: $A = \frac{C_1}{2} - i \frac{C_2}{2} \quad ; \quad B = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} i$

De esta manera mantienen A y B complejas, pero C_1 y C_2 son reales, lo que permite tener una función real como solución para el problema. Reemplazando:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \text{sen } \omega t \tag{1.21}$$

que es la solución general de la ecuación (1.20).

Resulta importante pasar esta función a una forma equivalente; sean dos nuevas constantes X y ψ tal que:

$$C_1 = X \cos \psi$$

$$C_2 = -X \sin \psi$$

y reemplazando en (1.21):

$$x(t) = X (\cos \psi \cos \omega t - \sin \psi \sin \omega t)$$

$$\therefore x(t) = X \cos(\omega t + \psi) \quad (1.22)$$

con

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad , \quad \psi = \text{arc tg} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right)$$

Con esta última forma de la expresión de $x(t)$ se observa la coincidencia entre las soluciones aportadas por el razonamiento gráfico-cinemático (1.17) y el analítico (1.22), en la cual, X representa la semiamplitud (r) y ψ la fase inicial (θ_0).

Estas constantes deben determinarse de las condiciones iniciales del problema:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = V_0 \end{cases}$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -X \omega \sin(\omega t + \psi)$$

$$\text{y} \quad x_0 = X \cos \psi, \quad V_0 = -X \omega \sin \psi$$

de donde:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\psi = \text{arc tg} \left(-\frac{V_0}{\omega x_0} \right)$$

Ejemplo de aplicación:

Sea el movimiento del punto P que describe la circunferencia de radio $r = 0.27$ m, con una velocidad angular de 20 rad/seg. Encontrar el movimiento de P' sobre la dirección x si en $t = 0$ era $x_0 = 0.1$ m, $v_0 = 5$ m / seg.

$$x(t) = X \cos(\omega t + \psi)$$

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \psi)$$

$$x_o = 0.1m = X \cos \psi$$

$$V_o = 5m/s = -20 \frac{1}{seg} X \sen \psi$$

Y dividiendo miembro a miembro

$$50 = -20 \operatorname{tg} \psi$$

$$\operatorname{tg} \psi = -5/2$$

$$\psi = -1.19 \operatorname{rad}.$$

Ordenando:

$$0.1m = X \cos \psi$$

$$-5/20m = X \sen \psi$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$X = \sqrt{0.1^2 + (5/20)^2} = 0.27 \text{ m}$$

Respuesta:

$$x(t) = 0.27 \cos (20 t - 1.19) \text{ m}$$

Composición de movimientos oscilatorios armónicos

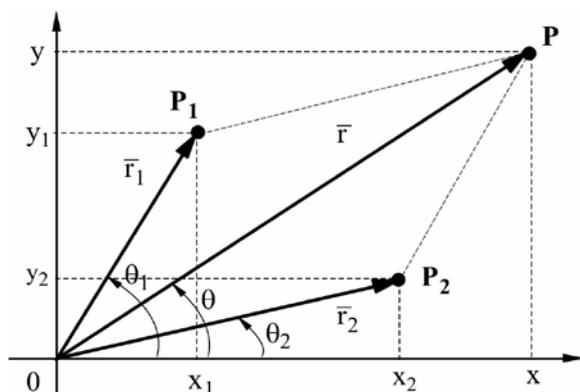
En la Mecánica de máquinas, resulta importante determinar la respuesta de los mecanismos a excitaciones alternativas que los afectan en forma simultánea. Pueden darse diversos casos.

a) Composición de dos MOA según la misma dirección

En este caso puede ocurrir que los movimientos tengan la misma pulsación o distinta.

a.1) Igual pulsación

Sean los puntos P_1 y P_2 que giran alrededor de 0 con MCU: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Sus proyecciones sobre la dirección de x realizan MOA.



Los movimientos oscilatorios armónicos a componer serán:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2$$

Donde:

$$\theta_1 = \omega t + \theta_{o1}$$

$$\theta_2 = \omega t + \theta_{o2}$$

Siendo θ_{o1} y θ_{o2} los ángulos medidos en $t = 0$, su diferencia será una constante:

$$\therefore \theta_1 - \theta_2 = \theta_{o1} - \theta_{o2} = \alpha = cte.$$

Por lo tanto, la diferencia de fase en todo instante es una constante y el triángulo OP_1P_2 gira sin deformarse. En consecuencia, se puede calcular el movimiento resultante proyectando el vector posición \vec{r} resultante de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 en cualquier posición:

$$x = x_1 + x_2 = r \cos \theta = r \cos(\omega t + \theta_o)$$

Para resolver el problema se debe calcular su semiamplitud r y su ángulo de fase inicial θ_o , ya que ω es la misma por girar todos los vectores con igual velocidad angular.

Para ello se proyectan los vectores posición sobre ambos ejes en $t = 0$

$$r_1 \cos \theta_{o1} + r_2 \cos \theta_{o2} = r \cos \theta_o = r_x$$

$$r_1 \sin \theta_{o1} + r_2 \sin \theta_{o2} = r \sin \theta_o = r_y$$

Siendo conocidos r_1, r_2, θ_{o1} y θ_{o2} , se han obtenido los valores de r_x y r_y , por lo tanto:

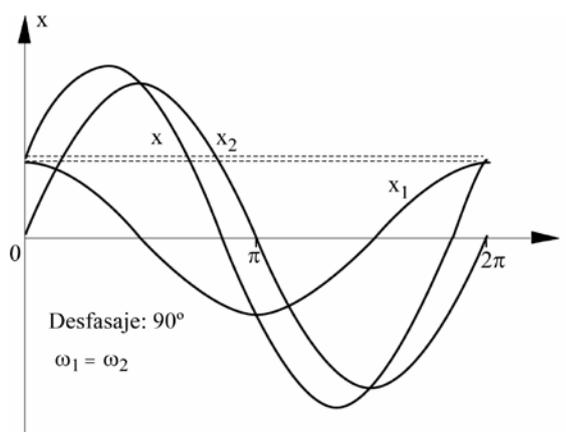
$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \qquad \theta_o = \arctg \frac{r_y}{r_x}$$

y el movimiento resultante será:

$$x = r \cos(\omega t + \theta_o)$$

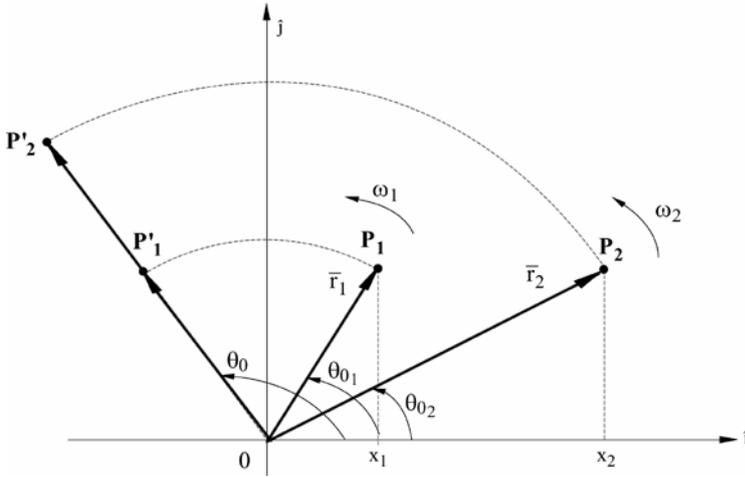
Como se observa, **el movimiento resultante es otro MOA** con la misma pulsación que los que lo generan, semiamplitud r y ángulo de fase inicial θ_o .

El período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$



a.2) Distintas pulsaciones

Se supondrá $\omega_2 > \omega_1$.



Los movimientos a componer en la misma dirección son:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1 = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_{o1})$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2 = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_{o2})$$

Partiendo de sus respectivas fases iniciales y teniendo en cuenta que $\omega_2 > \omega_1$ puede suponerse que después de un cierto tiempo las fases se igualarán en un θ_o determinado, alcanzando \vec{r}_2 a \vec{r}_1 . Calculando el instante t_o en que las fases de ambos movimientos se igualan, será $\theta_1 = \theta_2$

$$\omega_1 t_o + \theta_{o1} = \omega_2 t_o + \theta_{o2} = \theta_o$$

y \therefore
$$t_o = \frac{\theta_{o2} - \theta_{o1}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Siendo t_o el tiempo necesario para que \vec{r}_2 alcance a \vec{r}_1 . Con este t_o en las anteriores se calcula θ_o . En estas condiciones se puede simplificar el problema ya que, comenzando a contar los tiempos a partir de t_o , los dos movimientos componentes tendrían la misma fase inicial:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_o) \\ x_2 &= r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_o) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = x_1 + x_2$$

El problema podría simplificarse aún más girando el eje x un ángulo θ_o , con lo que se anularía la fase inicial, en tal caso:

$$x'_1 = r_1 \cos \omega_1 t$$

$$x'_2 = r_2 \cos \omega_2 t$$

y el movimiento resultante sobre esta nueva dirección \hat{i}' , sería:

$$x' = x'_1 + x'_2 = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t$$

Se analizará ahora si el movimiento resultante es periódico. Si lo fuera, para un número entero de vueltas p de \vec{r}_1 y otro q de \vec{r}_2 a partir de θ_0 deberían volver a encontrarse en esa posición; es decir:

$$\frac{p}{q} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número Racional} = T_2/T_1$$

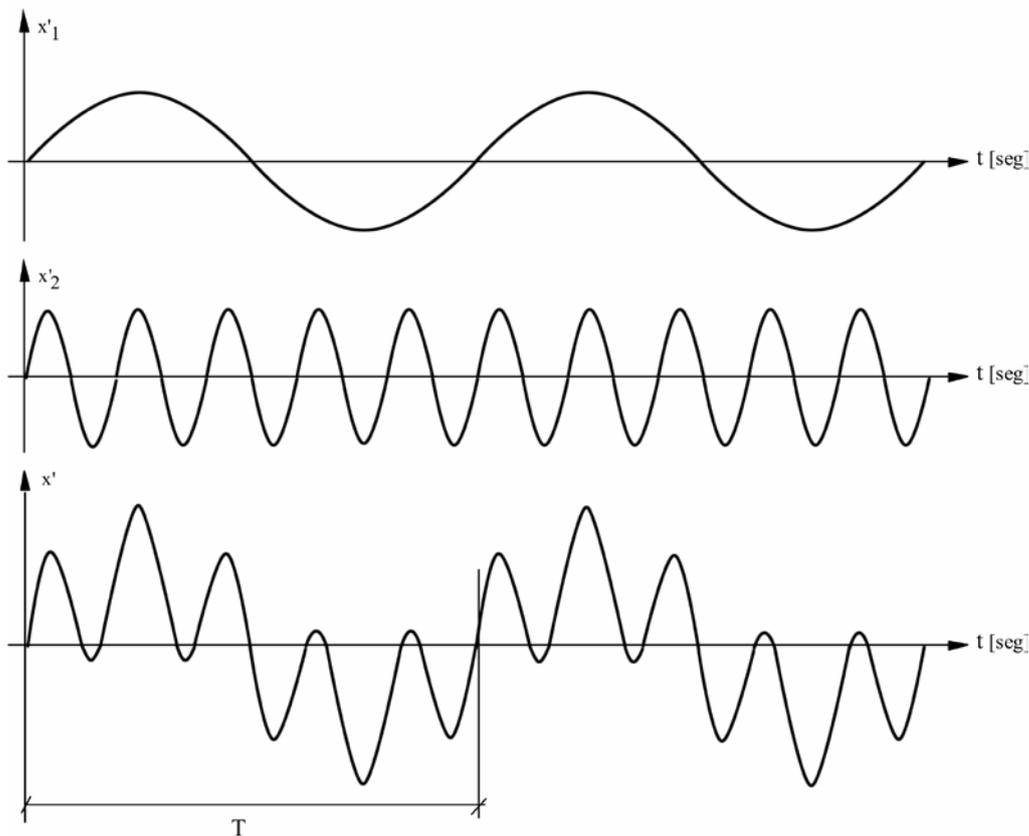
Luego para que el movimiento resultante sea periódico la relación de pulsaciones tiene que dar un número racional (cociente entre números enteros).

El período resultante T será el tiempo mínimo, único y común para ambos movimientos, es decir, el mínimo común múltiplo.

$$T = p T_1 = q T_2$$

Es importante notar que el movimiento resultante de la composición de dos MOA en igual dirección y con distintas frecuencias, resulta ser de carácter oscilatorio, periódico

(si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número Racional}$), pero **no es armónico**.



Ejemplo:

Sean los movimientos: $x_1 = 4 \cdot \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$x_2 = 6 \cdot \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

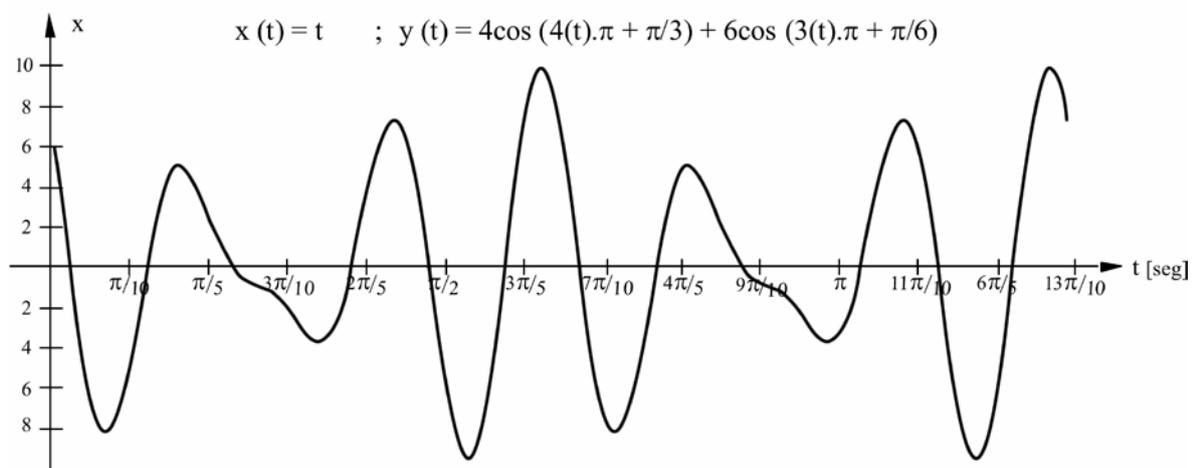
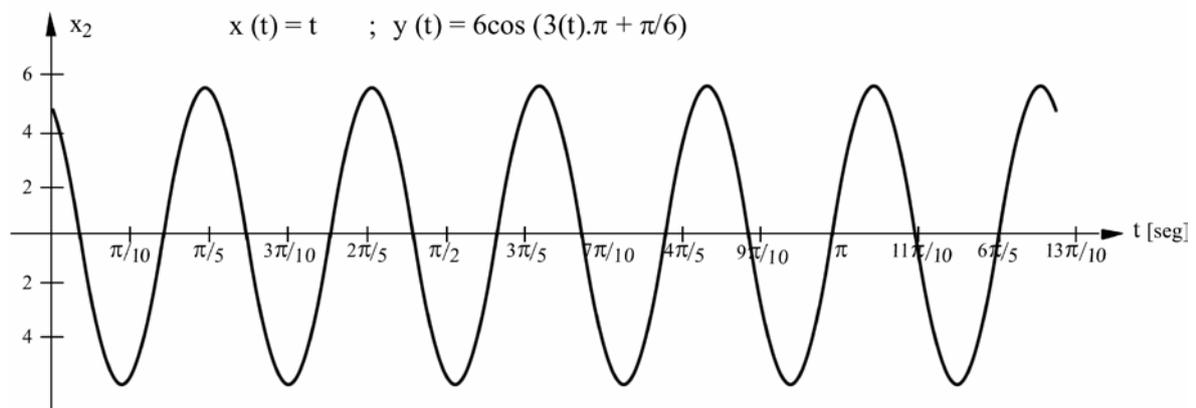
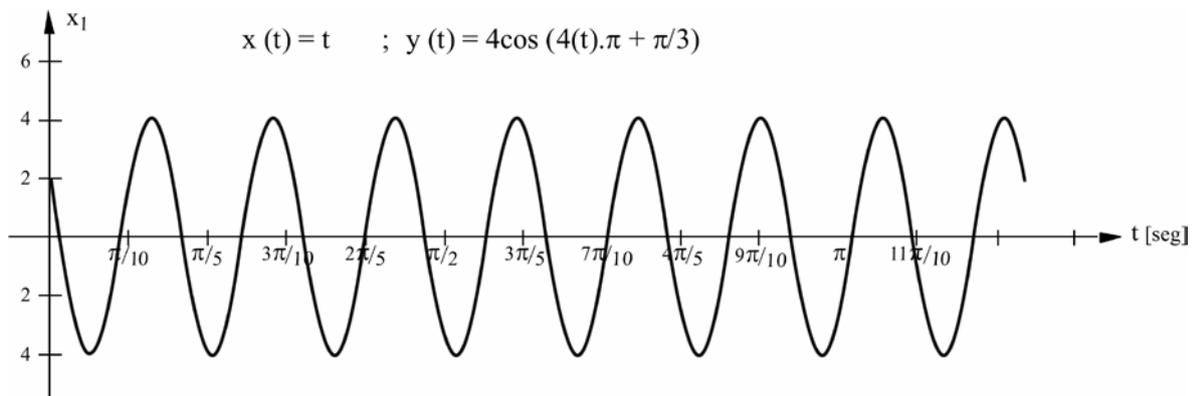
$$\therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} = \text{Número Racional}$$

Luego, el movimiento es periódico.

Como: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} = \frac{4}{3} \Rightarrow p=4 \quad y \quad q=3$

Así: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2}$; $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2}{3}$ y $T = 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \text{ s}$

Gráficamente:



Este último gráfico representa la composición de los dos MOA anteriores.

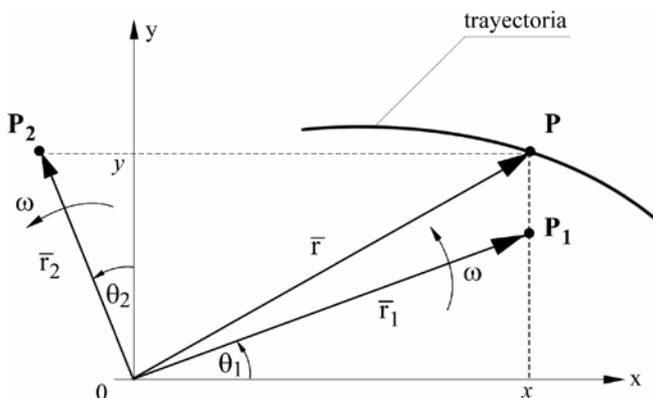
Considerando $t = 0$ para ambos vectores coincidentes, éstos solo vuelven a encontrarse después que el primero completó 4 ciclos y el segundo 3 ciclos, es decir después de $T = 2$ s.

b) Composición de dos MOA según dos direcciones perpendiculares

También aquí pueden ocurrir dos posibilidades:

b.1) Igual pulsación: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Debe determinarse la ecuación de movimiento (\vec{r}) del punto P que se mueve en una trayectoria cuyas coordenadas x e y serán las elongaciones de los MOA según direcciones perpendiculares e igual pulsación.



Teniendo en cuenta que las pulsaciones son iguales, la diferencia de fase entre ambos movimientos será constante, como se vio en el caso (a.1).

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_{o2} - \theta_{o1} = cte.$$

Por lo tanto el período del movimiento resultante será el de los movimientos componentes:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria de P, $y = y(x)$, se partirá de las ecuaciones de los MOA que serán sus respectivas ecuaciones horarias (paramétricas) en los movimientos proyectados.

$$x = r_1 \cos(\omega t + \theta_{o1})$$

$$y = r_2 \cos(\omega t + \theta_{o2})$$

debiéndose eliminar el parámetro t . Para ello, desarrollando el coseno de la suma de dos ángulos:

$$\frac{x}{r_1} = \cos \omega t \cdot \cos \theta_{o1} - \text{sen } \omega t \cdot \text{sen } \theta_{o1}$$

$$\frac{y}{r_2} = \cos \omega t \cdot \cos \theta_{o2} - \text{sen } \omega t \cdot \text{sen } \theta_{o2}$$

se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, no homogéneo, cuya solución es:

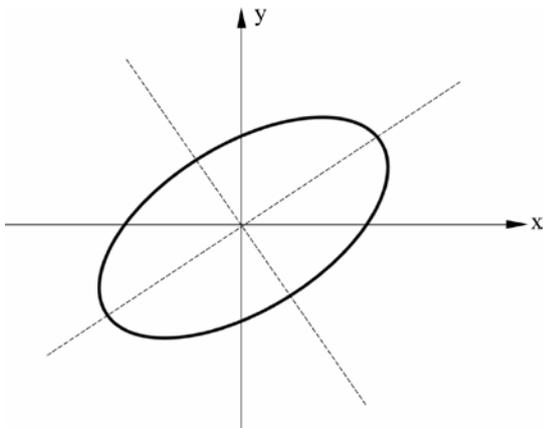
$$\cos \omega t = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{r_1} & -\text{sen } \theta_{o1} \\ \frac{y}{r_2} & -\text{sen } \theta_{o2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta_{o1} & -\text{sen } \theta_{o1} \\ \cos \theta_{o2} & -\text{sen } \theta_{o2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x}{r_1} \text{sen } \theta_{o2} + \frac{y}{r_2} \text{sen } \theta_{o1}}{-\cos \theta_{o1} \cdot \text{sen } \theta_{o2} + \cos \theta_{o2} \cdot \text{sen } \theta_{o1}} =$$

$$= \frac{\frac{y}{r_2} \text{sen } \theta_{o1} - \frac{x}{r_1} \text{sen } \theta_{o2}}{\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2})}$$

$$\text{sen } \omega t = \frac{\frac{y}{r_2} \cos \theta_{o1} - \frac{x}{r_1} \cos \theta_{o2}}{\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2})}$$

elevando al cuadrado y sumando:

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - 2 \frac{x}{r_1} \frac{y}{r_2} \cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) - \text{sen}^2(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$$



Por lo tanto, el movimiento resultante de la composición de dos MOA con igual frecuencia en direcciones perpendiculares queda representado por la **ecuación de una cónica** centrada en el origen, cuyos ejes están girados respecto de los ejes coordenados. Para cada diferencia de fase se obtiene una cónica diferente. En general se tendrán los siguientes casos particulares:

Casos particulares

a) $\theta_{o1} - \theta_{o2} = 0 \quad (\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2)$

$\therefore \cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 1$

$\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$

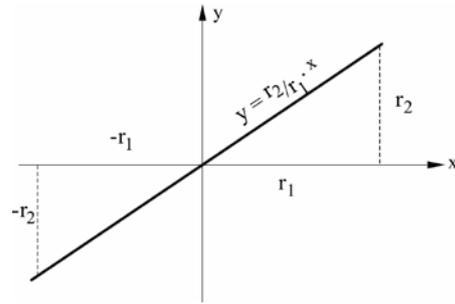


Fig a)

luego:

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - \frac{2xy}{r_1 r_2} = 0$$

que es la ecuación de una elipse degenerada

ó

$$\left(\frac{x}{r_1} - \frac{y}{r_2} \right)^2 = 0$$

dos rectas coincidentes

de donde $y = \frac{r_2}{r_1} x$

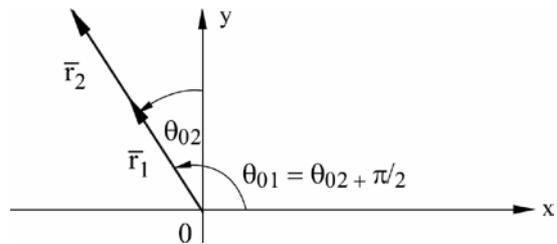
Es decir que el movimiento resultante es oscilatorio y se desarrolla sobre la recta de pendiente r_2 / r_1 (Fig. a).

b) $\theta_{o1} - \theta_{o2} = \pi/2 \quad (\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2)$

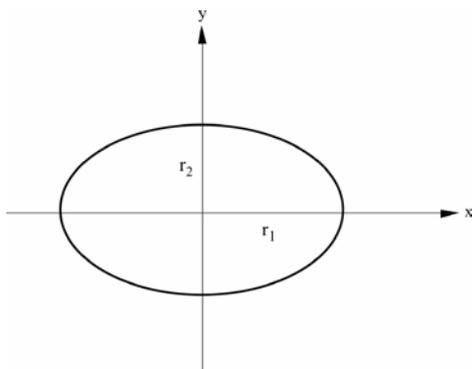
aquí: $\cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$

$\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 1$

$$\therefore \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$



El movimiento resultante se desarrolla sobre una elipse cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

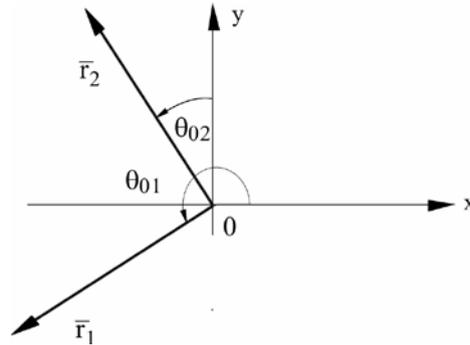


En particular si $r_1 = r_2$ la trayectoria de P es circular.

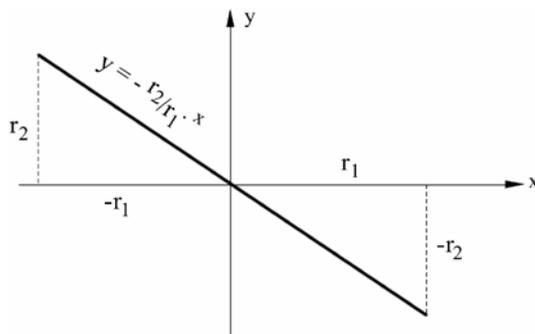
$$c) \theta_{o1} - \theta_{o2} = \pi (\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2) \Rightarrow \begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \text{sen } \pi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} + \frac{2x}{r_1} \frac{y}{r_2} = 0$$

$$\text{ó } \left(\frac{x}{r_1} + \frac{y}{r_2} \right)^2 = 0 \quad \therefore \quad y = -\frac{r_2}{r_1} x$$

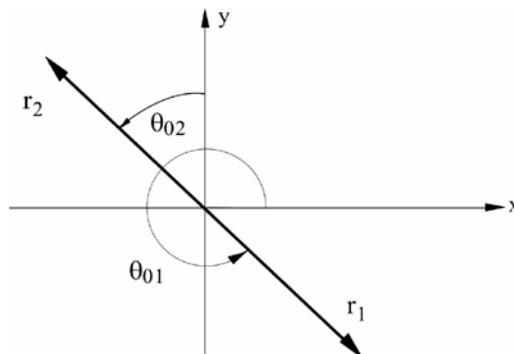


y por lo tanto el movimiento de P es rectilíneo con pendiente negativa.



$$d) \theta_{o1} - \theta_{o2} = \frac{3}{2} \pi \quad (r_1 \equiv r_2 \text{ pero en sentidos opuestos})$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3}{2} \pi = 0 \\ \text{sen } \frac{3}{2} \pi = -1 \end{cases}$$



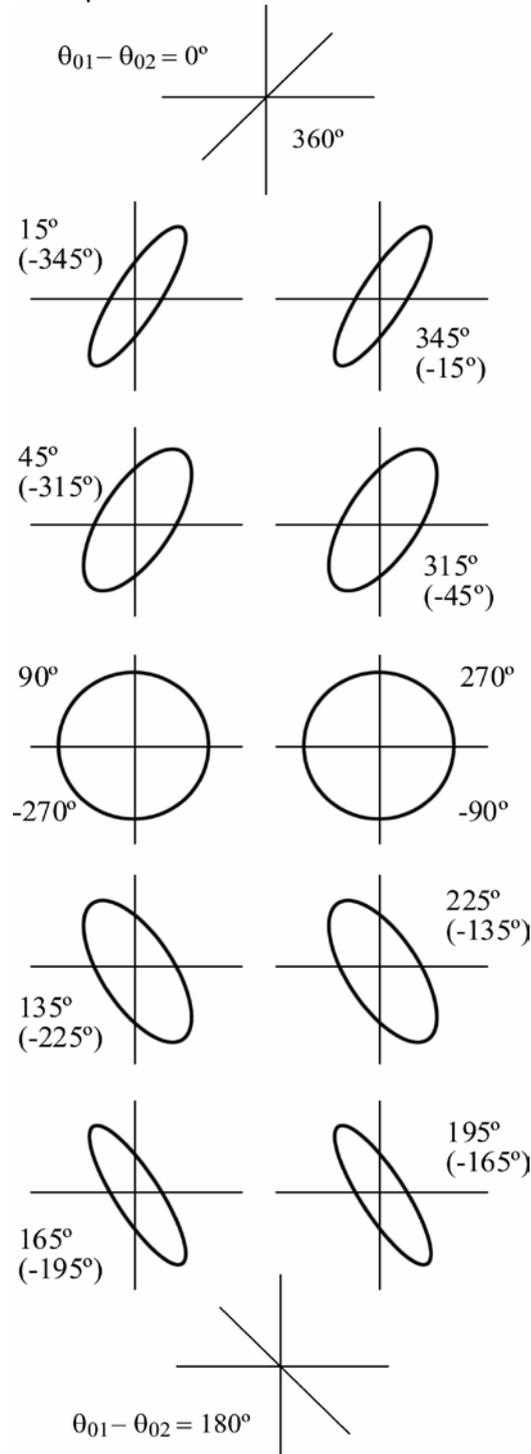
y el movimiento es el mismo que en el caso b).

e) Para fases intermedias entre las analizadas más arriba, los movimientos resultantes responderán a trayectorias elípticas más o menos achatadas e inclinadas según se acerquen a la recta o a la elipse.

En la siguiente figura, se observa que para cada diferencia de fase resultará una trayectoria distinta, dando lugar a una familia de curvas que reciben el nombre de “figuras de LISSAJOUS”.

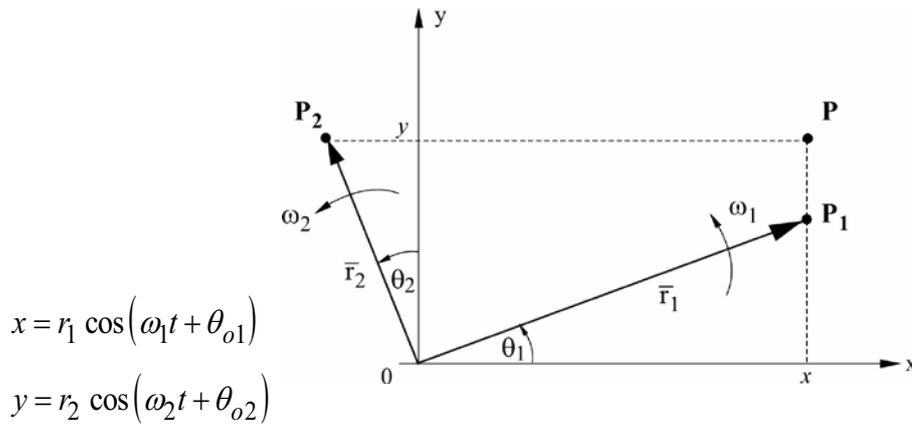
En la práctica, estas figuras se utilizan principalmente para medir diferencias de fase entre dos señales utilizando un osciloscopio, como se observa en la figura.

En ingeniería mecánica se utilizan para medir órbitas de ejes dentro de cojinetes en máquinas rotantes. Esta es una técnica empleada asiduamente en programas de mantenimiento predictivo de plantas industriales.



b.2) Distintas pulsaciones:

Se considerará el caso en que $\omega_2 > \omega_1$. Los movimientos a componer son los mismos que en el punto (b.1) pero con $\omega_1 \neq \omega_2$, es decir:



$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_{01})$$

$$y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_{02})$$

Ahora eliminando t de estas ecuaciones puede obtenerse la expresión de la trayectoria

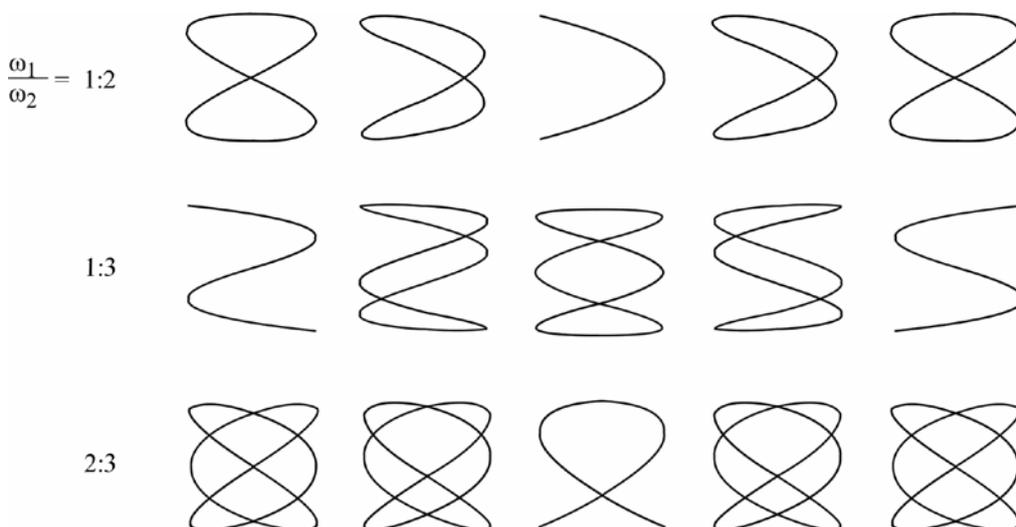
$y = y(x)$, proceso éste que no resulta tan directo como en el caso (b.1). Debe tenerse en cuenta, como antes, que el movimiento sólo será periódico si:

$$\frac{p}{q} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número racional}$$

Siendo en tal caso el período resultante el mínimo común múltiplo de dos períodos componentes:

$$T = p T_1 = q T_2$$

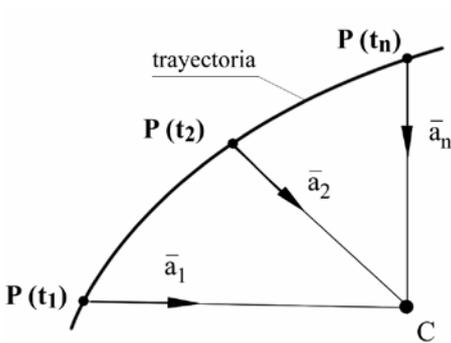
Para cada relación de pulsaciones habrá una trayectoria distinta, dando lugar a figuras de Lissajous como las mostradas, donde se ha tomado $r_1 \neq r_2$



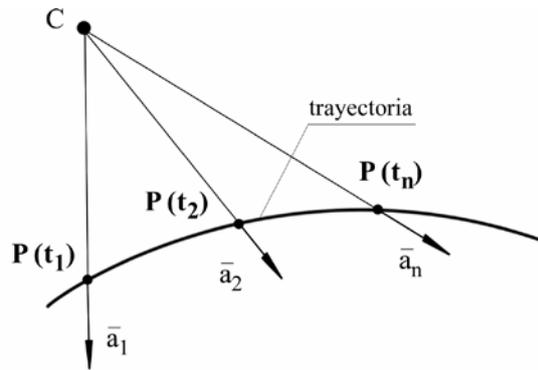
Estas figuras tienen aplicación en la práctica cuando se usa un osciloscopio como medidor de frecuencias para lo cual debe contrastarse una señal cuya pulsación sea desconocida contra otra conocida.

1.7.4. Movimientos centrales

Se dice que un punto material se encuentra en movimiento central cuando el vector aceleración \vec{a} , para cualquier posición del punto en su trayectoria, pasa por un punto fijo C denominado centro del movimiento.



Movimiento Central Convergente

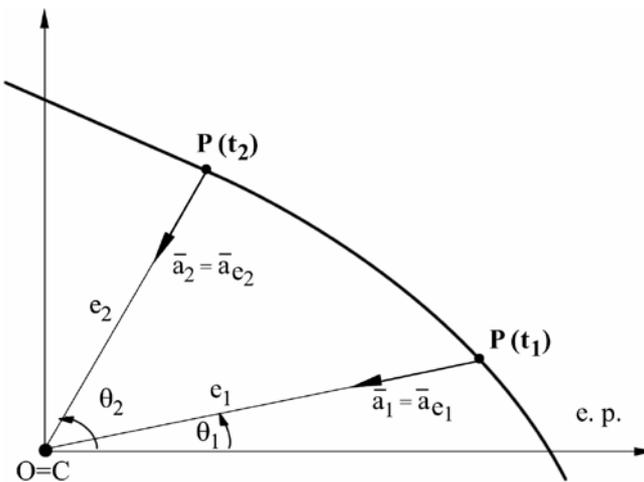


Movimiento Central Divergente

Estos movimientos pueden ser convergentes o divergentes según que hacia el centro C concurren las aceleraciones o sus prolongaciones.

Si el movimiento es referido al centro C, tomado como polo, el vector \vec{a} sólo tendrá componente radial.

$$a = |\vec{a}| = a_e = \ddot{e} - e\dot{\theta}^2$$



En el movimiento central, la aceleración areolar será siempre nula, por cuanto:

$$\ddot{S} = \frac{1}{2} \vec{e} \wedge \vec{a}$$

Como los vectores \vec{e} y \vec{a} son colineales, resulta:

$$\ddot{S} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \dot{S} = \text{vector cte.}$$

Luego, el vector velocidad areolar será constante.

Siendo $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{e} \wedge \vec{V}$, el vector \vec{V} y el punto C determinan un plano invariable en el que se desarrolla la trayectoria.

Por tanto, todos los movimientos centrales tienen trayectorias planas que se barren con

$$\dot{\vec{S}} = \text{constante y } \ddot{\vec{S}} = 0. \text{ La recíproca también se cumple.}$$

Fórmula de Binet: Determinación de la aceleración radial en función de θ .

Se desea obtener la ecuación diferencial que se conoce en el dominio temporal, expresada en el dominio espacial, realizando un cambio de variables.

Si se conoce la trayectoria de un móvil animado de un movimiento central por su ecuación en coordenadas polares (e, θ) y su velocidad areolar, se tiene

$$\text{Datos} \begin{cases} e = e(e, \theta) \\ \left| \dot{\vec{S}} \right| = \frac{1}{2} e^2 \dot{\theta} = \text{cte.} (*) \end{cases}$$

$$\text{y sea: } a_e = \ddot{e} - e \dot{\theta}^2 = a_e(t) \quad (**)$$

se desea pasar de $a_e(t)$ a $a_e(\theta)$. Para ello, de (*):

$$\dot{\theta} = \frac{2\dot{S}}{e^2} = \frac{\lambda}{e^2} \quad \text{con } \lambda = 2\dot{S} = \text{Constante de Binet}$$

y como $e = e(\theta)$, ya se conoce, el segundo sumando de la (**) en función de θ . Para el primer sumando:

$$\text{es } e = e[\theta(t)]$$

$$\text{luego: } \dot{e} = \frac{de}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Así: } \dot{e} = \frac{\lambda}{e^2} \cdot \frac{de}{d\theta} = \lambda e^{-2} \frac{de}{d\theta} = -\lambda \frac{d(1/e)}{d\theta}$$

$$\text{Ahora: } \ddot{e} = \frac{d}{dt} \left[-\lambda \frac{d(1/e)}{d\theta} \right] = -\lambda \frac{d^2(1/e)}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta} = -\frac{\lambda^2}{e^2} \cdot \frac{d^2(1/e)}{d\theta^2}$$

reemplazando en (**):

$$a_e = -\frac{\lambda^2}{e^2} \cdot \frac{d^2 1/e}{d\theta^2} - e \frac{\lambda^2}{e^4} = -\frac{\lambda^2}{e^2} \left[\frac{d^2 (1/e)}{d\theta^2} + \frac{1}{e} \right] \quad (1.23)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Binet y resulta de aplicación inmediata para resolver los problemas en movimientos centrales. Permite calcular en un movimiento central, cuya trayectoria y velocidad areolar son conocidas, el valor de aceleración (radial) del móvil en función del argumento θ para cada posición.

Es interesante también conocer la expresión de la velocidad en función de θ :
Sabiendo que:

$$\vec{V} = \dot{e} \hat{e} + e \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = (\dot{e})^2 + (e \dot{\theta})^2$$

introduciendo los valores de \dot{e} y $e\dot{\theta}$ en función de θ recientemente encontrados:

$$V^2 = \lambda^2 \left(\frac{d1/e}{d\theta} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{e^2} = \lambda^2 \left[\left(\frac{d1/e}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{e^2} \right] \quad (1.24)$$

Se presenta a continuación una importante aplicación de esta teoría.

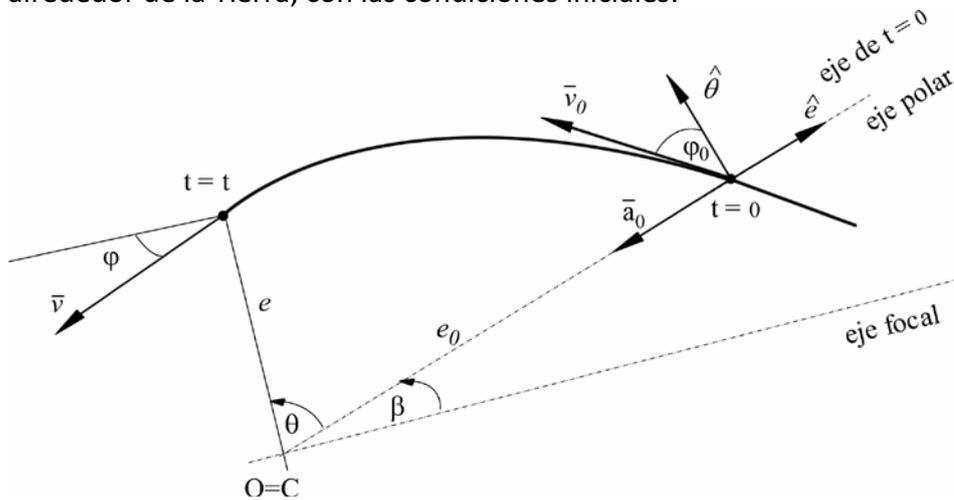
Movimiento de Kepler:

Uno de los movimientos centrales más interesantes es el llamado kepleriano que cumplen los planetas alrededor del sol.

El problema consiste en determinar la trayectoria de un punto material atraído por un centro fijo en razón inversa al cuadrado de la distancia, es decir:

$$\vec{a}_e = -\frac{k}{e^2} \hat{e} \quad (1.25)$$

El problema enunciado puede pensarse como la puesta en órbita de un satélite alrededor de la Tierra, con las condiciones iniciales:



$$\text{Datos } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \theta = \theta_o = 0 \\ \vec{V} = \vec{V}_o \\ \varphi = \varphi_o \\ \vec{e} = \vec{e}_o \\ \vec{a}_{eo} = -\frac{k}{e_o^2} \hat{e} \end{array} \right.$$

La componente radial del vector aceleración (1.25) será la (1.23)

$$-\frac{\lambda^2}{e^2} \left[\frac{d^2 1/e}{d\theta^2} + \frac{1}{e} \right] = -\frac{k}{e^2}$$

$$\text{ó} \quad \frac{d^2 1/e}{d\theta^2} + \frac{1}{e} = \frac{k}{\lambda^2} \quad (1.26)$$

Ecuación diferencial del movimiento (ordinaria, de segundo orden, primer grado, no homogénea)

Se propone el siguiente cambio de variables:

$$\frac{1}{e} = \xi(\theta)$$

$$\text{luego:} \quad \xi'' + \xi = K \quad (1.26')$$

Cuya solución general es:

$$\xi(\theta) = \xi_h + \xi_p$$

para la particular, se elige: $\xi_p = \text{Cte.} = k/\lambda^2$

Luego la solución general de (26') es:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{e} = A \cos(\theta + \beta) + \frac{k}{\lambda^2}$$

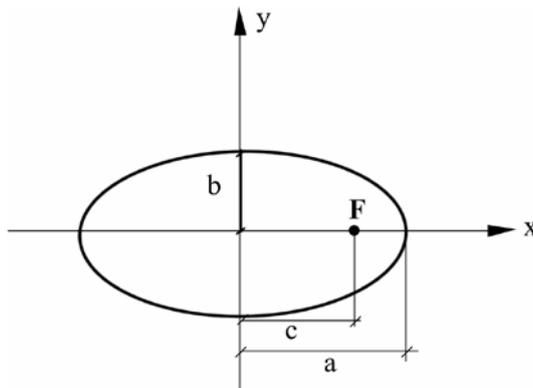
$$\text{ó} \quad e = \frac{\lambda^2 / k}{1 + \frac{A\lambda^2}{k} \cos(\theta + \beta)} \quad (1.27)$$

Esta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares referida a un foco y cuyo eje focal forma un ángulo β con el eje polar.

Donde:

$$\frac{\lambda^2}{k} = P = \frac{b^2}{a} \text{ parámetro de la cónica.}$$

$$\frac{A\lambda^2}{k} = \varepsilon = \frac{c}{a} \text{ excentricidad de la cónica}$$



Recordando que:

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow \text{Circunferencia}$$

$$\varepsilon < 1 \rightarrow \text{Elipse}$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \text{Parábola}$$

$$\varepsilon > 1 \rightarrow \text{Hipérbola}$$

Para conocer $e = e(\theta)$ con la (1.27), deben determinarse λ , A y β

Cálculo de λ :

$$\lambda = 2\dot{S} = 2 \cdot \frac{1}{2} e^2 \dot{\theta} = e \cdot \underbrace{e \dot{\theta}}_{\vec{v}_\theta} = e \cdot V \cos \varphi$$

pero siendo $\dot{S} = \text{cte.}$, su valor se mantendrá para toda posición del movimiento. En particular para $t = 0$, se tendrá:

$$\lambda = e_o \cdot V_o \cos \varphi_o$$

Cálculo de A y β :

Se necesitan dos ecuaciones; la (1.27) es una. Para la otra, se expresa (1.24) en función de las incógnitas:

$$\text{se tiene: } \frac{1}{e} = A \cdot \cos(\theta + \beta) + \frac{k}{\lambda^2}$$

luego: $\frac{1}{e^2} = A^2 \cos^2(\theta + \beta) + \frac{k^2}{\lambda^4} + \frac{2kA}{\lambda^2} \cos(\theta + \beta)$

y también: $\frac{d(1/e)}{d\theta} = -A \operatorname{sen}(\theta + \beta)$

reemplazando en (1.24):

$$V^2 = \lambda^2 A^2 + \frac{k^2}{\lambda^2} + 2Ak \cos(\theta + \beta) \quad (1.28)$$

Recurriendo a las condiciones iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_o = \frac{\lambda^2/k}{1 + \frac{A\lambda^2}{k} \cos \beta} \\ V_o^2 = \lambda^2 A^2 + k^2/\lambda^2 + 2Ak \cos \beta \end{array} \right. \quad (1.27') \quad (1.28')$$

De (1.27') $A \cos \beta = \frac{1}{e_o} - \frac{k}{\lambda^2}$ (1.27'')

en (1.28')

$$A = \left\{ \frac{V_o^2 - \frac{k^2}{\lambda^2} - 2k \left(\frac{\lambda^2}{ke_o} - 1 \right) \frac{k}{\lambda^2}}{\lambda^2} \right\}^{1/2}$$

Luego: $\beta = \arccos \left(\frac{1/e_o - k/\lambda^2}{A} \right)$

Con lo que se conocen A y β .

Velocidades orbitales:

Para analizar las velocidades de lanzamiento correspondientes a las diferentes órbitas posibles, es conveniente anular el ángulo β entre los ejes focal y polar, haciéndolos coincidir. En ese caso, la ecuación (1.27) se reduce a:

$$e = \frac{\lambda^2/k}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1.27. \text{ bis})$$

Si se elige la velocidad V_0 para que la órbita resulte circular, es decir $\epsilon = 0$, de la anterior expresión resulta:

$$e = \frac{\lambda^2}{k} = \text{cte}$$

Y como es $\lambda = e_o \cdot V_o \cos \varphi_o$, para $\varphi_o = 0$ resulta $\lambda = e_o \cdot V_o$, de donde

$$V_o^2 = \frac{k}{e_o}$$

por debajo de esta velocidad inicial el vehículo no entrará en órbita, sino que caerá describiendo una especie de espiral. Entre este valor de la velocidad y el correspondiente a la parábola, la trayectoria será una elipse. Si $\epsilon = 1$, de la ecuación (1.27.bis) se tiene

$$e = \frac{\lambda^2}{2k} = \text{cte}$$

Y procediendo de la misma manera que antes, resulta

$$V_o^2 = \frac{2k}{e_o}$$

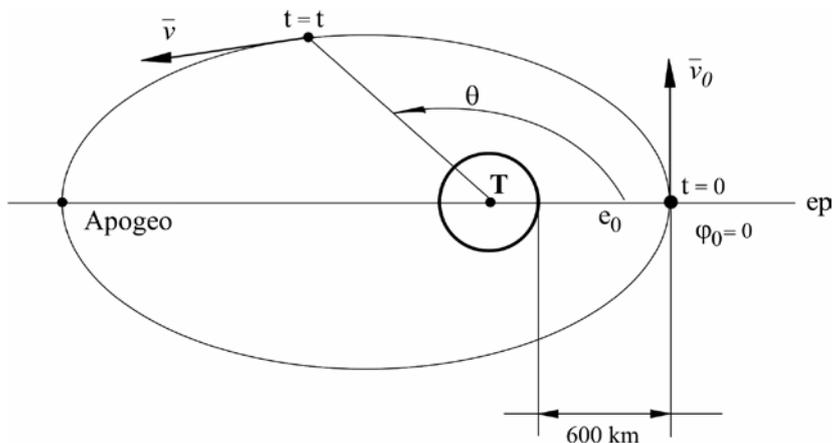
Para este valor de V_0 la trayectoria será abierta y el vehículo no regresará, motivo por el cual se la denomina velocidad de escape. Si $\epsilon > 1$ la trayectoria será una hipérbola, para la cual un foco actúa como centro de atracción y el otro como centro de repulsión, por ello para una aceleración del tipo

$$\vec{a} = -\frac{k}{e^2} \hat{e}$$

sólo puede usarse la rama que hace que el movimiento sea de atracción.

Ejemplo de Aplicación:

Un satélite es colocado en vuelo libre a 600 km de la superficie de la Tierra y paralelamente a ella (ver figura) con una velocidad inicial de 8333,33m/s. Suponiendo que el radio es $R_t = 6378$ km y que $k = 39,88 \times 10^{13} \text{ m}^3 / \text{s}^2$.



Determinar: a) velocidad areolar, b) excentricidad de la trayectoria orbital y c) velocidad del satélite en el apogeo.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda &= 2 \dot{S} = e_o V_o \cos \varphi_o = (6378 \text{ km} + 600 \text{ km}) \cdot 8,3333 \text{ Km} / \text{s} \\ &= 58150 \text{ Km}^2 / \text{s}. \end{aligned}$$

$$\dot{S} = \lambda / 2 = 29075 \text{ Km}^2 / \text{s}$$

b) $\varepsilon = \frac{A\lambda^2}{k}$ Debemos determinar A. Del sistema (1.27' – 1.28'), y teniendo en cuenta que para este sistema coordenado es $\beta = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{e_o} - \frac{k}{\lambda^2} = \frac{1}{6978 \text{ Km}} - \frac{39,88 \times 10^4 \text{ Km}^3 / \text{s}^2}{58150^2 \text{ Km}^4 / \text{s}^2} = \\ &= 1,43 \times 10^{-4} - 1,18 \times 10^{-4} = 0,253 \times 10^{-4} / \text{Km}. \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{0,253 \times 10^{-4} \cdot (58150 \text{ Km}^2 / \text{s}^2)^2}{39,88 \times 10^4 \text{ Km}^3 / \text{s}^2} = 0,215$$

$\varepsilon < 1 \Rightarrow$ elipse

$$\text{c) } V^2 = \lambda^2 A^2 + k^2 / \lambda^2 + 2Ak \cos \theta$$

$$\begin{aligned} V_{apg}^2 &= 58150^2 (0,253 \times 10^{-4})^2 + \frac{(39,88 \times 10^4)^2}{58150^2} + \\ &+ 2 \cdot 0,253 \times 10^{-4} \cdot 39,88 \times 10^4 \cdot \cos \pi \\ &= 2,1644 + 47,03 - 20,18 = 29,019 \text{ Km}^2 / \text{s}^2. \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{29,019} = 5,386 \text{ Km} / \text{s} = 5386 \text{ m} / \text{s}.$$

Capítulo 2

CINEMÁTICA DE SISTEMAS DE PUNTOS

2. CINEMATICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS

Cuando un conjunto de partículas se mueven ligadas por ciertas relaciones se dice que constituyen un sistema. Éste puede ser discreto o continuo según esté constituido por una cantidad finita o infinita de puntos. Cuando se trata de determinar la posición de todos los puntos de un sistema, en apariencia se necesitarían tantos parámetros como puntos materiales tenga el sistema por tres $P_i (x_i, y_i, z_i)$, pero como los puntos materiales están ligados por ciertas relaciones entre sus coordenadas (o parámetros), dicho número será mucho menor.

2.1. Definiciones:

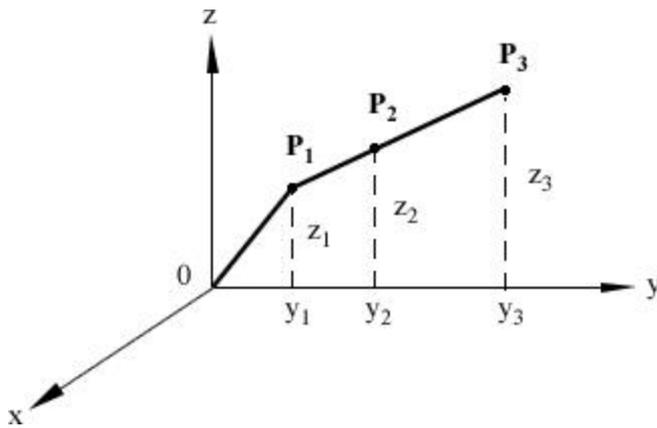
Se denomina configuración a una posición del sistema material y conjunto de coordenadas del sistema al número de coordenadas (m) o parámetros necesarios para determinar su configuración.

Como se ha visto en el capítulo anterior, puede emplearse una gran variedad de coordenadas. Así, por conveniencia, se usa la letra q como símbolo general para representar coordenadas sin importar cual sea su naturaleza. Por lo tanto, q se denomina coordenada generalizada y frecuentemente se indicarán las m coordenadas que se necesitan para especificar la configuración de un sistema como q_1, q_2, \dots, q_m .

Reciben el nombre de condiciones de restricción, de ligadura o de vínculo las (n) relaciones que se establecen entre las coordenadas o parámetros, ya que al relacionarlas entre ellas se establecen trabas a su variabilidad, o lo que es lo mismo, a la movilidad del sistema.

Se denomina coordenadas libres (k) del sistema material a la diferencia que existe entre el conjunto de coordenadas del sistema y el conjunto de condiciones de vínculo ($k = m - n$). A ese número, el cual resulta independiente del sistema de coordenadas adoptado, se lo llama grados de libertad del sistema. ($k = gl$) y son el número de coordenadas independientes (sin incluir el tiempo) que se requieren para especificar completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes componentes del sistema. Es interesante notar que los parámetros o coordenadas libres se eligen a voluntad entre las variables del problema.

Ejemplo: sean tres puntos que forman un sistema material en el cual las distancias entre ellos deberán permanecer constantes. Se tiene:



1º) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$d_{1-2} = cte.$

2º) $d_{2-3} = cte.$

$d_{0-1} = cte.$

a) El conjunto de coordenadas del sistema, será:

$$m = 6 \begin{cases} y_1, z_1 \\ y_2, z_2 \\ y_3, z_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

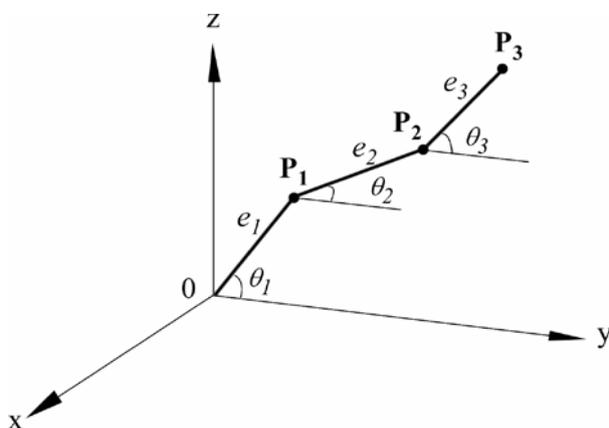
b) Las condiciones de vínculo:

$$n = 3 \begin{cases} (z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d_{12}^2 \\ (z_3 - z_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = d_{23}^2 \\ z_1^2 + y_1^2 = d_{01}^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

c) Los parámetros libres: $k = m - n = 6 - 3 = 3$ gl

Esto significa que en (2.1) pueden tomarse a voluntad tres coordenadas como libres, pero las otras tres quedan dependientes de éstas. Es decir, si se da una variación (movimiento del sistema) a las libres, las dependientes se moverán obligatoriamente de determinada manera compatible con las condiciones de vínculo (2.2) impuestas.

Si se analiza este mismo sistema en coordenadas generalizadas (q):



Aquí $e_1, e_2,$ y e_3 no son parámetros.

a) $m = q_j = \theta_1, \theta_2, \theta_3 (j = 1, 2, 3)$

b) $n = 0$

c) $k = 3 - 0 = 3$ gl

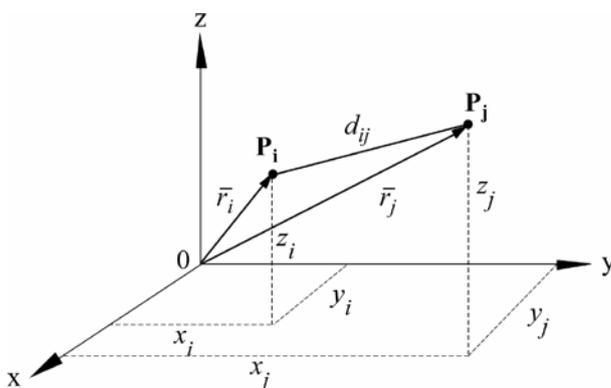
Se observa que los grados de libertad son independientes del sistema de coordenadas utilizado.

Cuando las restricciones pueden expresarse en formas algebraicas sencillas del tipo de las anteriores, se denominan holónomas, y en ellas las ecuaciones de ligadura o de vínculo pueden expresarse en función de las coordenadas solamente, o de las coordenadas y el tiempo si los marcos de referencia son móviles; en éstas, el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad. Existe un grupo de problemas para los que las restricciones resultan ser ecuaciones diferenciales no integrables que se denominan no holónomas, los cuales no serán tratados en este curso.

En los sistemas móviles siempre resulta $m > n$ dado que los gl representan los distintos grados de movilidad del sistema por ser el número de parámetros libres que pueden variarse en forma arbitraria. Se los denomina sistemas móviles o mecanismos. Cuando $m = n$, el sistema material queda inmóvil por cuanto no habrá parámetros libres y las coordenadas del sistema resultarán de resolver el sistema de ecuaciones formado por las condiciones de vínculo. Son los llamados sistemas isostáticos. Existen sistemas materiales donde $m < n$, en este caso tampoco habrá parámetros libres y el sistema seguirá siendo inmóvil. Son los sistemas hiperestáticos. Desde el punto de vista cinemático los dos últimos no tienen aplicación. Este curso se orientará hacia el estudio de los primeros.

2.2. Sistemas materiales rígidos

Cuando un sistema de puntos materiales se mueve de forma tal que la distancia relativa entre los distintos puntos permanece invariable se dice que el mismo es rígido. Tal sistema se denomina cuerpo, chapa o barra según si los puntos materiales se distribuyen en el espacio, sobre una superficie o sobre una línea respectivamente. En estos sistemas, la condición de vínculo fundamental es la de rigidez, conocida comúnmente como condición geométrica de rigidez:



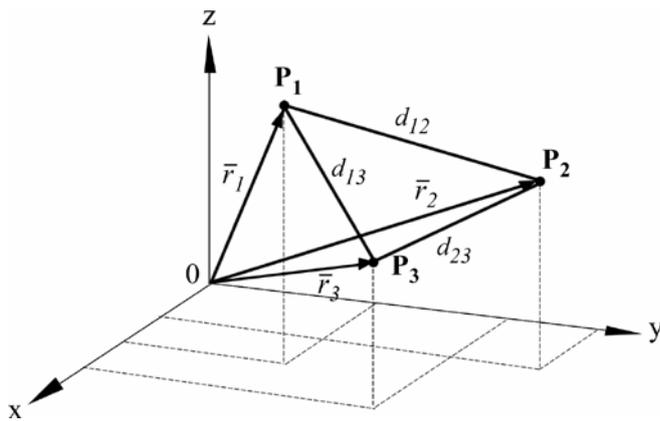
$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2 = \vec{r}_{ij}^2 = d_{ij}^2 = cte. \quad (2.3)$$

Grados de libertad de un cuerpo libre en el espacio. Tomando tres puntos no alineados de manera de poder contar con un plano que sirva como referencia para ubicar cualquier otro punto del sistema rígido, entre dichos tres puntos se pueden formular tres condiciones geométricas de rigidez:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = d_{12}^2 = cte.$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 = d_{13}^2 = cte.$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 = d_{23}^2 = cte.$$



De estas expresiones se obtienen las siguientes tres ecuaciones de vínculo:

$$n = 3 \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d_{12}^2 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_{13}^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = d_{23}^2 \end{cases}$$

de las cuales aparecen nueve parámetros del sistema.

$$\text{Conjunto de coordenadas } m = 9 \begin{cases} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{cases}$$

Luego, los parámetros libres: $k = m - n = 9 - 3 = 6$ gl

La cantidad 6 representa el número de parámetros libres o grados de libertad del sistema rígido en el espacio.

Condición cinemática de rigidez

Teniendo en cuenta la condición geométrica de rigidez:

$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2 = d_{ij}^2 = cte.$$

y derivando con respecto al tiempo:

$$2(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \left(\frac{d\vec{r}_j}{dt} - \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = 0$$

ordenando:

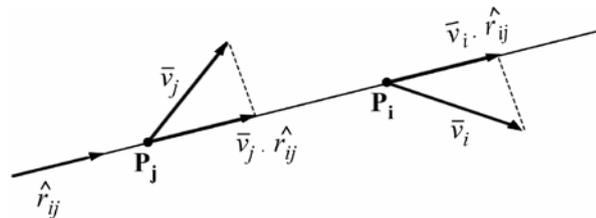
$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{V}_j = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{V}_i$$

Dividiendo m.a m. por $d_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$

$$\vec{V}_j \cdot \hat{r}_{ij} = \vec{V}_i \cdot \hat{r}_{ij} \tag{2.4}$$

con: $\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

La (2.4) recibe el nombre de condición cinemática de rigidez y expresa que si un sistema material se desplaza rígidamente, las velocidades de dos puntos cualesquiera del mismo proyectada sobre la dirección que ellos determinan son iguales. Gráficamente:



2.3. Movimientos de los sistemas rígidos

Un sistema material rígido en movimiento puede considerarse en uno de los siguientes estados:

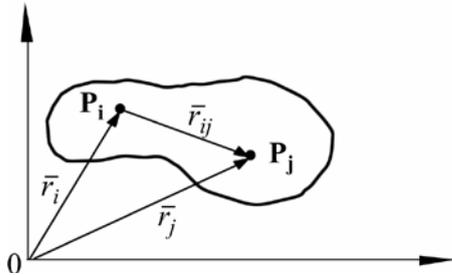
Movimientos de los Sistemas Materiales Rígidos	}	a) Estados simples	{ <ul style="list-style-type: none"> a.1) Traslación a.2) Rotación
	}	b) Estados compuestos	{ <ul style="list-style-type: none"> b.1) Suma de Traslaciones b.2) Suma de Rotaciones b.3) Suma de Traslaciones + Suma de Rotaciones

Se estudiarán a continuación cada uno de estos estados.

a. Estudio de los movimientos simples:

a.1) Movimiento de Traslación:

Un sistema rígido se encuentra en movimiento de traslación cuando el vector posición relativo entre dos puntos del mismo permanece constante:

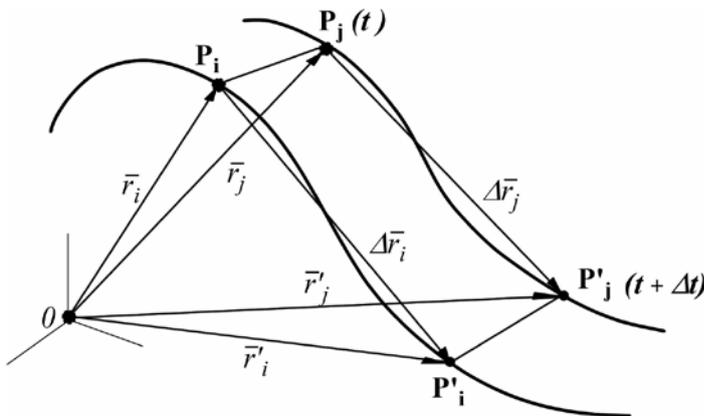


$$\vec{r}_j - \vec{r}_i = \vec{r}_{ij} = \text{vector constante} \quad (2.5)$$

Es decir que un segmento definido por dos puntos de un cuerpo permanece paralelo a sí mismo durante el movimiento de traslación.

En un movimiento de este tipo se cumple:

1) Las trayectorias de todos los puntos del sistema son congruentes, es decir, son idénticas pero se dan en distintos lugares del espacio, son superponibles:



de (2.3)

$$\vec{r}_j - \vec{r}_i = \vec{r}'_j - \vec{r}'_i = \text{vector cte.}$$

$$\therefore \vec{r}'_i - \vec{r}_i = \vec{r}'_j - \vec{r}_j$$

$$\text{ó } \Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_j$$

si

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \vec{r}_i \equiv d\vec{r}_i$$

$$\Delta \vec{r}_j \equiv d\vec{r}_j$$

y

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$$

Si los desplazamientos elementales son idénticos; al integrar, las trayectorias diferirán en una constante (serán congruentes).

2) En el movimiento de traslación todos los puntos tienen el mismo vector velocidad.

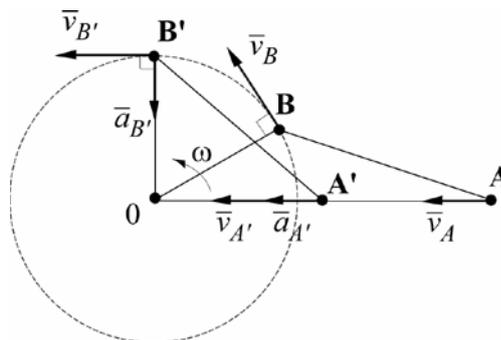
Tomando $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_j$ y formando el cociente incremental: $\frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_j}{\Delta t}$

aplicando límites, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, resulta

$$\vec{V}_i(t) = \vec{V}_j(t) \quad (2.6)$$

Luego, si todos los puntos tienen la misma velocidad, ésta estará representada por un vector libre llamado vector traslación $\vec{v}(t)$ cuyo módulo, dirección y sentido es el de la velocidad de cualquier punto del sistema. Cuando esta propiedad se cumple para un solo instante, se dice que la traslación es instantánea.

Un ejemplo característico de este último caso es el mecanismo biela-manivela. En la figura siguiente se observa que en la posición OBA el movimiento no es de traslación ya que los vectores velocidad de los puntos A y B son distintos, mientras que en la posición OB'A' hay traslación instantánea porque los vectores velocidad de A' y B' son iguales.



3) En el movimiento de traslación todos los puntos tienen el mismo vector aceleración. Derivando (2.6)

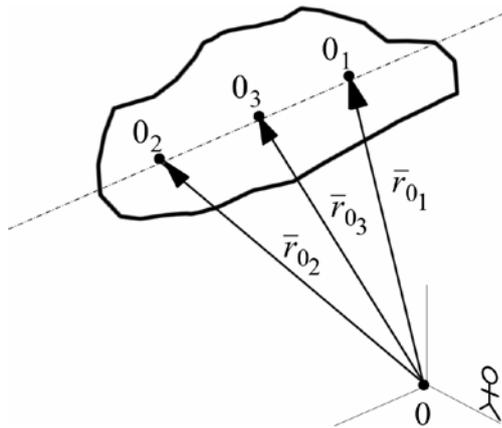
$$\vec{a}_i = \vec{a}_j \quad (2.7)$$

Por lo tanto, el vector \vec{a} en este movimiento también está representado por un vector libre llamado vector aceleración de traslación. $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$

Esta propiedad no se cumple en la traslación instantánea. (ver ejemplo biela-manivela)

a.2) Movimiento de Rotación:

Se dice que un cuerpo rígido se encuentra en este movimiento cuando dos de sus puntos permanecen fijos durante el mismo respecto a un observador situado en O , perteneciente al marco de referencia. Sean esos los puntos O_1 y O_2 del gráfico:



$$\vec{V}_{o_1} = \vec{V}_{o_2} = \vec{0}$$

En este caso serán fijos todos los puntos pertenecientes a la recta determinada por \$O_1\$ y \$O_2\$. Dicha recta recibe el nombre de eje de rotación.

Tomando un tercer punto \$O_3\$ de dicho eje:

$$\vec{r}_{o_3} - \vec{r}_{o_2} = k(\vec{r}_{o_1} - \vec{r}_{o_2})$$

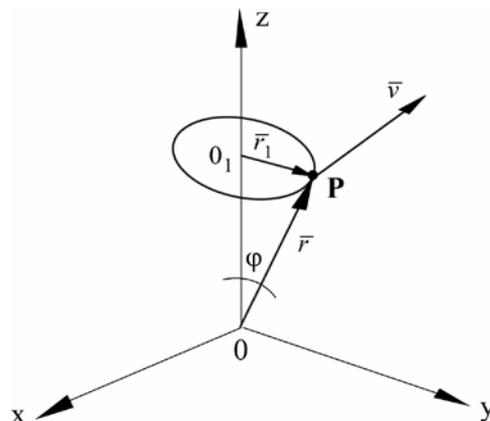
Con \$k\$ número real cualquiera. Derivando ambos miembros:

$$\frac{d\vec{r}_{o_3}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{o_2}}{dt} = k\left(\frac{d\vec{r}_{o_1}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{o_2}}{dt}\right) \Rightarrow \vec{V}_{o_3} - \vec{V}_{o_2} = k(\vec{V}_{o_1} - \vec{V}_{o_2}) = \vec{0}$$

Luego \$\vec{V}_{o_3} = \vec{0}\$, como se quería demostrar.

Se demostrará ahora que en un movimiento de rotación la velocidad de un punto del cuerpo es normal al plano determinado por el punto y el eje de rotación. Considerando para ello un punto \$P\$ del sistema rígido cuyo eje de rotación está dado por \$OO_1\$:

$$\text{Así } \vec{V}_o = \vec{V}_{o_1} = \vec{0}$$



Aplicando la condición cinemática de rigidez para el punto \$P\$ con respecto al \$O\$ y al \$O_1\$

$$\vec{V} \cdot \vec{r}_1 = \vec{V}_{o1} \cdot \vec{r}_1 = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{r} = \vec{V}_o \cdot \vec{r} = 0$$

de donde se deduce que $\vec{V} \perp \vec{r}$ y \vec{r}_1 como se quería demostrar.

Esta propiedad unida a la condición geométrica de rigidez dice que en el movimiento de rotación cada punto del sistema rígido realiza movimientos circulares con centro en el eje de rotación y en planos normales al mismo. Es decir que si ω es la velocidad angular de dicho movimiento, el módulo de la velocidad de un punto cualquiera es:

$$|\vec{V}| = \omega r_1$$

Es de gran interés en Mecánica darle al movimiento de rotación una interpretación vectorial definiendo un vector rotación $\vec{\omega}$ cuyo módulo es la velocidad angular del movimiento circular de cualquiera de sus puntos, cuya dirección es la del eje de rotación y cuyo sentido responde a la convención de terna adoptada (derecha o izquierda):

$$\vec{\omega} = \omega \hat{\omega} = \omega \hat{k}$$

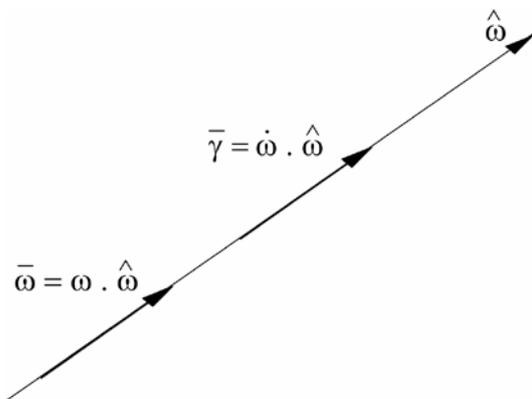
así

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$|\vec{V}| = \omega r \sin\varphi = \omega r_1$$

Obsérvese que mientras $\vec{\omega}$ es un vector axial (puede desplazarse sobre su recta de acción), \vec{V} resulta ser aplicado (propio de cada punto material del sistema).

Ahora no sólo deberá estudiarse la variación de la velocidad de un punto en el tiempo (\vec{a}) sino también la variación de $\vec{\omega}$ en el tiempo ($\vec{\gamma}$). Supóngase para ello un vector rotación en un eje definido por un versor $\hat{\omega}$:



En este caso, $\hat{\omega}$ es un versor constante

$$\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{\omega} = \vec{\gamma}$$

a este vector se lo llama vector aceleración rotacional o angular.

Más adelante se analizará el caso en que la dirección de $\hat{\omega}$ varía con el tiempo.

La aceleración de un punto cualquiera, será

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (2.8)$$

Se acostumbra denominar:

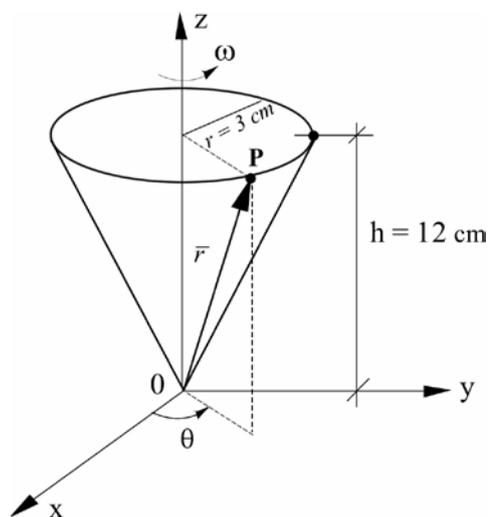
$$\vec{\gamma} \wedge \vec{r} = \text{aceleración tangencial} = \vec{a}_t$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \text{aceleración normal} = \vec{a}_n$$

luego: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

Ejemplo de aplicación:

El cono de la figura gira con $\omega = 3t + 2$ [rad/seg] alrededor del eje \hat{k} . Sabiendo que en $t = 0$, era $\theta = 0$, determinar: a) velocidad y aceleración de P en $t = 3$ seg; b) ¿Cuántas vueltas habrá girado hasta ese instante?



Solución: a) $\theta = \omega_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2 = 2t + \frac{3}{2} t^2$

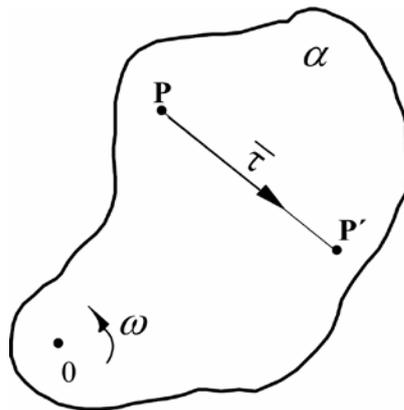
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 3(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) + 12\hat{k} \\ \vec{V}(t) &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} = (3t+2)\hat{k} \wedge [3(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) + 12\hat{k}] \\ \vec{V}(t) &= 3(3t+2)[\cos\theta\hat{j} - \text{sen}\theta\hat{i}] \\ \theta(3) &= 19,5\text{rad} \\ \vec{V}(3) &= 3 \cdot 11 \cdot [0,79\hat{j} - 0,60\hat{i}] = -19,9\hat{i} + 26\hat{j} [\text{cm/s}] \\ \vec{a} &= \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{a}(t) &= 3\hat{k} \wedge [3(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) + 12\hat{k}] + (3t+2)\hat{k} \wedge 3(3t+2)[\cos\theta\hat{j} - \text{sen}\theta\hat{i}] \\ \vec{a}(t) &= 9(\cos\theta\hat{j} - \text{sen}\theta\hat{i}) + 3(3t+2)^2(-\cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j}) \\ \vec{a}(3) &= 7,11\hat{j} - 5,4\hat{i} + 363(-0,79\hat{i} - 0,60\hat{j}) \\ &= -292,17\hat{i} - 210,69\hat{j} [\text{cm/s}^2] \end{aligned}$$

b) $\theta(3) = 19,5 \text{ rad} = 1117,26^\circ = 3,1 \text{ vueltas.}$

b. Estudio de los Movimientos Compuestos

El concepto de composición de movimientos simultáneos sólo tiene aplicación desde el punto de vista de los movimientos relativos; es decir, que un cuerpo tiene un cierto movimiento con respecto a otro cuerpo que a su vez también se mueve.

Así por ejemplo si el punto P de la figura se mueve en el plano α con una traslación hasta la posición P', al mismo tiempo que α gira alrededor de O, se dirá que P está sometido a la traslación \vec{r} relativa al plano α y a la rotación $\vec{\omega}$ de dicho plano (al que pertenece dicho punto y al que arrastra en su movimiento).



b.1. Composición de traslaciones:

Considérese un cuerpo sometido a las traslaciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$ simultáneas. Si se analiza un punto P de dicho cuerpo, considerando separadamente los desplazamientos del mismo debido a cada traslación en el mismo intervalo Δt .

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_1 &= \vec{v}_1 \Delta t \\ \Delta\vec{r}_2 &= \vec{v}_2 \Delta t \\ &\vdots \\ \Delta\vec{r}_n &= \vec{v}_n \Delta t\end{aligned}$$

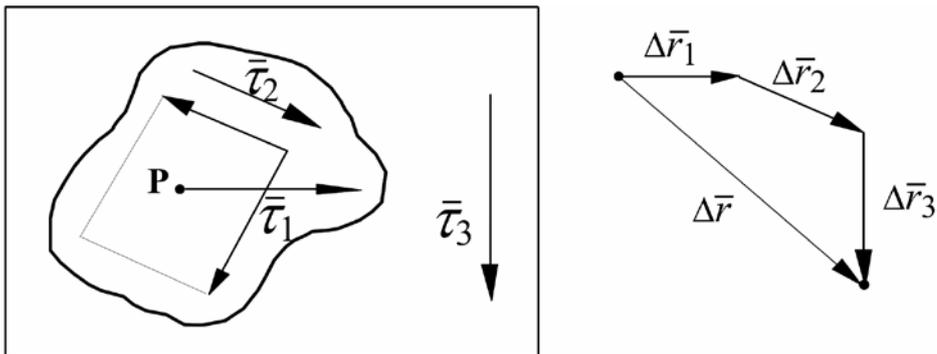
y el desplazamiento total resultante tendrá por expresión:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \dots + \Delta\vec{r}_n = \sum_{j=1}^n \Delta\vec{r}_j$$

es decir: $\Delta\vec{r} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n) \Delta t = \vec{v} \Delta t$

con $\vec{v} = \sum_{j=1}^n \vec{v}_j$ (2.9)

Nótese que \vec{v} , que es la velocidad resultante, es otra traslación. Por lo tanto, el movimiento resultante de varias traslaciones es una traslación. Tal vez sirva al lector para la visualización del tema, el imaginar un punto sobre una hoja de papel que se traslada sobre una mesa en traslación con respecto a una plataforma que a su vez se traslada.



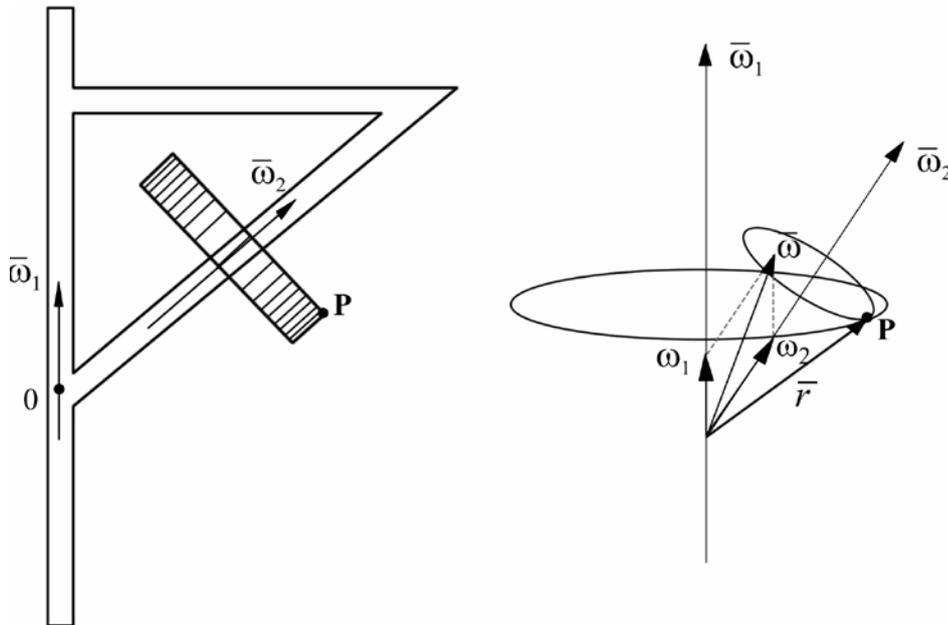
b.2. Composición de Rotaciones

Se analizarán para este estado compuesto de movimientos, distintos casos:

- b.2.1. Rotaciones Concurrentes
- b.2.2. Rotaciones Paralelas
- b.2.3. Par de Rotaciones

b.2.1. Composición de Rotaciones Concurrentes:

Sea un punto P de un cuerpo que gira sobre el eje de $\vec{\omega}_2$ girando éste simultáneamente sobre el de $\vec{\omega}_1$; interesa conocer el tipo de movimiento que resulta.



En tales condiciones, P tendrá las velocidades \vec{V}_1 y \vec{V}_2 originadas por $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$, según las siguientes expresiones:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}$$

sumando miembro a miembro

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge \vec{r}$$

$$\therefore \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (2.10)$$

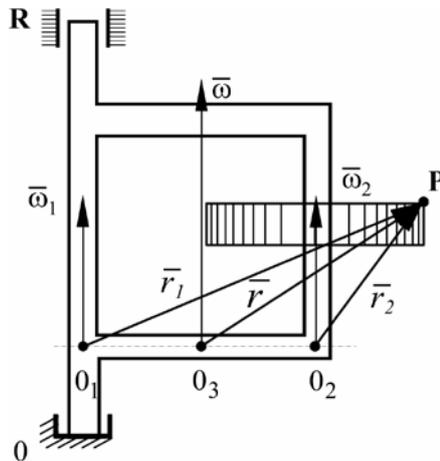
Luego el movimiento resultante es una rotación pero con un solo punto fijo que es el O. Por lo tanto, el vector rotación resultante $\vec{\omega}$ no es fijo y por ello da lugar a la denominada rotación instantánea. Al punto fijo O se lo llama polo y al movimiento se lo denomina polar.

Generalizando la demostración con $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ rotaciones concurrentes se deduce que el cuerpo sometido a ellas posee un movimiento de rotación instantánea sobre un eje que pasa por el polo, siendo en cada instante la rotación el vector resultante de las rotaciones dadas.

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \quad (2.11)$$

b.2.2. Composición de Rotaciones Paralelas

Considérese el punto P del disco que rota con $\vec{\omega}_2$ sobre sí mismo mientras que el bastidor que lo sostiene gira con $\vec{\omega}_1$ alrededor de su eje fijo \overline{OR} .



aquí será:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1$$

$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

sumando miembro a miembro

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

$$\vec{V} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

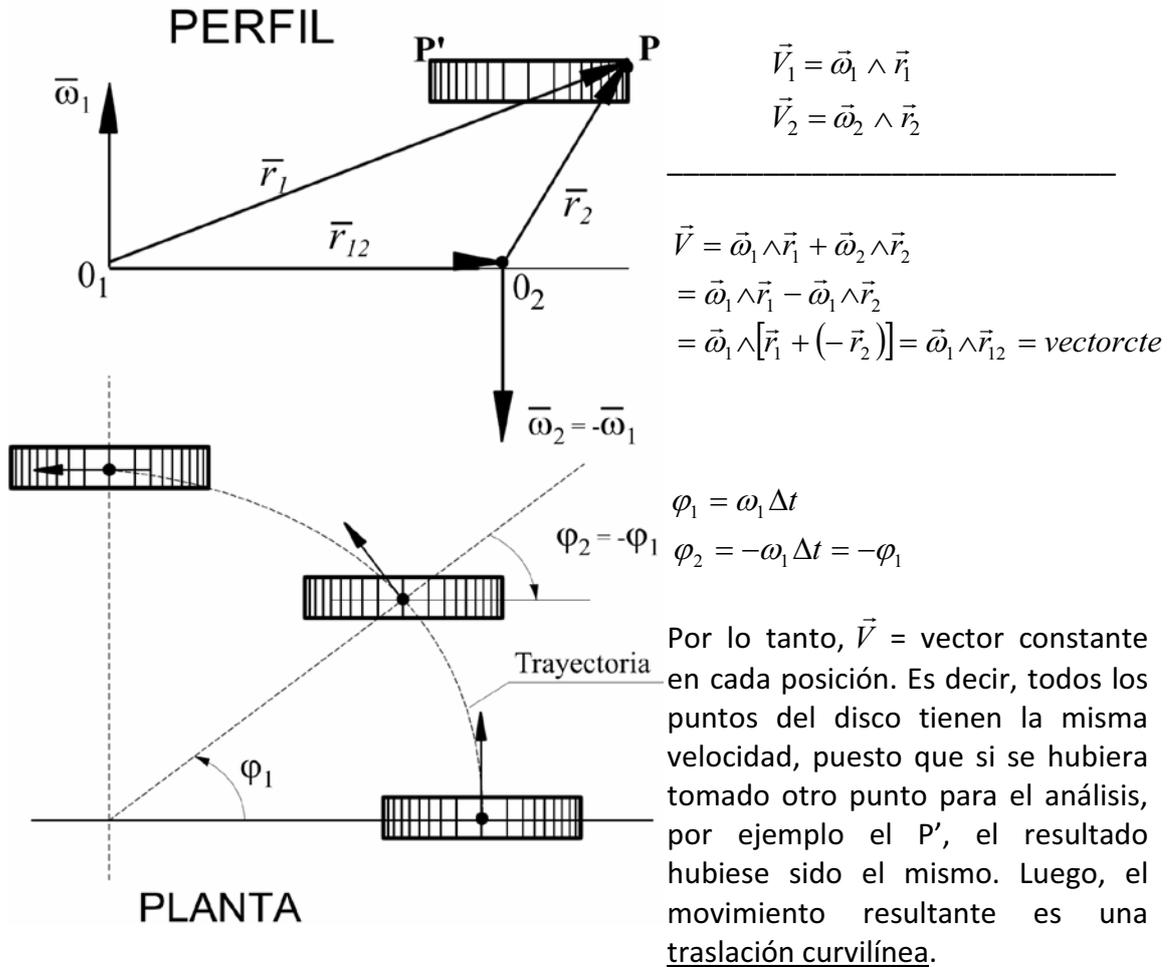
Utilizando la ley de composición para vectores paralelos, podrían sumarse:

$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}, \text{ pasando por } O_3, \text{ luego: } \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

Por lo tanto, la composición de varias rotaciones paralelas simultáneas origina un movimiento de rotación instantáneo alrededor del eje del vector $\vec{\omega}$ resultante.

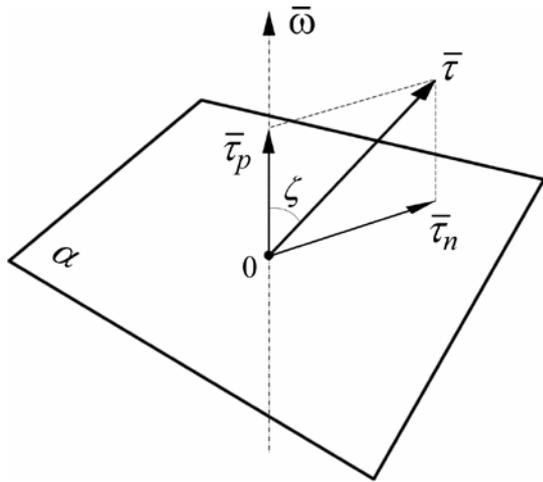
b.2.3. Par de Rotaciones:

Si en el sistema rígido anteriormente dibujado las rotaciones $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ a que está sometido el disco son además de paralelas, de la misma intensidad y de sentidos opuestos, se tendrá:



b.3. Composición de Traslaciones con Rotaciones:

En la siguiente figura se considera un plano α que es perpendicular al eje de rotación de un cuerpo y que contiene una sección del mismo. Se grafica la rotación $\vec{\omega}$ (resultante de todas las rotaciones que actúan sobre el cuerpo) que pasa por el punto O y la traslación \vec{r} (resultante de todas las traslaciones y pares de rotaciones) al que por ser un vector libre se puede representar en el punto O.

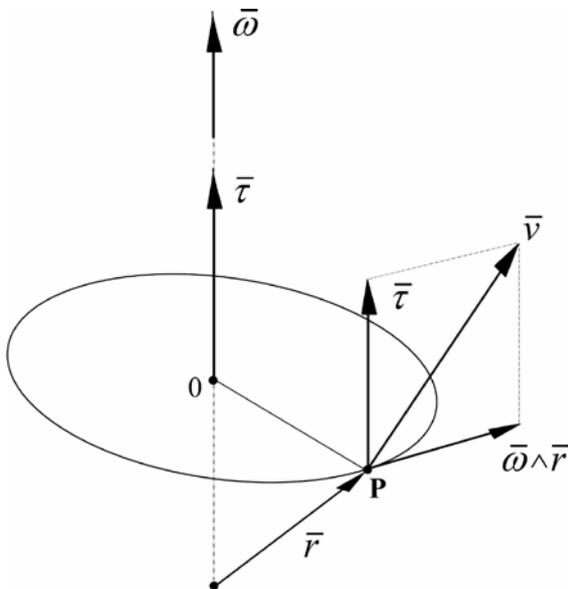


Para simplificar el estudio del problema debido al ángulo ζ que forman $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$ se descompone a éste en $\vec{\tau}_n$ y $\vec{\tau}_p$, presentándose los siguientes casos:

- b.3.1. Composición de $\vec{\tau}$ paralelo a $\vec{\omega}$
- b.3.2. Composición de $\vec{\tau}$ normal a $\vec{\omega}$

Una vez analizados estos dos casos se volverá al general.

b.3.1. Composición de Traslaciones y Rotaciones paralelas

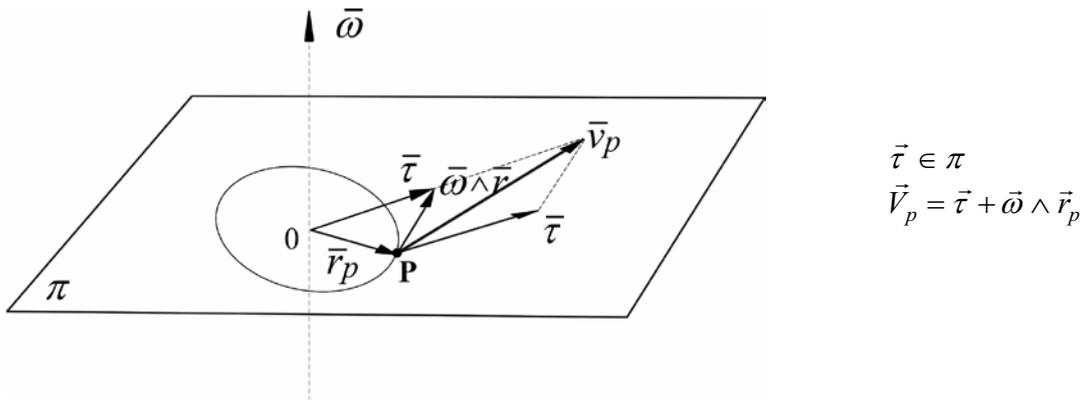


En este caso un punto P del cuerpo describe un movimiento circular con centro en el eje $\vec{\omega}$ y al mismo tiempo el plano de su movimiento se mueve paralelo a sí mismo. Por lo tanto, P describirá un movimiento helicoidal lo que implica que cada punto del sistema rígido realizará un movimiento helicoidal distinto alrededor del mismo eje. La velocidad resultante de cada punto estará dada por la suma vectorial de la impuesta por la rotación y la impuesta por la traslación

$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{2.12}$$

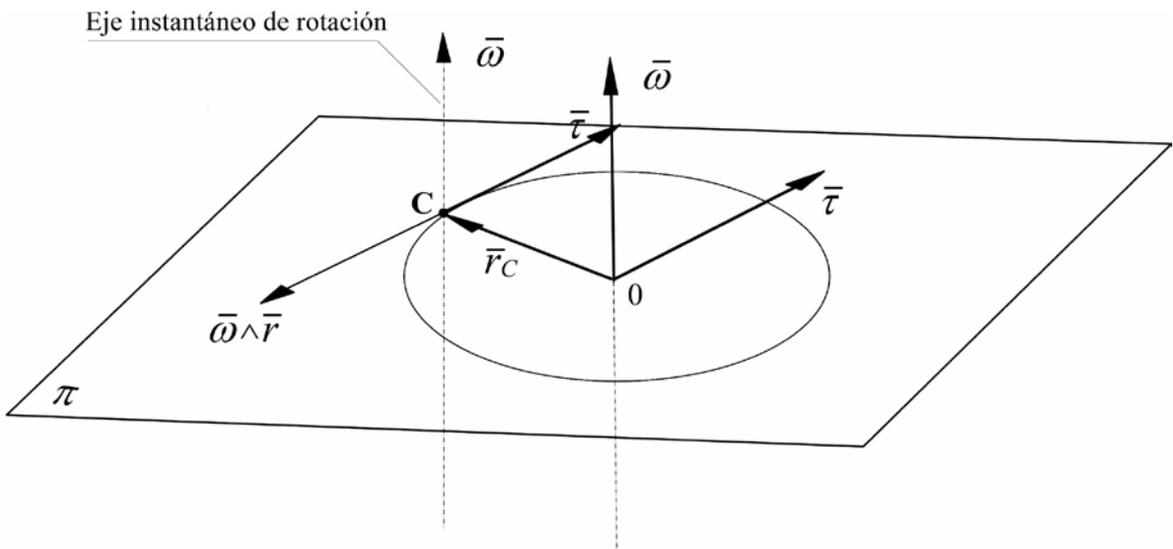
b.3.2. Composición de traslación con rotación cuando ambas son perpendiculares.

Si se analiza un punto P cualquiera del cuerpo, éste tendrá dos velocidades impuestas simultáneamente por $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$.



En este caso, es posible encontrar un punto C para el cual la suma $\vec{t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_c = \vec{0}$

En la siguiente figura se observa que cualquier punto ubicado sobre la recta \overline{OC} posee dos vectores velocidad colineales de sentidos opuestos: uno debido a la traslación y otro a la rotación. Habrá entonces un punto C a una distancia r_c desde O para el cual ambos vectores sean iguales y de sentidos opuestos.



Todos los puntos de la normal al plano que pasa por C tendrán velocidad nula. Luego el movimiento resultante será una rotación alrededor de ese eje de velocidades nulas, el cual, por otra parte cambiará de posición con el tiempo debido a que es “arrastrado” por la traslación.

Por lo tanto, se trata de una rotación instantánea. Al punto C se lo denomina centro de rotación instantánea o polo de velocidades y al eje normal al plano π que pasa por C se lo llama eje instantáneo de rotación.

Es de interés ubicar al polo:

$$\vec{V}_c = \vec{t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_c = \vec{0}$$

multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ ambos miembros de la igualdad

$$\vec{\omega} \wedge \vec{t} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_c) = \vec{0}$$

Resolviendo por Gibbs el doble producto vectorial:

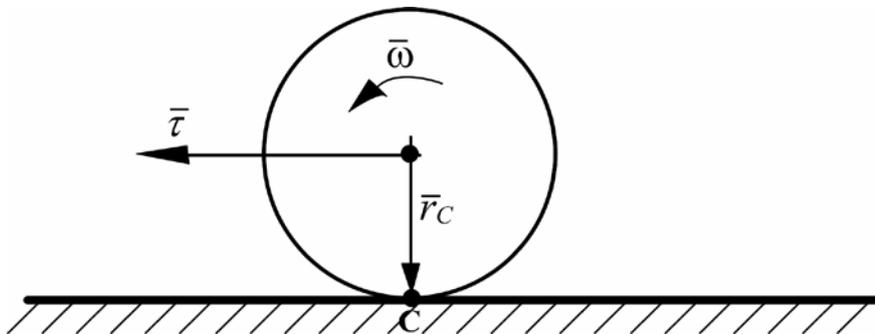
$$\vec{\omega} \wedge \vec{\tau} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c) - \vec{r}_c(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{0}$$

y tomando $\vec{\omega} \perp \vec{r}_c \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{r}_c = 0$

$$\text{y: } \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2$$

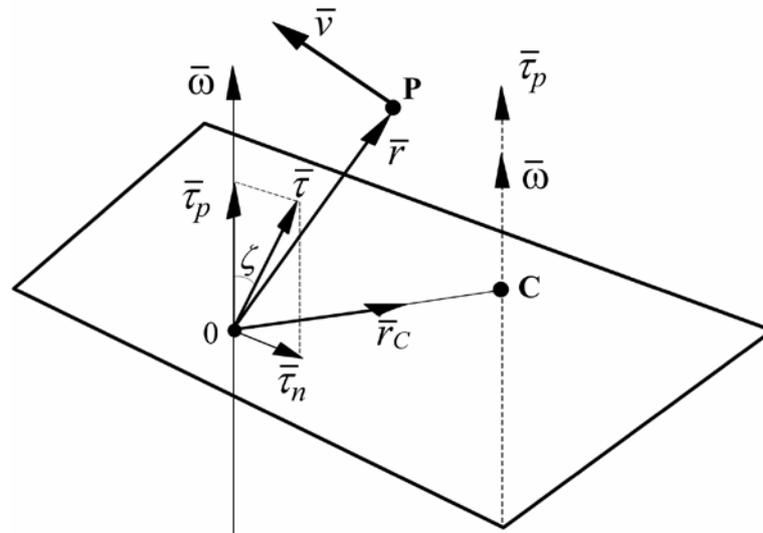
resulta:
$$\vec{r}_c = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}}{\omega^2} \quad (2.13)$$

Un ejemplo clásico de este movimiento lo constituye la rueda de un vehículo, en la cual el centro instantáneo C se encuentra sobre el pavimento.



Notar que la velocidad absoluta del punto del cuerpo que coincide con el centro instantáneo de rotación es nula en dicho instante, pero su aceleración no lo es. Luego, el centro instantáneo de rotación considerado como punto del cuerpo, no puede ser tomado como centro instantáneo de aceleración nula.

Volviendo ahora al caso general b.3 en que $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$ forman un ángulo cualquiera, el mismo puede ser analizado por superposición de los dos casos anteriores:



Supóngase en el punto O una rotación $\vec{\omega}$ y una traslación $\vec{\tau}$ que forman entre sí un ángulo ξ .

Componiendo $\vec{\omega}$ con la proyección del vector traslación normal a ella $\vec{\tau}_n$ se obtendrá una rotación instantánea en el centro instantáneo C. Y siendo $\vec{\tau}_p$, la proyección del vector traslación en la dirección de $\vec{\omega}$ un vector libre, puede ser trasladado al punto C, resultando un caso de composición de una rotación instantánea con una traslación paralela ($\vec{\omega} \parallel \vec{\tau}$).

Luego, se desarrolla un movimiento helicoidal instantáneo, cuyo eje que pasa por C cambia de posición con el tiempo. Este movimiento es el más general que puede tener un sistema rígido.

La velocidad de un punto P cualquiera del cuerpo será:

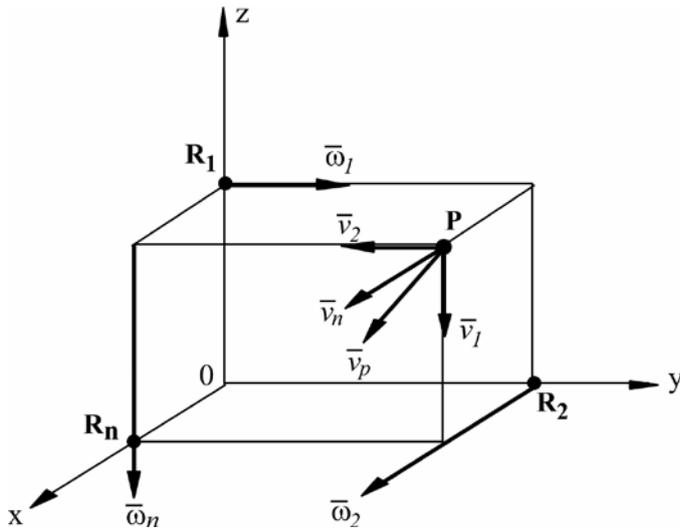
$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

y la posición del centro instantáneo: $\vec{r}_c = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}}{\omega^2}$

b.4. Composición de rotaciones alabeadas

Un caso singular de composición de traslaciones con rotaciones y que merece un tratamiento adecuado es el de las rotaciones alabeadas, es decir, que no se cortan.

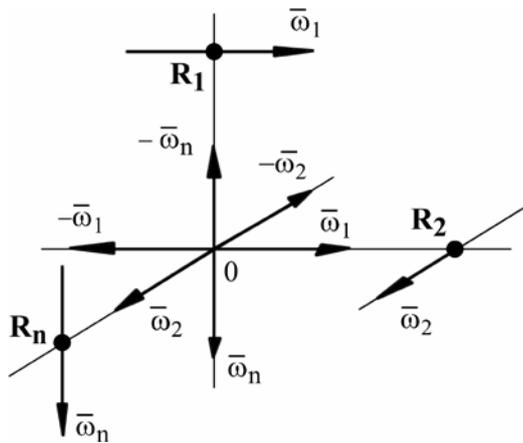
Supóngase un cuerpo rígido sometido a un conjunto de estas rotaciones $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ siendo R_1, R_2, \dots, R_n puntos de sus respectivos ejes de rotación. La velocidad de un punto P cualquiera del cuerpo será la suma vectorial de las velocidades que en dicho punto originan las distintas rotaciones:



$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 \\ \vec{V}_2 &= \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2 \\ &\vdots \\ \vec{V}_n &= \vec{\omega}_n \wedge \vec{r}_n \\ \therefore \vec{V}_P &= \sum_{i=1}^n \vec{V}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_i \end{aligned}$$

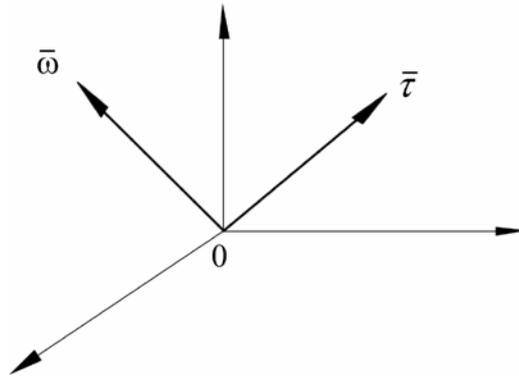
Ahora bien, el procedimiento anterior no suministra información sobre el tipo de movimiento que resulta. Para conocerlo se procede de la siguiente manera: se colocan en el punto 0, dos rotaciones iguales y de sentido contrario a cada una de las existentes. Así, las rotaciones $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, que pasan por O son concurrentes y admiten una rotación resultante

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$$



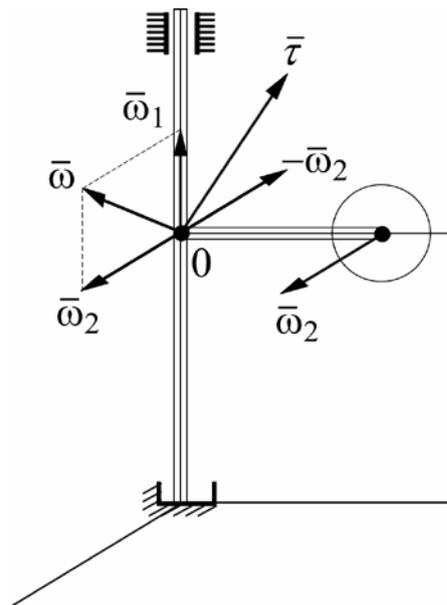
Las rotaciones $-\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_1$ en O y R_1 respectivamente, forman un par de rotaciones y por lo tanto dan lugar a una traslación perpendicular al plano que ellas determinan, ocurriendo lo mismo con el resto de los pares así formados. Siendo las traslaciones vectores libres, se pueden llevar al punto O, donde se tendrán las traslaciones $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n$ que admitirán una resultante

$$\vec{t} = \sum_{i=1}^n \vec{t}_i$$



Luego, el problema se reduce a una rotación y a una traslación en el punto 0 que en el caso más general darán lugar a un movimiento helicoidal instantáneo, tal como se estudió en el apartado precedente.

Un ejemplo de lo analizado es el caso del disco de la figura sometido a dos rotaciones alabeadas, cuyo movimiento resultante queda determinado por la composición de una traslación y una rotación.



2.4. Movimiento rototraslatorio

Como se demostró, el más general de todos los movimientos rototraslatorios es el movimiento helicoidal instantáneo o tangente, al que se llega componiendo rotaciones alabeadas o bien una traslación y una rotación que formen entre sí un ángulo cualquiera distinto de 0 o 90°, siendo $\vec{\tau}$ y $\vec{\omega}$ los vectores característicos que definen el movimiento. Conocidos los mismos, es posible determinar la velocidad de cualquier punto:

$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

A esta expresión, se la denomina forma propia de la ley de distribución de velocidades.

Si en lugar de \vec{v} se conociese la velocidad de un punto cualquiera P_1 del cuerpo, podría procederse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1 \\ \vec{V}_i &= \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro

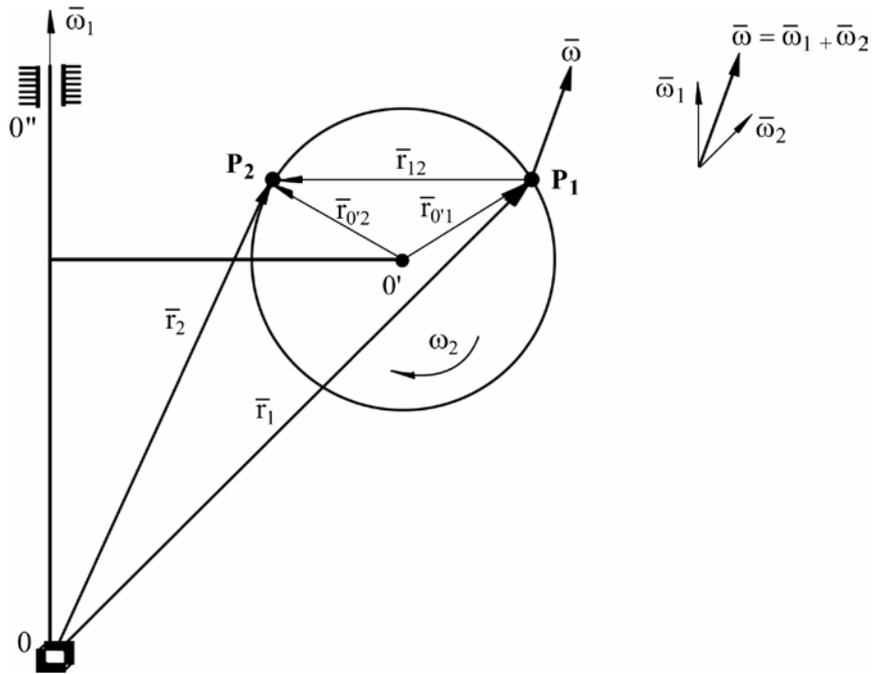
$$\begin{aligned}\vec{V}_i - \vec{V}_1 &= \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{r}_1) \\ \text{ó} \\ \vec{V}_i &= \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{r}_1)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Se observa que la (2.14) permite encontrar la velocidad de un punto cualquiera P_i en función de la velocidad de otro punto P_1 como si el vector $\vec{\omega}$ pasara por este último. Esta última expresión se denomina forma impropia de la ley de distribución de velocidades, y al punto cuya velocidad se conoce y en función de la cual se calculan las velocidades de los demás puntos del sistema se lo llama centro de reducción del movimiento.

Nótese que el punto P_1 ha sido definido como perteneciente al cuerpo en movimiento. Por ello, la aplicación de esta última expresión implica tomar en cuenta esta condición aún cuando se haya elegido como centro de reducción a un punto que se encuentre fuera de la región del espacio comprendida por el cuerpo; si éste fuera el caso, en la (2.14) deberá colocarse la velocidad de la que estaría animado el punto P_1 si el cuerpo le impusiera su movimiento.

Ejemplo demostrativo:

Sea un disco de radio r que gira con $\vec{\omega}_2$ respecto del bastidor $O' O''$ el cual a su vez gira con $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje $O O''$.



La velocidad \vec{V}_1 del punto P₁ del disco será:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{o'1}$$

y la velocidad de un punto cualquiera P₂:

$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{o'2}$$

Restando miembro a miembro

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{r}_{o'2} - \vec{r}_{o'1})$$

pero $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12}$

y

$$\vec{r}_{o'2} - \vec{r}_{o'1} = \vec{r}_{12}$$

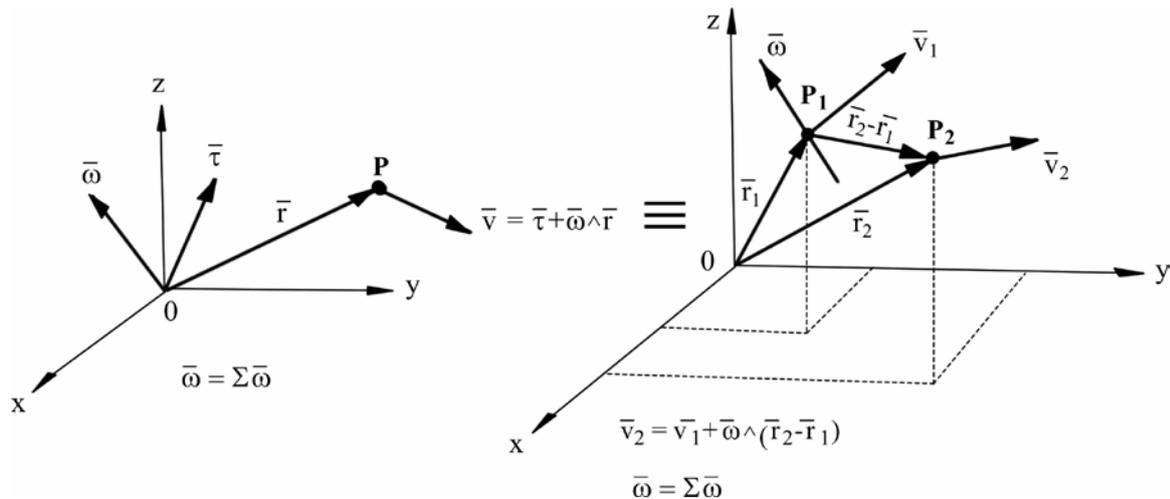
luego $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{12}$

$$\therefore \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge \vec{r}_{12}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12}$$

Es decir: la velocidad de un punto cualquiera como el P₂ es la del punto P₁ (centro de reducción) más la velocidad que P₂ tendría si $\vec{\omega}$ pasara por P₁, debido a la rotación $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Nótese que las expresiones propia e impropia, conducen a un único resultado. Gráficamente:



Derivando con respecto al tiempo la (2.12) o la (2.14) puede ser encontrada la ley de distribución de aceleraciones en el movimiento rototraslatorio.

Partiendo de (2.12):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad (\text{forma propia})$$

tomando (2.14)

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}_1}{dt} + \vec{\gamma} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

o

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \quad (2.15)$$

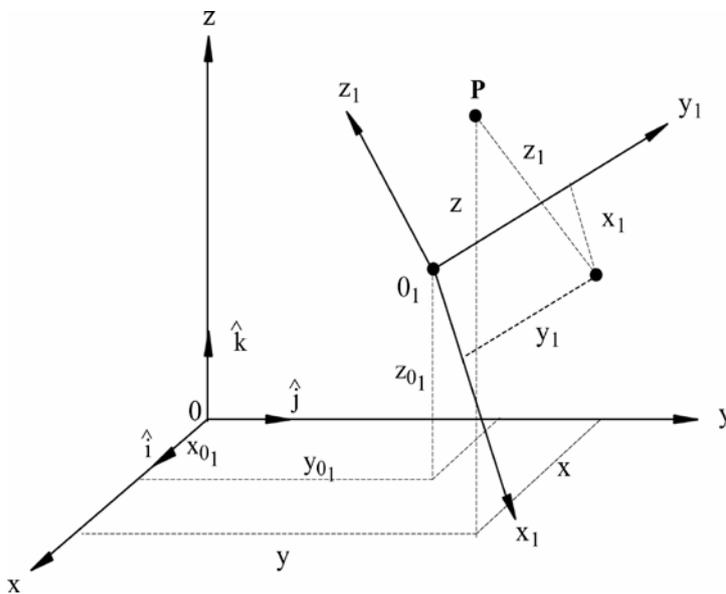
Que es la expresión impropia de la ley de distribución de aceleraciones.

2. 5. Estudio general del movimiento rígido

Se presentarán dos formas de estudiar el movimiento de un sistema rígido. La primera consistirá en el “seguimiento” desde el marco absoluto de una terna solidariamente unida al cuerpo y la segunda se basará en los conceptos del movimiento relativo. La elección de uno u otro método de resolución dependerá sobre todo de las geometrías que intervengan y la mejor indicación de la elección se tendrá después de haber adquirido experiencia con ambos métodos.

2. 5. 1. Primer método: Movimiento Absoluto.

Sea una terna $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ en el marco de referencia respecto del cual interesa conocer el movimiento del cuerpo, al que se denomina absoluto.



Se adoptará una terna móvil solidaria al sistema rígido y con respecto a la cual se conocen las coordenadas de todos los puntos del mismo; así, para un punto P , las coordenadas x_1, y_1, z_1 respecto de la terna $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ son constantes conocidas.

Luego, se estudia el movimiento del sistema rígido analizando el de la terna móvil solidariamente unida al mismo.

Los problemas fundamentales que se plantean en el estudio del movimiento son los siguientes:

- 1) Conocer la configuración (o posición) del sistema rígido en cada instante.
- 2) Conocer el estado de velocidad del sistema rígido, lo que implica poder calcular los vectores velocidad de todos sus puntos.
- 3) Conocer el estado de aceleración.

1) Configuración: al estudiar los posibles movimientos de un sistema rígido libre en el espacio, se demostró que poseía seis grados de libertad, y que su posición quedaba definida por seis parámetros libres dados por seis coordenadas de tres de sus puntos no alineados.

Para el caso que se plantea (estudiar el movimiento del cuerpo a través de una terna unida solidariamente a él) se tendrá que adoptar distintos tipos de parámetros, ya que la posición de la terna solidaria al cuerpo quedará determinada cuando se conozcan las tres coordenadas del origen $O_1 (x_{01}, y_{01}, z_{01})$ y la inclinación de los ejes de dicha terna con respecto a los de la absoluta.

Para esto último podría trabajarse con los nueve cosenos directores de los tres ejes, o bien con los denominados ángulos de Euler.

a) Si se consideran los nueve cosenos directores, los ejes móviles quedarán expresados vectorialmente así:

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = c_{11}\hat{i} + c_{12}\hat{j} + c_{13}\hat{k} \\ \hat{j}_1 = c_{21}\hat{i} + c_{22}\hat{j} + c_{23}\hat{k} \\ \hat{k}_1 = c_{31}\hat{i} + c_{32}\hat{j} + c_{33}\hat{k} \end{cases}$$

donde $c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$

y α_{ij} son los nueve ángulos directores; por ejemplo, α_{23} es el ángulo existente entre el eje \hat{j}_1 y el \hat{k} .

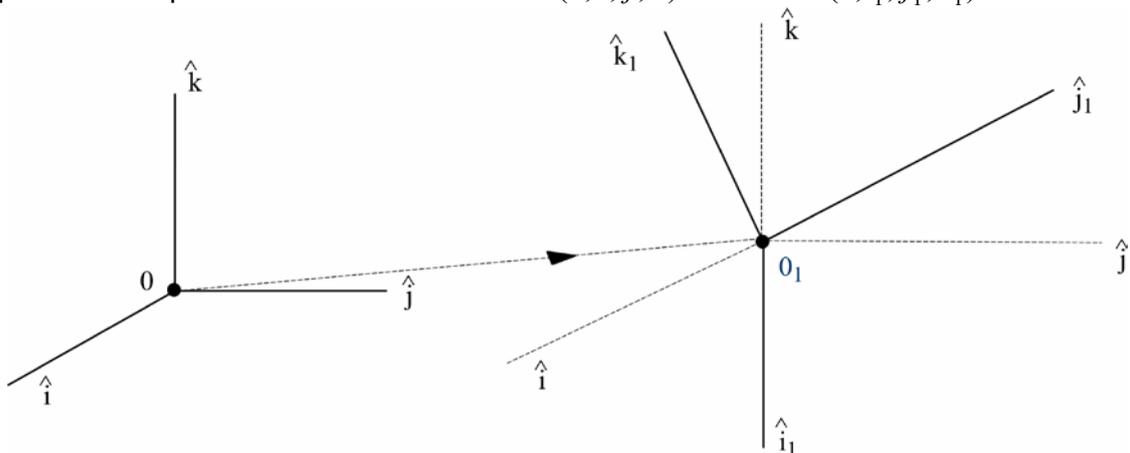
Pero así se han elegido otros nueve parámetros, de los cuales sólo se necesitan tres (porque tres se toman de O_1), luego deberán existir entre éstos seis condiciones de vínculo, que son:

$$\begin{aligned} \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 &= 1 & \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1 &= 0 \\ \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1 &= 1 & \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1 &= 0 \\ \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1 &= 1 & \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1 &= 0 \end{aligned}$$

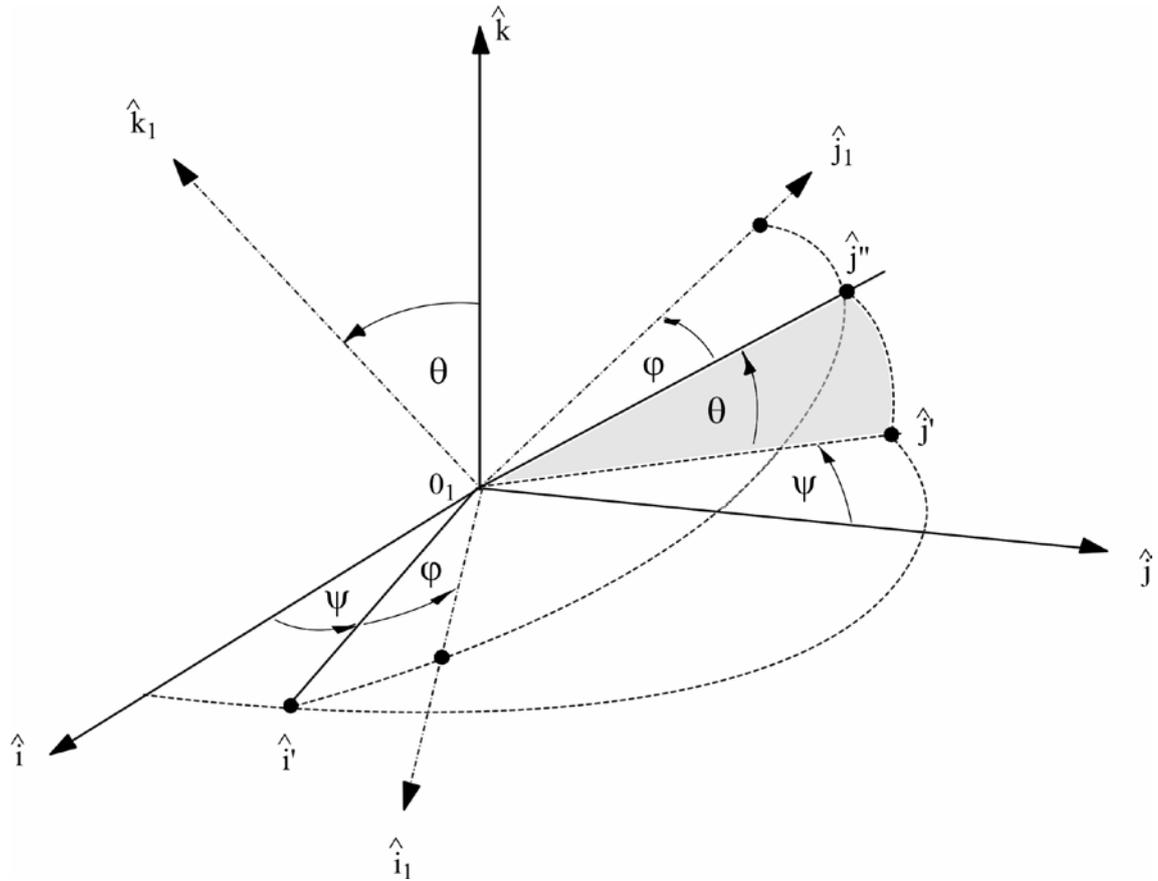
Luego, si los nueve cosenos directores están relacionados por seis expresiones, quedarán tres cosenos directores libres, de los cuales nunca podrá haber más de dos de un mismo eje. Así, la posición quedará definida en función de las tres coordenadas del origen de la terna de arrastre (O_1) y de tres cosenos directores de sus ejes. Con esto se tienen seis parámetros libres y por ende seis grados de libertad. Pero las seis ecuaciones de vínculo constituyen un sistema muy complicado para resolver, máxime estando formadas por funciones trigonométricas. Por esta razón conviene trabajar con los ángulos Euler.

b) Si se adoptan los tres ángulos de Euler para conocer la inclinación de los ejes de la terna móvil con respecto a la absoluta, los cuales son independientes entre sí, se puede efectuar la transformación de un sistema cartesiano dado en otro mediante tres rotaciones sucesivas que deben realizarse de modo determinado. Los ángulos de Euler corresponden precisamente a estas rotaciones.

Se pasará de la posición de la terna absoluta $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ a la móvil $(0, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$.



El proceso se inicia haciendo girar el sistema original $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un ángulo ψ sobre el eje fijo \hat{k} en sentido contrario al horario, obteniéndose el sistema $(0_1, \hat{i}', \hat{j}', \hat{k})$. Este movimiento recibe el nombre de precesión y ψ ángulo de precesión.



En un segundo paso se hace girar este nuevo sistema en sentido antihorario un ángulo θ alrededor de \hat{i}' , obteniéndose el sistema intermedio $(O_1, \hat{i}', \hat{j}'', \hat{k}_1)$. Este es el movimiento de nutación y θ el ángulo de nutación, que varía de 0 a π . El eje i' recibe el nombre de línea nodal y es la intersección de los planos $\hat{i} \hat{j}$ y $\hat{i} \hat{j}''$.

Finalmente, se giran los ejes $(O_1, \hat{i}', \hat{j}'', \hat{k}_1)$ en sentido antihorario un ángulo ϕ alrededor del eje \hat{k}_1 , obteniéndose el sistema deseado $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$. Este último movimiento, recibe el nombre de spin o rotación propia. Así pues, los ángulos de Euler ψ, θ, ϕ determinan por completo la orientación del sistema $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ con relación al $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ y los seis grados de libertad de un cuerpo quedan establecidos a través de los seis parámetros libres dados por los tres ángulos de Euler y las tres coordenadas del origen del sistema móvil:

$$\begin{array}{ll} x_{01} = x_{01}(t) & \psi = \psi(t) \\ y_{01} = y_{01}(t) & \theta = \theta(t) \\ z_{01} = z_{01}(t) & \phi = \phi(t) \end{array}$$

Si se tienen estas funciones, se conoce para cada instante t la posición del cuerpo.

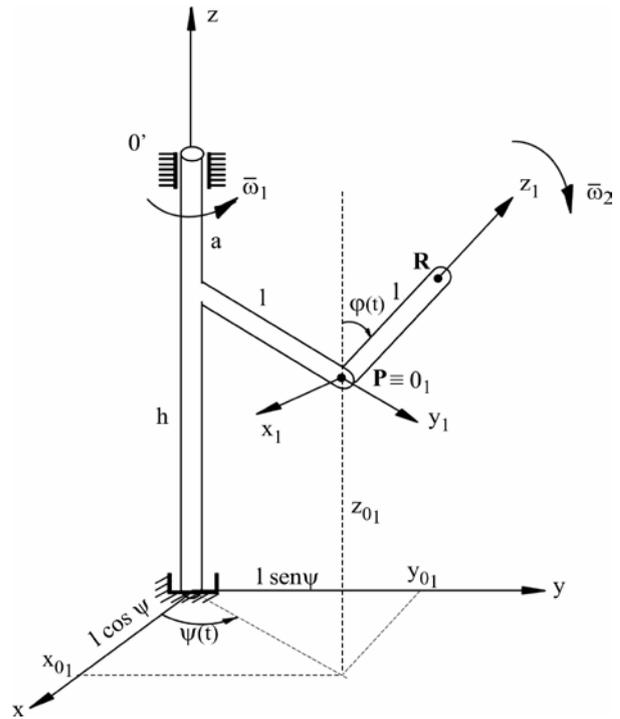
Ejemplo de aplicación: Configuración

La chapa PR gira con velocidad angular $\vec{\omega}_2$ alrededor de la barra de longitud l que rota con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje vertical, ambas de módulos constantes.

Aquí el cuerpo en estudio es la barra PR sometida a dos rotaciones alabeadas. La precesión queda expresada por el ángulo ψ y la rotación propia por el ángulo φ , siendo la nutación constante, por cuanto $\theta = \pi/2$.

Por lo tanto, la configuración de la barra queda determinada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \omega_1 \cdot t \\ \theta &= \pi/2 \\ \varphi(t) &= \omega_2 \cdot t \\ x_{01} &= l \cos \psi \\ y_{01} &= l \sin \psi \\ z_{01} &= h \end{aligned}$$



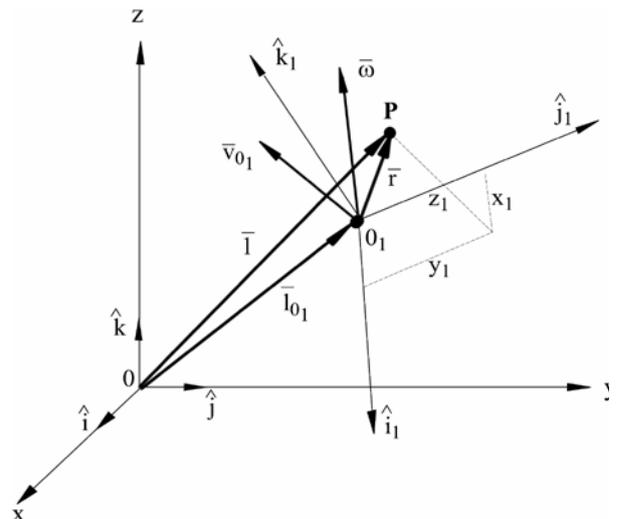
2) Estado de velocidad

Se ha dicho que conocer el estado de velocidad de un cuerpo implica conocer los vectores velocidad de todos sus puntos. Para ello, se tomará el origen de la terna móvil como centro de reducción del movimiento, suponiendo conocida la velocidad de dicho punto \vec{V}_{01} y el vector rotación $\vec{\omega}$ en el mismo O_1 .

Derivadas de vectores absolutos expresados en ternas móviles:

Cuando vectores que son observados desde el marco de referencia absoluto se expresan en sistemas coordenados móviles respecto del observador, sus componentes quedan expresadas según versores que son variables con el tiempo.

Antes de determinar el estado de velocidad, se desarrollarán las fórmulas de Poisson, que facilitarán el tratamiento posterior del tema ya que permiten reemplazar la derivada temporal de los versores por una sencilla expresión.



Sea la terna $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ solidariamente unida al cuerpo. Para un punto genérico P del cuerpo su vector posición con respecto a la terna en movimiento será:

$$\vec{r} = x_1 \hat{i}_1 + y_1 \hat{j}_1 + z_1 \hat{k}_1 \quad (2.16)$$

con $x_1, y_1, z_1 = \text{constantes}$

pero con respecto a la terna absoluta: $\vec{r} = \vec{l} - \vec{l}_{01}$
y derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} - \frac{d\vec{l}_{01}}{dt} = \vec{V} - \vec{V}_{01}$$

es decir, que la velocidad del punto P es:

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Por lo que, derivando (2.16) y reemplazando:

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + x_1 \cdot \frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\hat{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\hat{k}_1}{dt} \quad (2.17)$$

Se analizará el significado de las derivadas de los versores con respecto al tiempo. Para ello, comparando la expresión (2.17) con la forma impropia (2.14)

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

se observa que necesariamente:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = x_1 \cdot \frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\hat{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

pero es:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{r} &= \vec{\omega} \wedge (x_1 \cdot \hat{i}_1 + y_1 \cdot \hat{j}_1 + z_1 \cdot \hat{k}_1) = \\ &= x_1(\vec{\omega} \wedge \hat{i}_1) + y_1(\vec{\omega} \wedge \hat{j}_1) + z_1(\vec{\omega} \wedge \hat{k}_1) \end{aligned}$$

y por lo tanto resulta, siempre por comparación:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{i}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{i}_1 \\ \frac{d\hat{j}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{j}_1 \\ \frac{d\hat{k}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{k}_1 \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

Estas expresiones se conocen como las fórmulas de Poisson y permiten expresar las derivadas de los versores en función de un sencillo producto vectorial entre la $\vec{\omega}$ impuesta a la terna móvil y el mismo versor. Físicamente, las derivadas de los versores móviles representan las velocidades de sus afijos debido a la rotación de la terna.

Retomando el planteo del título, determinar el estado de velocidad del cuerpo es sencillo si se conocen el vector rotación $\vec{\omega}$ y la velocidad del origen de la terna móvil \vec{V}_{01} , puesto que la velocidad de cualquier punto podría determinarse con la expresión (2.14).

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

donde: \vec{V} ; velocidad del punto considerado.

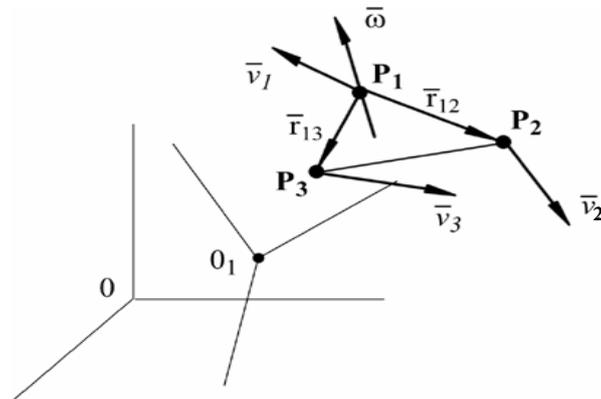
\vec{V}_{01} ; velocidad del origen de la terna móvil, tomado como centro de reducción

$\vec{\omega}$; vector rotación del cuerpo, trasladado al centro de reducción O_1 .

\vec{r} ; vector posición del punto considerado, referido al centro de reducción O_1 , origen de la terna móvil.

En el caso en que no se conozcan a priori $\vec{\omega}$ y \vec{V}_{01} se hace necesario encontrar la forma de calcularlas. Si se toman tres puntos del cuerpo P_1, P_2 y P_3 y se aplica la ley de distribución de velocidades para P_2 y P_3 con respecto a P_1 como si éste fuese centro de reducción:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12} \\ \vec{V}_3 &= \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{13} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$



Las ecuaciones (2.19) son vectoriales y de las mismas surgirán seis ecuaciones escalares con doce parámetros: nueve componentes de las \vec{V}_1, \vec{V}_2 y \vec{V}_3 y tres componentes de $\vec{\omega}$.

Por lo tanto, doce parámetros menos seis ecuaciones de vínculo, resultan de nuevo seis parámetros libres, por lo que el estado de velocidad de un cuerpo quedará determinado cuando se conozcan seis parámetros de velocidad de tres de sus puntos no alineados.

Las seis ecuaciones escalares obtenidas de las (2.19) serán:

$$\begin{aligned}
 V_{2x} &= V_{1x} + \omega_y (z_2 - z_1) - \omega_z (y_2 - y_1) \\
 V_{2y} &= V_{1y} + \omega_z (x_2 - x_1) - \omega_x (z_2 - z_1) \\
 V_{2z} &= V_{1z} + \omega_x (y_2 - y_1) - \omega_y (x_2 - x_1) \\
 V_{3x} &= V_{1x} + \omega_y (z_3 - z_1) - \omega_z (y_3 - y_1) \\
 V_{3y} &= V_{1y} + \omega_z (x_3 - x_1) - \omega_x (z_3 - z_1) \\
 V_{3z} &= V_{1z} + \omega_x (y_3 - y_1) - \omega_y (x_3 - x_1)
 \end{aligned}
 \tag{2.19'}$$

y los doce parámetros

$$\begin{cases}
 V_{1x} & , & V_{1y} & , & V_{1z} \\
 V_{2x} & , & V_{2y} & , & V_{2z} \\
 V_{3x} & , & V_{3y} & , & V_{3z} \\
 \omega_x & , & \omega_y & , & \omega_z
 \end{cases}$$

de los cuales seis deberán ser dados para poder determinar el estado de velocidad.

Ejemplo de aplicación: Estado de velocidad

Un cuerpo rígido se mueve con respecto del marco de referencia absoluto. Los datos geométricos y cinemáticos aportados están referenciados a la terna móvil fija al cuerpo, y son:

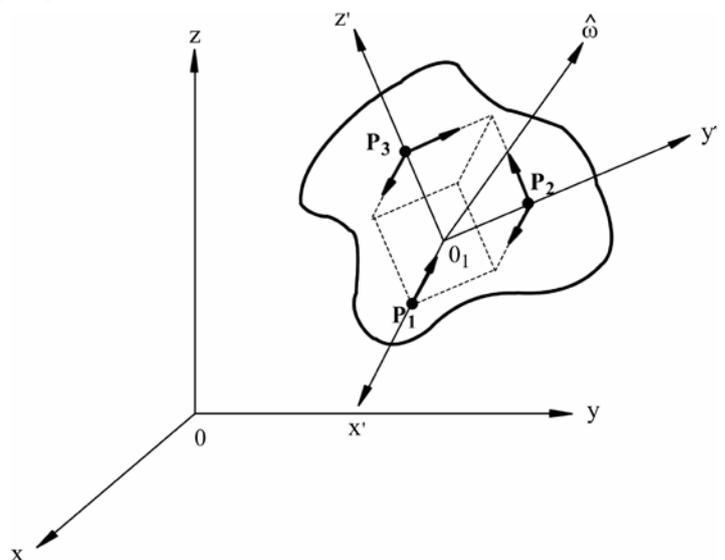
$$P_1(7,0,0); \quad P_2(0,5,0); \quad P_3(0,0,4) \text{ [cm]}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= 2 \text{ rad/s} \\
 v_{1x} &= -3 \text{ cm/s} \\
 v_{2x} &= v_{2z} = 2 \text{ cm/s} \\
 v_{3x} &= v_{3y} = 5 \text{ cm/s}
 \end{aligned}$$

Hallar el estado de velocidad y la velocidad del origen de la terna móvil.

Resolución:
Haciendo uso de las ecuaciones (2.19) y (2.19'), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_{3x} &= v_{1x} + 4 \omega_y \\
 v_{3y} &= v_{1y} - 8 - 7 \omega_z \\
 v_{3z} &= v_{1z} + 7 \omega_y \\
 v_{2x} &= v_{1x} - 5 \omega_z \\
 v_{2y} &= v_{1y} - 7 \omega_z
 \end{aligned}$$



$$v_{2y} = v_{1z} + 10 + 7 \omega_y$$

que constituye un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas. Reemplazando los datos y despejando, se obtiene:

$$\omega_y = 2 \text{ rad/s}; \omega_z = -1 \text{ rad/s}; v_{1y} = 6 \text{ cm/s}; v_{2y} = 13 \text{ cm/s}; v_{1z} = -22 \text{ cm/s} \text{ y } v_{3z} = -8 \text{ cm/s}$$

Luego, tomando a P_1 como centro de reducción, se tiene:

$$\vec{V}_{01} = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{101}$$

y resolviendo

$$\vec{V}_{01} (-3, 13, -8) \text{ cm/s}$$

Invariantes del movimiento rígido general

Como se ha visto al estudiar el estado de velocidades, una vez determinada la rotación $\vec{\omega}$ y la velocidad \vec{V} de un punto cualquiera, es posible determinar la velocidad de cualquier otro punto aplicando la ley de distribución de velocidades.

El vector rotación $\vec{\omega}$ es la resultante de todas las rotaciones que afectan al sistema y esa resultante será la misma cualquiera sea el centro de reducción adoptado; por esta razón se la suele llamar invariante vectorial del sistema.

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \quad (2.20)$$

Se verá ahora en qué consiste el concepto de invariante escalar del sistema; si se refiere la velocidad de un punto cualquiera al centro de reducción se tendrá:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01i}$$

y multiplicando m. a m. escalarmente por un vector $\hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

$$\vec{V}_i \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \hat{\omega} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01i}) \cdot \hat{\omega}$$

El segundo sumando de la derecha se anula por cuanto $\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ será perpendicular a $\vec{\omega}$

resultando:

$$\vec{V}_i \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \hat{\omega} = cte = \mu$$

Esto expresa que los vectores velocidad de un sistema material rígido proyectados en un determinado instante sobre la dirección del vector rotación son una constante que recibe el nombre de "invariante escalar μ ".

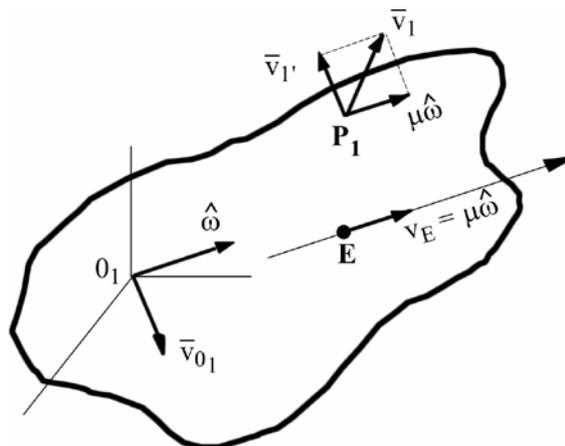
$$\mu = \vec{V}_{01} \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} \tag{2.21}$$

Los invariantes vectorial y escalar suministran importante información, ya que definen el tipo de movimiento:

- a) Si $\mu = 0$ porque $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ Movimiento de traslación.
- b) Si $\mu = 0$
 - $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{01} = 0 \Rightarrow \text{Movimiento de rotación (O}_1 \text{ es punto del eje de rotación)} \\ \vec{\omega} \perp \vec{V}_{01} \Rightarrow \text{Movimiento de rotación instantánea} \end{array} \right.$
- c) Si $\mu = \pm V_{01}$ debe ser $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_{01}$ porque al proyectar, lo hace con su verdadero valor \Rightarrow Movimiento helicoidal permanente.
- d) Si $\left. \begin{array}{l} \mu \neq 0 \\ \mu \neq |\vec{V}_{01}| \end{array} \right\} \Rightarrow$ Movimiento helicoidal instantáneo

En este último caso, tal como se vio en el apartado b.3), la velocidad o traslación forma un ángulo distinto de 0° ó 90° y teniendo en cuenta que la componente paralela a $\vec{\omega}$ de la \vec{V} de cualquier punto es constante, al pasar de un punto al otro la velocidad varía sólo por su componente perpendicular a $\vec{\omega}$. Existe entonces una recta paralela a $\vec{\omega}$ en cuyos puntos se anula la componente de la velocidad perpendicular a dicha dirección y en tal caso, esa velocidad toma su valor mínimo. El lugar geométrico de los puntos de velocidad mínima recibe el nombre de eje central del movimiento o eje instantáneo del movimiento helicoidal. Dicha velocidad mínima representa el vector traslación del movimiento helicoidal instantáneo:

$$\vec{\tau} = \mu \hat{\omega} \tag{2.22}$$



Luego, para cada punto la componente $\mu \hat{\omega}$ representa la traslación y las componentes \vec{V}' son las velocidades originadas por la rotación.

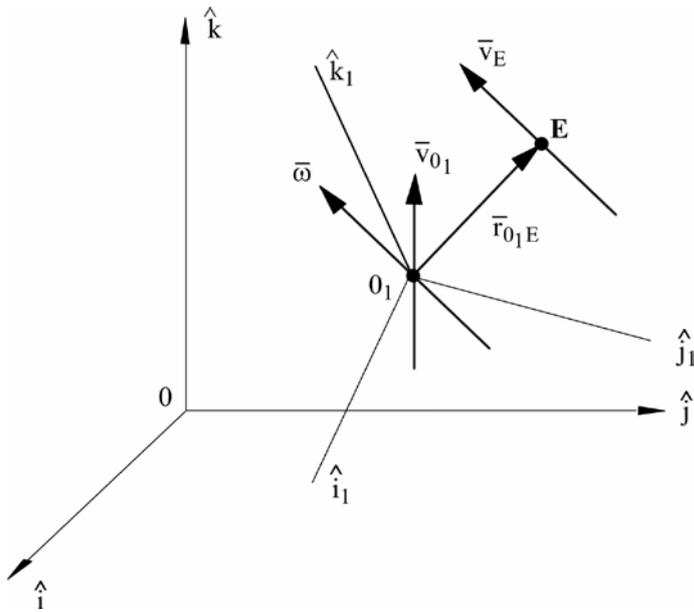
Por lo tanto, el movimiento helicoidal instantáneo puede reducirse en cualquier punto del eje central a una rotación $\vec{\omega}$ (invariante vectorial) y a una traslación de igual dirección $\vec{\tau} = \mu \hat{\omega}$.

Para determinar un punto del eje central se procede de la siguiente manera:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01E} = \mu \hat{\omega}$$

multiplicando vectorialmente m. a m. por $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01E}) = \mu \vec{\omega} \wedge \hat{\omega} = \vec{0}$$



y resolviendo:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01} + \underbrace{\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{01E})}_{\omega^2 \vec{r}_{01E}} - \vec{r}_{01E}(\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}_{\omega^2}) = \vec{0}$$

tomando $\vec{r}_{01E} \perp \vec{\omega}$ ω^2

es $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{01E} = 0$

finalmente; $\vec{r}_{01E} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01}}{\omega^2}$ (2.23)

Una vez determinado E que es un punto del eje central, éste puede ser tomado como centro de reducción para usar la forma propia de la ley de distribución de velocidades:

$$\vec{V}_i = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{Ei}$$

Ejemplo de aplicación. Invariantes

Retomando el ejemplo utilizado para explicar la configuración, en el cual la chapa PR gira con velocidad $\vec{\omega}_2$ alrededor de la barra de longitud l que rota con velocidad $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje vertical, determinar:

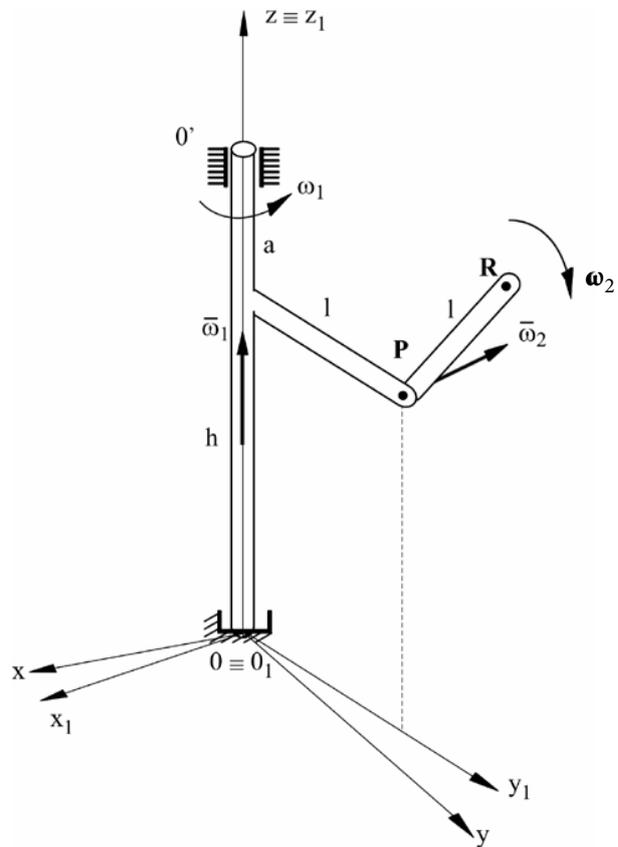
- 1) Invariante vectorial.
- 2) velocidad del centro de reducción.
- 3) invariante escalar.
- 4) un punto del eje central del movimiento.

Tomar como centro de reducción:

- a) el punto O
- b) el punto P

Resolución:

Se adoptará para el análisis del problema una terna fija al bastidor OP_0' , es decir, rotando con ω_1 respecto del sistema de referencia absoluto solidariamente unido a los cojinetes $00'$.



a) Reducción del sistema al punto O

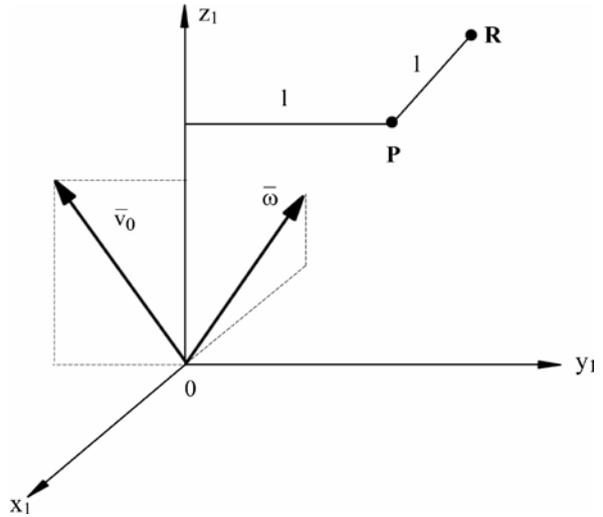
$$1) \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = -\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1$$

2) La velocidad de O como punto de la varilla será la impuesta por $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{V}_o = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{po} = -\omega_2 \cdot \hat{i}_1 \wedge (-l \hat{j}_1 - h \hat{k}_1)$$

$$\vec{V}_o = \omega_2 (l \hat{k}_1 - h \hat{j}_1)$$

Cualquier punto de la chapa que pasare (hipotéticamente) por 0 tendrá siempre la velocidad \vec{V}_o calculada antes. Al colocar los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{V}_o en 0 hemos reducido el sistema a ese punto y a partir de él podemos calcular la velocidad de cualquier punto de la chapa.



$$3) \mu = \vec{V}_o \cdot \vec{\omega} = (-\omega_2 h \hat{j}_1 + \omega_2 l \hat{k}_1) \cdot \frac{[-\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1]}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

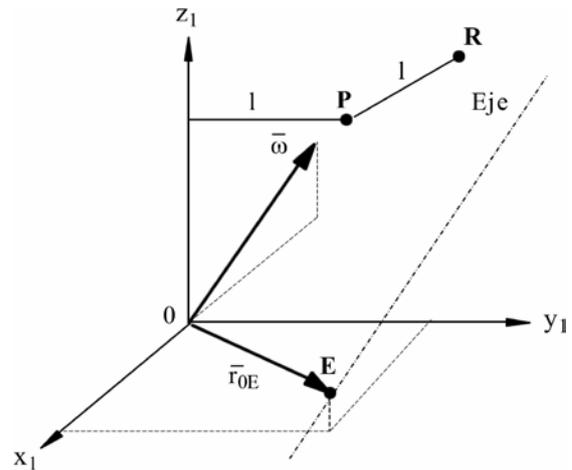
Se observa que $\mu \neq 0$ y por tanto es un movimiento helicoidal instantáneo:

$$\vec{\tau} = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{(\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2})^2} (-\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1) = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{\omega_1^2 + \omega_2^2} (-\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1)$$

4)

$$\vec{r}_{0E} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_o}{\omega^2} = \frac{\omega_2^2 h \hat{k}_1 + \omega_2^2 l \hat{j}_1 + \omega_1 \omega_2 h \hat{i}_1}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$$

Debe tenerse en cuenta que este vector se extiende desde 0 a E. Notar que el eje instantáneo es fijo en la terna móvil, pero como ésta rota, el eje va variando su posición respecto de la terna fija.



b) Reducción del sistema al punto P:

$$1^{\circ}) \quad \vec{\omega} = -\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1$$

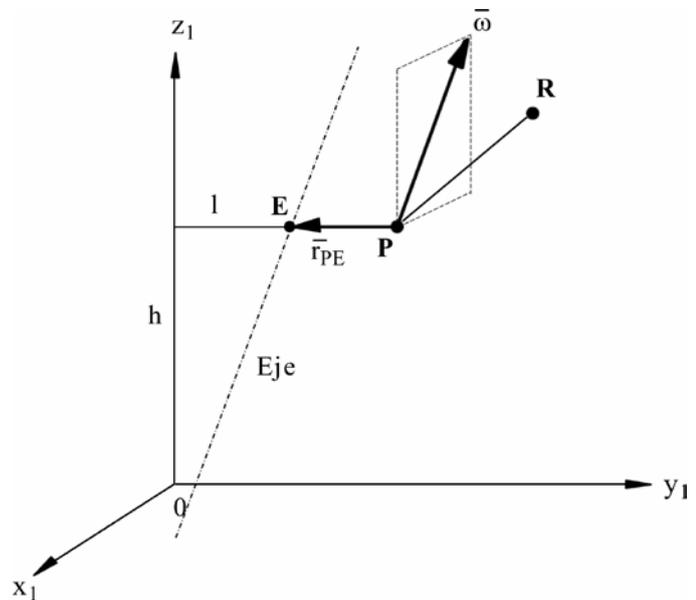
$$2^{\circ}) \quad \vec{V}_p = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0p} = \omega_1 \hat{k}_1 \wedge (l \hat{j}_1 + h \hat{k}_1) = -\omega_1 l \hat{i}_1$$

$$3^{\circ}) \quad \mu = \vec{V}_p \cdot \hat{\omega} = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

$$\vec{\tau} = \mu \cdot \hat{\omega} = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\right)^2} (-\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1) = \frac{\omega_1 \omega_2 l}{\omega_1^2 + \omega_2^2} (-\omega_2 \hat{i}_1 + \omega_1 \hat{k}_1)$$

$$4^{\circ}) \quad \vec{r}_{PE} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_p}{\omega^2} = -\frac{\omega_1^2 l}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \hat{j}_1$$

\vec{r}_{PE} medido ahora desde P.



3) Estado de aceleración:

Tomando los mismos puntos del cuerpo que en el apartado anterior y trabajando análogamente con la forma impropia de la ley de distribución de aceleraciones:

$$\begin{cases} \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{21} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12}) \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{31} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{13}) \end{cases} \quad (2.24)$$

Siendo: $\vec{\gamma} = \gamma_x \hat{i}_1 + \gamma_y \hat{j}_1 + \gamma_z \hat{k}_1$

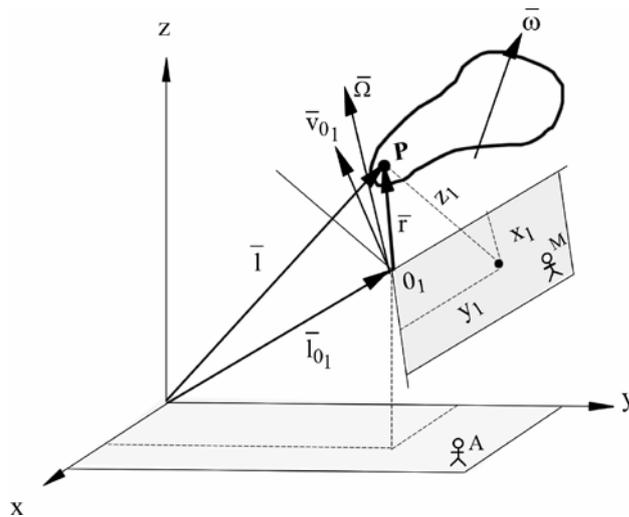
Por lo tanto, el estado de aceleración de un sistema rígido quedará determinado cuando se conozcan seis parámetros de aceleración de tres puntos no alineados.

2. 5. 2. Segundo método: Movimiento Relativo.

Se estudiará ahora el movimiento de un sistema rígido aplicando una metodología distinta a la vista recientemente.

Para ello se analizará el movimiento del cuerpo respecto de una terna ubicada en un marco de referencia que se mueve con respecto a otra considerada fija, solidaria al marco de referencia absoluto. A la terna móvil se la denomina “de arrastre”, siendo $\vec{\Omega}$ su vector rotación y \vec{V}_{01} el vector velocidad de su origen, ambos absolutos.

En la siguiente figura, se han dibujado esquemáticamente dos observadores: el absoluto (A) y el móvil (M), ambos en cada una de las ternas adoptadas.



Pueden distinguirse tres movimientos:

1) Movimiento Relativo: es el movimiento del sistema rígido con respecto a la terna de arrastre como si ésta estuviese en reposo.

2) Movimiento de Arrastre: Es el movimiento del cuerpo como si estuviera solidariamente unido a la terna móvil y ésta lo “arrastrase” en su movimiento.

3) Movimiento Absoluto: Es el movimiento del sistema rígido respecto de la terna absoluta como consecuencia de la simultaneidad de los dos movimientos anteriores.

Habrà siempre un movimiento absoluto y uno relativo pero puede haber muchos de arrastre según las ternas que se intercalen; todos ellos pueden reducirse a uno solo por composición de movimientos.

Notar que $\vec{\Omega}$ es la velocidad de rotación de los ejes $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ mientras que la velocidad de rotación del cuerpo es $\vec{\omega}$, ambas absolutas.

Se tomará para el análisis un punto P del cuerpo y se estudiará cuál sería su velocidad con respecto a la terna absoluta como consecuencia de los movimientos relativos y de arrastre.

Será:

$$\vec{r} = \vec{l} - \vec{l}_{01} = x_1 \hat{i}_1 + y_1 \hat{j}_1 + z_1 \hat{k}_1 \tag{2.25}$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} - \frac{d\vec{l}_{01}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \hat{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \hat{k}_1 + x_1 \frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\hat{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\hat{k}_1}{dt} \quad (2.25')$$

pero siendo \vec{l} y \vec{l}_{01} vectores de posición con respecto a la terna absoluta, sus derivadas temporales darán las velocidades de P y O_1 con respecto al marco absoluto: \vec{V} y \vec{V}_{01} .

Con respecto a los tres últimos sumandos del lado derecho de la igualdad, pueden aplicarse las fórmulas de Poisson, obteniéndose:

$$x_1 \vec{\Omega} \wedge \hat{i}_1 + y_1 \vec{\Omega} \wedge \hat{j}_1 + z_1 \vec{\Omega} \wedge \hat{k}_1 = \vec{\Omega} \wedge (x_1 \hat{i}_1 + y_1 \hat{j}_1 + z_1 \hat{k}_1) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

Por lo tanto y teniendo en cuenta que los tres primeros sumandos representan la velocidad de P como si la terna móvil estuviese quieta:

$$\vec{V} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{01} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.26)$$

donde: \vec{V} = velocidad absoluta de P

$$\vec{V}_{rel} = \text{velocidad relativa de P} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{rel}$$

donde el subíndice “rel” indica que se deriva el vector posición como si los ejes de la terna de arrastre permanecieran inmóviles.

$\vec{V}_{01} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ = sería la velocidad de P como si el cuerpo estuviese solidariamente unido a la terna móvil y fuese arrastrado por ella (velocidad de arrastre); así, rotaría con $\vec{\Omega}$ y O_1 sería el centro de reducción del movimiento.

Luego:

$$\vec{V} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \quad (2.26')$$

Es decir que la velocidad absoluta de un punto cualquiera de un sistema rígido resulta de la suma de sus velocidades de arrastre y relativa.

Se verá ahora qué ocurre con la aceleración; derivando la expresión (2.25’):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{V}_{01}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_1}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \hat{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \hat{k}_1 \right) + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \quad (2.27)$$

resolviendo el primer paréntesis:

$$\underbrace{\frac{d^2 x_1}{dt^2} \hat{i}_1 + \frac{d^2 y_1}{dt^2} \hat{j}_1 + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \hat{k}_1}_{\vec{a}_{rel}} + \frac{dx_1}{dt} \frac{d\hat{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d\hat{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d\hat{k}_1}{dt} =$$

$$= \vec{a}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{dx_1}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \hat{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \hat{k}_1 \right) =$$

$$= \vec{a}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel}$$

el segundo paréntesis da:

$$\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \left[\frac{d}{dt} (\vec{l} - \vec{l}_{01}) \right] = ; \text{ por (2.26)}$$

$$= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{V}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

Reemplazando en (21)

$$\vec{a} = \vec{a}_{01} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel} \quad (2.28)$$

donde: \vec{a} = aceleración absoluta de P

\vec{a}_{rel} = aceleración relativa de P

$\vec{a}_{01} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$ es la forma impropia de la ley de distribución de aceleraciones en un sistema rígido (tal como si éste fuese arrastrado por la terna móvil) y se denomina aceleración de arrastre.

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel}$ es la aceleración complementaria o de Coriolis. Aparece por la rotación de los ejes de la terna móvil y representa la diferencia en aceleración de P como si fuera medida a partir de unos ejes (0,i,j,k) no giratorios y de otros (0₁, i₁, j₁, k₁) giratorios, ambos con origen en O₁. Se anula si no hay rotación o bien si no hay movimiento relativo y también en los movimientos helicoidales permanentes donde $\vec{\Omega} \parallel \vec{V}_{rel}$.

Así resulta:
$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{com} \quad (2.28')$$

Ejemplo de aplicación: Movimiento Relativo

Para el ejemplo de aplicación utilizado en invariantes, emplear las expresiones del movimiento relativo para encontrar la velocidad y la aceleración absolutas del punto R de la chapa PR.

Resolución:

Se adoptará como marco de referencia relativo el bastidor $00'P$. En él, se ubicará la terna móvil o de arrastre con origen en P, es decir, rotando con $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. Luego,

$$\vec{V}_{relR} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{PR}$$

$$\vec{V}_{arrR} = \vec{V}_P + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{PR}$$

donde $\vec{V}_P = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{OP}$

$$\vec{a}_{relR} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{PR}$$

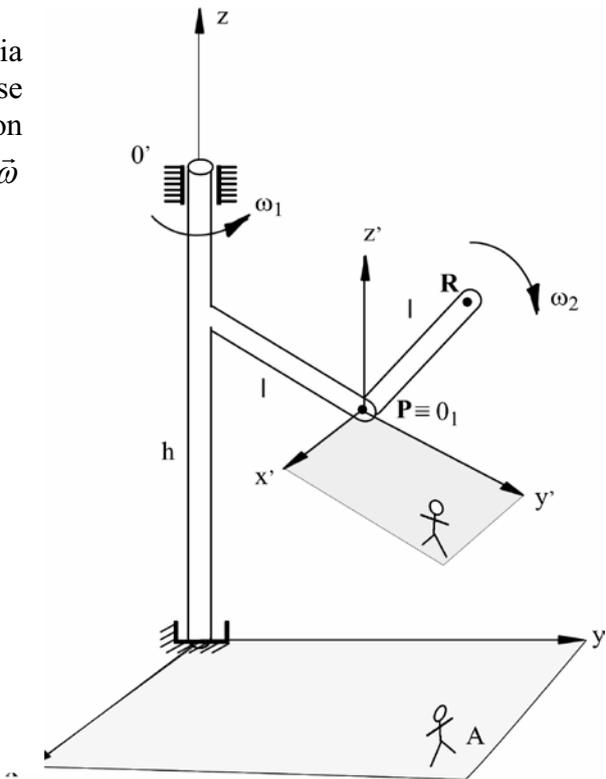
$$\vec{a}_{arrR} = \vec{a}_P + \vec{\gamma}_1 \wedge \vec{r}_{PR} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{PR}$$

donde

$$\vec{a}_P = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{OP})$$

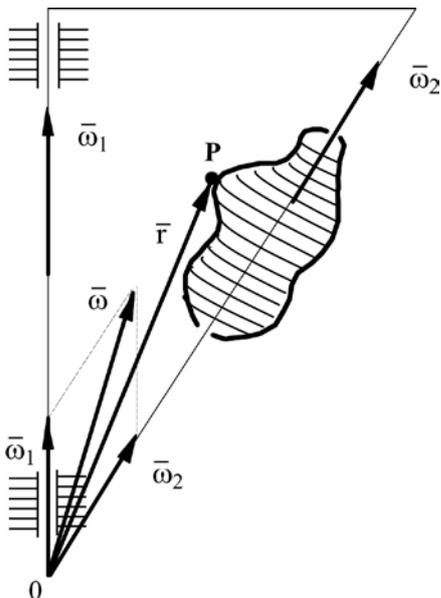
$$\vec{\gamma}_1 = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{comR} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{V}_{relR}$$



2.6. Movimiento polar

Como se vio al estudiar la composición de rotaciones concurrentes, este movimiento tiene lugar cuando el sistema material rígido se mueve sobre un punto fijo.



El cuerpo en este caso está sometido a una rotación instantánea $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^N \vec{\omega}_i$ y el punto 0 es el único punto fijo del sistema o polo de velocidades, pero como el valor $\vec{V}_0 = \vec{0}$ se mantiene invariante, resulta $\vec{a}_0 = \vec{0}$ y ese punto es también polo de aceleración. En este movimiento cualquier punto puede describir por la acción de las $\vec{\omega}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ una trayectoria cualquiera, la cual por condición de rigidez deberá desarrollarse sobre una superficie esférica ya que si consideramos un punto P, la distancia \overline{OP} deberá permanecer constante durante el movimiento.

Las velocidades de todos los puntos que se encuentran sobre un radio, por ejemplo PO, son proporcionales a sus distancias a 0, por lo que si se conoce una de esas

velocidades, las demás surgen por proporcionalidad. La velocidad instantánea \vec{V} y la aceleración \vec{a} de un punto cualquiera como el P del cuerpo vienen dadas por:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

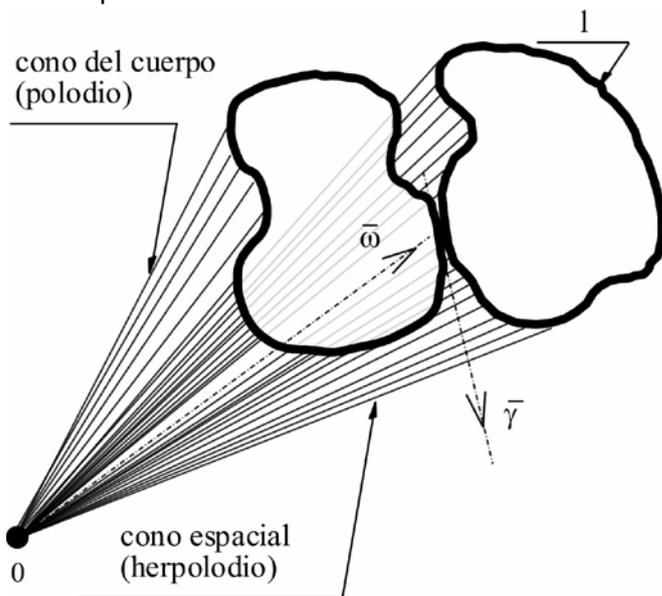
$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

como en la rotación alrededor de un eje fijo pero con la única diferencia que si el eje de rotación es fijo entonces $\vec{\gamma} = \dot{\vec{\omega}}$ está dirigido según el eje fijo $\vec{\omega}$ y representa la variación del módulo de $\vec{\omega}$ por unidad de tiempo; mientras que cuando el eje no está fijo en el cuerpo o en el espacio, el vector $\vec{\gamma}$ ya no sólo reflejará la variación del $|\vec{\omega}|$ sino también de la dirección de $\vec{\omega}$ y no estará dirigido según el eje $\vec{\omega}$.

En general, en el caso de un cuerpo que gire alrededor de un punto fijo, el eje instantáneo variará de posición tanto en el espacio como en el cuerpo.

Cuando el eje se mueve en el espacio genera un cono espacial o herpolodio y cuando el eje se mueve respecto al cuerpo genera un cono relativo al cuerpo llamado cono del cuerpo o polodio. Estos conos son tangentes a lo largo del eje instantáneo de rotación $\vec{\omega}$

y el movimiento del cuerpo se puede describir como la rodadura del cono del cuerpo sobre el espacial.



El cono del cuerpo puede ser interior o exterior al espacial.

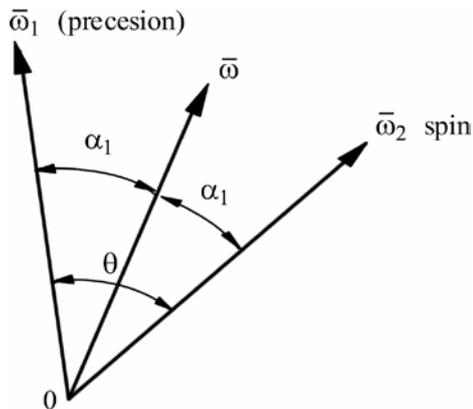
El extremo de $\vec{\omega}$ sigue una trayectoria absoluta l sobre el cono espacial y $\vec{\gamma}$ será por lo tanto un vector dirigido en la dirección de la variación de $\vec{\omega}$ la cual es tangente a l .

Como se verá en el próximo apartado, si un cuerpo se mueve paralelamente a un plano, puede considerarse que

gira alrededor de un punto situado en el infinito. Los conos del espacio y del cuerpo se convierten entonces en superficies cilíndricas y la intersección de éstas con el plano del movimiento se convierten en las denominadas curvas base y ruleta del movimiento plano.

Si se siguiese el movimiento de un punto P sobre la esfera de radio \overline{OP} , podría pensarse que P en su movimiento arrastra a una esfera móvil de igual radio que desliza sobre la fija. Siendo P el punto de intersección del eje $\vec{\omega}$ con ambas esferas, describirá en su movimiento una trayectoria (línea) sobre la absoluta y otra sobre la móvil, son las herpoloide y poloide respectivamente. De esta forma, el movimiento polar puede describirse como la rodadura sin deslizamiento de la poloide sobre la herpoloide.

Un caso particular y bastante común es el que se denomina “precesión regular” y se da cuando $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ son constantes lo que hace que el ángulo que forman entre ellas y los que forman cada una de ellas con la resultante son constantes:

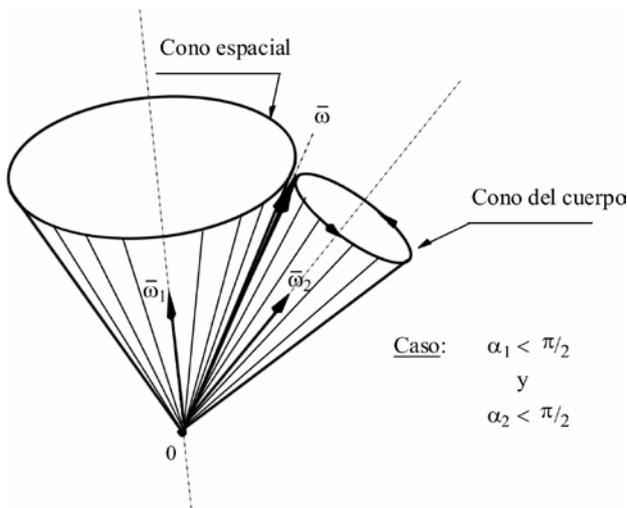


$$\alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \Rightarrow \text{constantes} \quad \therefore$$

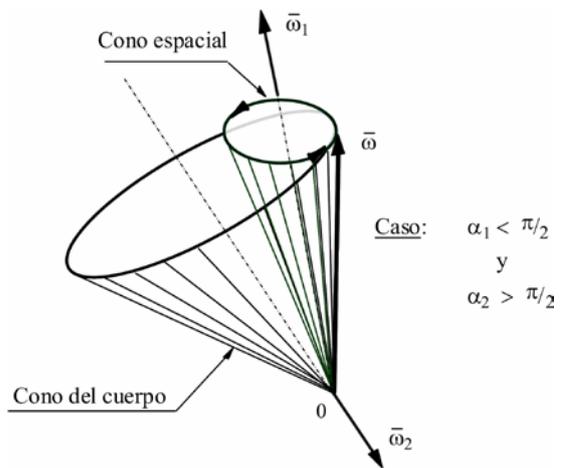
$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \quad ; \quad \text{ángulo de nutación} = \text{constante}$$

En este caso, la poloide y la herpoloide son círculos y los conos del espacio y del cuerpo son conos circulares rectos:

Caso 1:



Caso 2:



2. 7. Cinemática del movimiento plano

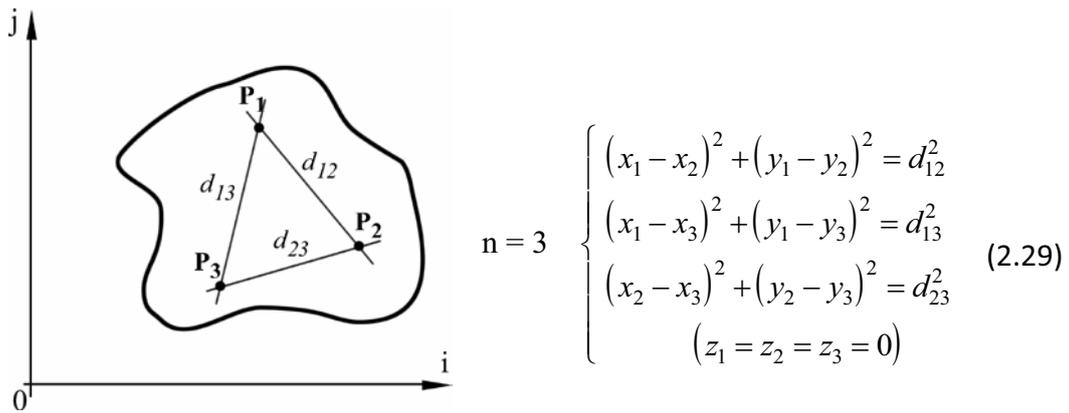
Se dice que un sistema rígido está en movimiento plano cuando las velocidades de cualquiera de sus puntos son paralelas a un plano fijo. Teniendo en cuenta esta definición y la condición de rigidez, todos los puntos ubicados sobre una normal a dicho plano tendrán igual velocidad, por lo que basta para estudiar el movimiento el análisis de un único plano.

Los sistemas rígidos que se mueven con estas características suelen ser denominados “chapas rígidas” y en consecuencia se estudia el movimiento de una chapa sobre el plano que la contiene.

En el movimiento plano se utilizarán dos ejes ortogonales como sistema de referencia contenidos en el plano del movimiento y el tercero perpendicular a dicho plano.

Grados de libertad de una chapa en su plano:

Considerando la chapa de la figura y aplicando las condiciones de rigidez para tres de sus puntos no alineados:



En estas tres ecuaciones se tienen seis parámetros:

$$m = 6 \quad \begin{cases} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \end{cases}$$

por lo tanto, la chapa en su plano posee $k = m - n = 3$ grados de libertad. Esto significa que la configuración (o posición) de una chapa en su plano queda expresada en función de tres parámetros, que de acuerdo con lo que puede observarse en las (2.29) pueden ser de dos de sus puntos. Entonces, será suficiente determinar los grados de libertad a partir de dos puntos solamente, entre los cuales se planteará una sola condición de rigidez:

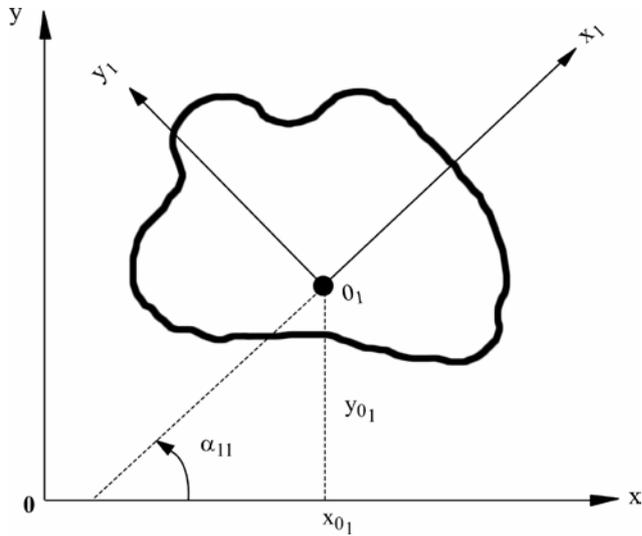
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d_{12}^2 \Rightarrow n = 1$$

$$\text{con 4 parámetros } \begin{cases} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \end{cases} \Rightarrow m = 4$$

$$\text{de donde: } k = m - n = 3 \text{ gl}$$

1) Configuración:

Dado que en el plano el planteo se reduce notablemente, para hallar la configuración es conveniente utilizar los cosenos directores de la terna de fija al cuerpo. En efecto, los tres parámetros libres serían en este caso las 2 coordenadas del origen de la terna móvil $(0_1, x_{01}, y_{01})$ y uno de los cosenos directores:



Aquí:

$$\hat{i}_1 = c_{11} \hat{i} + c_{12} \hat{j}$$

$$\hat{j}_1 = c_{21} \hat{i} + c_{22} \hat{j}$$

con

$$c_{11} = \cos \alpha_{11}$$

$$c_{12} = \text{sen } \alpha_{11}$$

$$c_{21} = -\text{sen } \alpha_{11}$$

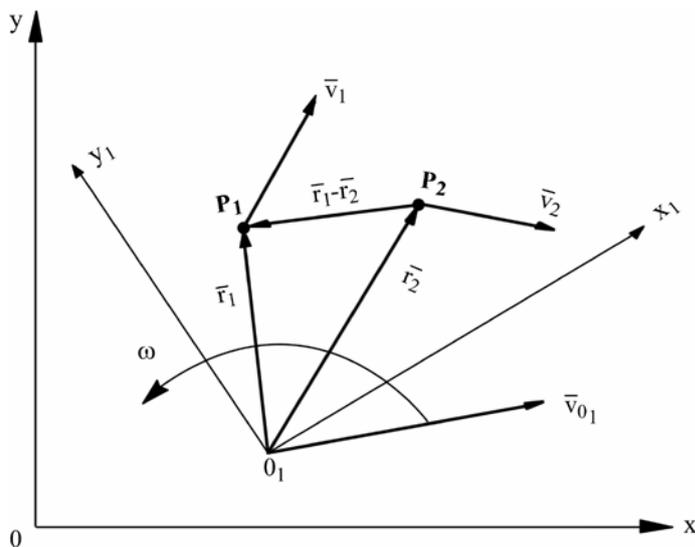
$$c_{22} = \cos \alpha_{11}$$

Con lo que se observa que con un único argumento se conocen los cuatro cosenos directores.

2) Estado de velocidad:

Considerando los vectores velocidad de dos puntos cualquiera de la chapa:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = V_{1x} \hat{i}_1 + V_{1y} \hat{j}_1 \\ \vec{V}_2 = V_{2x} \hat{i}_1 + V_{2y} \hat{j}_1 \end{cases}$$



Aplicando la condición cinemática de rigidez entre ellos:

$$\vec{V}_1 \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \vec{V}_2 \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2.30)$$

se obtiene una ecuación escalar con cuatro parámetros, de donde resultan tres parámetros libres de velocidad. Dándole valores a éstos, se puede calcular el cuarto mediante la ecuación (2.30).

Si el vector rotación $\vec{\omega}$ no es conocido, se hace necesario determinarlo, aunque ya se sabe que su dirección deberá estar sobre una perpendicular al plano del movimiento.

Para lograrlo, se aplica la forma impropia de la ley de distribución de velocidades entre los dos puntos tomando uno de ellos como centro de reducción:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.31)$$

De esta expresión vectorial se obtienen dos ecuaciones escalares con cinco parámetros que son $V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}, \omega$; viéndose que el estado de velocidades queda en función de tres parámetros libres elegidos entre los cinco anteriores.

Siendo $\vec{\omega} = \omega \hat{k}_1$, en (2.31) se tiene:

$$V_{2x} \hat{i}_1 + V_{2y} \hat{j}_1 = V_{1x} \hat{i}_1 + V_{1y} \hat{j}_1 + \omega \hat{k}_1 \wedge [(x_2 - x_1) \hat{i}_1 + (y_2 - y_1) \hat{j}_1]$$

ó

$$V_{2x} = V_{1x} - \omega (y_2 - y_1)$$

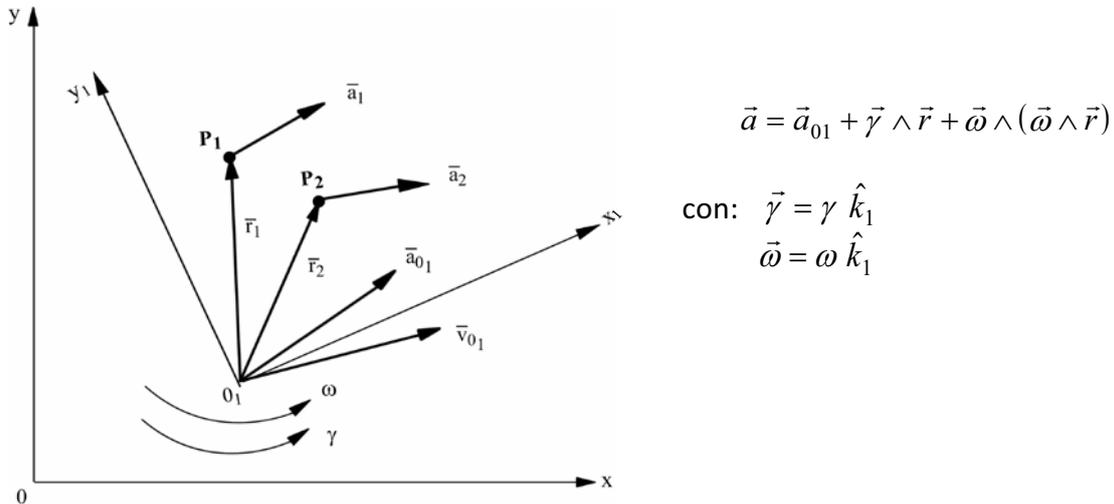
$$V_{2y} = V_{1y} + \omega (x_2 - x_1) \quad (2.31')$$

Con las que se resuelve el problema del estado de velocidades en el plano. Por supuesto que si se conociese el vector velocidad del origen O_1 , éste punto podría tomarse como centro de reducción para determinar la velocidad de cualquier otro punto P_i de la chapa mediante:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{O_1 i}$$

3) Estado de Aceleración:

El planteo es totalmente análogo, pero debe tenerse en cuenta ahora el vector $\vec{\gamma}$. Si se conociesen $\vec{a}_{01}, \vec{\omega}$ y $\vec{\gamma}$, la aceleración de cualquier punto quedaría expresada por:



Cuando los vectores no son conocidos, hay que determinarlos a partir de ciertos parámetros libres de la aceleración y cuyo número podría determinarse aplicando:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{12} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12}) \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x} - \gamma (y_2 - y_1) - \omega^2 (x_2 - x_1) \\ a_{2y} = a_{1y} + \gamma (x_2 - x_1) - \omega^2 (y_2 - y_1) \end{cases} \tag{2.32'}$$

nuevamente dos ecuaciones con cinco parámetros $a_{1x}, a_{1y}, a_{2x}, a_{2y}, \gamma$ de los que pueden elegirse los tres parámetros libres.

Ejemplo de aplicación: Estados de \vec{V} y \vec{a} en el movimiento plano

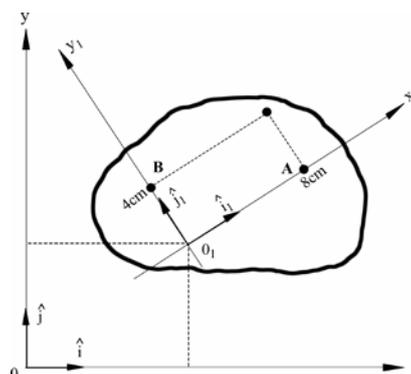
Determinar los estados de velocidad y de aceleración de la chapa de la figura con respecto al sistema absoluto $(0, \hat{i}, \hat{j})$, sabiendo que los puntos A y B de la misma poseen los siguientes parámetros cinemáticos referenciados a la terna móvil fija al cuerpo:

$$\vec{V}_B = 4 \hat{i}_1 - 2 \hat{j}_1 \text{ cm/s}$$

$$V_{Ax} = 1 \text{ cm/s}$$

$$\vec{a}_A = 3 \hat{i}_1 + \hat{j}_1 \text{ cm/s}^2$$

$$a_{By} = 0$$



Una vez determinados los estados de velocidad y aceleración calcular \vec{V}_{01} y \vec{a}_{01} y hallar el centro instantáneo de rotación.

Solución:

a) Para determinar el estado de velocidad, se tendrá un parámetro por $\vec{\omega}$ y cuatro por las velocidades de A y B: cinco en total. Tomando A como centro de reducción se obtienen dos ecuaciones escalares que las relacionan y por lo tanto tres parámetros libres.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AB}$$

$$\begin{cases} V_{BX} = V_{AX} - \omega(y_B - y_A) \\ V_{BY} = V_{AY} + \omega(x_B - x_A) \end{cases}$$

reemplazando

$$4 = 1 - \omega(4 - 0)$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{3}{4} \quad ; \quad V_{AY} = -8.$$

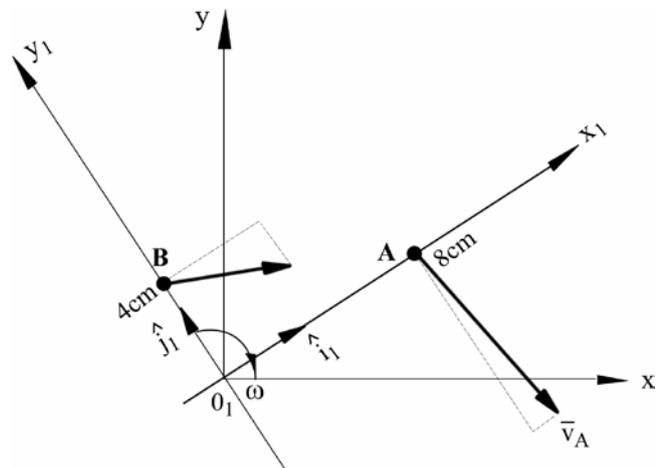
$$-2 = V_{Ay} + \omega(0 - 8)$$

Así el estado de velocidad queda determinado

$$\vec{V}_A = \hat{i}_1 - 8 \hat{j}_1 \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{V}_B = 4 \hat{i}_1 - 2 \hat{j}_1 \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{3}{4} \hat{k}_1 \text{ (rad/s)}$$



b) Para el estado de aceleración:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AB})$$

$$\begin{cases} a_{BX} = a_{AX} - \gamma(y_B - y_A) - \omega^2(x_B - x_A) \\ a_{BY} = a_{AY} + \gamma(x_B - x_A) - \omega^2(y_B - y_A) \end{cases}$$

reemplazando

$$\begin{cases} a_{BX} = 3 - \gamma \cdot 4 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-8) \\ 0 = 1 + \gamma(-8) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4 \Rightarrow \gamma = -\frac{5}{32} \text{ (rad/s}^2\text{)} \end{cases}$$

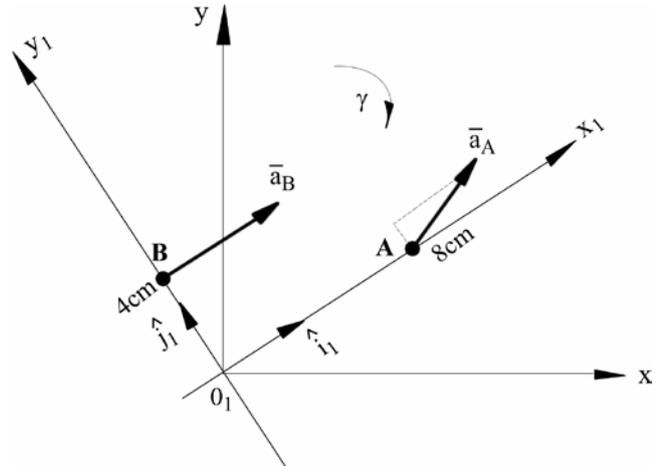
$$a_{BX} = 3 + \frac{5}{8} + \frac{9}{2} = \frac{65}{8} \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

y por lo tanto

$$\vec{a}_A = 3\hat{i}_1 + \hat{j}_1 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

$$\vec{a}_B = \frac{65}{8}\hat{i}_1 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{-5}{32}\hat{k}_1 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$



c) $\vec{V}_{01} = \vec{V}_A + \omega \wedge \vec{r}_{A01}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{A01} = -\frac{3}{4}\hat{k}_1 \wedge (-8\hat{i}_1) = 6\hat{j}_1$$

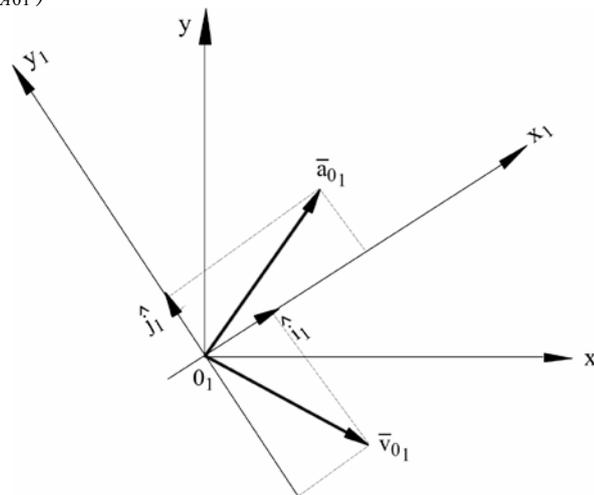
$$\vec{V}_{01} = \hat{i}_1 - 8\hat{j}_1 + 6\hat{j}_1 = \hat{i}_1 - 2\hat{j}_1 \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{a}_{01} = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{A01} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{A01})$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{A01} = -\frac{5}{32}\hat{k}_1 \wedge (-8\hat{i}_1) = \frac{5}{4}\hat{j}_1$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{A01}) = -\frac{3}{4}\hat{k}_1 \wedge 6\hat{j}_1 = \frac{9}{2}\hat{i}_1$$

$$\vec{a}_{01} = \frac{13}{2}\hat{i}_1 + \frac{9}{4}\hat{j}_1 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$



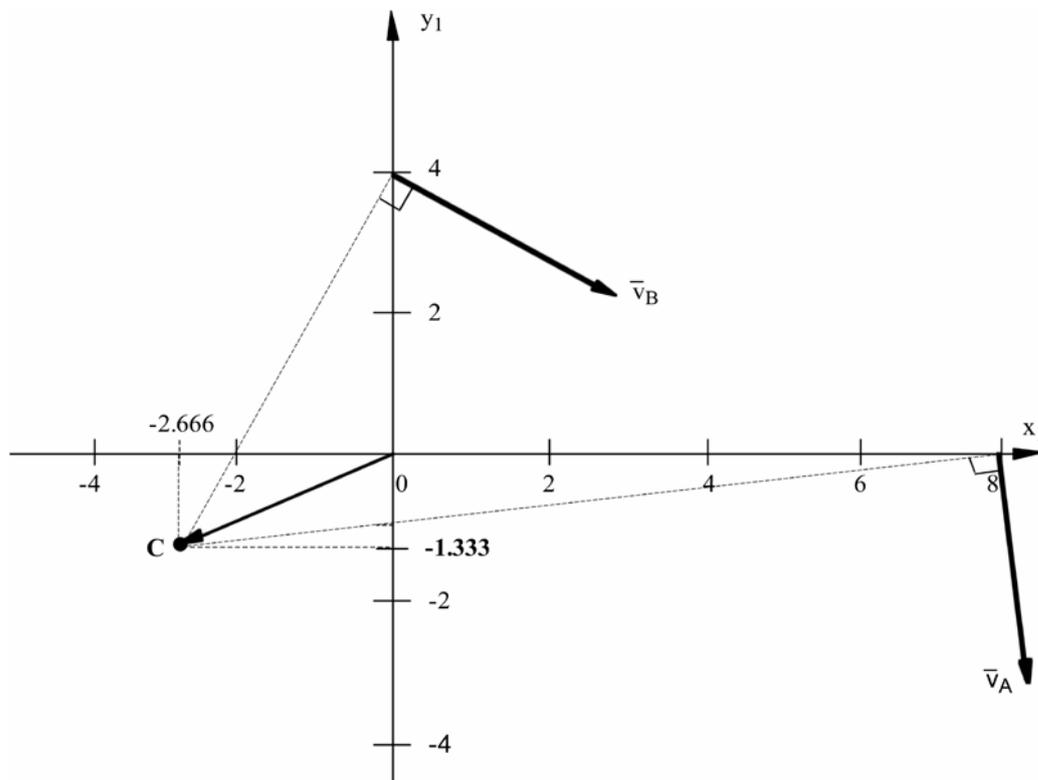
Conociendo $\vec{V}_{01}, \vec{a}_{01}, \vec{\omega}, \vec{\gamma}$ pueden ser determinados los vectores \vec{V}_i, \vec{a}_i para cualquier punto del plano, aplicando las leyes de distribución de \vec{V}, \vec{a} .

$$\begin{cases} \vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \\ \vec{a}_i = \vec{a}_{01} + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \end{cases}$$

d) Centro instantáneo de rotación C.

Siendo que $\vec{V}_c = \vec{0} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01c}$, resulta

$$\begin{cases} 0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)y_c \\ 0 = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right)x_c \end{cases} \Rightarrow (x_c, y_c) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ (cm)}$$



2.7.1. Trayectorias Polares

En los movimientos planos es importante determinar la posición del centro instantáneo de rotación o polo a medida que tiene lugar el movimiento.

Siendo el movimiento plano más general el de rotación instantánea existirá un nuevo centro instantáneo C para cada nueva posición del cuerpo. En otras palabras, el polo va ocupando durante el movimiento distintas posiciones tanto en el plano móvil $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1)$ como en el absoluto $(0, \hat{i}, \hat{j})$, describiendo sendas trayectorias denominadas polares.

El lugar geométrico de estos centros en el plano absoluto recibe el nombre de trayectoria polar fija o base, y en el plano móvil trayectoria polar móvil o ruleta.

Así el movimiento plano de una chapa rígida puede describirse como la rodadura sin deslizar de la ruleta sobre la base, siendo el punto de contacto en cada instante el centro instantáneo de rotación.

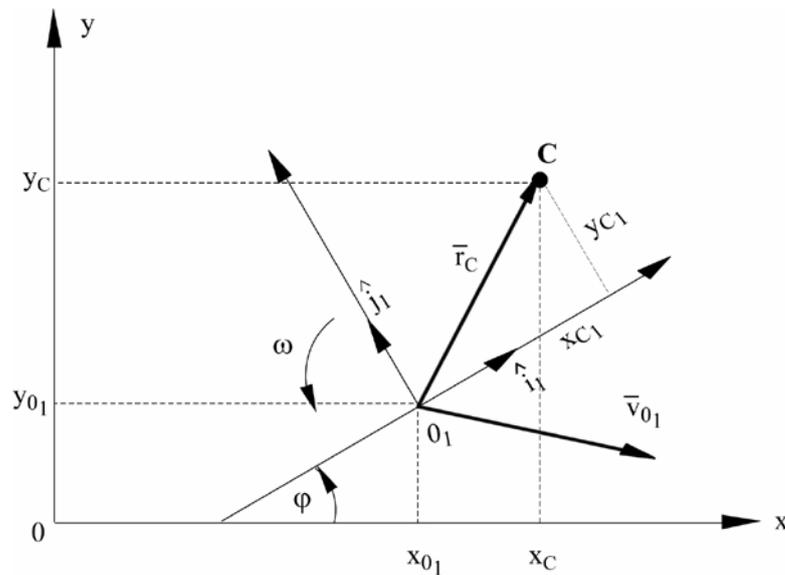
Para determinar las ecuaciones de estas trayectorias, basta con considerar que $\vec{V}_c = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_c = \vec{0}$ de donde, multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ se tiene

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01}}{\omega^2} \tag{2.33}$$

Ahora, reemplazando en esta última expresión los vectores referidos a las ternas absoluta y móvil respectivamente, se obtienen las ecuaciones de la base y la ruleta.

Expresiones analíticas de las curvas “base” y “ruleta”

Considérese la terna $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1)$ unida solidariamente a una chapa rígida que se mueve con respecto al plano absoluto $(0, \hat{i}, \hat{j})$. Se aplica la ecuación (2.33) para determinar las posiciones del polo C en los planos absoluto y móvil respectivamente.



a) Curva base:

Los vectores referidos a la terna absoluta son los siguientes:

$$\left| \begin{aligned} \vec{r}_c &= (x_c - x_{01}) \hat{i} + (y_c - y_{01}) \hat{j} \\ \vec{\omega} &= \omega \hat{k} \\ \vec{V}_{01} &= \frac{dx_{01}}{dt} \hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt} \hat{j} \end{aligned} \right.$$

Reemplazando en la expresión (2.33)

$$(x_c - x_{01})\hat{i} + (y_c - y_{01})\hat{j} = \frac{\omega \hat{k} \wedge \left(\frac{dx_{01}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\hat{j} \right)}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} \frac{dx_{01}}{dt}\hat{j} - \frac{1}{\omega} \frac{dy_{01}}{dt}\hat{i}$$

$$\therefore \begin{cases} x_c = x_{01} - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dy_{01}}{dt} \\ y_c = y_{01} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx_{01}}{dt} \end{cases} \quad (2.34)$$

que son las coordenadas del polo con respecto a la terna absoluta o curva base. Ahora teniendo en cuenta que:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

y reemplazando en la (2.34):

$$\begin{cases} x_c = x_{01} - \frac{dy_{01}}{d\varphi} \\ y_c = y_{01} + \frac{dx_{01}}{d\varphi} \end{cases} \quad (2.35)$$

Estas últimas también son las ecuaciones paramétricas de la curva base, y permiten observar que dicha curva es independiente del tiempo. En otras palabras, no importa cuál sea la velocidad de la chapa al describir su movimiento, la trayectoria de C será la misma.

b) Curva ruleta:

Referidos a la terna móvil, los vectores de la (2.33) son:

$$\vec{r}_c = x_{c1}\hat{i}_1 + y_{c1}\hat{j}_1$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}_1$$

para obtener \vec{V}_{01} expresado en el plano móvil, se proyectan sus componentes:

$$\vec{V}_{01} = \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\hat{j} \right) \cdot \hat{i}_1 \right] \hat{i}_1 + \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\hat{j} \right) \cdot \hat{j}_1 \right] \hat{j}_1$$

y siendo:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i}_1 &= \cos \varphi \\ \hat{j} \cdot \hat{i}_1 &= \cos(\varphi + 270^\circ) = \text{sen } \varphi \\ \hat{i} \cdot \hat{j}_1 &= \cos(\varphi + 90^\circ) = -\text{sen } \varphi \\ \hat{j} \cdot \hat{j}_1 &= \cos \varphi\end{aligned}$$

resulta:

$$\vec{V}_{01} = \left(\frac{dx_{01}}{dt} \cos \varphi + \frac{dy_{01}}{dt} \text{sen } \varphi \right) \hat{i}_1 + \left(-\frac{dx_{01}}{dt} \text{sen } \varphi + \frac{dy_{01}}{dt} \cos \varphi \right) \hat{j}_1$$

O, vectorialmente

$$\vec{V}' = \mathbf{R} \vec{V}_{01} \quad \text{con} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Siendo R la matriz que representa la transformación lineal rotación en el plano.

Reemplazando en (2.33):

$$\begin{aligned}x_{c1} \hat{i}_1 + y_{c1} \hat{j}_1 &= \frac{\omega \hat{k}_1 \wedge \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt} \cos \varphi + \frac{dy_{01}}{dt} \text{sen } \varphi \right) \hat{i}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{dx_{01}}{dt} \text{sen } \varphi + \frac{dy_{01}}{dt} \cos \varphi \right) \hat{j}_1 \right]}{\omega^2}\end{aligned}$$

resultando:

$$\begin{cases} x_{c1} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{dx_{01}}{dt} \text{sen } \varphi - \frac{dy_{01}}{dt} \cos \varphi \right) \\ y_{c1} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{dx_{01}}{dt} \cos \varphi + \frac{dy_{01}}{dt} \text{sen } \varphi \right) \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas del polo en los ejes móviles en forma paramétrica (curva ruleta). Como antes, puede eliminarse el tiempo obteniéndose:

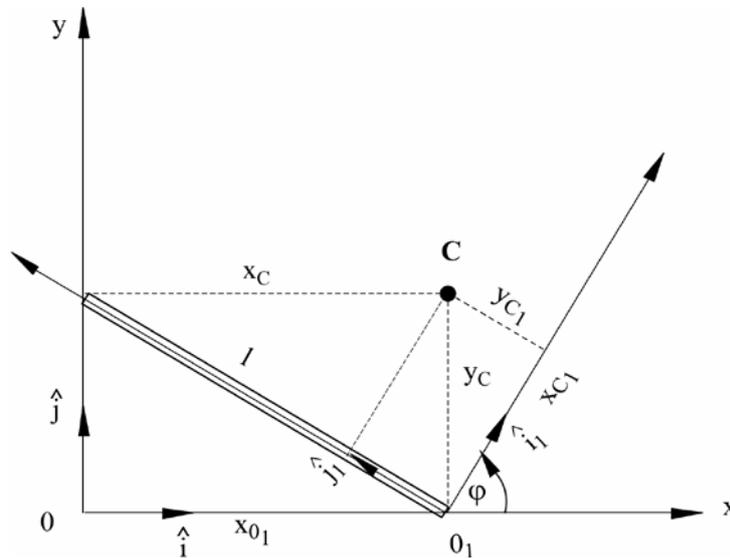
$$\begin{cases} x_{c1} = \frac{dx_{01}}{d\varphi} \text{sen } \varphi - \frac{dy_{01}}{d\varphi} \cos \varphi \\ y_{c1} = \frac{dx_{01}}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{dy_{01}}{d\varphi} \text{sen } \varphi \end{cases} \quad (2.36)$$

La aplicación de las expresiones (2.35) y (2.36) es inmediata conociendo:

$$x_{01} = x_{01}(\varphi) \quad , \quad y_{01} = y_{01}(\varphi)$$

Ejemplo de aplicación: Curvas base y ruleta

Determinar las trayectorias polares de una barra que se mueve en su plano manteniendo sus extremos sobre los ejes de referencia absolutos.



Solución:

Para determinar las coordenadas del polo C en el plano absoluto se aplican las ecuaciones (2.35);

$$\begin{cases} x_{01} = l \cos(180^\circ - 90^\circ - \varphi) = l \cos(90^\circ - \varphi) = l \operatorname{sen} \varphi \\ y_{01} = 0 \end{cases}$$

reemplazando:

$$\begin{cases} x_c = l \operatorname{sen} \varphi \\ y_c = l \cos \varphi \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando : $x_c^2 + y_c^2 = l^2 \rightarrow$ curva base

Aplicando ahora las ecuaciones (2.36) para determinar la ruleta:

$$\begin{cases} x_{c1} = l \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \\ y_{c1} = l \cos^2 \varphi \end{cases}$$

eliminando el parámetro φ :

$$x_{c1} = l \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \quad ; \quad \cos^2 \varphi = \frac{y_{c1}}{l}$$

$$\therefore x_{c1} = \ell \sqrt{\frac{y_{c1}}{\ell}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y_{c1}}{\ell}} = \sqrt{\ell y_{c1} - y_{c1}^2}$$

elevando al cuadrado $x_{c1}^2 + y_{c1}^2 = \ell \cdot y_{c1}$

Ésta es la ecuación de la curva ruleta. Se analizará qué tipo de curva es partiendo de la ecuación de una circunferencia con centro en (a,b):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En este caso es $a = 0$

$$x^2 + y^2 - 2 y b + b^2 = r^2$$

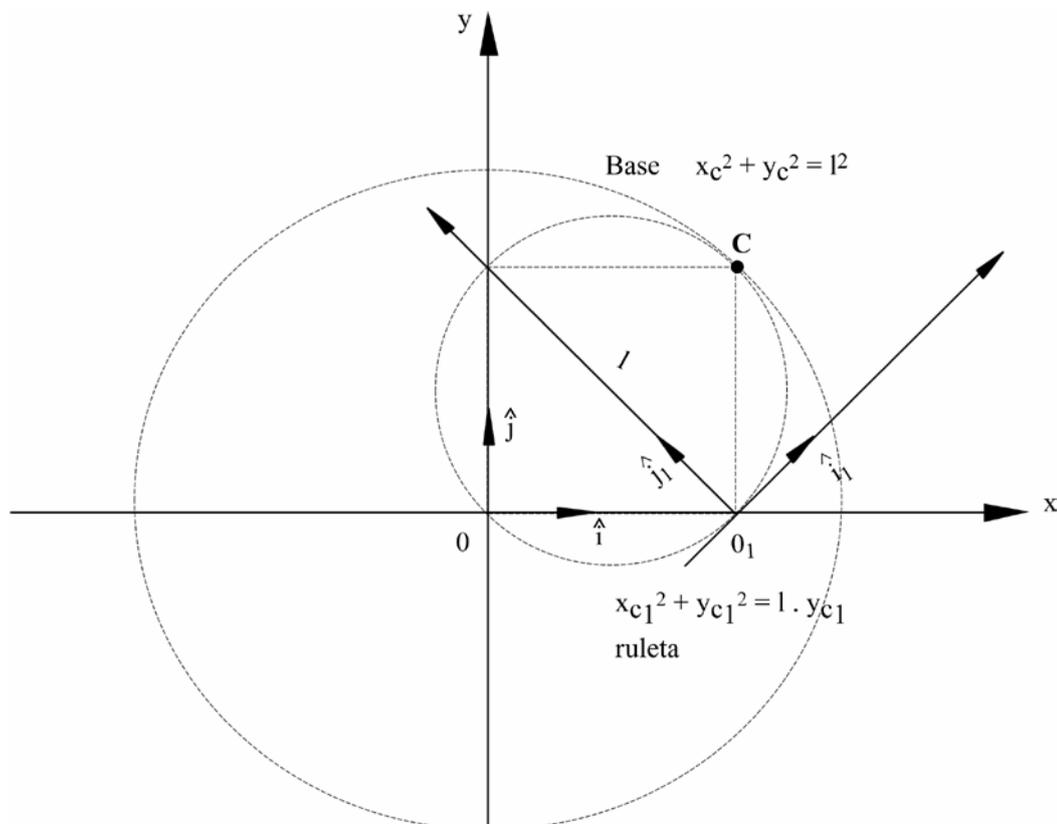
y tomando $b = 1/2 = r$

$$x^2 + y^2 = 2 b y = \ell y$$

Por lo tanto:

BASE : circunferencia de centro 0 y radio ℓ

RULETA : circunferencia desplazada del origen 0_1 sobre el eje \hat{j}_1 de radio $\ell/2$.



Propuesta para el alumno: Dibujar los ejes de referencia absolutos en una hoja papel. Dibujar los ejes de referencia móviles y la barra sobre otra hoja, en lo posible transparente. Superponerlos partiendo de O coincidente con O_1 y comenzar el deslizamiento del móvil sobre el fijo manteniendo los extremos de la barra en contacto con los ejes fijos. Marcar con la punta de un lápiz en varias posiciones la posición de C en los dos sistemas simultáneamente. Separar y observar las trayectorias del polo.

Capítulo 3**CINÉTICA DEL
PUNTO MATERIAL****3. CINETICA DEL PUNTO MATERIAL**

Las ideas actuales acerca del movimiento de los cuerpos se remontan a Galileo y Newton. Antes de ellos, se creía en las ideas de Aristóteles, quien sostenía que el estado natural de un cuerpo era estar en reposo y que éste sólo se movía si era empujado por una fuerza o un impulso. De ello se deducía que un cuerpo pesado debía caer más rápido que uno liviano, porque sufría una atracción mayor hacia la Tierra.

Galileo demostró que las anteriores ideas estaban equivocadas dejando caer esferas de distintos pesos a lo largo de un plano inclinado. Demostró que cada cuerpo aumentaba su velocidad al mismo ritmo, independientemente de su peso. Por supuesto que una esfera de plomo caerá más rápida que una pluma, pero ello se debe únicamente a que la pluma es frenada por la resistencia de aire. En los experimentos de Galileo, cuando un cuerpo caía rodando, siempre actuaba sobre él la misma fuerza (su peso) y el efecto que se producía consistía en acelerarlo en forma constante. Esto demostraba que el efecto real de una fuerza era el de cambiar la velocidad del cuerpo, en vez de simplemente ponerlo en movimiento, como se pensaba antes. Ello también significaba que siempre que sobre un cuerpo no actuara ninguna fuerza, éste se mantendría moviéndose en una línea recta con la misma velocidad.

Los experimentos de Galileo sirvieron de base a Newton para la obtención de sus leyes del movimiento.

En el presente Capítulo se estudiarán las relaciones entre el movimiento de los puntos materiales y las causas que los provocan. Recuérdese que para la Mecánica las partículas o puntos materiales, son entes desprovistos de dimensiones (punto geométrico en el sentido del tamaño), aunque se admite la abstracción de que pueden poseer masa.

3.1. Leyes de Newton

El movimiento general de un cuerpo sujeto a la acción de fuerzas reconoce su tratamiento analítico a partir de 1687 cuando Newton estableció las leyes básicas que lo rigen. Es importante señalar que si bien diversos autores califican a los postulados de Newton como “principios” antes que como “leyes”, este hecho no invalida su aplicabilidad en la mecánica clásica.

Primera ley (principio de inercia)

Una partícula originalmente en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante, continuará en ese estado si no se la somete a la acción de una fuerza desequilibrada.

Segunda ley (principio de masa):

“Una partícula sujeta a la acción de una fuerza desequilibrada \vec{F} recibe una aceleración \vec{a} que tiene la misma dirección y sentido que \vec{F} y cuyo módulo es directamente proporcional a la fuerza”.

Esta ley es fundamental en cinética puesto que relaciona el movimiento acelerado de una partícula con las fuerzas que actúan sobre ella.

Si en un marco de referencia imaginario considerado “fijo” en el espacio se aplica una fuerza desequilibrada \vec{F}_1 a una partícula, puede medirse la aceleración \vec{a}_1 y como son directamente proporcionales, puede determinarse la constante de proporcionalidad efectuando el cociente:

$$m = \frac{F_1}{a_1}$$

Una fuerza \vec{F}_2 aplicada a la misma partícula, engendrará en ella una aceleración \vec{a}_2 de tal manera que, en general:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = m$$

en todos los casos el cociente será el mismo y como \vec{F} y \vec{a} son vectores, ambos tendrán igual dirección y sentido. La magnitud modular **m** recibe el nombre de masa de la partícula y proporciona una medida cuantitativa de la resistencia que opone la misma a que su vector velocidad sea cambiada, propiedad que se denomina inercia.

Si la masa de la partícula es m, esta primera ley queda expresada matemáticamente como:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (3.1)$$

Esta es la ecuación de movimiento y es una de las fórmulas más importantes de la mecánica. El segundo término recibe el nombre de fuerza directriz del movimiento o fuerza de inercia.

Principio del paralelogramo:

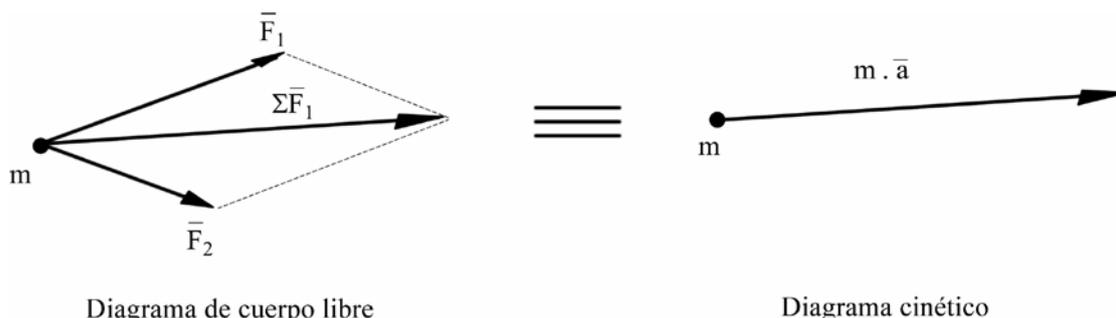
“Cuando sobre la partícula actúa más de una fuerza, la resultante se determina mediante una suma vectorial de todas ellas”.

Para este caso más general, la (3.1) toma la forma:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \quad (3.1')$$

El primer término, comprende todas las fuerzas actuantes sobre la partícula, es decir la suma de las fuerzas activas y las reactivas.

Considérese a modo de ejemplo una partícula de masa m sometida a la acción de dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 :



El diagrama de cuerpo libre representa gráficamente a todas las fuerzas que actúan sobre la partícula $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, mientras que el diagrama cinético toma en cuenta gráficamente el vector $m \cdot \vec{a}$.

Como se observa en los diagramas, la partícula se acelera en la dirección de $\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ de manera que el módulo de \vec{a} resulta:

$$a = \frac{|\sum \vec{F}_i|}{m}$$

Se comprueba que si en (3.1') es $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$, la aceleración también es nula, en cuyo caso la partícula permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

$$\vec{a} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \text{constante vectorial} \quad (\text{MRU}) \\ \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{Reposo}) \end{array} \right.$$

Tercera ley (principio de acción y reacción):

Para cada fuerza que una partícula ejerce sobre otra, ésta última reacciona sobre la primera con una fuerza igual, opuesta y colineal. La acción es siempre igual y opuesta a la reacción.

Poco después de estas tres leyes, Newton postuló la ley de atracción gravitacional que gobierna la atracción mutua entre dos partículas cualesquiera y afirma: “dos partículas conjuntamente aisladas tendrán en cada instante actuando sobre sí fuerzas colineales de igual intensidad y sentidos opuestos”

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \begin{array}{c} \vec{F} \qquad \qquad \qquad \vec{-F} \\ \bullet \qquad \qquad \qquad \bullet \\ m_1 \qquad \qquad \qquad m_2 \\ \qquad \qquad \qquad r \end{array} \quad (3.2)$$

en la que G es la constante de Gravitación Universal y se determina experimentalmente ($G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kg} \cdot \text{seg}^2$).

La formulación de Mach:

Debido a las críticas que sufrieron los postulados de Newton, Mach reformuló los fundamentos de la Mecánica estudiando las interacciones entre dos y luego tres o más puntos aislados, arribando a las mismas conclusiones presentadas por Newton en su teoría, aunque con mayor rigurosidad físico-matemática.

3. 2. Sistemas de referencia en dinámica

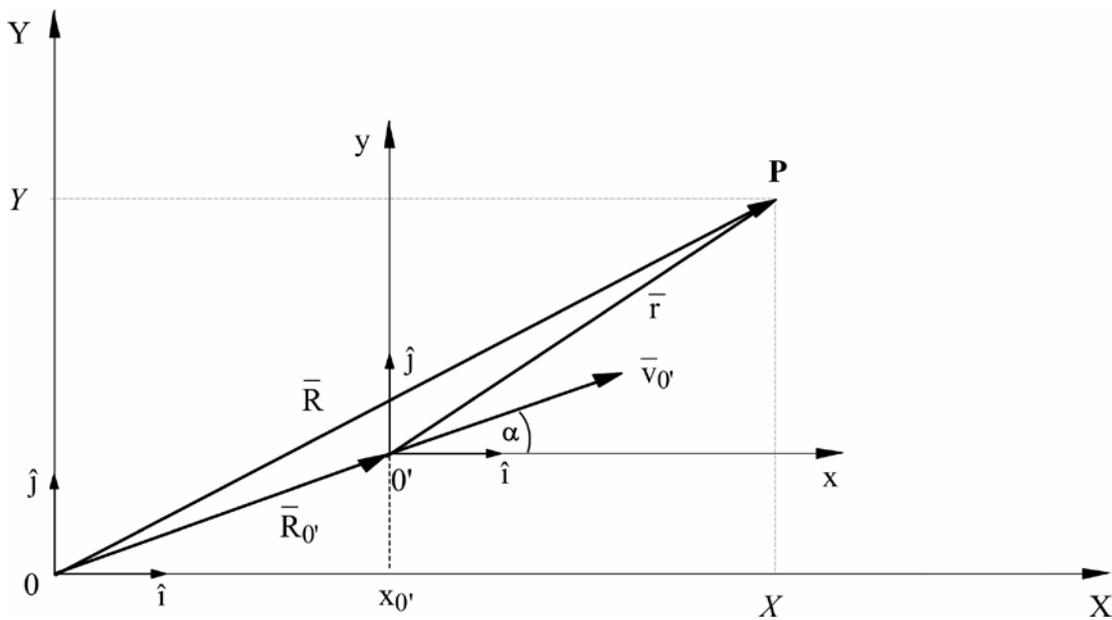
La validez de las leyes enunciadas sólo es posible si se aplican a puntos materiales referidos a sistemas de referencia en reposo o bien que se mueven con movimiento rectilíneo uniforme (denominados inerciales o galileanos).

Por lo tanto, en ningún caso debe ocurrir que el sistema de referencia se encuentre en rotación.

Esta definición asegura que la aceleración de la partícula medida por observadores en dos marcos de referencia inerciales distintos será la misma.

Terna con Movimiento Rectilíneo Uniforme:

Sean el sistema (O', \hat{i}, \hat{j}) móvil sin rotación y con $\vec{V}_{O'}$ = vector constante, el sistema fijo $(0, \hat{I}, \hat{J})$ y supóngase que en $t = 0$ es $0 \equiv O'$.



La posición de la partícula P con respecto al sistema con movimiento rectilíneo uniforme está dada por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, y con respecto al sistema fijo por $\vec{R} = X\hat{I} + Y\hat{J}$. Por otra parte es:

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_{O'} \tag{3.3}$$

con $\vec{R}_{O'} = X_{O'} \cdot \hat{I} + Y_{O'} \cdot \hat{J} = V_{O'} \cdot t (\cos \alpha \cdot \hat{I} + \text{sen } \alpha \cdot \hat{J})$
 y $t = t'$

La ecuación (3.3) representa la Transformación de Galileo. Si $\alpha = 0$, toma la forma:

$$\begin{cases} x = X - Vo' t \\ y = Y \\ t = t' \end{cases} \quad (3.3')$$

Derivando a (3.3) dos veces con respecto al tiempo (y teniendo en cuenta que Vo' y α son constantes), resulta:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$$

o, escalarmente

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{dt^2}$$

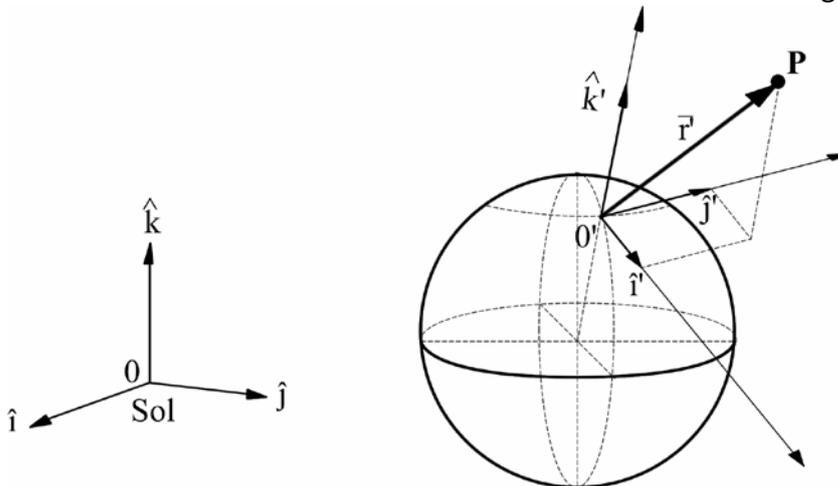
lo que indica que la aceleración de P es la misma con respecto a ambos sistemas. Luego, la ecuación del movimiento de Newton en los dos sistemas es:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

El hecho de que las leyes de Newton sean invariantes con respecto a transformaciones galileanas se denomina *principio de la relatividad newtoniana o invariancia galileana*. Por lo tanto, la *forma* de la ley del movimiento es invariante a una transformación de este tipo.

Terna en Rotación:

Se tomará para el análisis el caso común que se presenta con el uso de la Tierra como marco de referencia para el estudio de problemas de ingeniería. Los sistemas de coordenadas solidarios a la Tierra se denominan "ternas del lugar".



El eje \hat{k}' está dirigido desde el centro de la tierra hacia afuera, el eje \hat{j}' es tangente a un paralelo y el eje \hat{i}' tangente a un meridiano. Se considera inercial a un sistema solidario con el Sol, suponiendo que el centro de éste no posee aceleración. Posicionando a P con el vector \vec{r}' respecto de O' , se estudiará el movimiento relativo de P respecto del sistema móvil con la Tierra ($O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$). Pero la aceleración absoluta de P respecto del Sol estará dada por $\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{comp}$

Por lo tanto, la diferencia entre la aceleración absoluta (verdadera aceleración de P) y la relativa (con respecto a la Tierra) permite conocer el orden del error cometido por el hecho de evaluar la aceleración de la partícula con respecto a la tierra en lugar de una estrella considerada fija. Para ello basta con calcular:

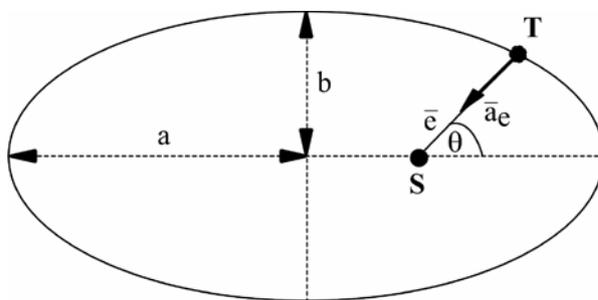
$$\vec{a}_{arr} + \vec{a}_{comp.}, \quad \text{puesto que}$$

$$\vec{a}_{arr} + \vec{a}_{comp} = \vec{a} - \vec{a}_{rel}$$

a) El movimiento de arrastre es el que P tendría si estuviese solidariamente unido a la Tierra. Es decir que a_{arr} se descompone en:

a.1) Aceleración debida al movimiento de la Tierra alrededor del Sol (anual):

Según Binet:
$$a_e = -\frac{\lambda^2}{e^2} \left[\frac{d^2 1/e}{d\theta^2} + \frac{1}{e} \right] \quad (3.4)$$



$$\lambda = 2 \dot{s}$$

ε = excentricidad de la órbita.

p = parámetro de la cónica = b^2/a .

y como es:

$$\frac{1}{e} = \frac{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}{p} \quad (3.5)$$

entonces:

$$\frac{d^2 1/e}{d\theta^2} = -\frac{\varepsilon}{p} \cdot \cos\theta \quad (3.6)$$

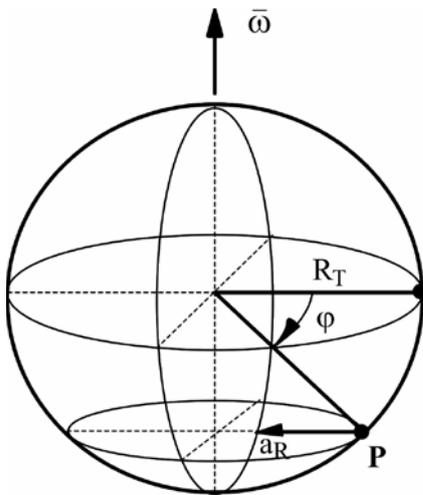
Reemplazando (3.5) y (3.6) en (3.4) resulta
$$a_e = -\frac{\lambda^2}{p} \cdot \frac{1}{e^2}$$

y como
$$\lambda = 2\dot{s} = 2 \cdot \frac{\text{superficie de la elipse}}{\text{tiempo empleado en recorrerla}} = 2 \cdot \frac{\pi a \cdot b}{T}$$

resulta
$$a_e = -\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{e^4 \cdot T^2} \cong 1 \frac{cm}{seg^2} \cong 0.001g$$

a.2) Aceleración debida al movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje (diario).

Supóngase que P se mueve cerca de la superficie terrestre: $r \cong R_T$



$$a_R = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$\varphi = \text{latitud}$

$$\omega = \frac{2\pi}{86164 \text{ seg (tiempo de un día sideral)}}$$

$$R_T = r = 6378 \text{ Km}$$

tomando $\varphi = 45^\circ$, se obtiene

$$a_R < 2,5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} = 0.0025 \text{ g}$$

Por lo que la aceleración de arrastre oscila en el orden de los 3,5 cm/s² (0,0035 g).

b) La aceleración complementaria es:

$$\vec{a}_{comp} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{rel}$$

Dada la pequeñez de $\vec{\omega}$ y tomando $V_{rel} = 60 \text{ m/seg}$, por ejemplo, resulta:

$$a_{comp} < 0,5 \text{ cm / seg}^2 \quad (< 0,0005 \text{ g}).$$

Por lo tanto, $\vec{a} - \vec{a}_{rel}$ sólo alcanza milésimos del valor de la aceleración gravitatoria terrestre \vec{g} ($< 0,005 \text{ g}$)

Este hecho permite concluir que las aceleraciones producidas por el movimiento terrestre pueden despreciarse en la mayoría de los cálculos de ingeniería, por lo que los problemas dinámicos relacionados con movimientos sobre o cerca de la superficie terrestre pueden resolverse usando como marco de referencia a la Tierra y un sistema de coordenadas fijo a él, que se supone inercial.

Cuando se estudian los movimientos de cohetes y satélites ($r \gg R_T$) es necesario considerar el sistema inercial de referencia como fijo a las estrellas para obtener mayor precisión en los cálculos.

La ecuación de movimiento y el sistema coordinado

Retómese la ecuación (3.1'). En la resolución de problemas, la misma suele expresarse en forma de componentes que dependen del sistema de coordenadas empleado.

Cuando las fuerzas o el movimiento se describen mediante *coordenadas cartesianas* x, y, z , la (3.1') tendrá las componentes:

$$\sum F_x = m \cdot a_x \quad \sum F_y = m \cdot a_y \quad \sum F_z = m \cdot a_z \quad (3.7)$$

Con: $|\sum \vec{F}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$

y: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

En el caso de un movimiento curvilíneo en el espacio, pueden emplearse las *coordenadas cilíndricas*; en tal caso se tendrá:

$$\sum F_e = m \cdot a_e \quad , \quad \sum F_\theta = m \cdot a_\theta \quad , \quad \sum F_z = m \cdot a_z \quad (3.7')$$

donde $a_e = \ddot{e} - e \cdot \dot{\theta}^2$ es la aceleración radial y
 $a_\theta = e \cdot \ddot{\theta} + 2 \dot{e} \dot{\theta}$ es la aceleración transversal

En el caso de un movimiento plano donde se utilice el *triedro intrínseco* de componentes normal y tangencial, será:

$$\sum F_n = m \cdot a_n, \quad \sum F_t = m \cdot a_t$$

donde: $a_n = V \cdot \dot{\theta} = \rho \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{\rho}$ y $a_t = \dot{V} = \ddot{l}$

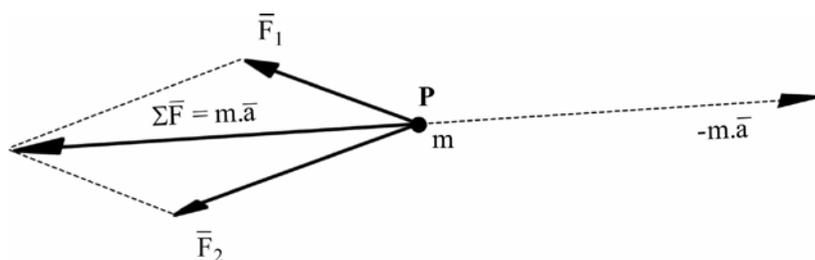
3. 3. Principio de D'Alembert (o del equilibrio dinámico)

Como se vio, en la ecuación de movimiento $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, el término $m \cdot \vec{a}$ recibe el nombre de fuerza directriz del movimiento o fuerza de inercia. Sin embargo, esta ecuación puede reescribirse en la forma:

$$\sum \vec{F} - m \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad (3.8)$$

Al término $(-m \cdot \vec{a})$ suele denominárselo reacción de inercia (igual y de sentido puesto a la fuerza directriz).

Esta nueva forma (que no debe interpretarse como un simple pasaje de términos) establece un equilibrio dinámico entre fuerzas actuantes y la resistencia al cambio de velocidad de la partícula. Gráficamente:



El concepto emergente que es importante destacar, es que el vector reacción de inercia realmente no es lo mismo que una fuerza. En efecto, la reacción de inercia de un cuerpo se manifiesta en sí misma como una fuerza, siempre que una fuerza

desequilibrada actúa sobre el cuerpo, produciéndose por consiguiente una aceleración.

Considérese como ejemplo aclarativo el conductor de un auto que está acelerando. El movimiento hacia adelante del auto crea una fuerza horizontal \vec{F} , que el asiento ejecuta sobre la espalda. Según la ecuación de movimiento es esta fuerza desequilibrada la que le proporciona una aceleración hacia adelante ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Nótese que no existe realmente ninguna fuerza que empuje su espalda hacia el asiento ($- m \vec{a}$), aunque sea ésta la sensación que él recibe.

Este principio es de particular interés en el caso del punto material vinculado, puesto que permite simplificar la solución de los problemas.

En efecto, cuando el punto es libre, el primer miembro de la ecuación de movimiento representa la suma de todas las fuerzas activas, pero cuando el punto está vinculado, en dicho primer miembro están incluidas las reacciones de vínculo, que también son incógnitas del problema y que lógicamente complican la solución de las ecuaciones diferenciales aún cuando el número de incógnitas es el mismo, por cuanto por cada grado de libertad que quite un vínculo, quedará un parámetro menos de configuración y de velocidad. Supóngase un punto material vinculado sometido a la acción de determinadas fuerzas activas conocidas; en este caso, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$\sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \cdot \vec{r}}{dt^2}$$

El primer miembro representa la suma de fuerzas activas y reactivas y el segundo miembro la fuerza de inercia. Pasando todo al primer miembro:

$$\sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_R - m \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

y llamando reacción de inercia o fuerza ficticia a: $- m \cdot \vec{a} = \vec{F}_I$, queda:

$$\sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_R + \vec{F}_I = \vec{0}$$

Esta expresión establece que en cualquier instante (posición) de un punto material vinculado, las fuerzas activas, reactivas y la reacción de inercia se encuentran en un estado de "equilibrio dinámico". La misma permite transformar en cada posición un problema de cinética en uno de estática con solo agregar al conjunto de fuerzas activas y reactivas la reacción de inercia.

La suma $\sum \vec{F}_A + \vec{F}_I$ suele denominarse fuerza perdida \vec{F}_p de forma que la expresión anterior se transforma en:

$$\sum \vec{F}_r + \vec{F}_p = \vec{0} \tag{3.9}$$

que es la expresión del principio de D'Alembert para el punto material vinculado y establece que "en todo punto material vinculado en movimiento habrá en cada instante equilibrio dinámico entre las fuerzas reactivas y la perdida". Los casos límites del principio de D'Alembert son:

a) Punto material libre:

$$\sum \vec{F}_r = \vec{0} \quad \therefore \quad \vec{F}_p = \vec{0}$$

en un punto material libre no hay fuerza perdida, toda la fuerza activa produce movimiento:

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_A + \vec{F}_I = \vec{0}$$

\therefore

$$\sum \vec{F}_A = -\vec{F}_I = m \cdot \vec{a}$$

es decir que las \vec{F}_A por sí solas constituyen la fuerza directriz del movimiento.

b) Punto material fijo:

$$\vec{F}_I = \vec{0}$$

\therefore

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_A \quad (\text{puesto que } \vec{F}_p = \sum \vec{F}_A + \vec{F}_I)$$

y teniendo en cuenta (3.9)

$$\sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_R = \vec{0}$$

que es la ecuación general de la estática y que establece: "Toda la fuerza activa se pierde en los vínculos".

c) Como conclusión de los casos límites, puede observarse que en todos los casos intermedios parte de las fuerzas activas dan lugar al movimiento mientras que el resto se pierde en los vínculos.

3. 4. Fuerzas naturales

La Mecánica establece como hipótesis que las fuerzas actuantes sobre un punto material dependen en el caso más general de la posición de la partícula, su velocidad y el tiempo. Así:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t) = \vec{F}\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

Se considerarán a continuación algunos casos típicos:

a) Fuerzas dependientes de la posición:

Son las que dependen exclusivamente de la posición del punto material:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

Estas fuerzas, por su naturaleza, dan lugar a los campos de fuerza (que son el espacio donde está definida la función \vec{F}) donde para cada tres valores x, y, z corresponde un único vector fuerza.

En estos campos vectoriales, más que la fuerza definida en cada punto del campo, interesa conocer la intensidad del mismo en cada punto, que sería la fuerza que corresponde a un punto material de masa unitaria colocado en el campo, es decir, la fuerza por unidad de masa.

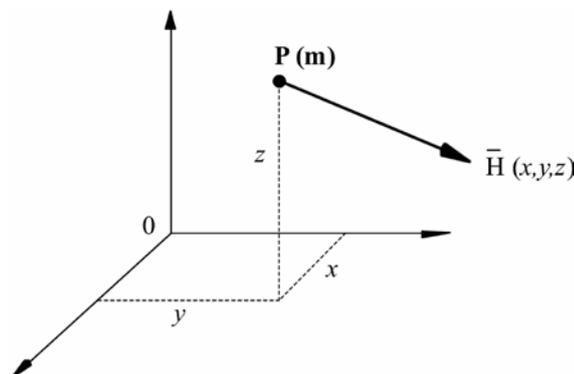
En los campos de fuerza que se presentan en la naturaleza se verifica que si \vec{H} es la intensidad y m la masa, la fuerza que actúa en cada punto es

$$\vec{F} = m \cdot \vec{H}$$

Un campo de fuerzas, entonces, queda definido por su intensidad, dado que la fuerza depende de la masa que se coloque en el campo. Un ejemplo de tales campos es el gravitatorio, en el cual la intensidad es el vector aceleración de la gravedad \vec{g} , ya que el peso depende de la masa que se coloque en cada punto:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Un campo se dice que es uniforme cuando su vector intensidad \vec{H} es constante para toda la región del espacio en la que está definido. Cuando se trabaja en una porción reducida del espacio, el campo gravitacional se toma como uniforme.



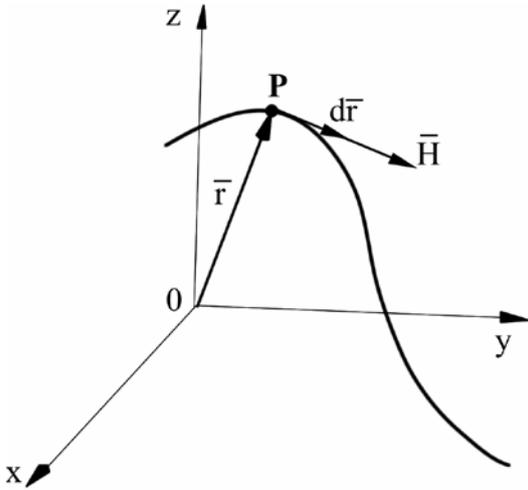
La intensidad de un campo puede expresarse en función de sus componentes en una terna de referencia.

$$\vec{H} = H_x(x, y, z) \hat{i} + H_y(x, y, z) \hat{j} + H_z(x, y, z) \hat{k}$$

Otro concepto que es interesante definir en estos campos es el de líneas de fuerza dibujando para ello una línea que en cada punto del campo sea tangente al vector intensidad \vec{H} . Es decir, que la tangente a la línea en un punto tiene la dirección de la intensidad de campo. A tal línea, cuyo sentido queda determinado por el de \vec{H} , se la denomina línea de fuerza.

Por cada punto del campo pasa una sola línea de fuerza, pues si pasaran dos o más habría en ese punto dos o más fuerzas, lo que es contrario a la hipótesis de existencia del campo. Si el campo es uniforme las líneas de fuerza son rectas paralelas; para un campo gravitatorio (como el terrestre) las líneas de fuerza serán rectas concurrentes.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de fuerza pueden deducirse teniendo en cuenta que el desplazamiento infinitésimo $d\vec{r}$ sobre una línea de fuerza debe ser paralelo a \vec{H} , luego:



$$\vec{H} \wedge d\vec{r} = \vec{0} \quad (3.10)$$

ó

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ H_x & H_y & H_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & (H_y \cdot dz - H_z \cdot dy)\hat{i} + \\ & + (H_z \cdot dx - H_x \cdot dz)\hat{j} + \\ & + (H_x \cdot dy - H_y \cdot dx)\hat{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

y si el vector es nulo, serán nulos los términos entre paréntesis; de donde:

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} \quad (3.10')$$

que son las ecuaciones diferenciales paramétricas de las líneas de fuerza.

b) Fuerzas dependientes de la velocidad:

Generalmente, el medio en que se desplaza una partícula ofrece una oposición a tal desplazamiento mediante un conjunto de fuerzas que suelen denominarse fuerzas resistentes.

Se comprueba experimentalmente que dichas fuerzas tienen la dirección del vector velocidad pero con sentido opuesto y se expresan de la siguiente forma:

$$\vec{F} = \vec{F}(v) = -k\hat{v}$$

donde k es un coeficiente que depende del módulo de la velocidad según la función:

$$k = \mu_0 + \mu_1 v + \mu_2 v^2 + \dots + \mu_n v^n = \sum_{i=0}^n \mu_i v^i$$

y donde:

μ_0 =cte. = Fuerza de rozamiento estático (tiene prioridad cuando el movimiento se inicia) = $C_0 \cdot N$

$\mu_1 v$ = término de resistencia viscosa. Se toma en cuenta para velocidades $v \leq 2$ m/s, depende de la forma de los cuerpos y de la naturaleza de los medios en contacto.

$\mu_2 v^2$ = término de resistencia hidráulica. Se toman a medida que aumenta la velocidad. $2 < v < 200$ m/s.

$\mu_n v^n$ = términos de resistencia balística. Se tienen en cuenta para grandes valores de $v > 200$ m/s.

Todos los μ_i se determinan en forma experimental.

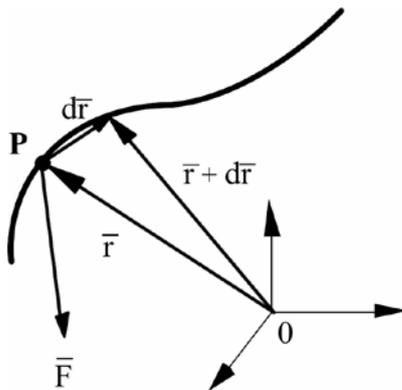
3.5. Conceptos mecánicos derivados

A continuación se presentan algunas relaciones entre magnitudes dinámicas derivadas a partir de la ecuación de movimiento.

3.5.1. Trabajo Elemental:

Dada una fuerza \vec{F} y un desplazamiento elemental $d\vec{r}$ de su punto de aplicación, se define como trabajo elemental de una fuerza \vec{F} para dicho desplazamiento al producto escalar:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3.11}$$



Según sea el parámetro de variación de la fuerza, el trabajo tomará diversas formas:

a) Fuerza \vec{F} constante:

$$W_{1-2} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = F d_{12} \cos \alpha$$

siendo α el ángulo que subtienden \vec{F} y $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$; en el caso que sea nulo, la expresión del trabajo realizado por la fuerza constante colineal con el desplazamiento toma la conocida expresión

$$W_{1-2} = F d_{1-2}$$

b) Fuerza dependiente del tiempo: $\vec{F} = \vec{F}(t)$

$$dW = \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}$$

para integrar, se debe conocer $d\vec{r}$ en función del tiempo:

$$d\vec{r} = \vec{V}(t) dt$$

luego:

$$dW = \vec{F}(t) \cdot \vec{V}(t) dt$$

en una terna cartesiana, será:

$$dW = (F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z) dt = f(t) dt$$

$$\therefore W_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

c) Fuerza dependiente de la posición: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Para una terna cartesiana:

$$\therefore dW = \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

c.1) Fuerzas Conservativas:

Se definen así a las fuerzas que resultan ser el gradiente (∇) de una cierta función escalar. Son un caso particular de fuerzas posicionales y el campo que generan se denomina campo conservativo.

Sea la función escalar $u = u(x, y, z)$ continua y derivable.

Luego será

$$\vec{F} = \nabla u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

En este caso, el campo de fuerzas es un campo de gradientes y por lo tanto $\text{rot } \vec{F} = \text{rot } \nabla u = \vec{0}$. Se dice que el campo conservativo es irrotacional:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (3.12)$$

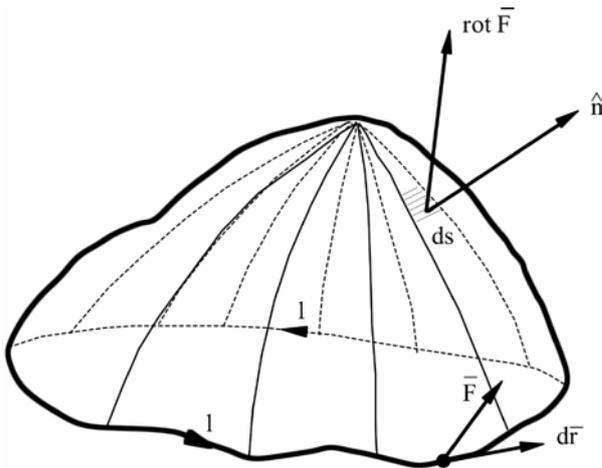
Resulta importante analizar si para todos los campos irrotacionales las fuerzas derivan de una función escalar uniforme (simplemente valuada).

El trabajo aquí será:

$$\begin{aligned} dW &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du \\ W_{1-2} &= \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como se observa, **en un campo conservativo el trabajo dependerá exclusivamente de la posición final e inicial del punto de aplicación de la fuerza**, es decir, de los valores que adopta la función escalar u en dichos puntos, sin importar la trayectoria para ir de uno a otro. En el caso de una línea cerrada, el trabajo de la fuerza es nulo (Si $P_1 \equiv P_2 \Rightarrow W_{12} = 0$).

Recordando el Teorema de Stockes:



$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_s \hat{n} \cdot \text{rot}\vec{F} ds$$

en el cual la integral de línea representa el trabajo de circulación de la fuerza \vec{F} y la integral de superficie es el flujo del rotor del campo a través de la superficie limitada por l .

Si se tiene un campo irrotacional, es decir $\text{rot}\vec{F} = 0$, resultará:

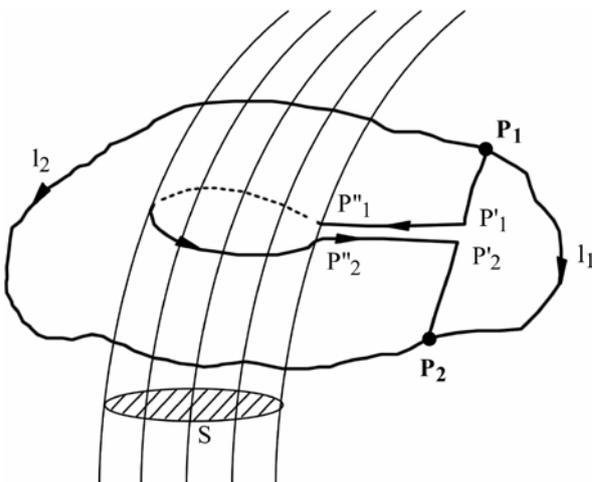
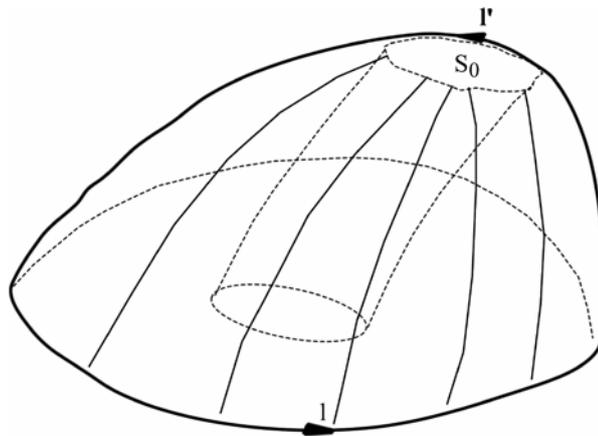
$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{ó} \quad W_{12} = u_2 - u_1 = 0 \quad \text{si} \quad P_1 \equiv P_2$$

El trabajo a lo largo de una línea cerrada es cero, lo que será válido si se cumplen las condiciones del Teorema de Stokes, es decir, que el campo sea simplemente conexo.

c.2) Fuerzas no conservativas:

Si el campo es múltiplemente conexo, como el de la figura, el flujo del rotor del campo a través de la superficie limitada por l no cumple las condiciones de nulidad por cuanto en S_0 no está definido y por lo tanto, el flujo a través de esta superficie S_0 representaría el trabajo de circulación en la línea l' lo que haría que el trabajo a lo largo de una línea cerrada que abarcase la parte no definida fuese distinto de cero.

Para aclarar lo anterior considérese el espacio de múltiple conexión no definido en la zona S y tómnese los puntos del campo P_1 y P_2



El trabajo de las fuerzas \vec{F} del campo a lo largo de un camino que vaya de P_1 a P_2 por la línea l_1 será $W_{12} = u_2 - u_1$ ya que esta región es de simple conexión. Sin embargo, si se va a lo largo de la línea l_2 (espacio de múltiple conexión) el trabajo W sería diferente, ya que se lo podría considerar como la suma de los siguientes trabajos:

$$W_{12} = W_{11'} + W_{11''} + W_{1'2''} + W_{2'2'} + W_{2'2}$$

es: $W_{1'1''} = -W_{2'2'}$

$W_{11'} + W_{2'2} = u_2 - u_1$ (en simple conexión)

$W_{1'2''} = \Gamma =$ módulo del campo (trabajo de circulación en una línea cerrada que limita la zona no definida)

$$W_{12} = u_2 - u_1 + \Gamma$$

Esta última expresión establece que el trabajo entre dos puntos para un camino múltiplemente conexo es igual al trabajo para un camino simplemente conexo más tantas veces el módulo del campo como vueltas desarrolla el camino alrededor de la zona no definida.

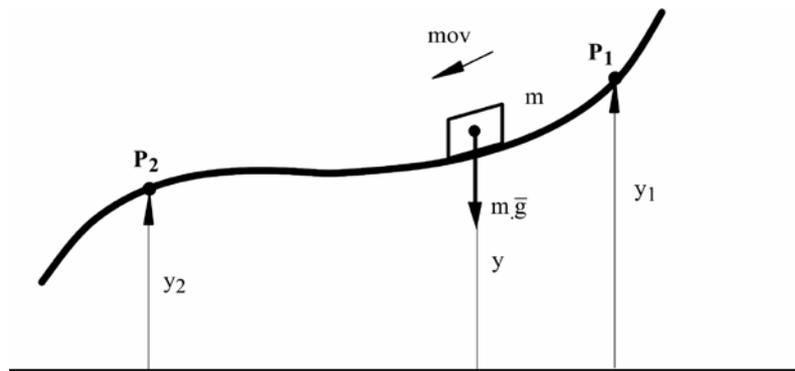
Como conclusión de este análisis, se observa que las ecuaciones (3.12) resultan ser una condición necesaria pero no suficiente para que un campo sea conservativo. Estas aseguran que el campo es irrotacional, pero será conservativo si además la función potencial $u = u(x,y,z)$ es uniforme, es decir, está definida en toda la región. Esto garantizará que el trabajo W a lo largo de una línea cerrada sea nulo.

El peso de una partícula y la fuerza de un resorte elástico son dos ejemplos de fuerzas conservativas que se encuentran a menudo en Mecánica. En el primer caso, será:

$$\vec{F} = -mg \hat{j} \quad ; \quad d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

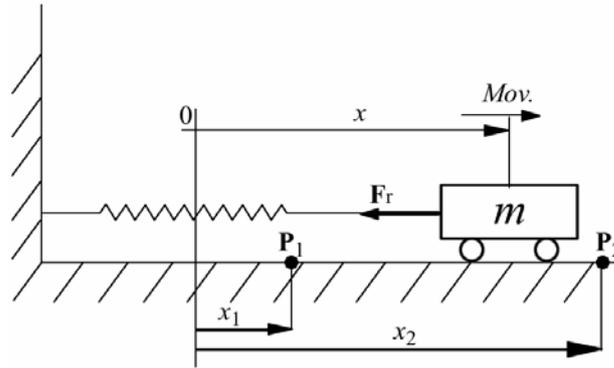
$$W_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -m \cdot g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

Por lo tanto $W_{1-2} = m \cdot g (y_1 - y_2) = mg\Delta y$



El trabajo sólo depende del desplazamiento vertical de la partícula. En el caso analizado, resulta positivo debido a que los sentidos de la fuerza y del desplazamiento coinciden. Si el movimiento de la partícula fuese ascendente, el trabajo resultaría negativo, puesto que los sentidos de la fuerza gravitacional y del desplazamiento serían opuestos. Más adelante se analizará el significado mecánico en ambos casos.

Para el resorte, tomando $x=0$ en la posición del mismo sin deformar (x_1 y x_2 coinciden con su elongación), es:



K = constante elástica del resorte.

$$\vec{F}_r = -K x \hat{x}$$

$$W_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -Kx \cdot dx$$

$$W_{1-2} = -1/2 K (x_2^2 - x_1^2)$$

El trabajo sólo depende de las longitudes inicial x_1 y final x_2 del resorte.

d) Fuerzas de fricción:

El trabajo de una fuerza de fricción ejercida sobre un objeto móvil por un medio fijo depende de la trayectoria (cuanto más larga sea ésta, mayor será el trabajo). Por consiguiente, las fuerzas de fricción no son conservativas. Generalmente el trabajo se disipa en forma de calor.

3.5.2. Potencia:

Este concepto asocia el trabajo W al tiempo empleado en producirlo.

$$Pot_m = W / \Delta t$$

La potencia media en $\Delta t = t_1 - t_0$ expresa el valor medio del trabajo efectuado por \vec{F} en un intervalo de tiempo.

Si $\Delta t \rightarrow 0$,

$$Pot = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \quad \text{Potencia instantánea}$$

La potencia representa la rapidez con que se ejecuta un trabajo.

3.5.3 Energías Cinética y Potencial

Partiendo de la ecuación de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

y multiplicando miembro a miembro por $d\vec{r}$:

$$\sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

Introduciendo $m \vec{V}$ dentro del diferencial:

$$dW = d \left(m \frac{V^2}{2} \right)$$

El término del miembro derecho $\frac{m \cdot V^2}{2}$ recibe el nombre de energía cinética (e).

Luego:

$$dW = de \tag{3.14}$$

Esta ecuación describe el **principio del trabajo y la energía (o Teorema de las fuerzas vivas)**. Integrando entre dos instantes t_1 y t_2 :

$$\int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{V_1}^{V_2} de$$

ó

$$W_{1-2} = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 \tag{3.14'}$$

Aquí W_{1-2} representa el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando la misma se mueve desde el punto P_1 al P_2 . Los términos de la derecha son cantidades positivas por cuanto no dependen de la dirección de la velocidad. En otras palabras: “la variación de la energía cinética de un punto material en un intervalo de tiempo $t_2 - t_1$, iguala al trabajo realizado por las fuerzas en ese mismo intervalo”.

En el caso particularmente importante en el cual la fuerza \vec{F} es posicional y además es conservativa (es gradiente de una función escalar u), utilizando coordenadas cartesianas se tendrá:

$$dW = de = du \quad \text{se ha tenido en cuenta (3.13)}$$

donde $u(x,y,z)$ es una función escalar cualquiera que se denomina **función potencial**. Ahora bien, observando la expresión anterior es lógico inferir que si las fuerzas del campo realizan un trabajo positivo generando una energía cinética, lo tendrán que hacer a expensas de un consumo de trabajo que las mismas están capacitadas para realizar.

Así, puede definirse en el campo conservativo una cierta **función energía potencial (p)** como energía capaz de realizar trabajo:

$$dW = - dp \quad (3.15)$$

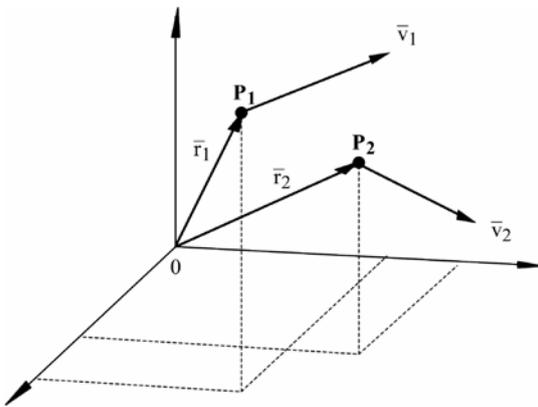
ya que a un trabajo positivo de las fuerzas del campo le corresponderá una cantidad igual pero de signo contrario de p.

La función energía potencial p será igual y de signo contrario a la función escalar $u(x,y,z)$ generadora del campo \vec{F} .

La relación de p con la energía cinética es

$$de = - dp \quad (3.16)$$

Si se pasa de un punto P_1 con la velocidad V_1 , a un punto P_2 con la velocidad V_2 , siendo p_1 y p_2 los respectivos valores de la función energía potencial, de la integración de (3.16) se tiene:



$$\int_{V_1}^{V_2} de = - \int_{p_1}^{p_2} dp$$

$$e_2 - e_1 = -(p_2 - p_1)$$

$$\therefore e_2 + p_2 = e_1 + p_1 = cte. = E \quad (3.17)$$

Este es el **teorema de la conservación de la energía mecánica** y expresa: “La energía mecánica E, suma de las energías cinética y potencial, se conserva durante el movimiento en un campo conservativo”.

El aumento de la energía cinética e entre dos puntos de la trayectoria debido a un trabajo positivo del campo, se obtiene a partir de una disminución de la energía potencial p entre ambos puntos.

3.5.4. Cantidad de Movimiento y Momento de la Cantidad de Movimiento

Al producto de la masa de un punto material por su vector velocidad se lo denomina vector **cantidad de movimiento** $\vec{Q} = m\vec{v}$.

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Luego:
$$\vec{F} dt = m d\vec{V} = d(m\vec{V}) = d\vec{Q}$$

A $\vec{F} dt = d\vec{I}$ se lo denomina *impulso elemental* y a $d(m\vec{V})$ *cantidad de movimiento elemental* $d\vec{Q}$.

Así:
$$d\vec{I} = d\vec{Q} \tag{3.18}$$

Si ocurre que no hay fuerzas que actúen sobre el punto P, o bien la resultante de ellas es nula, de (3.18) se tiene:

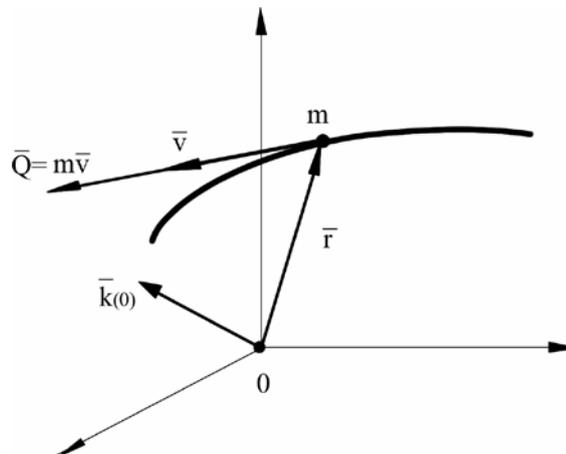
$$d\vec{Q} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} = \text{vector constante}$$

lo que expresa que en este caso se conserva el vector cantidad de movimiento \vec{Q} .

Dado un punto material P de masa m y un centro fijo O, se define **momento de la cantidad de movimiento** del punto P con respecto al punto O al producto vectorial entre el vector posición de P respecto de O y su cantidad de movimiento:

$$\vec{K}_{(o)} = \vec{r} \wedge \vec{Q} = \vec{r} \wedge m\vec{V} \tag{3.19}$$

También se lo denomina **momento cinético ó momento angular**.



Para un conjunto de N puntos materiales, es:
$$\vec{K}_{(o)} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i$$

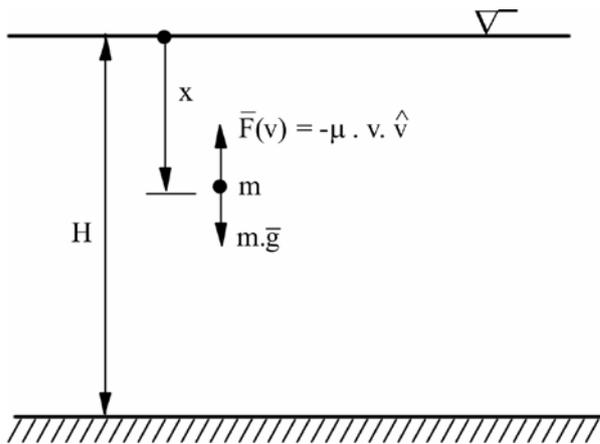
3.6. Algunos casos particulares del movimiento del punto material

3.6.1. Movimiento de caída en un medio resistente:

Considérese un punto material que cae en un medio resistente desde una altura H, con una fuerza aplicada por el medio sobre él que es proporcional a la velocidad (resistencia viscosa).

Algunos aspectos del movimiento son:

a) El tiempo que tarda en recorrer la altura H



$$\text{Sea } \vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\text{luego: } m g - \mu V = m \frac{dV}{dt}$$

$$dt = \frac{m}{m g - \mu V} dV = \frac{dV}{g - \frac{\mu}{m} V}$$

$$\text{Integrando por sustitución: } \left(u = g - \frac{\mu}{m} V \right), \quad dV = -\frac{m}{\mu} du$$

$$t = -\frac{1}{\mu/m} \ln \left(g - \frac{\mu}{m} V \right) + C_1$$

$$\text{recurriendo a las condiciones iniciales: } t = 0 \begin{cases} x = x_o = 0 \\ V = V_o = 0 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{m}{\mu} \ln g + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{m}{\mu} \ln g$$

$$\therefore t = -\frac{m}{\mu} \ln \left(g - \frac{\mu}{m} V \right) + \frac{m}{\mu} \ln g$$

despejando para obtener $V = V(t)$, resulta $e^{kt} = g/(g-kV)$, y:

$$V = \frac{m \cdot g}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m} t} \right) \quad (3.20)$$

Ahora se obtendrá $x = x(t)$. Para ello:

$$V = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore dx = \frac{m g}{\mu} \left(1 - e^{-(\mu/m)t} \right) dt ;$$

integrando

$$x = \frac{m g}{\mu} t + \frac{m g}{\mu} \frac{e^{-(\mu/m)t}}{\mu/m} + C_2$$

pero en $t = 0$ es $x = x_0 = 0$, de donde:

$$C_2 = -\frac{m^2}{\mu^2} g \quad \text{y:}$$

$$x = \frac{m}{\mu} g t + \frac{m^2 g}{\mu^2} e^{-\mu/m t} - \frac{m^2 g}{\mu^2} \tag{3.21}$$

de manera que para conocer el tiempo de caída t_c basta con reemplazar x por H en la (3.21).

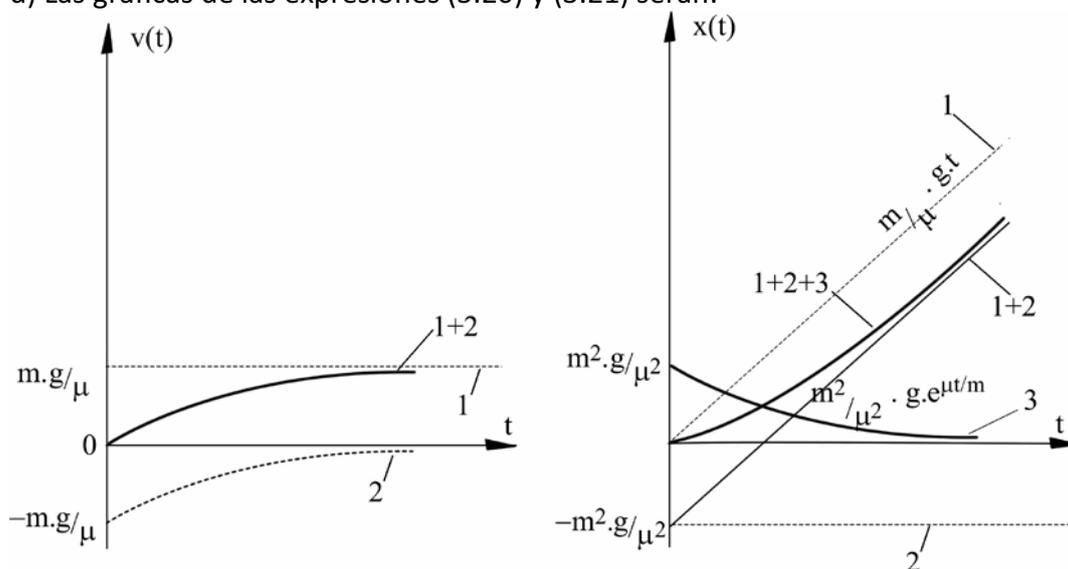
b) La velocidad con que la partícula tocará la superficie es fácilmente encontrada de (3.20):

$$V_c = \frac{m g}{\mu} \left(1 - e^{(-\mu/m)t_c} \right), \text{ en } x = H \tag{3.22}$$

c) La velocidad que adquiriría el cuerpo si cayese indefinidamente es; también de (3.20):

$$V_\infty = \frac{m g}{\mu} \quad \text{en } x \rightarrow \infty \tag{3.23}$$

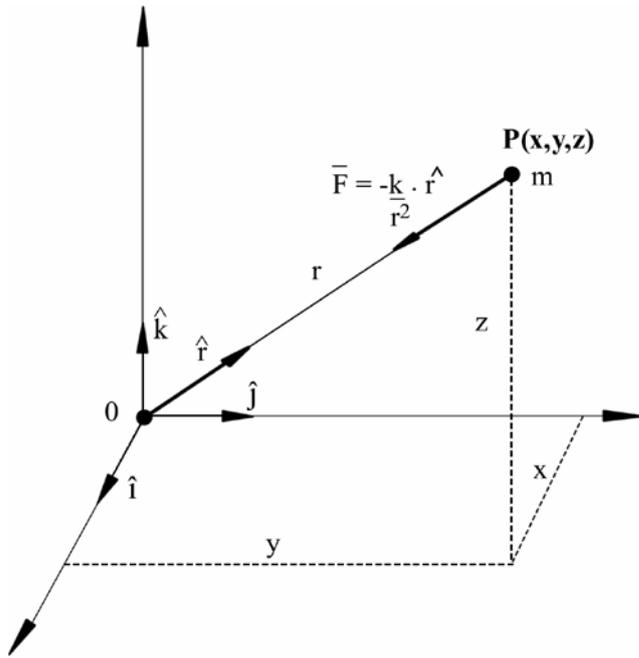
d) Las gráficas de las expresiones (3.20) y (3.21) serán:



3.6.2. Movimiento de un punto material en un campo gravitacional newtoniano.

Considérese el caso en que una masa M ubicada en 0 genera un campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y, z) \text{ en el espacio que la circunda, siendo } \vec{F} = -\frac{m K}{r^2} \hat{r}$$



$K =$ constante de proporcionalidad = GM

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

La expresión de \vec{F} en coordenadas cartesianas, será:

$$\vec{F} = -\frac{mK}{x^2 + y^2 + z^2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \right]$$

es decir:

$$\vec{F} = -\frac{mK}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

donde es:

$$F_x = -\frac{mKx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_y = -\frac{mKy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = -\frac{mKz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

de donde puede verificarse que tal campo es irrotacional, puesto que resulta de (3.12):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Puede determinarse la función energía potencial, aplicando (3.15) con $d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta}$

$$dW = -dp = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mK/r^2 dr$$

$$\therefore dp = \frac{mK}{r^2} dr \Rightarrow p = -\frac{mK}{r} + C$$

y tomando $p \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, resulta: $C = 0$

Así, el potencial en un punto de un campo gravitatorio representa el trabajo que deben efectuar las fuerzas del campo para llevar una partícula desde el infinito hasta dicho punto.

luego:
$$p = -\frac{mK}{r} \quad \text{y será:} \quad u = \frac{mK}{r} \Rightarrow \vec{F} = \nabla u$$

La función potencial es uniforme (simplemente valuada, en todo punto $r \neq 0$) y por consiguiente el campo es conservativo.

También pueden determinarse las líneas de fuerza; de (3.10'):

$$\frac{dx}{Kx} = \frac{dy}{kKy} \\ \frac{dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Integrando:

$$\ln x = \ln y + \ln C \Rightarrow \ln x = \ln(Cy)$$

$$\therefore y = C_1 x$$

haz de rectas por el origen contenidas en el plano coordenado (x,y). De igual forma pueden conocerse las líneas de fuerza en los otros planos coordenados.

De la expresión de p(r) pueden calcularse las superficies equipotenciales:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = m^2 K^2 / p^2$$

Para cada valor p_0 de p existe una superficie equipotencial. Estas son una familia de esferas concéntricas en 0 y por lo tanto son perpendiculares a las líneas de fuerza.

También puede calcularse la velocidad de m en un punto P_2 conociéndola en un punto P_1 , aplicando el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$e_1 + p_1 = e_2 + p_2$$

de donde:
$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mK}{r_1} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mK}{r_2}$$

y por lo tanto:

$$V_2 = 1,41 \sqrt{\frac{V_1^2}{2} - \frac{K}{r_1} + \frac{K}{r_2}}$$

3.6.3. Vibraciones Mecánicas.

El presente apartado constituye una aproximación, mediante el análisis de sistemas de un grado de libertad, a la comprensión de conceptos básicos de un tema tan relevante en la práctica de la ingeniería como las vibraciones. Éstas se encuentran presentes en todas las ramas de la industria, y en especial en obras civiles e instalaciones mecánicas. Su comprensión permite la solución práctica de importantes problemas dinámicos, constituyendo una invaluable herramienta para el diseño de productos y máquinas con alta confiabilidad y bajos niveles de emisión de ruidos, edificios y vehículos con mayor confort y resistencia a cargas dinámicas, entre otras aplicaciones. En Ingeniería Mecánica, las vibraciones constituyen un formidable instrumento de diagnóstico en la operación de las maquinarias y equipos, permitiendo el mantenimiento predictivo mediante su monitoreo continuo y el ataque de las causas raíz de roturas y desperfectos.

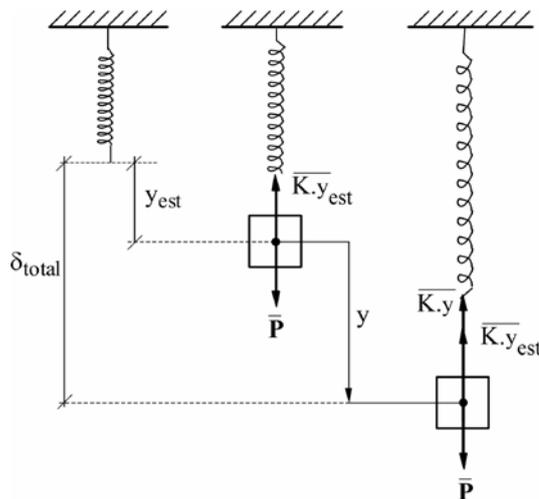
3.6.3.1. Vibraciones libres de un sistema mecánico de un grado de libertad sujeto a una fuerza elástica

El sistema mecánico en estudio se muestra en la figura:

Se supone que el resorte de constante K cumple con la ley de Hooke y que no tiene peso ni amortiguamiento. El sistema de referencia se coloca cuando el cuerpo está en equilibrio estático.

En movimiento, se plantea:

$$\sum F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$



Considerando todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\sum F = P - Ky_{est} - Ky = -Ky \quad \text{ya que} \quad P = Ky_{est}$$

$$\therefore -Ky = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{K}{m} y = 0 \tag{3.24}$$

Que es la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio armónico, cuya solución es:
Ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{K}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\therefore y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

o sus formas equivalentes:

$$y(t) = Y \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi)$$

$$y(t) = Y \cos (\omega_n t - \theta)$$

Las constantes C_1 , C_2 , Y , ϕ y θ se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. En el caso más general, las condiciones iniciales, son:

$$\begin{cases} y(t=0) = y_o \\ \frac{dy}{dt}(t=0) = V_o \end{cases} \tag{3.25}$$

Por ejemplo, de (3.24) es: $y(0) = C_1 = Y_o$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{K}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{m}} t + C_2 \sqrt{\frac{K}{m}} \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

$$\therefore \dot{y}(0) = C_2 \sqrt{\frac{K}{m}} = V_o \Rightarrow C_2 = V_o \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Se tiene así la solución del problema de valores iniciales (3.24) - (3.25):

$$y(t) = y_o \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t + V_o \sqrt{\frac{m}{K}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{m}} t \tag{3.26}$$

De (3.26), se observa que la frecuencia circular viene dada por $\sqrt{K/m}$ y es costumbre denotar $\omega_n = \sqrt{K/m}$ llamándose en este caso a ω_n frecuencia circular natural del sistema. Se denomina natural debido a que es la frecuencia propia con que vibra el sistema al dejarlo libre luego de ser perturbado, observándose que queda definida por la masa y la rigidez del sistema.

Como se vio en el Apartado 1.7.3 al encontrar la solución de la ecuación diferencial del MOA, la solución (3.26) puede expresarse en otra forma más útil para interpretar mejor las conclusiones.

Sea:

$$\begin{cases} y_o = Y \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{V_o}{\omega_n} = Y \cos \varphi \end{cases} \quad (3.27)$$

∴

$$Y = \sqrt{y_o^2 + \frac{V_o^2}{\omega_n^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_o \omega_n}{V_o}$$

Luego: $y(t) = Y \operatorname{sen} \varphi \cos \omega_n t + Y \cos \varphi \operatorname{sen} \omega_n t = Y \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi)$

Es decir, se ha transformado (3.26) en:

$$y(t) = Y \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) \quad (3.28)$$

donde Y y φ se determinan de (3.27).

La expresión (3.28) permite asegurar que un ciclo del movimiento tiene lugar cuando $\omega_n T$ varía 2π rad. Es decir que el período T, verifica:

$$\omega_n \cdot T = 2\pi \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Como la frecuencia es $f_n = 1/T$, resulta que la frecuencia natural del sistema viene dada por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/m} \quad (\text{ciclos/seg o Hertz})$$

En conclusión: el movimiento del sistema es armónico (la relación entre **y** y **t** está dada por funciones trigonométricas), con frecuencia natural:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

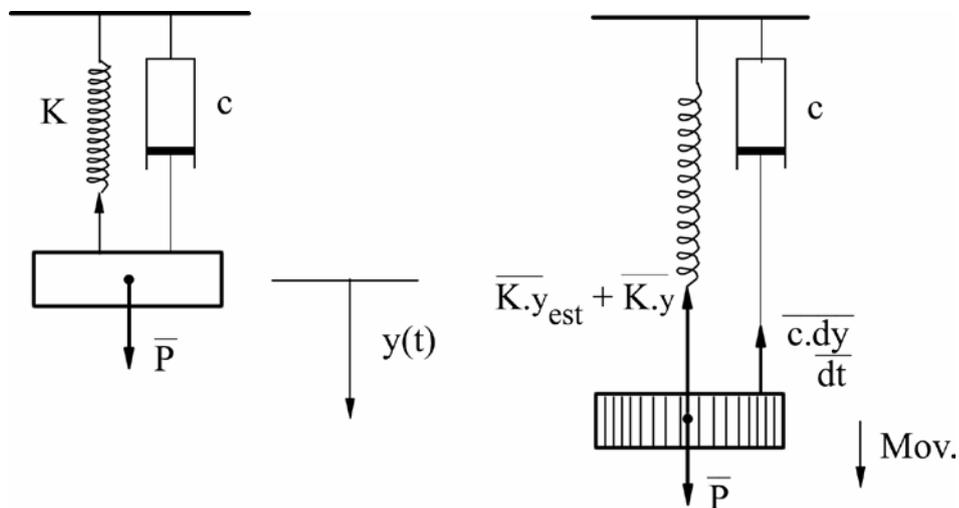
y frecuencia circular natural

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

3.6.3.2. Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso:

El análisis de sistemas con amortiguamientos resulta muy complicado; sin embargo, existen “modelos” de amortiguamiento ideal que se adaptan bien a ciertos casos particulares. Uno de ellos es el que permite el tratamiento matemático más simple y se basa en la hipótesis de que la fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad. Tal como se vio en 3.4 b), a esta fuerza generada por el amortiguador se la suele llamar de resistencia viscosa $F = - c \cdot \frac{dy}{dt}$, donde c recibe el nombre de coeficiente de amortiguamiento viscoso.

El modelo mecánico se muestra en la figura:



Como antes, la coordenada $y(t)$ se mide a partir del equilibrio estático. Se tiene así:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c \frac{dy}{dt} - K y$$

$$\therefore m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + K y = 0 \tag{3.29}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{m} y = 0$$

Para encontrar la solución de (3.29), la ecuación característica resulta:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{K}{m} = 0 \quad \text{donde:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{K}{m}} \right)}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad (3.30)$$

Se analizarán los tres casos posibles de (3.30):

a) Si $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{K}{m}$ lo que ocurre es que c tiene valor elevado y hay un gran amortiguamiento. En este caso λ_1 y λ_2 resultan ser reales y por lo tanto la solución general de (3.29) viene dada por:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.31)$$

Llamando: $\alpha = \frac{c}{2m}$ y $\beta = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$

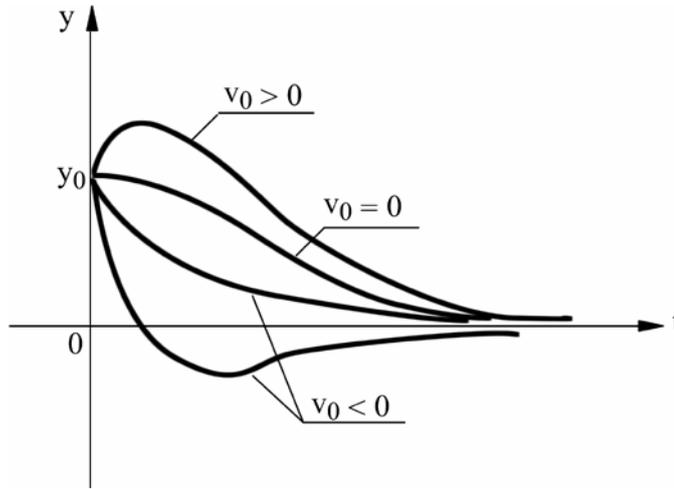
$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta$$

$$y(t) = C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \quad (3.32)$$

como es $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{K}{m} < \alpha^2 \quad \therefore \beta < \alpha$

resulta $\alpha - \beta > 0$ y $\alpha + \beta > 0$

Luego, los exponentes de las funciones exponenciales son negativos, es decir que la solución $y(t)$ viene dada por la suma de dos exponenciales decrecientes. Así, en este caso, el sistema no oscila. Al crecer t la masa tiende a la posición de equilibrio estático sin oscilar. Este movimiento se llama **sobreamortiguado**, y sus gráficas para distintas condiciones iniciales son:



b) Si es: $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{K}{m}$, la solución general de (3.29) resulta:

$$y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{-\frac{c}{2m}t} \tag{3.33}$$

En este caso, c se designa con c_c ; despejando de $\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{K}{m}$, resulta:

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$$

y c_c se denomina coeficiente de **amortiguamiento crítico**.

Este es un estado de transición entre el anterior y el que luego se analizará. En el caso de amortiguamiento crítico, en la expresión (3.33) como la exponencial nunca se anula y $C_1 + C_2 t = 0$ si y solo si $t = \zeta$ y $c_1 = -c_2 \zeta$, el sistema no oscila y puede pasar por la posición de equilibrio estático ($y = 0$) sólo en un caso particular. Este es un caso semejante al anterior, pero de fundamental importancia por cuanto $c = c_c$ define el valor de amortiguamiento del sistema por debajo del cual éste podrá oscilar.

c) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{K}{m}$

Ahora es:
$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

y como $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = \frac{c}{2m}$ y $\beta = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$

La solución general de (3.29) es:

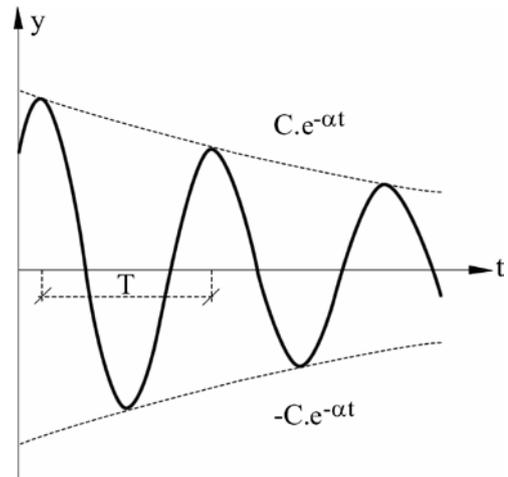
$$y(t) = e^{-\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sen \beta t] = C e^{-\alpha t} \sen(\beta t + \varphi)$$

con:
$$\begin{cases} C_1 = C \sen \varphi \\ C_2 = C \cos \varphi \end{cases}$$

$$\therefore y(t) = C e^{-\alpha t} \sen(\beta t + \varphi) \tag{3.34}$$

La solución (3.34) demuestra que el movimiento del sistema es oscilatorio amortiguado.

Como $\text{sen}(\beta t + \varphi)$ varía entre +1 y -1, resulta que la gráfica de $y(t)$ se encuentra entre $Ce^{-\alpha t}$ y $-Ce^{-\alpha t}$. La figura muestra un caso:



La frecuencia circular natural reducida $\beta = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$, es mayor cuanto más pequeño es c , y por lo tanto las oscilaciones son más rápidas. Donde:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ es ahora el pseudoperíodo.}$$

Nótese que cuando $c \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}}$ y resulta el movimiento de vibraciones libres sin amortiguamiento.

Este movimiento se llama **subamortiguado**. Para este caso, resulta de interés determinar la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema midiendo la razón de decrecimiento de la oscilación.

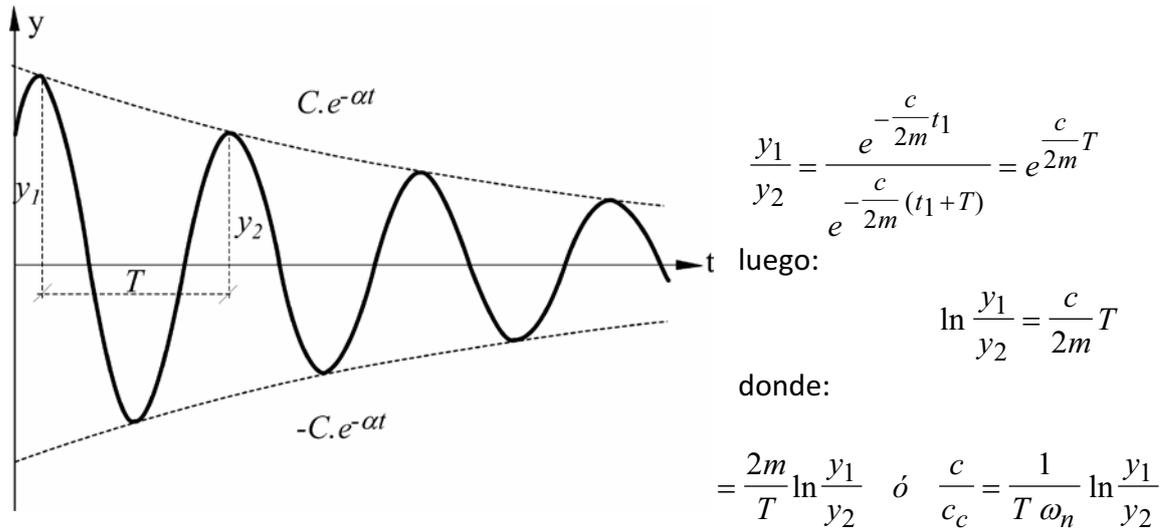
Para un tiempo dado, t_1 , será:

$$y(t_1) = y_1 = C e^{-\frac{c}{2m} t_1} \text{sen}(\beta t_1 + \varphi)$$

y un tiempo T , después, es:

$$\begin{aligned} y(t_1 + T) = y_2 &= C e^{-\frac{c}{2m}(t_1 + T)} \text{sen}[\beta(t_1 + T) + \varphi] \\ &= C e^{-\frac{c}{2m}(t_1 + T)} \text{sen}(\beta t_1 + \varphi) \end{aligned}$$

Efectuando el cociente:



Al logaritmo natural de la razón entre dos amplitudes sucesivas se lo denomina decrecimiento logarítmico δ y permite conocer el amortiguamiento presente en un sistema si se tiene un registro gráfico de sus oscilaciones naturales.

3.6.3.3. Vibraciones forzadas de un sistema sin amortiguamiento:

Considérese el sistema mecánico (masa-resorte) donde actúa sobre la masa una fuerza externa $F(y,t)$, la cual es responsable de mantener la vibración.

La ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema es:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + Ky = F(y,t) \quad \text{ó} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m}y = \frac{F}{m} \tag{3.35}$$

Con las condiciones iniciales:

$$y(0) = y_0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt}(0) = V_0 \tag{3.36}$$

La solución general de la ecuación diferencial no homogénea (3.35) será la composición de una solución de la homogénea y una particular:

Considérese la ecuación homogénea asociada: $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m}y = 0$

Su solución es: $y(t) = C_1 \cdot \cos \omega_n t + C_2 \cdot \sen \omega_n t$

Ahora debe determinarse una solución particular de (3.35).

Si la fuerza externa es una función de ambas variables (espacial y temporal), el análisis matemático del problema se torna complejo en general, ya que resulta un problema no lineal o de coeficientes variables. Ejemplos de esto son:

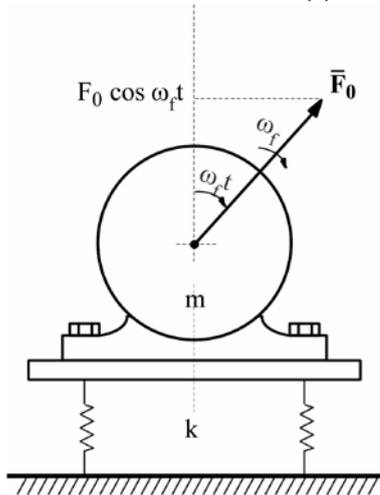
$$\begin{aligned} \text{a) } F(y,t) &= F_o y \cdot t \\ \text{b) } F(y,t) &= F_o y^2 \cdot \text{sen } \omega t \\ \text{c) } F(y,t) &= F_o y^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

En el caso a) se tiene una ecuación diferencial con coeficientes variables, en b) la ecuación es no lineal con coeficientes variables y en c) es no lineal.

Si la ecuación diferencial no es lineal, la solución del problema se complica y aún para los casos más simples de la función $F(y)$ es necesario recurrir a métodos aproximados.

Se analizará el caso en que la fuerza externa F aplicada al sistema es una función armónica de t :

$$F(t) = F_o \cos \omega_f t \quad (3.38)$$



A modo de ejemplo se analiza el funcionamiento de un motor desbalanceado sometido a una fuerza externa de amplitud F_o con frecuencia circular ω_f . Aquí, F_o representa el desbalanceo del rotor.

$$\begin{aligned} \text{Sea: } m \frac{d^2 y}{dt^2} + K y &= F_o \cos \omega_f t \quad \text{o} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{K}{m} y &= \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para hallar una solución particular de (3.39) se propondrá la función:

$$\begin{aligned} y_p &= A \cos \omega_f t + B \text{sen } \omega_f t \\ \text{siendo } \dot{y}_p &= -A \omega_f \text{sen } \omega_f t + B \omega_f \cos \omega_f t \\ \ddot{y}_p &= -A \omega_f^2 \cos \omega_f t - B \omega_f^2 \text{sen } \omega_f t \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.39):

$$-A \omega_f^2 \cos \omega_f t - B \omega_f^2 \text{sen } \omega_f t + \frac{k}{m} [A \cos \omega_f t + B \text{sen } \omega_f t] = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t$$

Igualando coeficientes:

$$\cos \omega_f t \left[-A \omega_f^2 + A \frac{K}{m} \right] + \text{sen } \omega_f t \left[B \frac{K}{m} - B \omega_f^2 \right] = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t$$

$$\therefore \begin{cases} A \frac{K}{m} - A \omega_f^2 = \frac{F_o}{m} \Rightarrow A = \frac{F_o}{m} \left[\frac{1}{K - m \omega_f^2} \right] m \\ B \frac{K}{m} - B \omega_f^2 = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$y_p = F_o \left(\frac{1}{K - m \omega_f^2} \right) \cos \omega_f t$$

$$\therefore y_{(t)} = y_c + y_p = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \operatorname{sen} \omega_n t + F_o \left[\frac{1}{K - m \omega_f^2} \right] \cos \omega_f t$$

Considérese el caso más general de condiciones iniciales (3.36); resulta así:

$$y(o) = C_1 + \frac{F_o}{K - m \omega_f^2} = y_o$$

$$\therefore C_1 = -\frac{F_o}{K - m \omega_f^2} + y_o$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_n \operatorname{sen} \omega_n t + C_2 \omega_n \cos \omega_n t - F_o \omega_f \left(\frac{1}{K - m \omega_f^2} \right) \operatorname{sen} \omega_f t$$

$$\dot{y}(o) = C_2 \omega_n = V_o \quad \therefore \quad C_2 = \frac{V_o}{\omega_n}$$

Por lo tanto, la solución general del problema de condiciones iniciales (3.39 – 3.36)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{K}{m} y = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t \quad \begin{cases} y(o) = y_o \\ \dot{y}(o) = V_o \end{cases}$$

resulta ser:

$$y(t) = \left(y_o - \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \right) \cos \omega_f t + \frac{V_o}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$y(t) = y_o \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t - \left(\frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \right) \cos \omega_f t \quad (3.40)$$

Debe notarse que los tres primeros sumandos tienen la frecuencia natural ω_n del sistema, mientras que el último la frecuencia de la fuerza externa ω_f .

Una forma distinta de la ecuación (3.40) es:

$$y(t) = \left(y_o - \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \right) \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F_o}{(K - \omega_f^2 m)} \cos \omega_f t$$

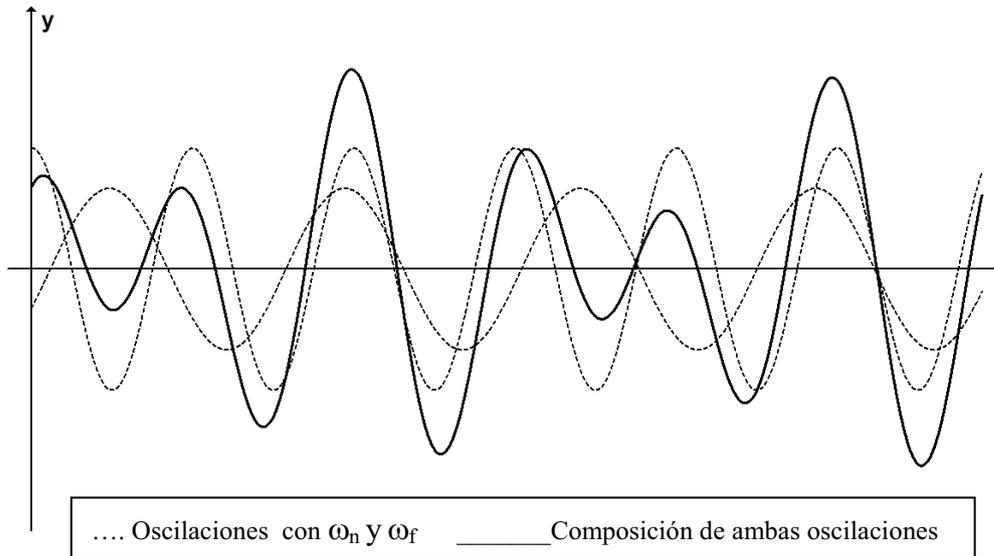
los dos primeros sumandos pueden reemplazarse por

$$C \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi)$$

entonces es:

$$y(t) = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \cos \omega_f t \quad (3.41)$$

Por lo tanto la respuesta del sistema viene dada por la superposición de dos movimientos oscilatorios armónicos en la misma dirección, cuyo análisis se realizó en el Apartado 1.7.3 a). Una de ellas posee la frecuencia natural ω_n del sistema y la otra la frecuencia forzada de la entrada ω_f , como se observa en la figura:



El Fenómeno de Resonancia.

Una situación muy importante para analizar desde el punto de vista de la ingeniería, la constituye el caso cuando $\omega_n = \omega_f$.

Recordando que $\frac{K}{m} = \omega_n^2$ y reemplazando en (3.41):

$$y(t) = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_o}{K \left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n} \right)^2 \right]} \cos \omega_f t.$$

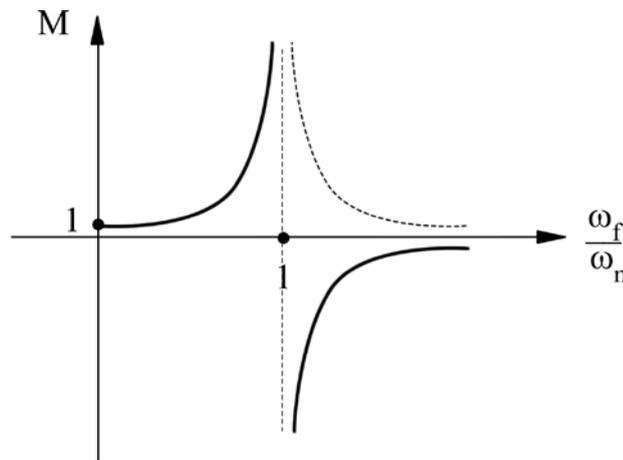
Cuando $\omega_f \rightarrow \omega_n$ resulta

$$\frac{F_o}{K \left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n} \right)^2 \right]} \rightarrow \infty$$

Es decir, las amplitudes de $y(t)$ crecen indefinidamente. Este fenómeno se denomina resonancia y representa una situación muy peligrosa en la práctica. Esta situación crítica se plantea cuando la frecuencia de la fuerza excitadora del sistema coincide con la frecuencia natural del mismo.

Se denomina factor de multiplicación a $M = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]}$

y su gráfica en función de ω_f es:



En el caso de resonancia, la ecuación (3.39) se transforma en:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_n^2 y = \frac{F_o}{m} \cos \omega_n t$$

Dada (3.40):

$$y(t) = y_o \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \text{sen} \omega_n t + \frac{F_o}{K} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]} (\cos \omega_f t - \cos \omega_n t) \quad (3.42)$$

puede analizarse la condición de resonancia considerándola como caso límite de la solución general de la ecuación (3.35). Si $\omega_f = \omega_n$, entonces el último término de (3.42) se vuelve indeterminado. Usando el Teorema de L'Hospital, mediante derivación del numerador y denominador con respecto a ω_f , se obtiene:

$$y(t) = y_o \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \text{sen} \omega_n t + \frac{F_o t}{K} \frac{(-\text{sen} \omega_f t)}{\left(-2\right)\left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)}$$

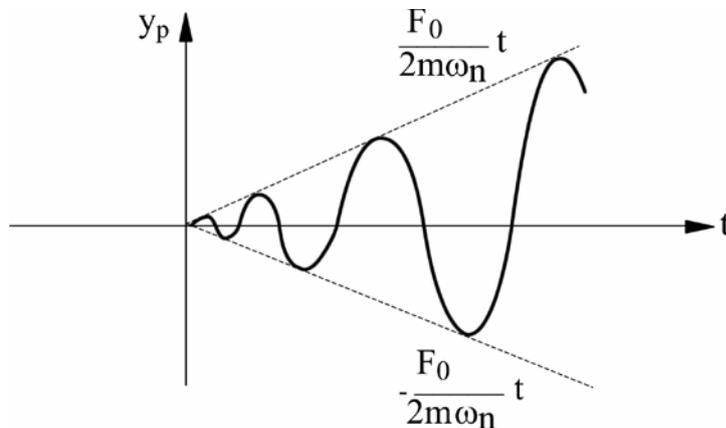
$$y(t) = y_o \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \text{sen } \omega_n t + \frac{F_o}{2m\omega_n} t \text{ sen } \omega_n t \quad (3.43)$$

Se observa que el movimiento de la masa aumenta sin límite a medida que el tiempo transcurre.

En el caso de considerarse solamente el término correspondiente a la solución particular:

$$\left(\frac{F_o}{2m\omega_n} t \text{ sen } \omega_n t \right)$$

la gráfica de y_p en función de t , será:

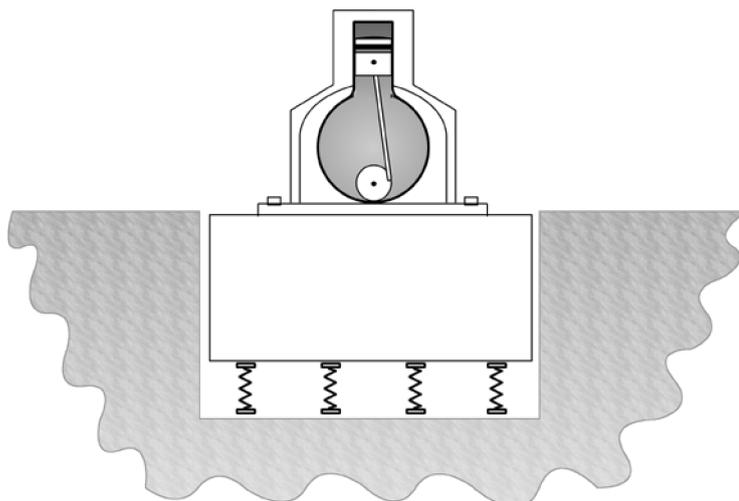


En sistemas reales existe fricción y amortiguamiento, por lo que en la ecuación (3.40) se anularán con el tiempo los tres primeros sumandos, recibiendo por ellos la denominación de estado transitorio. En estos sistemas el único movimiento que persiste es el correspondiente al que impone la fuerza externa de frecuencia ω_f , denominándose estado estacionario o permanente de período $T = \frac{2\pi}{\omega_f}$

Ejemplo de Aplicación:

El motor a explosión monocilíndrico de la figura está montado sobre un bloque de cimentación que está apoyado en resortes. Describir la vibración del estado permanente del sistema si el bloque y el motor tienen una masa total de $m = 80 \text{ Kg}$ y el motor cuando está funcionando crea una fuerza de $F = 50 \text{ sen } 2t \text{ [N]}$, donde t se mide en seg. Suponer que el sistema vibra solamente en la dirección vertical, con el desplazamiento positivo medido hacia abajo, y que la rigidez total de los resortes puede representarse como $K = 2000 \text{ N/m}$.

- a) Expresar la ecuación de movimiento correspondiente al estado permanente de la vibración forzada; y b) Calcular la velocidad rotacional del motor que producirá la resonancia del sistema.



$$\ddot{y} + \frac{K}{m}y = \frac{F_o}{m} \text{sen } \omega_f t \Rightarrow y_p = \frac{F_o / K}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2} \text{sen } \omega_f t$$

$$\text{es: } \omega_f = 2 \text{ s}^{-1} ; F_o = 50 \text{ N} ; K = 2000 \text{ N/m}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = 5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{a) } y_p = \frac{50/2000}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \text{sen } 2t = 0,0297 \text{ sen } 2t \quad [\text{m}]$$

$$\text{b) } \omega_f = 5 \text{ s}^{-1}$$

3.6.3.4. Vibraciones Forzadas de un Sistema con Amortiguamiento Viscoso

En este caso, la ecuación diferencial será de segundo orden, completa, no homogénea:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + K y = F_o \cos \omega_f t \quad (3.44)$$

Con las condiciones iniciales:

$$y(0) = y_o \quad (3.45)$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = V_o \quad (3.46)$$

a) Solución de la homogénea asociada:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{m} y = 0$$

Solución complementaria:

$$y_c = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Las distintas formas de la solución de esta ecuación han sido halladas en vibraciones libres de un sistema con amortiguamiento.

b) Solución particular de la ecuación no-homogénea (3.44).

Proponiendo como solución particular:

$$y_p = A \cos \omega_f t + B \operatorname{sen} \omega_f t$$

Por consiguiente:

$$\dot{y}_p = -A \omega_f \operatorname{sen} \omega_f t + B \omega_f \cos \omega_f t$$

$$\ddot{y}_p = -A \omega_f^2 \cos \omega_f t - B \omega_f^2 \operatorname{sen} \omega_f t$$

Reemplazando en (3.44):

$$-A \omega_f^2 \cos \omega_f t - B \omega_f^2 \operatorname{sen} \omega_f t + \frac{c}{m} [-A \omega_f \operatorname{sen} \omega_f t + B \omega_f \cos \omega_f t] + \frac{K}{m} [A \cos \omega_f t + B \operatorname{sen} \omega_f t] = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t$$

Igualando los coeficientes de los senos y cosenos:

$$\begin{cases} -A \omega_f^2 + B \omega_f \frac{c}{m} + A \frac{K}{m} = \frac{F_o}{m} \\ -B \omega_f^2 - \frac{c}{m} A \omega_f + \frac{K}{m} B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \left(-\omega_f^2 + \frac{K}{m} \right) + B \left(\frac{\omega_f \cdot c}{m} \right) = \frac{F_o}{m} \\ A \left(-\frac{c}{m} \omega_f \right) + B \left(\frac{K}{m} - \omega_f^2 \right) = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} A(K - \omega_f^2 m) + B(c \omega_f) = F_o \\ A(-c \omega_f) + B(K - m \omega_f^2) = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Para dar solución al sistema (3.47), se multiplica la primera ecuación por $(\omega_f c)$ y se divide por $(K - \omega_f^2 m)$

$$A(\omega_f c) + B \left(\frac{\omega_f^2 c^2}{K - \omega_f^2 m} \right) = \frac{F_o \omega_f c}{K - \omega_f^2 m}$$

y sumando miembro a miembro con la segunda

$$A(-\omega_f c) + B(K - m\omega_f^2) = 0$$

se obtiene

$$B \left(\frac{\omega_f^2 c^2}{K - \omega_f^2 m} + K - \omega_f^2 m \right) = \frac{F_o \omega_f c}{K - \omega_f^2 m}$$

Tomando denominador común y como $-2K\omega_f^2 m + \omega_f^4 m^2 = (K - \omega_f^2 m)^2$ entonces

$$B \left(\frac{\omega_f^2 c^2 + K^2 - 2K\omega_f^2 m + \omega_f^4 m^2}{K - \omega_f^2 m} \right) = \frac{F_o \omega_f c}{K - \omega_f^2 m}$$

$$B = F_o \frac{\omega_f c}{(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2}$$

$$A = \frac{B(K - \omega_f^2 m)}{\omega_f c} = \frac{F_o \omega_f c (K - \omega_f^2 m)}{\omega_f c [(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2]}$$

$$A = F_o \frac{K - \omega_f^2 m}{(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2}$$

Se supone que $(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2 \neq 0$

En el caso en que $c = 0$, se obtiene la solución ya hallada en “Vibraciones forzadas de un sistema sin amortiguamiento”. En efecto resulta:

$$B = 0 \quad \text{y} \quad A = \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \quad \therefore \quad y_p = \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \cos \omega_f t$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada a (3.44) con $c = 0$, ya ha sido determinada y es:

$$y = y_o \cos \omega_n t + \frac{V_o}{\omega_n} \text{sen} \omega_n t + \frac{F_o}{K - \omega_f^2 m} \cos \omega_f t$$

Esta es la solución del problema (3.44), (3.45), (3.46) con $c = 0$, que lógicamente coincide con la expresión obtenida al estudiar vibraciones forzadas de un sistema no amortiguado.

Para el caso en que $c \neq 0$, se tiene que la solución particular y_p de (3.44) viene dada por:

$$y(t) = F_o \frac{K - \omega_f^2 m}{(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2} \cos \omega_f t + F_o \frac{\omega_f c}{(K - \omega_f^2 m)^2 + \omega_f^2 c^2} \text{sen} \omega_f t \quad (3.48)$$

Dividiendo numerador y denominador en (3.48) por m^2 , se llega a:

$$y(t) = \frac{\frac{F_o}{m} \left(\frac{K}{m} - \omega_f^2 \right)}{\left(\frac{K}{m} - \omega_f^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_f c}{m} \right)^2} \cos \omega_f t + \frac{F_o \frac{c \omega_f}{m^2}}{\left(\frac{K}{m} - \omega_f^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_f c}{m} \right)^2} \text{sen} \omega_f t$$

que, como se vio anteriormente, puede llevarse a la forma:

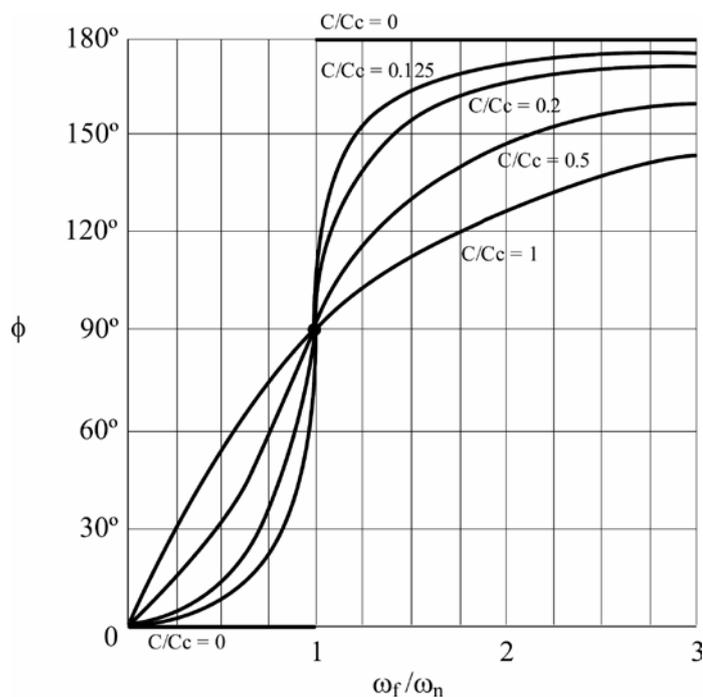
$$y(t) = C \cos(\omega_f t - \phi) \quad (3.49)$$

donde:

$$C = \frac{F_o / K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n} \right)^2}} \quad (3.50)$$

$$\phi = \text{arc tg} \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n} \left/ \left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n} \right)^2 \right] \right. \right) \quad (3.51)$$

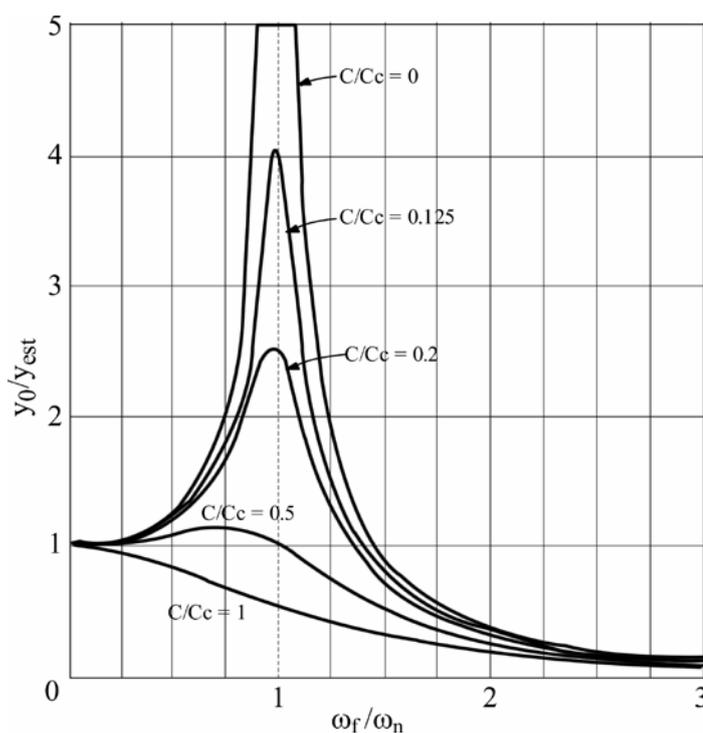
el ángulo ϕ representa la diferencia de fase entre la fuerza aplicada (entrada) y la vibración resultante (salida) de estado permanente del sistema amortiguado; su representación gráfica en función de c/c_c se observa en la próxima figura.



El factor amplificador M es ahora:

$$M = \frac{C}{F_o/K} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3.52)$$

y expresa la razón de la amplitud de la deflexión causada por la vibración forzada a la deflexión causada por la fuerza F_o (estática). En la gráfica siguiente puede verse que la amplificación de la amplitud aumenta cuando disminuye c/c_c y que la amplitud máxima se produce en general para $\omega_f / \omega_n \neq 1$, como se observa en la Figura.



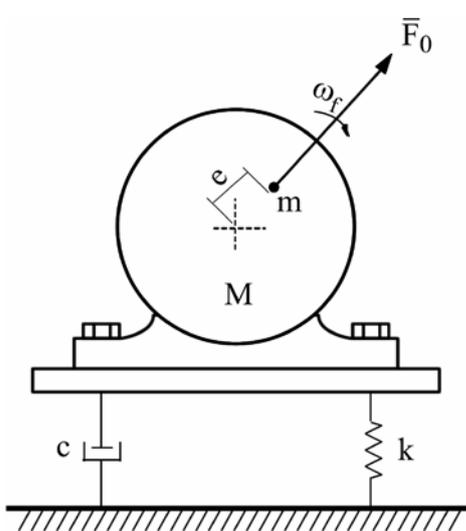
Ejemplo de aplicación:

Un motor eléctrico obligado a desplazarse verticalmente gira a 1470 rpm con un tornillo prisionero de masa $m = 20 \text{ g}$ situado a 10 cm del eje de rotación. La masa del conjunto motor-estructura es $M = 50 \text{ Kg}$ y está montado sobre un elastómero de $K = 152.000 \text{ N/m}$ y $c = 2500 \text{ Kg/s}$.

Se desea encontrar:

- Calcular c/c_c y ω_f/ω_n y visualizar la zona de trabajo en el gráfico del factor de amplificación M vs ω_f/ω_n
- Máximo desplazamiento en el estado estable para un ciclo del movimiento
- Diferencia de fase entre la entrada $[\vec{F}_o(t)]$ y la salida $[y(t)]$. Verificar en el gráfico de φ vs ω_f/ω_n el resultado obtenido
- Expresión analítica del movimiento estable.
- Frecuencia natural y pseudoperíodo del movimiento.

Solución:



$$a) \omega_n = \sqrt{\frac{152.000}{50}} = 55,13 \text{ 1/s}$$

$$\frac{\omega_f}{\omega_n} = \frac{\pi \cdot 1470}{30 \cdot 55,13} = 2,79$$

$$c_c = 2\sqrt{KM} = 2 M \omega_n = 5.513 \text{ Kg/s}$$

$$c/c_c = \frac{2500}{5513} = 0,45$$

b) Es $y(t) = C \cos(\omega_f t - \phi)$

$$y_{\text{máx}} = C = \frac{F_o/K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$F_o = m\omega_f^2 e = 0,02 \text{ Kg} \cdot 153,9^2 \cdot 0,1 \text{ m} = 47,37 \text{ N}$$

$$\therefore y_{\text{máx}} = \frac{47,37}{152.000} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - 2,79^2\right]^2 + (2 \cdot 0,45 \cdot 2,79)^2}} = 43 \text{ } \mu\text{m}$$

$$c) \quad \varnothing = \arctg \frac{2c/c_c \omega_f/\omega_n}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \arctg \frac{2 \cdot 0,45 \cdot 2,79}{1 - 2,79^2} = -20^\circ = -0,35 \text{ rad}$$

$$d) \quad \therefore y(t) = 43 \cos(153,9t + 0,35) \mu\text{m}$$

$$e) \quad \beta = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{c}{2M}\right)^2} = \sqrt{\frac{152.00}{50} - \left(\frac{2500}{2 \cdot 50}\right)^2} = 49,14 \text{ 1/s}$$

$$T = 2\pi/\beta = 0,13 \text{ s}$$

Análisis del comportamiento del sistema forzado amortiguado vibrante mediante el estudio de las fuerzas actuantes

Se ha visto que el estado permanente o estable del sistema está descrito por la ecuación (3.49), en la cual C –dada por (3.50)- representa la amplitud de la oscilación y ϕ (3.51) el ángulo de fase, es decir, el ángulo de retraso existente entre el movimiento (respuesta) y la fuerza exterior (entrada).

Las expresiones de las fuerzas actuantes en la ecuación diferencial (3.44) en los términos de la solución (3.49) son:

$$y = C \cos (\omega_f t - \phi)$$

$$\dot{y} = - \omega_f C \text{ sen } (\omega_f t - \phi) = \omega_f C \cos (\omega_f t - \phi + \pi/2)$$

$$\ddot{y} = - \omega_f^2 C \cos (\omega_f t - \phi) = \omega_f^2 C \cos (\omega_f t - \phi + \pi)$$

De acuerdo con estas expresiones, las fuerzas actuantes:

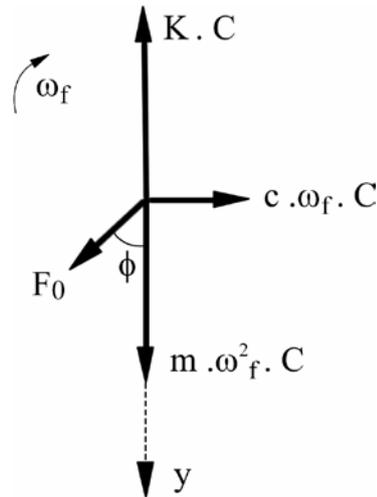
$$F_R = \text{Fuerza elástica más peso} = - K y \quad \Rightarrow \text{(de amplitud } K C, \text{ en la dirección } - y)$$

$$F_A = \text{Fuerza de amortiguamiento} = - c \dot{y} \Rightarrow \text{(de amplitud } c \omega_f C \text{ adelanta a } F_R \text{ en } \pi/2)$$

$$F_I = \text{Fuerza de inercia} = m \ddot{y} \Rightarrow \text{(de amplitud } m \omega_f^2 C \text{ adelanta a } F_R \text{ en } \pi)$$

$$F_E = \text{Fuerza exterior} = F_0 \cos \omega_f t \quad \Rightarrow \text{(de amplitud } F_0 \text{ adelanta a } y \text{ en } \phi)$$

Estos vectores pueden ser representados por la proyección sobre la dirección dada por y, de los vectores de amplitudes: K C, c ω_f C, m ω_f^2 C y F₀:



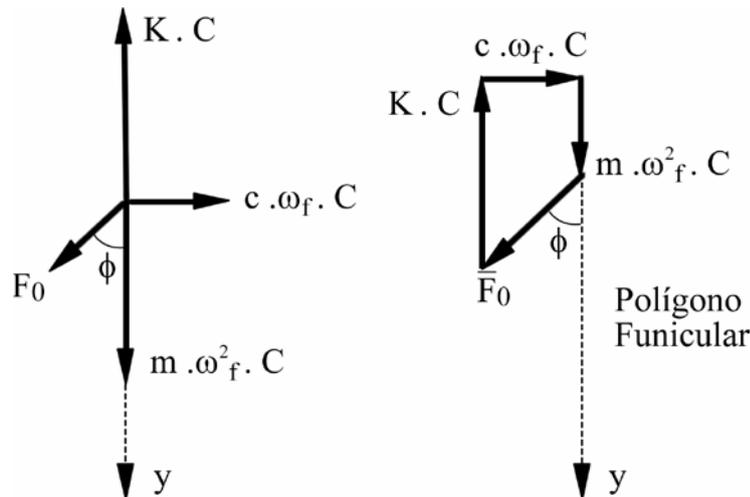
La Ley de Newton, o la ecuación (3. 44), que es lo mismo, requiere que la suma vectorial de las cuatro fuerzas sea nula en todo instante (polígono funicular cerrado):

$$\begin{aligned} \Sigma F_V = 0 &\Rightarrow K C - m \omega_f^2 C - F_0 \cos\phi = 0 \\ \Sigma F_H = 0 &\Rightarrow c \omega_f C - F_0 \sin\phi = 0 \end{aligned}$$

Para comprender el comportamiento físico del sistema vibrante se analizarán los diagramas de fuerzas correspondientes a las situaciones a) $\omega_f < \omega_n$, b) $\omega_f = \omega_n$, c) $\omega_f > \omega_n$ relacionando los parámetros intervinientes en los gráficos de M en función de ω_f / ω_n y ϕ en función de ω_f / ω_n .

Caso a) Para vibraciones muy lentas ($\omega_f \cong 0$), las F_A y F_I resultan despreciables, siendo $F_0 = K C$ para $\phi = 0$.

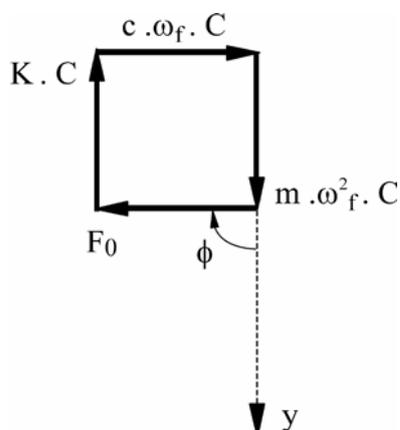
Aumentando la frecuencia, el vector F_A crece y la F_I lo hace aún más rápido. El ángulo de fase no puede seguir siendo nulo, puesto que F_0 deberá tener una componente horizontal hacia la izquierda para equilibrar a $c \omega_f C$.



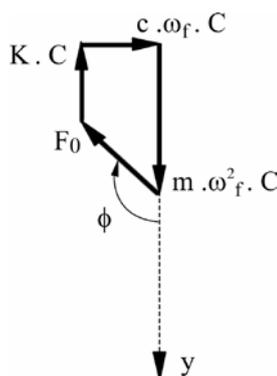
Para este caso, las F_I y F_A son pequeñas. Es decir, que la F_E se emplea casi totalmente en equilibrar a la F_R .

Caso b) Cuando $\omega_f = \omega_n$ resulta $\phi = 90^\circ$ y $F_0 = c \omega_f C$

Ahora la F_I es mayor que en el caso anterior y se equilibra con la F_R . Así, toda la F_E se utiliza para equilibrar a la F_A



Caso c) Si $\omega_f > \omega_n$, la F_I toma valores grandes comparados con F_R y F_A y por ello la F_E se emplea casi totalmente en equilibrar a la F_I



3.6.4. Concepto de transmisibilidad y aislación

En los apartados anteriores se ha modelado, en primera aproximación, un equipo mecánico o eléctrico en funcionamiento sujeto elásticamente a una fundación fija. En la práctica es sumamente importante conocer el coeficiente de transmisión de fuerza o TRANSMISIBILIDAD (T_{RF}) desde el sistema a la estructura para evaluar posibles daños.

a) El equipo como fuente de la vibración (aislación activa):

Tomando para el análisis el sistema amortiguado del apartado 3.6.3.4, observamos que la fuerza transmitida (F_T) a la fundación es la suma de las fuerzas en el resorte más el peso ($k y$) y en el amortiguador ($c \dot{y}$), las que se hallan desfasadas en $\pi / 2$; en efecto, aplicando (3.49):

$$K y = K C \cos(\omega_f t - \phi)$$

$$c \dot{y} = -c \omega_f C \text{sen}(\omega_f t - \phi)$$

y por lo tanto:

$$F_T = \sqrt{(KC)^2 + (c\omega_f C)^2}$$

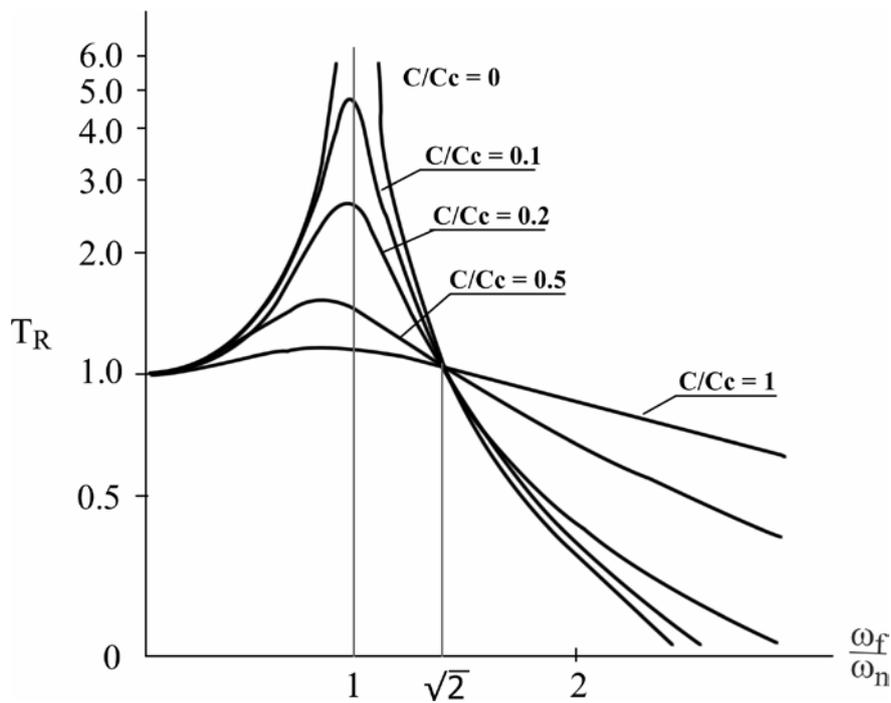
Definiendo la transmisibilidad como el cociente entre la fuerza transmitida cuando el sistema está en movimiento y la estática, se tiene:

$$T_{RF} = \frac{F_T}{F_o} = \frac{C\sqrt{K^2 + (c\omega_f)^2}}{F_o}$$

pero teniendo en cuenta (3.50), es:

$$T_{RF} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3.53)$$

El efecto de $\frac{\omega_f}{\omega_n}$ sobre T_{RF} se muestra la siguiente gráfica:



Puede observarse que para una buena aislación debe ser $\frac{\omega_f}{\omega_n} > 1,41$ necesitándose por

lo tanto un bajo valor de ω_n , lo que implica baja rigidez, es decir, un montaje altamente flexible.

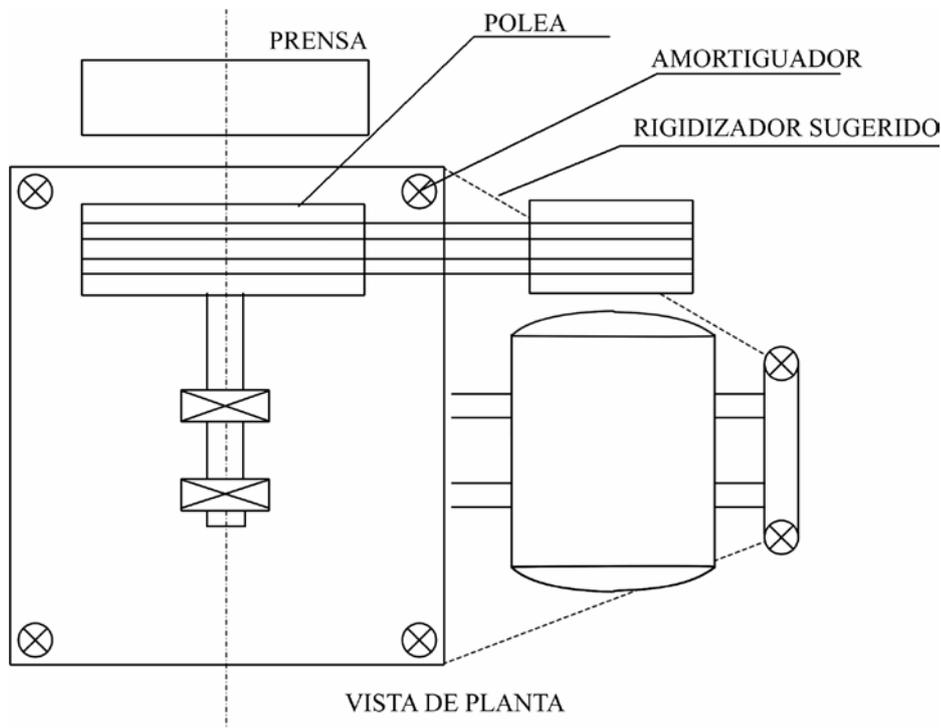
Esto no siempre es aceptable en la práctica donde usualmente es necesaria una cierta rigidez mínima para satisfacer condiciones de operación. Asimismo, el amortiguamiento juega un rol importante cuando el sistema debe trabajar cercano a la

resonancia, pero cumple un efecto adverso para valores $\frac{\omega_f}{\omega_n} > 1,41$. Es por este

motivo que los montajes antivibratorios se fabrican mayormente con relaciones de $c/c_c \approx 0,15$. Asimismo, los estudios de confort en automotores indican que un buen sistema de suspensión debe poseer valores de $f_n \approx 1$ Hz y de $c/c_c \approx 0,25$ (Aparicio Izquierdo, Teoría de los vehículos automóviles, Madrid, 1995). Estos bajos valores de amortiguamiento y frecuencia natural contribuyen a lograr una baja transmisibilidad.

Ejemplo de aplicación:

Una prensa para pasta de alimentos consta de un motor eléctrico balanceado de masa $M_1 = 900$ Kg que gira a 1470 rpm accionando una polea mediante correas a 450 rpm. La masa de la prensa es $M_2 = 2100$ Kg. El movimiento rotativo de la máquina impone vibraciones no deseadas a la losa de nivel + 27 m que la soporta. Se desea elegir por folleto un montaje antivibratorio que provea una $T_r = 0,4$ (atenuación del 60%).



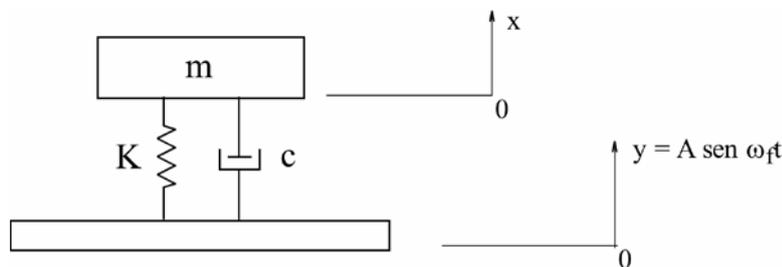
Solución:

En el catálogo comercial suministrado por la empresa fabricante de amortiguadores antivibratorios Vibrachoc (<http://www.vibrachoc.es/productos.html>) se observa que para máquinas rotativas girando por encima de 400 rpm se cuenta con amortiguadores de f_n entre 3 y 4 Hz, debiendo usarse de acuerdo al peso del conjunto (3000 Kg) 6 elementos V1136-25 que soportan 420 a 620 Kg cada uno).

Se observa que de acuerdo a estos valores resulta $f_f / f_n = 2$ y siendo para este tipo de elementos $c / c_{\infty} \approx 0,15$, del gráfico de T_R resulta $T_R \approx 0,4$.

b) La fundación como fuente de la vibración (aislación pasiva):

En el caso que la fundación se encuentre sujeta a una vibración armónica, la ecuación de movimiento es:



$$m\ddot{x} = c(\dot{y} - \dot{x}) + K(y - x)$$

o:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx &= c\dot{y} + Ky \\ &= cA\omega_f \cos\omega_f t + KA \sin\omega_f t \end{aligned}$$

y tomando:

$$\begin{aligned} C\omega_f &= B\cos\beta \\ K &= B\sin\beta \end{aligned}$$

resulta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = BA \cos(\omega_f t - \beta) \quad (3.44')$$

con:

$$B = \sqrt{K^2 + (c\omega_f)^2}$$

$$\beta = \arctg \frac{K}{c\omega_f}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la similitud entre las expresiones (3.44) y (3.44'), se tendrá:

$$x(t) = \frac{A/K \sqrt{K^2 + (c\omega_f)^2}}{\left[1 - (\omega_f/\omega_n)^2\right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2} \cos(\omega_f t - \beta - \phi)$$

Pudiendo definir en este caso la transmisión de movimiento como la relación entre la amplitud de la vibración del cuerpo y la amplitud de la vibración de la fundación:

$$T_{RM} = \frac{C_1}{A} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3.54)$$

Así, las transmisibilidades de fuerza (3.53) y de movimiento (3.54) resultan ser iguales:

$$T_{RF} = T_{RM}$$

Ejemplo de aplicación:

La vibración del piso donde se desea instalar un espectrógrafo de masas delicado es armónica simple a una frecuencia en el rango 15-60 Hz. El equipo, que debe ser aislado del movimiento del piso, está sujeto a una pequeña plataforma montada sobre tres resortes iguales, cada uno soportando la misma carga. El movimiento ocurre en la dirección vertical. La masa combinada del equipo y la plataforma es de 40 Kg y el coeficiente de amortiguamiento viscoso de la suspensión es $c/c_c = 0,2$.

Encontrar el valor máximo de la constante de resorte, si la amplitud de la vibración transmitida tiene que ser menor del 10% de la vibración del piso sobre el rango de frecuencias dado.

Solución:

Aplicando la ecuación (3.53), es:

$$T_R = 0,1 \quad \text{con} \quad c/c_c = 0,2$$

$$\left[1 - \left(\omega_f/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left[0,4 \omega_f/\omega_n\right]^2 = 100 \left[1 + \left(0,4 \omega_f/\omega_n\right)^2\right]$$

es decir:

$$\left(\omega_f/\omega_n\right)^4 - 17,84 \left(\omega_f/\omega_n\right)^2 - 99 = 0$$

de donde: $\omega_f/\omega_n = 4,72$

Ahora, cuando: $\omega_f = 2 \pi 15 \text{ rad/s}$ resulta $\omega_n = 19,97 \text{ rad/s}$

y dado que $\omega_n = \sqrt{K/m}$ y $m = 40 \text{ Kg}$

el resorte equivalente posee una constante elástica de

$$K_E = 15.935 \text{ N/m}$$

y cada uno de los resortes en paralelo

$$K = K_E / 3 = 5300 \text{ N/m}$$

La amplitud de la vibración transmitida del piso al equipo será así menor del 10% a frecuencias superiores a 15 Hz.

Capítulo 4

CINÉTICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

4. CINÉTICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

Los problemas que aquí se plantean son idénticos en esencia a los que aparecen en la cinética de una partícula. Para llegar a plantear las ecuaciones que resuelven estos problemas se comenzará por encontrar las expresiones -para el caso de sistemas- de dos conceptos fundamentales: *trabajo* y *energía cinética*, así como también será necesaria la formulación de algunos teoremas.

4.1. Trabajo elemental de las fuerzas que actúan sobre un sistema material

Suponiendo un sistema formado por N puntos materiales, para un punto genérico P_i el trabajo elemental de las fuerzas aplicadas sobre el mismo es

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

pero como $d\vec{r}_i = \vec{V}_i dt$

resulta $dW_i = \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i dt$

y el trabajo elemental de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema será:

$$dW = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i dt \quad (4.1)$$

En esta expresión deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos:

a) El trabajo depende del marco de referencia, puesto que \vec{V}_i depende del mismo, es decir, que la expresión (4.1) indica un trabajo relativo al marco en el cual se está estudiando el movimiento.

b) En la (4.1), \vec{F}_i representa la suma de fuerzas activas, reactivas e interiores:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{reac_i} + \vec{F}_{act_i} + \vec{F}_{int_i}$$

El hecho de que intervengan las fuerzas interiores hace que esta expresión (4.1) sea de difícil aplicación, salvo que se conozca la forma de actuar de las mismas, lo que es realmente complejo.

Sin embargo, en los cuerpos rígidos su aplicación es sencilla puesto que al permanecer constante la distancia relativa entre los puntos, el trabajo de las \vec{F}_{int} es nulo.

Además, estas fuerzas actúan de a pares, colinealmente y en sentidos opuestos por lo que:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{int}_i} = \vec{0}$$

Así, para un sistema material rígido, será:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{\text{act}_i} + \sum \vec{F}_{\text{react}_i} = \sum \vec{F}_{E_i} \quad (4.2)$$

donde: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}_i}$ = resultante de las fuerzas exteriores = \vec{F}_E

Recordando que para un cuerpo rígido es:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad (4.3)$$

Reemplazando (4.3) en (4.1):

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot [\vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i] dt \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{01} dt + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

En el primer sumando, \vec{V}_{01} puede sacarse como factor común fuera de la sumatoria, puesto que al ser la velocidad del centro de reducción, se considera que todos los puntos del cuerpo se trasladan con ella. Teniendo en cuenta (4.2), se obtiene:

$$\sum_1^N \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{01} dt = \vec{V}_{01} dt \cdot \sum_1^N \vec{F}_i = \vec{F}_E \cdot \vec{V}_{01} dt$$

En cuanto al producto mixto del segundo sumando, puede, sin alterarse el orden cíclico de los vectores, escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_1^N \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\omega} \cdot \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{E_i}$$

y

$$\sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{E_i} = \vec{M}_{E(01)}$$

es el momento de la resultante de las fuerzas exteriores respecto al punto 0_1 , que es el centro de reducción. Luego, la expresión del trabajo elemental para un cuerpo rígido es, de (4.4):

$$dW = (\vec{F}_E \cdot \vec{V}_{01} + \vec{M}_{E(01)} \cdot \vec{\omega}) dt \quad (4.5)$$

la cual depende del marco de referencia adoptado.

4.2. Expresión general de la energía cinética para un sistema material

Suponiendo un sistema material en movimiento respecto de un marco cualquiera y tomando una partícula del sistema de masa m_i y velocidad \vec{V}_i , su energía cinética es:

$$e_i = 1/2 m_i V_i^2 = 1/2 m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i$$

y por ende, la energía cinética total del sistema:

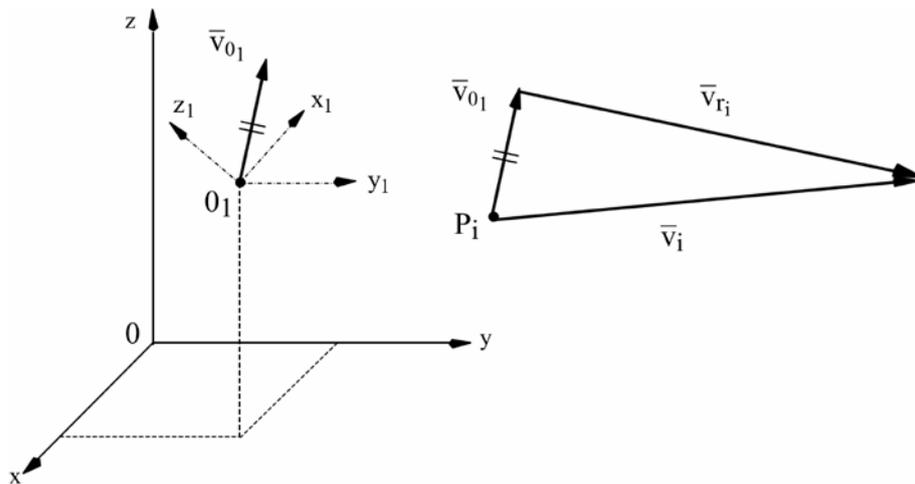
$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2 \quad (4.6)$$

Esta expresión también es relativa al marco de referencia.

Para evaluar la energía cinética de un sistema, conviene adoptar una terna con origen en un centro de reducción que se traslade con respecto al marco en el cual se está estudiando el movimiento. Sea el punto O_1 origen de una terna que se desplaza con velocidad \vec{V}_{01} . Esta terna resulta ser parcialmente solidaria con el sistema material. Puede decirse que todos los puntos P_i del sistema están animados de la velocidad \vec{V}_{01} más la velocidad relativa de cada punto con respecto a O_1 , es decir:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{V}_{r_i}$$

gráficamente:



Reemplazando en (4.6)

$$e = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_{o_i} + \vec{V}_{r_i})^2 = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (V_{o_1}^2 + V_{r_i}^2 + 2 \vec{V}_{o_1} \cdot \vec{V}_{r_i})$$

$$= 1/2 V_{o_1}^2 \sum_1^N m_i + 1/2 \sum_1^N m_i V_{r_i}^2 + \vec{V}_{o_1} \cdot \sum_1^N m_i \vec{V}_{r_i} \Rightarrow$$

$$e = 1/2 m V_{o_1}^2 + \sum_1^N 1/2 m_i V_{r_i}^2 + \vec{V}_{o_1} \cdot \sum_1^N m_i \vec{V}_{r_i} \quad (4.7)$$

Esta expresión da la energía cinética (que tendrá el mismo valor cualquiera sea el punto O_1 elegido) del sistema material y como se observa está compuesta de tres sumandos, cada uno de ellos con un importante significado:

El primer sumando, $e = 1/2 m V_{o_1}^2$, recibe el nombre de energía cinética de arrastre o de traslación y es la que tendría el sistema en el supuesto que toda la masa estuviera concentrada en el centro de reducción, siendo generada por la velocidad de éste último.

El segundo sumando $e_2 = \sum_1^N 1/2 m_i V_{r_i}^2$ se denomina energía cinética relativa y está originada por el movimiento relativo de cada punto respecto al O_1 .

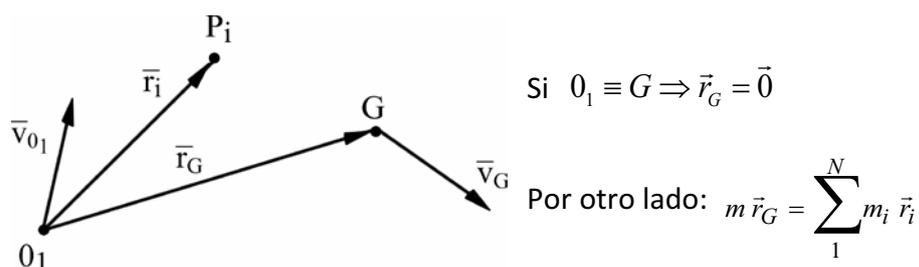
El tercer sumando $e_3 = \vec{V}_{o_1} \cdot \sum_1^N m_i \vec{V}_{r_i}$ recibe el nombre de fuerza viva compuesta y su valor depende del centro de reducción. Esta e_3 puede anularse si se toma como centro de reducción a un punto fijo del sistema (si lo hubiera), así resultaría $\vec{V}_{o_1} = \vec{0}$, por lo tanto $e_3 = 0$, siendo en este caso e_1 también nula.

Pero el caso más importante de anulación de e_3 es cuando se toma como centro de reducción el baricentro "G" del sistema, lo que da lugar al teorema de König: "La energía cinética de un sistema material cualquiera es en cada instante igual a la energía cinética que corresponde al baricentro supuesto que en él está concentrada toda la masa, más la energía cinética que le corresponde al sistema en su movimiento relativo al baricentro".

Para demostrarlo, es conveniente recordar que se define como centro de masa de un sistema de N puntos materiales al punto cuyo vector posición está dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow x_G = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

En efecto entonces, si O_1 es el centro de reducción, luego \vec{r}_G es el vector posición de G respecto de O_1 .

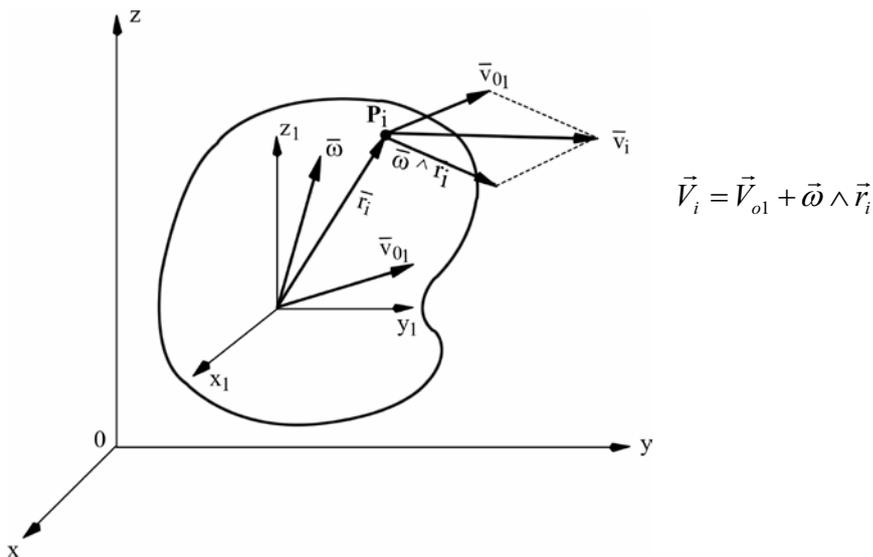


derivando:
$$m \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \sum_1^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Siendo $\vec{r}_G = \vec{0}$ será $\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \vec{0}$ y por lo tanto $\sum m_i \vec{V}_i = \vec{0}$

La ecuación (4.7) es válida para cualquier sistema material.

Se verá ahora qué forma toma la expresión de la energía cinética para un cuerpo rígido en movimiento rototraslatorio; tomando el punto O_1 como centro de reducción, para un punto P_i se tiene:

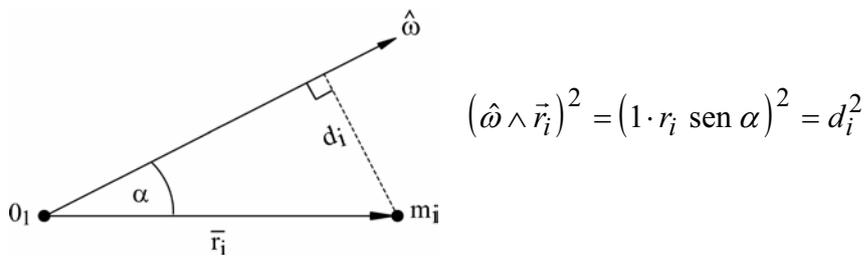


Reemplazando esta expresión de la ley de distribución de velocidades para un cuerpo rígido, en la (4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 e &= 1/2 \sum_1^N m_i \vec{V}_i^2 = 1/2 \sum_1^N m_i (\vec{V}_{o1} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \\
 &= 1/2 \sum_1^N m_i V_{o1}^2 + 1/2 \sum_1^N m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 + 1/2 \sum_1^N m_i 2 \vec{V}_{o1} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \\
 &= 1/2 m V_{o1}^2 + 1/2 \omega^2 \sum_1^N m_i (\hat{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 + \vec{V}_{o1} \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_1^N m_i \vec{r}_i
 \end{aligned}$$

En el segundo sumando se ha multiplicado numerador y denominador por ω^2 formándose el versor $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$.

Analizando gráficamente la expresión: $m_i (\hat{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2$



En consecuencia $m_i (\hat{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = m_i d_i^2$ es el momento de inercia de la masa m_i respecto al eje $\hat{\omega}$. Así

$$\sum_1^N m_i (\hat{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = I_{\omega\omega_{01}}$$

resulta ser el momento de inercia del sistema material rígido respecto al eje $\hat{\omega}$ pasante por O_1 .

En el tercer sumando, se tiene $\sum m_i \vec{r}_i = \vec{r}_G$ y por lo tanto, la expresión general de la energía cinética para un cuerpo rígido es:

$$e = \frac{1}{2} m V_{o_1}^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega_{o_1}} \omega^2 + m \vec{V}_{o_1} \cdot \hat{\omega} \wedge \vec{r}_G \quad (4.8)$$

En un cuerpo rígido siempre es posible anular e_3 . Una forma es usar como centro de reducción a un punto fijo, lo que será posible si el cuerpo está en movimiento de rotación o de rotación instantánea, en este caso es:

$$e = \frac{1}{2} I_{\omega\omega_{o_1}} \omega^2 \quad (\vec{V}_{o_1} = \vec{0})$$

Pero también se puede anular e_3 tomando el baricentro como centro de reducción; en este caso $\vec{r}_G = 0 \Rightarrow e_3 = \vec{0}$ y:

$$e = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega_G} \omega^2$$

4.3. Expresión general de la cantidad de movimiento para un sistema material.

Para un sistema compuesto por N puntos materiales, la cantidad de movimiento \vec{Q}_i para uno de sus puntos será:

$$\vec{Q}_i = m_i \vec{V}_i$$

y la cantidad de movimiento \vec{Q} del sistema será:

$$\vec{Q} = \sum_1^N m_i \vec{V}_i$$

La cantidad de movimiento depende del marco de referencia elegido (porque \vec{V} es función del marco) para estudiar el movimiento. Tomando un punto O_1 del sistema como se hizo en el apartado anterior, se tendrá:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{o_1} + \vec{V}_{ri}$$

donde \vec{V}_{01} es la velocidad de una de las partículas del sistema y \vec{V}_{ri} es la de todas las otras respecto de ella. Así:

$$\vec{Q} = \sum_1^N m_i \vec{V}_{01} + \sum_1^N m_i \vec{V}_{ri} = m \vec{V}_{01} + \sum_1^N m_i \vec{V}_{ri}$$

Si se tomara como centro de reducción al baricentro G del sistema, se tendría ($0_1 \equiv G$):

$$\vec{Q} = m \vec{V}_G + \sum_1^N m_i \vec{V}_{ri(G)}$$

y siendo el segundo sumando del miembro derecho de la igualdad la cantidad de movimiento relativa al baricentro, ésta se anula como se demostrara anteriormente, obteniéndose

$$\vec{Q} = m \vec{V}_G \quad (4.9)$$

Esta última expresión implica que la cantidad de movimiento total del sistema material es la que tendría su baricentro en el supuesto de que toda la masa estuviese concentrada en él.

Para los sistemas rígidos la (4.9) constituye la expresión más directa para obtener la cantidad de movimiento.

4.4. Expresión general del momento cinético para un sistema material

Siendo para una partícula:

$$\vec{K}_{(01)i} = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i$$

Se definirá como momento cinético de un sistema de partículas respecto de un punto 0_1 a la suma de los momentos cinéticos de cada partícula:

$$\vec{K}_{(01)} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i$$

El punto 0_1 es el centro de momentos, pertenece al sistema material, pudiendo ser fijo o móvil y es el origen de la terna que se desplaza con \vec{V}_{01} respecto de la fija.

Siendo $\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{V}_{ri}$

y reemplazando en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \vec{K}_{(01)} &= \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{01} + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{ri} = \\ &= -\vec{V}_{01} \wedge \sum_1^N m_i \vec{r}_i + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{ri} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{K}_{(o_1)} = \vec{r}_G \wedge m \vec{V}_{o_1} + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{ri} \quad (4.10)$$

donde \vec{r}_G es la posición del baricentro respecto al centro de momentos O_1 y \vec{V}_{o_1} es la velocidad de ese punto.

El primer sumando del término de la derecha en (4.10) expresa que una parte del momento cinético respecto del punto O_1 sería el que tendría toda la masa como si ésta estuviese concentrada en el punto G y con la velocidad de O_1 . Recibe el nombre de momento cinético de arrastre u orbital.

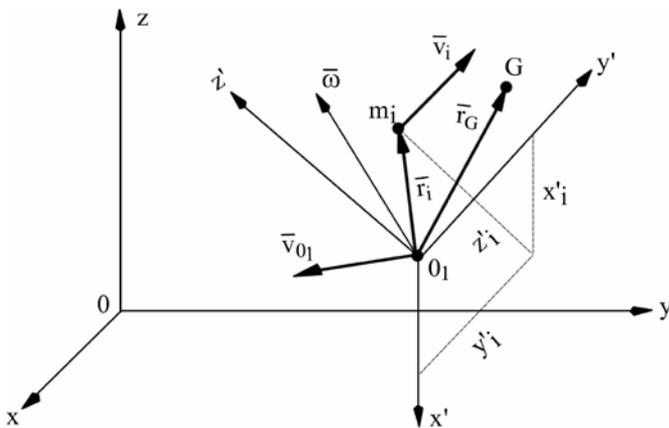
El segundo sumando es debido a las velocidades relativas a O_1 y se denomina momento cinético relativo o intrínseco.

Si se ubicara la terna sobre el baricentro G, tomándose como centro de momentos, se tendría $\vec{r}_G = \vec{0}$ y:

$$\vec{K}_{(G)} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{ri} \quad (4.10')$$

que es el momento cinético relativo al baricentro. Por lo tanto, respecto del baricentro el momento cinético total y el relativo son iguales, no existiendo momento cinético orbital. Los movimientos de las partículas con respecto al baricentro son los que generan la existencia del momento cinético relativo al mismo. Se verá ahora qué forma adopta la (4.10) para el caso específico de un cuerpo rígido. En este caso se tomará como centro de reducción el origen de la terna en un punto O_1 del mismo, donde ahora estarán aplicados los vectores característicos \vec{V}_{o_1} y $\vec{\omega}$, siendo:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{o_1} + \vec{V}_{ri} = \vec{V}_{o_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$$



luego, reemplazando:

$$\vec{K}_{(o_1)} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_{o_1} + \sum_1^N m_i [\vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)]$$

El primer sumando resulta

$$\vec{r}_G \wedge m \vec{V}_{o_1}$$

Para resolver el segundo sumando se aplica la fórmula de Gibbs:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

obteniéndose

$$\vec{K}_{(01)} = \vec{r}_G \wedge m \vec{V}_{01} + \sum_1^N m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \quad (4.11)$$

con:

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_i^2 = x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2$$

por lo que:

$$r_i^2 \vec{\omega} = r_i^2 (\omega'_x \hat{i}' + \omega'_y \hat{j}' + \omega'_z \hat{k}')$$

o, trabajando en forma matricial:

$$r_i^2 \vec{\omega} = (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = r_i^2 \bar{1} \vec{\omega} \quad (4.12)$$

Donde $\bar{1}$ es la matriz unidad.

Y el producto:

$$(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i = (x_i' \hat{i}' + y_i' \hat{j}' + z_i' \hat{k}') (x_i' \omega'_x + y_i' \omega'_y + z_i' \omega'_z) =$$

$$\begin{bmatrix} x_i' x_i' & x_i' y_i' & x_i' z_i' \\ y_i' x_i' & y_i' y_i' & y_i' z_i' \\ z_i' x_i' & z_i' y_i' & z_i' z_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \bar{X}_i \vec{\omega} \quad (4.13)$$

Donde \bar{X}_i es una matriz cuadrada de 3 x 3 originada por el producto binario del vector posición \vec{r}_i por sí mismo.

Luego, introduciendo (4.12) y (4.13) en (4.11), resulta:

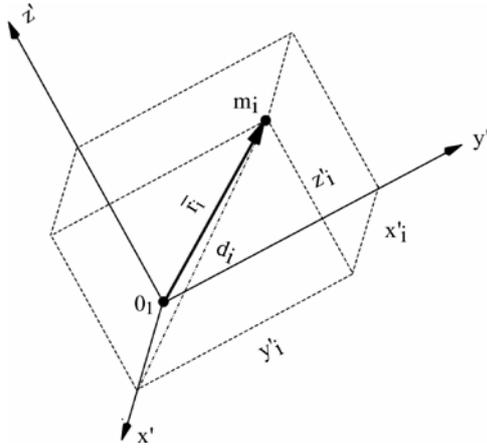
$$\vec{K}_{(01)} = \vec{r}_G \wedge m \vec{V}_{01} + \sum_1^N m_i (r_i^2 \bar{1} - \bar{X}_i) \vec{\omega} \quad (4.14)$$

Operando con el binomio entre paréntesis se observa que:

$$m_i (r_i^2 \bar{1} - \bar{X}_i) = \begin{bmatrix} m_i r_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_i r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i r_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_i x_i'^2 & m_i x_i' y_i' & m_i x_i' z_i' \\ m_i y_i' x_i' & m_i y_i'^2 & m_i y_i' z_i' \\ m_i z_i' x_i' & m_i z_i' y_i' & m_i z_i'^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -m_i x_i' y_i' & -m_i x_i' z_i' \\ -m_i y_i' x_i' & m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -m_i y_i' z_i' \\ -m_i z_i' x_i' & -m_i z_i' y_i' & m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{bmatrix} \quad (4.14 a)$$

Cada elemento de esta nueva matriz de 3 x 3 tiene un significado físico relevante. En efecto $m_i (y_i'^2 + z_i'^2)$, por ejemplo, es el momento de inercia de la masa i -ésima respecto del eje \hat{i}' ; gráficamente



$$d_i^2 = y_i'^2 + z_i'^2$$

$$\therefore m_i d_i^2 = I_{x'x'_i}$$

De igual forma, $m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = I_{z'z'_i}$ y $m_i (x_i'^2 + z_i'^2) = I_{y'y'_i}$

$I_{x'x'_i}$, $I_{y'y'_i}$, $I_{z'z'_i}$ reciben el nombre de momentos de inercia axiales. Serán siempre positivos, por cuanto las distancias están elevadas al cuadrado.

Los términos ubicados a los lados de la diagonal principal representan los momentos centrífugos o productos de inercia de la masa m_i respecto de dos planos coordenados, cambiados de signo. Así por ejemplo:

$$I_{y'z'_i} = m_i y'_i z'_i$$

es el momento centrífugo de m_i respecto a los planos dados por sus direcciones normales \hat{j}' y \hat{k}' . De la misma manera surgen:

$$I_{x'y'_i} = m_i x'_i y'_i \quad \text{y} \quad I_{x'z'_i} = m_i x'_i z'_i$$

Pueden tomar valores positivos o negativos e incluso anularse.

Por lo tanto la matriz (4.14) queda expresada:

$$\bar{\bar{I}}_{(o1)_i} = \begin{bmatrix} I_{x'x'_i} & -I_{x'y'_i} & -I_{x'z'_i} \\ -I_{y'x'_i} & I_{y'y'_i} & -I_{y'z'_i} \\ -I_{z'x'_i} & -I_{z'y'_i} & I_{z'z'_i} \end{bmatrix}$$

A la matriz $\bar{\bar{I}}_{(o1)_i}$ se la conoce con el nombre de TENSOR DE INERCIA de la masa m_i con respecto a la terna de origen O_1 . Luego

$$\sum_{i=1}^N \bar{\bar{I}}_{(o1)_i} = \bar{\bar{I}}_{(o1)} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

que representa el tensor de inercia del cuerpo rígido respecto de la terna de origen O_1 . En el Apéndice I -Tensores Cartesianos- se repasan conceptos físicos y de Álgebra Lineal concernientes a estas magnitudes tensoriales.

Notar que $\bar{I}_{(o1)}$ está referido a la terna con respecto a la cual se expresa la velocidad angular $\bar{\omega}$.

De esta forma, la expresión (4.14) queda:

$$\vec{K}_{(o1)} = \vec{r}_G \wedge m \vec{V}_{o1} + \bar{I}_{(o1)} \bar{\omega} \quad (4.16)$$

Según qué punto se tome como centro de reducción, se tendrán diversos casos:

a) Si se toma un punto fijo O_1 del cuerpo, será:

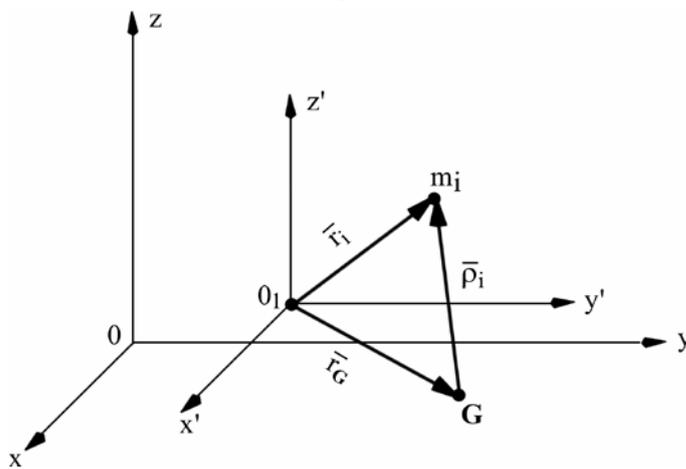
$$\vec{V}_{o1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_{(o1)} = \bar{I}_{(o1)} \bar{\omega} \quad (4.16a)$$

b) En cambio, si se toma $O_1 \equiv G$ resultará:

$$\vec{V}_{o1} \equiv \vec{V}_G \quad ; \quad \vec{r}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_G = \bar{I}_{(G)} \bar{\omega} \quad (4.16b)$$

Si bien la expresión (4.16) es general y de directa aplicación, a veces resulta más sencillo el cálculo del momento cinético respecto de G como primer paso para conocer $\vec{K}_{(o1)}$. En efecto es:

$$\vec{K}_{(o1)} = \sum_1^N m_i \vec{r}_i \wedge \vec{V}_i \quad (4.17)$$



$(0; \hat{i}; \hat{j}; \hat{k})$ terna supuesta fija.

$(0_1; \hat{i}'; \hat{j}'; \hat{k}')$ terna móvil solidaria con el cuerpo.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{\rho}_i \quad (4.18)$$

Reemplazando (4.18) en (4.17):

$$\vec{K}_{(o1)} = \sum_1^N \vec{r}_G \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_1^N \vec{\rho}_i \wedge m_i \vec{V}_i = \vec{r}_G \wedge \sum_1^N m_i \vec{V}_i + \vec{K}_{(G)} = \vec{r}_G \wedge \vec{Q} + \vec{K}_{(G)}$$

luego:

$$\vec{K}_{(o1)} = \vec{K}_{(G)} + \vec{r}_G \wedge \vec{Q} \quad (4.19)$$

La ecuación (4.19) permite conocer el momento cinético respecto de cualquier punto conociendo el referido al baricentro. En ella, \vec{Q} es la cantidad de movimiento del sistema respecto de la terna que se supone fija y \vec{r}_G es el vector posición de G desde O_1 .

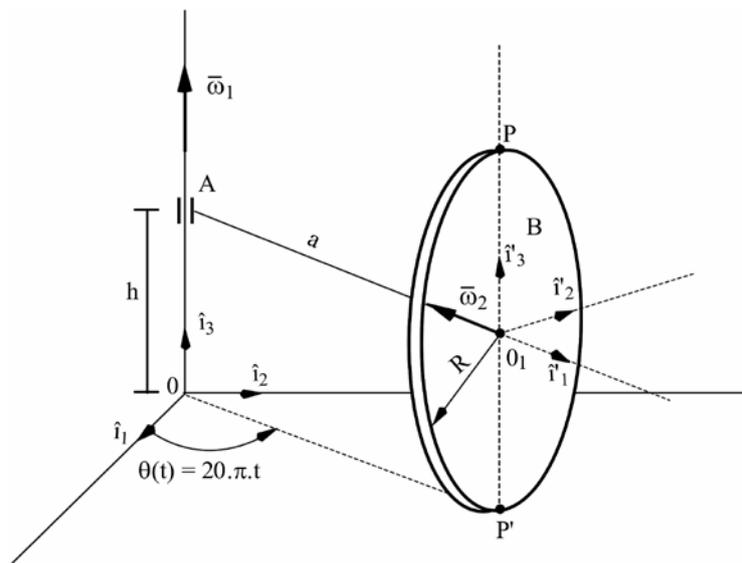
Es indudable que desde el punto de vista práctico conviene referir todos los vectores intervinientes en las expresiones anteriores a la terna solidaria con el cuerpo, porque respecto de ella resultará constante el tensor $\bar{I}_{(o1)}$. Un caso particular en el cual puede simplificarse el movimiento de esta terna, es el de los cuerpos de revolución que aunque se muevan con respecto a un eje de la misma, sus momentos de inercia no cambian respecto de ella (por ejemplo, un disco rotando sobre su eje normal baricéntrico).

Siendo las ecuaciones (4.16) y (4.19) expresiones vectoriales, resulta inmediata la obtención de las formas cartesianas. Desarrollando la ecuación (4.16):

$$\begin{aligned} \vec{K}_{(o1)} &= m \begin{bmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ x_G & y_G & z_G \\ V_{o1x} & V_{o1y} & V_{o1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ & I_{yy} & -I_{yz} \\ Sim & & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \\ &= \left[m(y_G V_{o1z} - z_G V_{o1y}) + (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) \right] \hat{i}' + \\ &+ \left[m(z_G V_{o1x} - x_G V_{o1z}) + (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) \right] \hat{j}' + \\ &+ \left[m(x_G V_{o1y} - y_G V_{o1x}) + (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{zy} \omega_y) \right] \hat{k}' \end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación

Sea la rueda B de la figura sometida a la rotación $\vec{\omega}_1$ de dirección \hat{i}_3 que rueda sin deslizar sobre el plano (\hat{i}_1, \hat{i}_2) . Se considera que la masa de la varilla AO_1 es despreciable. Los parámetros mecánicos y geométricos del problema son:



- a = 20 cm
- r = h = 10 cm
- $\theta(t) = 20 \pi t$
- $\vec{\omega}_1 = 20\pi \hat{i}_3 \text{ 1/s}$
- $\rho = \text{densidad} = 8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- e = espesor = 1 cm
- Nota: Despreciar g para el cálculo de los momentos de inercia

Se desea determinar:

a) Cantidad de movimiento del disco.

b) Energía cinética del disco tomando como centro de reducción: b.1) al punto O_1 , b.2) al punto P, b.3) al punto O.

c) Momento cinético respecto de O.

Solución:

Por comodidad, se referirán los vectores respecto a la terna fija a la varilla $\overline{AO_1}, \{\hat{i}_i'\}$.

$$a) \quad m = \rho \cdot Vol = 8 \text{ gr} / \text{cm}^3 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 1 \text{ cm} = 2,513 \text{ kg.}$$

$$\vec{V}_G = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{a} = 20 \pi \hat{i}_3' \wedge 20 \hat{i}_1' = 400 \pi \hat{i}_2' \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V}_G = 31,58 \hat{i}_2' \left(\frac{\text{Kgm}}{\text{s}} \right)$$

b.1)

$$e_1 = 1/2 m V_G^2 \quad , \quad \vec{V}_G = \vec{V}_{O_1} \quad \therefore$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot 2,513 \text{ kg} \cdot (4\pi)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 198,5 \text{ Joule.}$$

Para hallar $e_2 = 1/2 I_{\omega\omega_{O_1}} \omega^2$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad ; \quad \vec{V}_{P'} = 0 = (\omega_1 a - \omega_2 R) \hat{i}_2' \therefore \vec{\omega}_2 = -40\pi \hat{i}_1' \text{ (1/s)}$$

$$\vec{\omega} = 20 \pi \hat{i}_3' - 40 \pi \hat{i}_1' \text{ (1/s)} \quad \therefore \quad \omega^2 = (20\pi)^2 + (40\pi)^2 = 19.740 \text{ 1/s}^2$$

De tablas (ver Apéndice 1):

$$I'_{11} = \frac{1}{2} m R^2 = 0,01256 \text{ kgm}^2$$

$$I'_{22} = \frac{1}{4} m R^2 = 0,00628 \text{ kgm}^2$$

$$I'_{33} = \frac{1}{4} m R^2 = 0,00628 \text{ kgm}^2$$

$$I'_{12} = I'_{13} = I'_{23} = 0.$$

$$\therefore \bar{I}_{01} \{\hat{i}'_i\} = \begin{bmatrix} 0,01256 & 0 & 0 \\ & 0,00628 & 0 \\ \text{Sim.} & & 0,00628 \end{bmatrix}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \Rightarrow \varphi = 63,42^\circ$$

$$I_{\omega\omega_{01}} = I_{3''3''} = c_{31}^2 I'_{11} + c_{32}^2 I'_{22} + c_{33}^2 I'_{33}$$

$$c_{31} = \cos(\hat{i}_3''; \hat{i}'_1) = \cos(90^\circ + 63,42^\circ) = -0,89431$$

$$c_{32} = \cos 90^\circ = 0.$$

$$c_{33} = \cos 63,42^\circ = 0,44744.$$

$$\therefore I_{\omega\omega_{01}} = 0,011302 \text{ kgm}^2$$

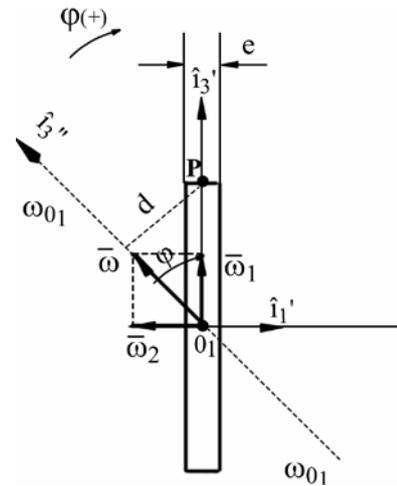
$$\therefore e_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,011302 \cdot 19740 = 111,5 \text{ Joule}$$

además:

$$e_3 = 0 \text{ (porque } 0_1 \equiv G \Rightarrow \vec{r}_G = \vec{0}\text{)}$$

luego

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \cong 310 \text{ Joule}$$

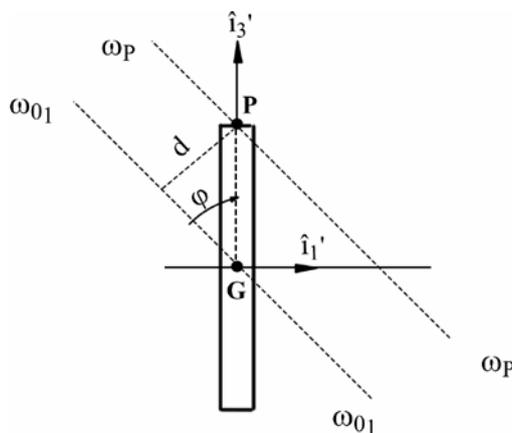


b.2)

$$e_1 = \frac{1}{2} m V_p^2$$

$$\vec{V}_p = \vec{\omega}_2 \wedge (2R\hat{i}'_3) = 800\pi\hat{i}'_2 \text{ (cm/s)} \quad \text{siendo } \vec{V}_p = \vec{V}_{p'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p'p}$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot 2,513 \text{ kg} (8\pi)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2} = 793,7 \text{ Joule.}$$



$$e_2 = \frac{1}{2} I_{\omega\omega p} \omega^2$$

$$I_{\omega\omega p} = I_{\omega\omega G} + md^2$$

$$I_{\omega p} = 0,011302 + 2,513(0,0894)^2 = 0,03138 \text{ Kg m}^2$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,03138 \cdot 19740 \cong 310 \text{ Joule.}$$

$$e_3 = m \vec{V}_p \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_G) = 2,513 \text{ kg} \cdot 8\pi \hat{i}_2 \cdot \left[(20\pi \hat{i}_3' - 40\pi \hat{i}_1') \wedge (-0,1 \hat{i}_3') \right] = -793,7 \text{ Joule}$$

Así,

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \cong 310 \text{ Joule}$$

b.3) Se deja para el alumno demostrar que si se toma como centro de reducción el punto O, se obtiene: $e_1 = 198,40 \text{ J}$; $e_2 = 905,00 \text{ J}$ y $e_3 = -793,40 \text{ J}$, resultando $e \cong 310 \text{ J}$. Verificar que la distancia entre los ejes paralelos a $\vec{\omega}$ que pasan por O y O_1 resulta igual a 0,18 m.

$$c) \vec{K}_{(O)} = \vec{K}_{(G)} + \vec{r}_G \wedge \vec{Q}$$

$$\vec{Q} = m \vec{V}_G = 2,513 \cdot 4\pi \hat{i}_2 = 31,58 \left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \hat{i}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_G \wedge \vec{Q} &= (a \hat{i}_1' + R \hat{i}_3') \wedge 31,58 \hat{i}_2 = \\ &= 6,316 \hat{i}_3' - 3,158 \hat{i}_1' \left(\text{Kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{K}_{(G)} = \vec{I}_{(G)} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0,01256 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00628 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40\pi \\ 0 \\ 20\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,578 \\ 0 \\ 0,394 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{K}_{(O)} = 6,316 \hat{i}_3' - 3,158 \hat{i}_1' - 1,578 \hat{i}_1' + 0,394 \hat{i}_3' \left(\text{Kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$$

$$\vec{K}_{(O)} = -4,73 \hat{i}_1' + 6,71 \hat{i}_3' \left(\text{Kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$$

4.5. Teoremas de la cinética

A continuación se enunciará una serie de teoremas que son válidos para la cinética de los sistemas en general, aunque se particularizarán aquí para los cuerpos rígidos.

4.5.1 Teorema de la derivada de la cantidad de movimiento

Recordando que para una partícula P_i de un sistema se tenía:

$$\vec{F}_{I_i} + \vec{F}_{E_i} = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \quad \text{con } \vec{F}_{E_i} = \vec{F}_{A_i} + \vec{F}_{R_i}$$

donde \vec{F}_{I_i} y \vec{F}_{E_i} son las resultantes de las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre la partícula.

Para un sistema de partículas será:

$$\sum_1^N \vec{F}_{E_i} + \sum_1^N \vec{F}_{I_i} = \sum_1^N m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

para un cuerpo rígido, es $\sum_1^N \vec{F}_{I_i} = \vec{0}$ (por cuanto éstas actúan de a pares, con el mismo

módulo, colineales y opuestas); luego $\sum_1^N \vec{F}_{E_i} = \vec{F}_E$. También es:

$$\sum_1^N m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_1^N m_i \vec{V}_i = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Luego:

$$\vec{F}_E = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (4.20) \text{ Ecuación de Newton}$$

Como $\vec{Q} = m\vec{V}_G$, se observa que si $\vec{F}_E = \vec{0}$ resulta \vec{V}_G constante, lo que indica que el movimiento del baricentro no puede variar si la resultante de las fuerzas exteriores es nula.

Si se ha tomado una terna de referencia en movimiento para referir los vectores se tendrá:

$$\vec{Q} = Qx\hat{i}_1 + Qy\hat{j}_1 + Qz\hat{k}_1$$

y

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{dQx}{dt}\hat{i}_1 + \frac{dQy}{dt}\hat{j}_1 + \frac{dQz}{dt}\hat{k}_1 + Qx\frac{d\hat{i}_1}{dt} + Qy\frac{d\hat{j}_1}{dt} + Qz\frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

Los tres primeros sumandos expresan la variación de \vec{Q} respecto de la terna móvil como si ésta estuviese fija y se denotará: $\left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{rel}$. Los tres siguientes sumandos

pueden expresarse teniendo en cuenta las fórmulas de Poisson: $\frac{d\hat{i}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{i}_1$, etc.,

como $\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}$, siendo $\vec{\Omega}$ la velocidad angular de la terna móvil (que si es solidaria al cuerpo coincidirá con la $\vec{\omega}$ del mismo).

Por lo tanto:

$$\vec{F}_E = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q} \quad (4.20')$$

Esta es la expresión de la ecuación de Newton para ternas de referencia en movimiento.

4.5.2. Teorema de la derivada del momento cinético

Recordando que: $\vec{K}_{(o1)} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i$

donde \vec{r}_i es el vector posición de la partícula genérica i, con origen en el centro de reducción O_1

$$\text{Luego: } \frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} = \sum_1^N \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

Pero: $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i - \vec{V}_{o1}$ (velocidad relativa a la terna móvil)

Notar que aquí \vec{V}_{o1} es la velocidad absoluta de O_1 porque a diferencia de los apartados precedentes, en este caso no se lo ha utilizado como centro de reducción para aplicar la forma impropia de la ley de distribución de velocidades.

Reemplazando

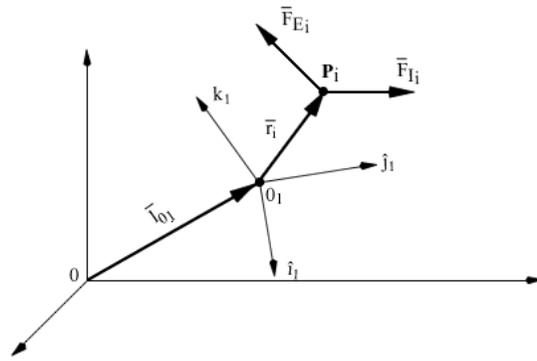
$$\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} = \sum_1^N \vec{V}_i \wedge m_i \vec{V}_i - \sum_1^N \vec{V}_{o1} \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

Donde el primer producto es nulo por cuanto se trata de vectores colineales.

$$\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} = -\vec{V}_{(o1)} \wedge \vec{Q} + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \quad (4.21)$$

Como se vió,

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} &= \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{E_i} + \vec{F}_{I_i}) \\ \therefore \underbrace{\sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{E_i}}_{\vec{M}_{E(o1)}} + \underbrace{\sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{I_i}}_{\vec{M}_{I(o1)} = \vec{0}} &= \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \end{aligned} \quad (4.22)$$



En (4.22), $M_{E(o1)}$ es el momento de todas las fuerzas exteriores respecto del centro de momentos O_1 ; y $\vec{M}_{I(o1)}$ es el momento de las fuerzas interiores respecto de O_1 , que por actuar éstas de a pares y contrarias, en un rígido resulta nulo.

Reemplazando (4.22) en (4.21)

$$\vec{M}_{E(o1)} = \frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} + \vec{V}_{o1} \wedge \vec{Q} \quad (4.23) \text{ Ecuación de Euler}$$

Si el punto O_1 es fijo u $O_1 \equiv G \Rightarrow \vec{V}_{o1} \wedge \vec{Q} = \vec{0}$ y $\vec{M}_{E(o1)} = \frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt}$ (4.23bis)

Si la terna respecto de la cual está referido $\vec{K}_{(o1)}$ no es inercial, es decir que rota con $\vec{\Omega}$, se tendrá:

$$\vec{K}_{(o1)} = K_x \hat{i}_1 + K_y \hat{j}_1 + K_z \hat{k}_1$$

y

$$\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dK_y}{dt} \hat{j}_1 + \frac{dK_z}{dt} \hat{k}_1 + K_x \frac{d\hat{i}_1}{dt} + K_y \frac{d\hat{j}_1}{dt} + K_z \frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

que se transforma en:

$$\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} = \left[\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o1)}$$

y por lo tanto, (4.23) toma la forma:

$$\vec{M}_{E(o1)} = \left[\frac{d\vec{K}_{o1}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o1)} + \vec{V}_{o1} \wedge \vec{Q} \quad (4.23')$$

Esta es la expresión de la ecuación de Euler para ternas de referencia en movimiento.

Si es O_1 fijo $\Rightarrow \vec{V}_{o1} = \vec{0}$ y $\vec{M}_{E(o1)} = \left[\frac{d\vec{K}_{(o1)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o1)}$ (4.23'bis)

Si se toma el baricentro G como centro de reducción, se tiene:

$$O_1 \equiv G \Rightarrow \vec{V}_{o1} = \vec{V}_G \quad \text{y} \quad \vec{V}_a \wedge \vec{Q} = \vec{V}_G \wedge m \vec{V}_G = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{M}_{E(G)} = \left[\frac{d\vec{K}_{(G)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(G)}$$

Como antes, si la terna elegida para expresar los vectores está adherida al cuerpo, será $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$

Las ecuaciones (4.20') y (4.23') constituyen las denominadas **ecuaciones cardinales de la cinética o del movimiento de los cuerpos rígidos**. En el espacio, de estas dos ecuaciones vectoriales se obtienen seis escalares que relacionan entre sí a los parámetros intervinientes en la mayoría de los problemas de la cinética. Esto permite: o bien determinar las seis coordenadas que fijan su posición en función del tiempo, cuando se conoce en cada instante el sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo; o bien encontrar el sistema de fuerzas actuantes si lo que se conoce es el movimiento.

4. 5.3. Teorema de las Fuerzas Vivas

Recordando que para una partícula se tiene:

$$d W_i = d e_i$$

y extendiendo a todo el sistema:

$$d W = d e \tag{4.24}$$

Esta expresión dice que el trabajo elemental de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema es igual a la variación de la energía cinética del mismo. Debe notarse que en el trabajo W intervienen fuerzas interiores y exteriores teniendo presente que si bien $\sum \vec{F}_{I_i} = \vec{0}$, no siempre es $\sum W_{F_i} = 0$, resultando nulo sólo para el caso de los sistemas rígidos. Por este motivo, la aplicación de la ecuación (4.24) sólo se hace posible cuando se conoce el comportamiento de las \vec{F}_I , tal como es el caso de los rígidos o de los sólidos elásticos. Conviene recordar que las expresiones (4.5) y (4.8) nos dan la forma final de la (4.24) para un sistema rígido:

$$dW = \left(\vec{F}_E \cdot \vec{V}_{o1} + \vec{M}_{E(o1)} \cdot \vec{\omega} \right) dt$$

$$de = d \left[\frac{1}{2} m V_{o1}^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega_{o1}} \omega^2 + m \vec{V}_{o1} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_G) \right]$$

Igualando estas expresiones resulta una ecuación diferencial de aplicación directa.

4.5.4 Potencia

Utilizando la definición de Potencia Instantánea del Apartado 3.5.2, surge de la expresión anterior del trabajo que para un cuerpo rígido, es

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_E \cdot \vec{V}_{o1} + \vec{M}_{E(o1)} \cdot \vec{\omega}$$

En el caso que no exista traslación, resulta:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M}_{E(o1)} \cdot \vec{\omega}$$

Esta última expresión es de gran aplicación en los bancos de prueba de motores, en los cuales a determinada velocidad de rotación se mide el par motor para calcular la Potencia entregada.

4.5.5 Teorema de las áreas

Recordando que la velocidad areolar para una partícula es:

$$\dot{\vec{S}}_i = \frac{d\vec{S}_i}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r}_i \wedge \vec{V}_i$$

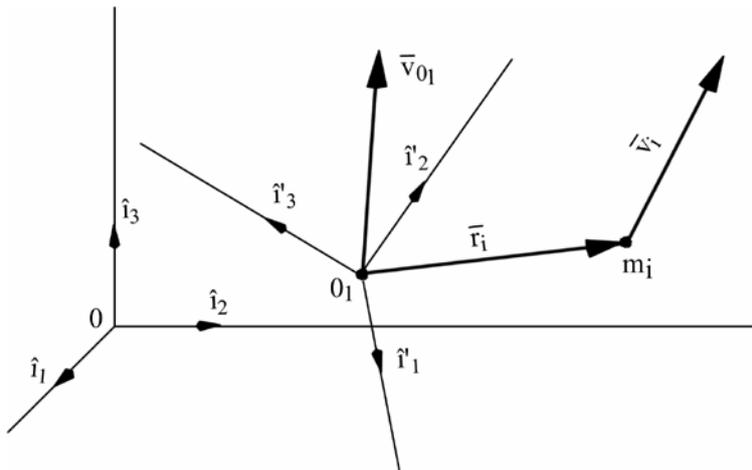
y representa en forma vectorial al área barrida por el vector posición en la unidad de tiempo.

Multiplicando miembro a miembro por la masa de la partícula:

$$m_i \dot{\vec{S}}_i = \frac{1}{2} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i = \frac{1}{2} \vec{K}_{(o1)i}$$

luego $\vec{K}_{(o1)i} = 2m_i \dot{\vec{S}}_i$

$$\text{y por lo tanto} \quad \vec{K}_{(o1)} = 2 \sum_1^N m_i \dot{\vec{S}}_i \quad (4.25)$$



Esta expresión establece que el momento cinético de un sistema de partículas respecto de un punto cualquiera es igual al doble de la sumatoria de la masa por la velocidad areolar respecto del centro de momentos.

De modo que si el momento de las \vec{F}_E con respecto a G ó a un punto fijo es nulo constantemente, según (4.23 bis) resulta $\vec{K}_{(o1)} = \text{vector constante}$ y por lo tanto:

$$\sum m_i \frac{d\dot{\vec{S}}_i}{dt} = \text{vector constante}$$

4.5.6. Teoremas de conservación

A continuación se analiza variación temporal de algunas magnitudes de la Dinámica.

4.5.6.1. Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento

De la expresión (4.20) surge que si un sistema material se encuentra sometido a un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio, es decir, de resultante nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva:

Si $\vec{F}_E = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} = \text{vector constante}$

La cantidad de movimiento no puede ser variada por las fuerzas interiores.

4.5.6.2. Teorema de la conservación del momento cinético

La expresión (4.23 bis) pone de manifiesto que, si el momento de todas las fuerzas exteriores respecto a un punto fijo o al baricentro del sistema material se mantiene nulo durante el movimiento, entonces el momento cinético es constante:

Si $\vec{M}_{E(G)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_{(G)} = \text{vector constante}$

Si $\vec{M}_{E(o_1)} = \vec{0}$ para $\vec{V}_{o_1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_{(o_1)} = \text{vector constante}$

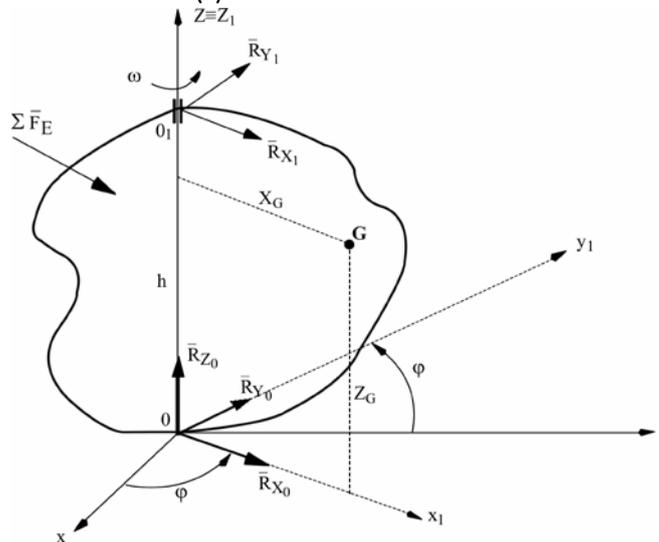
El momento cinético no se puede variar por la acción de fuerzas interiores; será

$$\vec{K}_{(G)} = \bar{I}_{(G)} \vec{\omega} \quad \text{vector constante}$$

$$\vec{K}_{(o_1)} = \bar{I}_{(o_1)} \vec{\omega} \quad \text{vector constante}$$

4.6. Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

Se aplicarán las ecuaciones cardinales para analizar el movimiento y las fuerzas actuantes sobre el cuerpo de la figura, el cual se ve obligado a girar alrededor del eje fijo $\overline{00_1}$ con una rotación $\omega = \omega(t)$.



Los vínculos en O_1 y O quitan cinco grados de libertad introduciendo cinco reacciones de vínculo, tres en O y dos en O_1 .

Sea una terna fija $(\hat{i}; \hat{j}; \hat{k})$, uno de cuyos ejes coincide con el de rotación; luego:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

Se adoptará un sistema móvil de referencia, el cual para simplicidad deberá cumplir con los siguientes requisitos:

a) La terna móvil estará fija al cuerpo y el punto fijo 0 será el origen del sistema de coordenadas por lo que serán nulos los momentos de las reacciones en 0; también uno de sus ejes coincidirá con el de rotación, luego:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}_1$$

b) El centro de gravedad del cuerpo se ubicará dentro de uno de los planos coordenados, eliminándose así una coordenada (en el caso de la figura: y_g). En otras palabras, la proyección del punto G sobre el plano (\hat{i}, \hat{j}) determina la dirección del eje \hat{i}_1 .

Es conveniente referir todos los vectores al sistema móvil, puesto que conociendo $\varphi = \varphi(t)$ es muy sencillo pasar al sistema fijo por transformación de coordenadas. Por otra parte, la distribución espacial de la masa del cuerpo permanecerá constante respecto de este sistema fijo a él, resultando constante el tensor de inercia.

Se supondrá que el cuerpo está sujeto a un sistema de fuerzas activas cuya resultante es:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{Ai} = \vec{F}_A = \sum F_x \hat{i}_1 + \sum F_y \hat{j}_1 + \sum F_z \hat{k}_1$$

y se hallarán las reacciones giratorias $\vec{R}_x; \vec{R}_y; \vec{R}_z; \vec{R}_{x_1}; \vec{R}_{y_1}$ aplicando las ecuaciones cardinales de la dinámica. Estas reacciones se denominan estáticas, en el caso que el cuerpo se analice en estado de reposo y dinámicas cuando se generan como consecuencia del movimiento (desbalanceo, desalineación, etc). A la composición entre estáticas y dinámicas se las denomina reacciones totales.

Para ello, por lo expresado anteriormente, se tomarán momentos respecto del punto fijo 0. Así:

$$\vec{M}_{FE(0)} = (\sum M_x - R_{y_1} h) \hat{i}_1 + (\sum M_y + R_{x_1} h) \hat{j}_1 + \sum M_z \hat{k}_1$$

La cantidad de movimiento será

$$\vec{Q} = m \vec{V}_G = m \vec{\omega} \wedge \vec{r}_G = m \omega \hat{k}_1 \wedge (x_G \hat{i}_1 + z_G \hat{k}_1)$$

$$\therefore \vec{Q} = m \omega x_G \hat{j}_1$$

Por lo tanto:

$$\left[\frac{d \vec{Q}}{d t} \right]_{rel} = m x_G \dot{\omega} \hat{j}_1$$

y también $\vec{\omega} \wedge \vec{Q} = -m x_G \omega^2 \hat{i}_1$

El momento cinético $\vec{K}_{(0)}$ es:

$$\vec{K}_{(0)} = \vec{K}_{(G)} + \vec{r}_G \wedge \vec{Q}$$

$$\text{con } \vec{K}_{(G)} = \bar{I}_G \vec{\omega} \quad \text{o} \quad \vec{K}_{(o)} = \bar{I}_{(o)} \vec{\omega} + \vec{r}_G \wedge m \vec{V}_o$$

En este caso 0 es un punto fijo y por lo tanto V_0 es nula.

Como se dijo, el tensor de inercia se referirá a los ejes móviles. Así resultará, de (4.16.

a):

$$\vec{K}_{(o)} = \begin{bmatrix} * & * & -I_{xz} \\ * & * & -I_{yz} \\ * & * & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = -I_{xz} \omega \hat{i}_1 - I_{yz} \omega \hat{j}_1 + I_{zz} \omega \hat{k}_1$$

donde los asteriscos indican las componentes del tensor que no hacen falta ser calculadas por no intervenir en el producto matricial (debido a las componentes nulas de $\vec{\omega}$). Por lo tanto:

$$\left[\frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} \right]_{rel} = -I_{xz} \dot{\omega} \hat{i}_1 - I_{yz} \dot{\omega} \hat{j}_1 + I_{zz} \dot{\omega} \hat{k}_1$$

y:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(o)} = I_{yz} \omega^2 \hat{i}_1 - I_{xz} \omega^2 \hat{j}_1$$

Habiendo encontrado todos los términos que componen las ecuaciones cardinales, se está en condiciones de proseguir con su aplicación.

De la primera de ellas:

$$\vec{F}_E = \vec{F}_A + \vec{F}_R = \dot{\vec{Q}} = \left[\dot{\vec{Q}} \right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{Q} \quad \text{Expresión de Newton}$$

reemplazando y separando en componentes surge:

$$\begin{cases} \sum F_x + R_{X_o} + R_{X_1} = -m X_G \omega^2 \\ \sum F_y + R_{Y_o} + R_{Y_1} = m X_G \dot{\omega} \\ \sum F_z + R_{Z_o} = 0 \end{cases} \quad (4.26.a)$$

La última de las tres igualdades expresa que las reacciones sobre \hat{k} no están afectadas por el movimiento de acuerdo con las condiciones que se han elegido.

De la segunda de las ecuaciones cardinales (ecuación de Euler):

$$\vec{M}_{(o)} = \left[\frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(o)}$$

Donde nuevamente se ha tomado $V_0 = 0$

Se obtiene:

$$\begin{cases} \sum M_x - R_{Y_1} h = -I_{xz} \dot{\omega} + I_{yz} \omega^2 \\ \sum M_y + R_{X_1} h = -I_{yz} \dot{\omega} - I_{xz} \omega^2 \\ \sum M_z = I_{zz} \dot{\omega} \end{cases} \quad (4.26.b)$$

Estas seis últimas expresiones (4.26 a y b) permiten analizar el caso general en el cual la velocidad angular $\vec{\omega}$ varía con el tiempo (por ejemplo, en el arranque de una turbina, motor eléctrico, etc).

Algunos casos particulares son:

a) Caso en que $\vec{\omega} = cte$

Se tendrá:

$$\begin{cases} \sum F_x + R_{X_o} + R_{X_1} = -m x_G \omega^2 \\ \sum F_y + R_{Y_o} + R_{Y_1} = 0 \\ \sum F_z + R_{Z_o} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_x - R_{Y_1} h = I_{yz} \omega^2 \\ \sum M_y + R_{X_1} h = -I_{xz} \omega^2 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Esta última igualdad a cero es una condición necesaria y no una ecuación, puesto que si existiera momento en \hat{k} , habría aceleración angular γ , y $\therefore \omega = \omega(t) \neq cte$

Se nota que a pesar de considerar $\omega = cte$, algunas reacciones están influenciadas por el movimiento.

b) Si la única fuerza activa fuese el peso (siempre con $\omega = cte$), se tendría:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A = -m g \hat{k} \Rightarrow \sum F_x = \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = -m g \\ M_x = M_z = 0 \\ M_y = m g x_G \end{aligned}$$

y las ecuaciones cardinales:

$$\begin{cases} R_{X_o} + R_{X_1} = -m X_G \omega^2 \\ R_{Y_o} + R_{Y_1} = 0 \\ -m g + R_{Z_o} = 0 \\ -R_{Y_1} h = I_{yz} \omega^2 \\ m g X_G + R_{X_1} h = -I_{xz} \omega^2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

c) Cuando el centro de masas del cuerpo G está sobre \hat{k} , siendo $m\vec{g}$ la única fuerza actuante, se tiene:

$$\begin{cases} R_{X_o} + R_{X_1} = 0 \\ R_{Y_o} + R_{Y_1} = 0 \\ -mg + R_{Z_o} = 0 \\ -R_{Y_1} h = I_{yz} \omega^2 \\ R_{X_1} h = -I_{xz} \omega^2 \end{cases}$$

puede observarse que:

$$R_{X_1} = \frac{-I_{xz} \omega^2}{h}; R_{X_o} = -R_{X_1}$$

$$R_{Y_1} = \frac{-I_{yz} \omega^2}{h} \quad R_{Y_o} = -R_{Y_1} \quad R_{Z_o} = mg$$

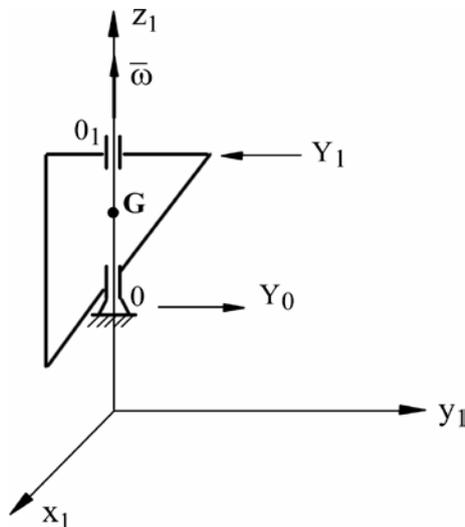
Nótese que a pesar de no existir fuerzas activas en las direcciones x_1 e y_1 , sí existen reacciones de vínculo en esas mismas direcciones. Por lo tanto, éstas surgen como consecuencia del movimiento y no de la carga. R_{Z_o} no depende del movimiento ya que sólo equilibra al peso.

Por otra parte, siendo:

$$R_{X_o} = -R_{X_1} \quad \gamma \quad R_{Y_o} = -R_{Y_1}$$

surge claramente que las reacciones dinámicas generan cuplas.

d) Sistema de fuerzas activas cuya resultante (incluido el peso) pasa por el punto 0



se tendrá:

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

y por lo tanto:

$$\sum F_x + R_{X_o} + R_{X_1} = 0$$

$$\sum F_y + R_{Y_o} + R_{Y_1} = 0$$

$$\sum F_z + R_{Z_o} = 0$$

$$-R_{Y_1} \cdot h = I_{yz} \omega^2$$

$$R_{X_1} \cdot h = -I_{xz} \omega^2$$

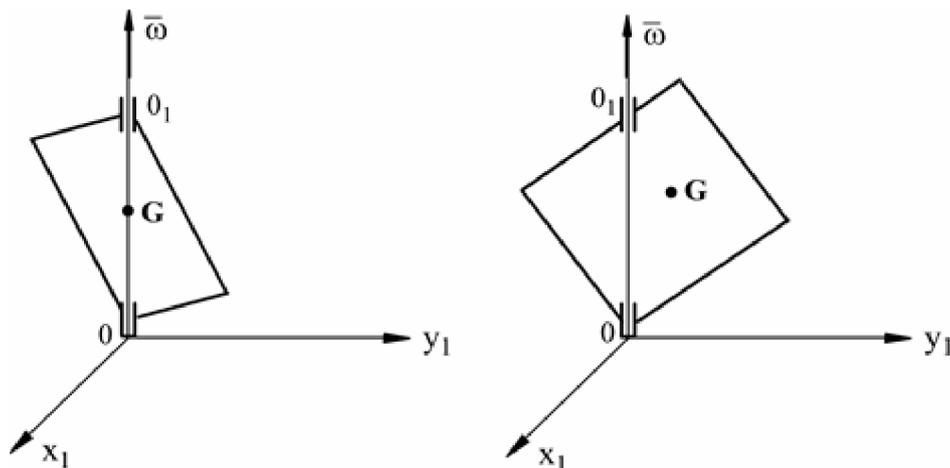
Se observa que el vínculo en 0 absorbe a la resultante \vec{F}_A .

Las reacciones R_{X_1} y R_{Y_1} dependen exclusivamente del movimiento (puesto que si $\omega = 0$, éstas no existen) y por ello reciben el nombre de reacciones dinámicas. Así mismo, R_{X_0} , R_{Y_0} , R_{Z_0} dependen de las \vec{F}_A y del movimiento denominándose reacciones totales. La diferencia vectorial entre las reacciones totales y las dinámicas, da como resultado las reacciones estáticas. Es sencillo observar que para que no se produzcan esfuerzos dinámicos en el sistema material rígido, deberán anularse I_{yz} e I_{xz} para lo cual el eje de rotación debe coincidir con un eje principal de inercia.

Así por ejemplo, si la chapa triangular de la figura está en reposo no ejerce ningún empuje lateral sobre los soportes, debido a que su centro de gravedad está sobre \hat{k} ; sólo existirá la reacción estática R_{Z_0} . Se dice que la chapa se halla estáticamente equilibrada.

Sin embargo, y dado que z_1 no es eje principal de inercia, es $I_{yz} \neq 0$ y las reacciones R_{Y_0} y R_{Y_1} serán proporcionales a ω^2 cuando la chapa comience a girar con $\vec{\omega} = \omega \hat{k}_1$. Estas reacciones giran con la chapa originando desgaste en los cojinetes y vibraciones en las estructuras que los soportan. Un mecanismo está dinámicamente equilibrado si las fuerzas antes y durante el movimiento son las mismas.

En el caso de la chapa en forma de paralelogramo de la figura de la izquierda, se observa que si no hay movimiento la misma está en equilibrio estático (con reacciones en 0 vertical y sin reacción en O_1).

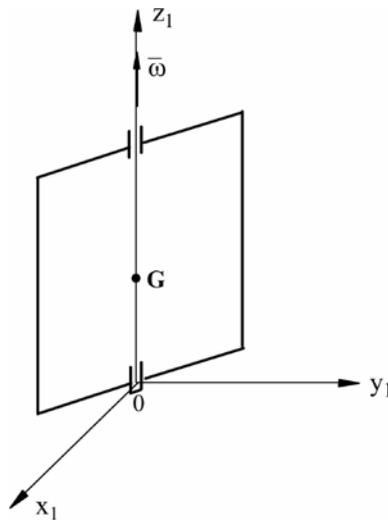


Al ponerse en movimiento ($\omega \neq 0$) se desequilibrará, puesto que z_1 no es eje principal de inercia. (Si la chapa fuese cuadrada sí lo sería y no habría desequilibrio). Los anteriores son casos de desbalanceo dinámico.

La chapa de la figura de la derecha se encuentra en equilibrio estático (si $\omega = 0$) con reacciones en O_1 y O . Al ponerse en movimiento se desequilibrará, por cuanto G no coincide con el eje principal de inercia. Este es un caso de desbalanceo estático y dinámico.

Estas consideraciones son muy útiles para el balanceo de rotores industriales, ya que el desbalanceo estático genera reacciones en fase en los cojinetes, mientras que el dinámico, produce reacciones en contrafase, lo que permite discriminarlos electrónicamente y así proceder al equilibrado por separado.

Un caso de equilibrio estático y dinámico sería el de la figura:



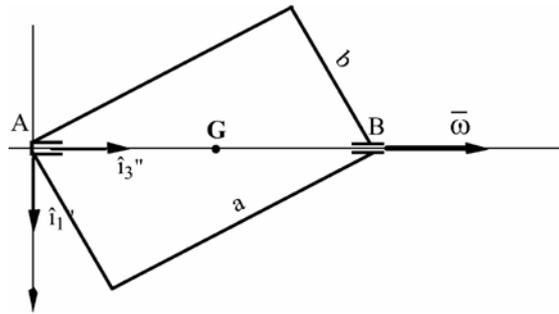
PROBLEMA EJEMPLO

Una chapa rectangular homogénea de lados a y b gira alrededor de la diagonal, estando sometida a su peso $m\vec{g}$. Hallar las reacciones de vínculo (totales) \vec{R}_A y \vec{R}_B

Se aplicarán las ecuaciones de Newton (4.20') y de Euler (4.23'), tomando como terna de referencia la $\{\hat{i}_i\}$ solidaria a la chapa, es decir, rotando con $\vec{\omega}$ alrededor de $\{\hat{i}_3\}$

$$\vec{\Sigma} \vec{F}_E = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{Q}$$

$$\vec{\Sigma} \vec{M}_{FE(A)} = \left[\frac{d\vec{K}_{(A)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(A)} + \vec{V}_A \wedge \vec{Q}$$

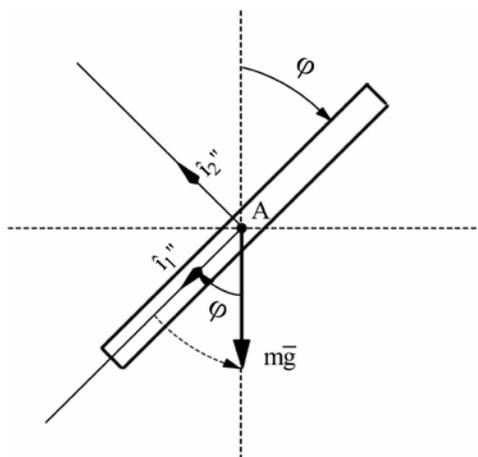


Solución:

Ecuación de Newton:

$$\vec{Q} = m\vec{V}_G = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_E = \vec{0}$$

Tomando un ángulo ϕ entre el plano de la chapa y un plano vertical de referencia pasante por AB, se tiene



$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

$$\begin{aligned} \vec{W} &= m\vec{g} = mg (\cos \phi \hat{i}_1'' - \text{sen } \phi \hat{i}_2'') \\ \sum \vec{F}_E &= \vec{W} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \\ &= m g (\cos \phi \hat{i}_1'' - \text{sen } \phi \hat{i}_2'') + R_{A_1} \hat{i}_1'' + \\ &+ R_{A_2} \hat{i}_2'' + R_{A_3} \hat{i}_3'' + R_{B_1} \hat{i}_1'' + R_{B_2} \hat{i}_2'' = \vec{0} \end{aligned}$$

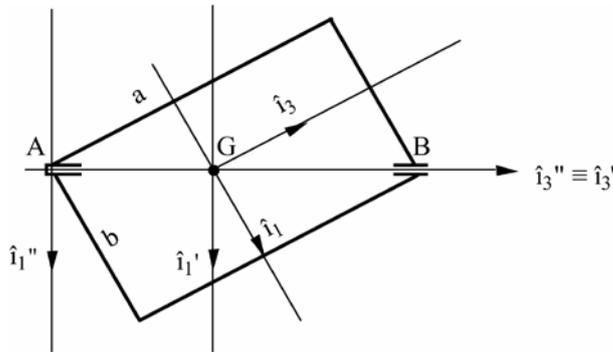
Luego:

$$\begin{cases} m g \cdot \cos \phi + R_{A_1} + R_{B_1} = 0 \\ -m g \cdot \text{sen } \phi + R_{A_2} + R_{B_2} = 0 \\ R_{A_3} = 0 \end{cases}$$

Ecuación de Euler:

Ahora $\vec{K}_{(A)} = \bar{I}_{(A)}\vec{\omega}$, y de tablas:

$$I_{11} = \frac{m}{12} a^2 \quad ; \quad I_{22} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad ; \quad I_{33} = \frac{m}{12} b^2 \quad , \text{ luego es:}$$



$$\bar{I}_{(G)} \{ \hat{i}_i \} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

a) Rotación al sistema $\{ \hat{i}'_i \}$

$$I'_{ij} = c_{im} c_{jn} I_{mn}$$

es:

$$c_{11} = \cos \gamma_{11} = \cos \left(\text{arctg} \frac{b}{a} \right)$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{23} = c_{32} = \cos 90^\circ = 0$$

$$c_{13} = \cos (90^\circ + \gamma_{11})$$

$$c_{22} = \cos 0^\circ = 1$$

$$c_{31} = \cos (270^\circ + \gamma_{11})$$

$$c_{33} = \cos \gamma_{11}$$

luego:

$$I'_{11} = c_{11}^2 I_{11} + c_{12}^2 I_{22} + c_{13}^2 I_{33}$$

$$I'_{12} = 0$$

$$I'_{13} = c_{11} c_{31} I_{11} + c_{13} c_{33} I_{33}$$

$$I'_{21} = 0$$

$$I'_{22} = I_{22}$$

$$I'_{23} = 0$$

$$I'_{31} = c_{31} c_{11} I_{11} + c_{33} c_{13} I_{33} = I'_{13}$$

$$I'_{32} = 0$$

$$I'_{33} = c_{31}^2 I_{11} + c_{33}^2 I_{33}$$

b) Traslación al sistema $\{ \hat{i}_i'' \}$

Aplicando el Teorema de Steiner para ejes paralelos (Apéndice 1, apartado A1.2):

$$I''_{11} = I'_{11} + m \left[\frac{a^2 + b^2}{4} \right]$$

$$I''_{12} = I'_{12} + m \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$I''_{13} = I'_{13} + m \cdot 1/2 \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot 0 = I'_{13}$$

$$I''_{21} = 0$$

$$I''_{22} = I'_{22} + m \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right)$$

$$I''_{23} = 0$$

$$I''_{31} = I'_{31} + 0 = I'_{31}$$

$$I''_{32} = 0$$

$$I''_{33} = I'_{33}$$

Así resulta el tensor de inercia en A referido a los ejes $\{ \hat{i}_i'' \}$, y aplicando Euler:

$$\vec{K}_{(A)} = \begin{bmatrix} I''_{11} & 0 & I''_{13} \\ 0 & I''_{22} & 0 \\ I''_{31} & 0 & I''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = I''_{13} \omega \hat{i}_1'' + I''_{33} \omega \hat{i}_3''$$

Recordar que al trabajar numéricamente los momentos de inercia centrífugos deben cambiarse de signo al introducirlos en el tensor de inercia.

$$\left[\frac{d\vec{K}_{(A)}}{dt} \right]_{rel} = I''_{13} \dot{\omega} \hat{i}_1'' + I''_{33} \dot{\omega} \hat{i}_3''$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(A)} = I''_{13} \omega^2 \hat{i}_2''$$

$$\vec{V}_{(A)} \wedge \vec{Q} = \vec{0}$$

El momento de las fuerzas exteriores respecto de A, será:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_{FE(A)} &= \vec{r}_G \wedge m\vec{g} + \vec{r}_B \wedge \vec{R}_B = 1/2 (a^2 + b^2)^{1/2} \hat{i}_3 \wedge mg (\cos \phi \hat{i}_1 - \text{sen } \phi \hat{i}_2) + \\ &+ (a^2 + b^2)^{1/2} \hat{i}_3 \wedge (R_{B_1} \hat{i}_1 + R_{B_2} \hat{i}_2) = \\ &(a^2 + b^2)^{1/2} \left[\left(\frac{m g \text{ sen } \phi}{2} - R_{B_2} \right) \hat{i}_1 + \left(\frac{m g \cos \phi}{2} + R_{B_1} \right) \hat{i}_2 \right] \end{aligned}$$

e igualando en componentes:

$$\begin{cases} I_{13}'' \dot{\omega} = \left(\frac{m g \text{ sen } \phi}{2} - R_{B_2} \right) (a^2 + b^2)^{1/2} \\ I_{13}'' \omega^2 = \left(\frac{m g \cos \phi}{2} + R_{B_1} \right) (a^2 + b^2)^{1/2} \\ I_{33}'' \dot{\omega} = 0 \end{cases}$$

De la última $\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = CTE \Rightarrow \phi = \omega t$, lo que es lógico puesto que no hay ni momento de las \vec{F}_E según \hat{i}_3 ni una cupla aplicada en esa dirección.

Así, estas últimas expresiones quedan:

$$\begin{cases} \frac{m g \text{ sen } \phi}{2} - R_{B_2} = 0 \\ \frac{m g \cos \phi}{2} + R_{B_1} = \frac{I_{13}'' \omega^2}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$\begin{cases} R_{B_2} = \frac{m g \text{ sen } \phi}{2} \\ R_{B_1} = \frac{I_{13}'' \omega^2}{(a^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{m g \cos \phi}{2} \end{cases}$$

Retomando las ecuaciones cartesianas de Newton podemos calcular las reacciones en A:

$$\begin{cases} R_{A_1} = \frac{-m g \cos \phi}{2} - \frac{I_{13}'' \omega^2}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ R_{A_2} = \frac{m g \text{ sen } \phi}{2} \end{cases}$$

Analizando estos resultados:

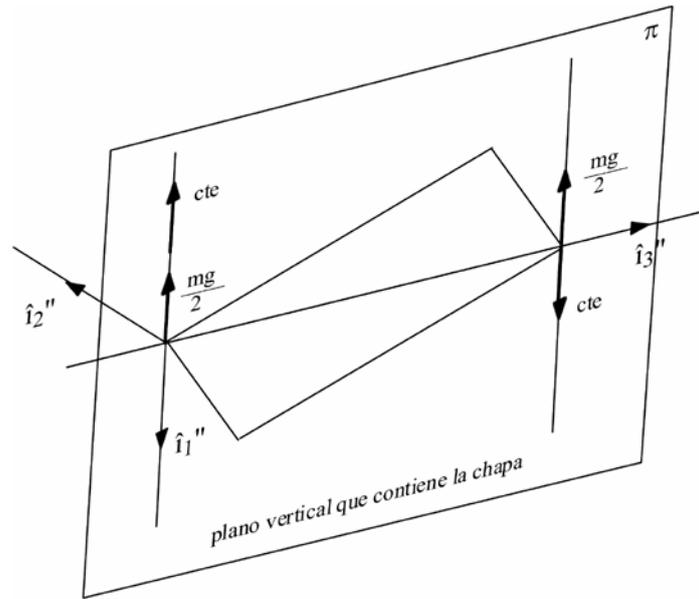
Para $\varphi = 0$ se tiene

$$R_{B1} = cte - \frac{m g}{2}$$

$$R_{B2} = 0$$

$$R_{A1} = -\frac{m g}{2} - cte$$

$$R_{A2} = 0$$



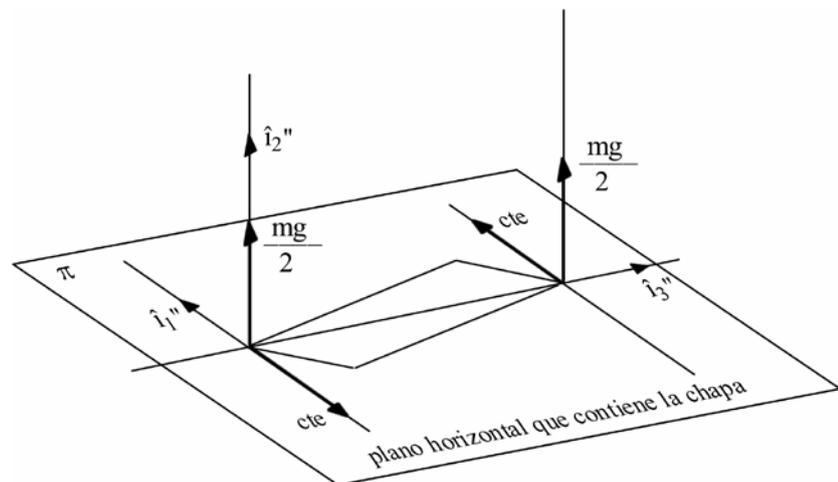
Para $\varphi = \pi/2$

$$R_{B1} = cte$$

$$R_{B2} = \frac{m g}{2}$$

$$R_{A1} = - cte$$

$$R_{A2} = \frac{m g}{2}$$



Puede observarse claramente que mientras las reacciones estáticas generadas en este caso por el peso permanecen inalteradas con el movimiento, la cupla dinámica rota con la chapa.

4.7. Dinámica del Movimiento Polar: Movimiento de un Cuerpo Rígido Alrededor de un Punto Fijo.

Se vio que cuando el cuerpo tiene un punto fijo O , las ecuaciones cardinales de la cinética toman la forma:

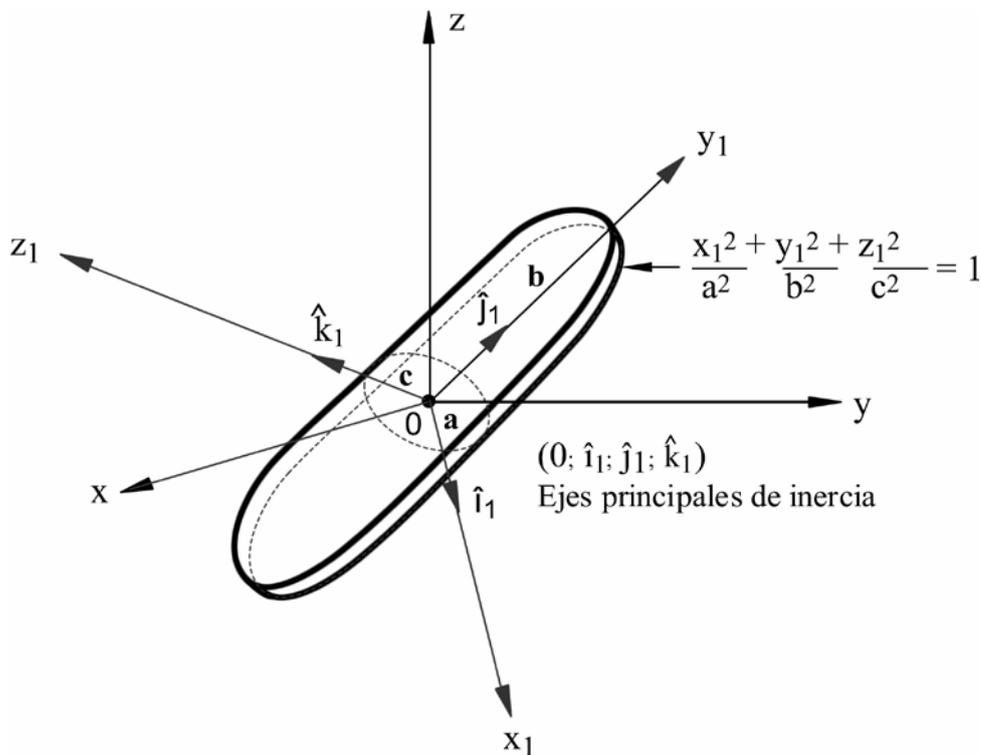
$$\vec{F}_E = \left[\frac{d \vec{Q}}{d t} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}$$

$$\vec{M}_{E(o)} = \left[\frac{d \vec{K}_{(o)}}{d t} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o)}$$

en las cuales el subíndice *rel* indica que las derivadas deben efectuarse como si la terna en rotación $0(\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ permaneciera inmóvil, y $\vec{\Omega}$ es la rotación absoluta de esta última terna respecto de la $0(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, que cuando los ejes $\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ son solidarios al cuerpo es la rotación absoluta de éste último ($\vec{\omega}$).

Se verá como se aplican en este caso las ecuaciones cardinales.

Para el estudio que se propone encarar se tomará una terna de referencia móvil unida solidariamente al cuerpo, la cual, para mayor simplicidad coincidirá con los ejes principales de inercia del mismo con origen en el punto fijo 0. En la Figura se ilustra el elipsoide de inercia de tal cuerpo (Ver Apéndice I, Tensores Cartesianos – A1.4).



En este caso, el tensor de inercia del cuerpo en el punto 0, será:

$$\bar{I}_{0\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1\}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Además, el cuerpo tendrá tres grados de libertad, es decir que su posición quedará expresada por los tres ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ) y la velocidad de cada punto se conocerá por el vector rotación:

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{\omega} = \omega_x \hat{i}_1 + \omega_y \hat{j}_1 + \omega_z \hat{k}_1$$

Luego el vector $\vec{K}_{(0)}$ será

$$\vec{K}_{(o)} = \vec{I}_o \vec{\omega} = I_{xx} \omega_x \hat{i}_1 + I_{yy} \omega_y \hat{j}_1 + I_{zz} \omega_z \hat{k}_1$$

y por lo tanto

$$\left[\frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} \right]_{rel} = I_{xx} \dot{\omega}_x \hat{i}_1 + I_{yy} \dot{\omega}_y \hat{j}_1 + I_{zz} \dot{\omega}_z \hat{k}_1$$

El producto $\vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(o)}$ resultará

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_{(o)} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 & \hat{j}_1 & \hat{k}_1 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx} \omega_x & I_{yy} \omega_y & I_{zz} \omega_z \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{i}_1 (I_{zz} \omega_y \omega_z - I_{yy} \omega_y \omega_z) + \hat{j}_1 (I_{xx} \omega_x \omega_z - I_{zz} \omega_z \omega_x) + \hat{k}_1 (I_{yy} \omega_y \omega_x - I_{xx} \omega_x \omega_y)$$

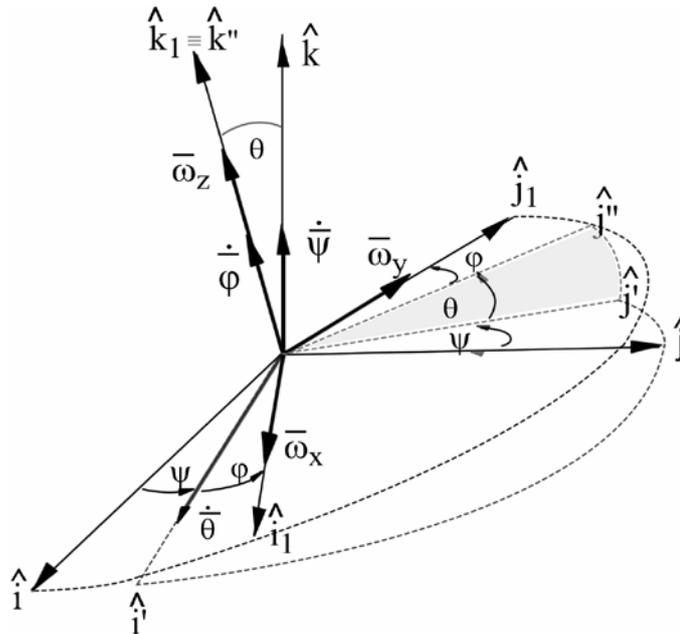
de manera que reemplazando en la ecuación de momentos

$$\begin{cases} M_{E_x(0)} = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}) \\ M_{E_y(0)} = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_{xx} - I_{zz}) \\ M_{E_z(0)} = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}) \end{cases} \quad (4.27)$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Euler. En el caso más general \vec{F}_E y \vec{M}_E serán funciones de t, de \vec{r} y de la velocidad de los puntos en que actúan.

Las componentes de $\vec{\omega}$ podrán expresarse también en función de los ángulos de Euler:

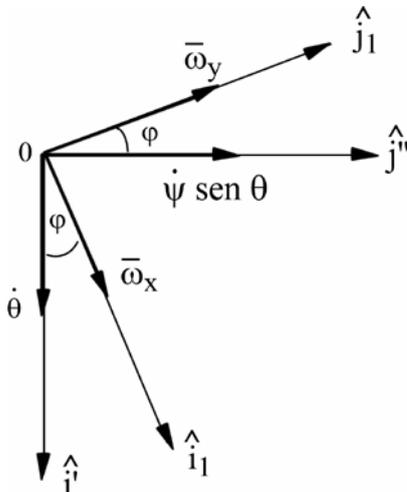
$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{\varphi} + \dot{\varphi} \hat{\theta}$$



Conviene notar que $\dot{\psi}$ se descompone primero en el plano \hat{k}_1, \hat{j}'' :

$$\dot{\psi} = \dot{\psi} \cos \theta \hat{k}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}''$$

luego:



$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones junto con las (4.27) son seis ecuaciones diferenciales de primer orden en $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \psi, \theta, \varphi$ que permiten calcular los ángulos de Euler en función del tiempo, que es el objetivo que se persigue (aunque su integración analítica sólo es posible en algunos casos particulares).

Las ecuaciones de Newton (4.20') resultan útiles en este problema para determinar las reacciones en el punto fijo 0; se tendrá:

$$\vec{Q} = m \vec{V}_G = m \vec{\omega} \wedge \vec{r}_G$$

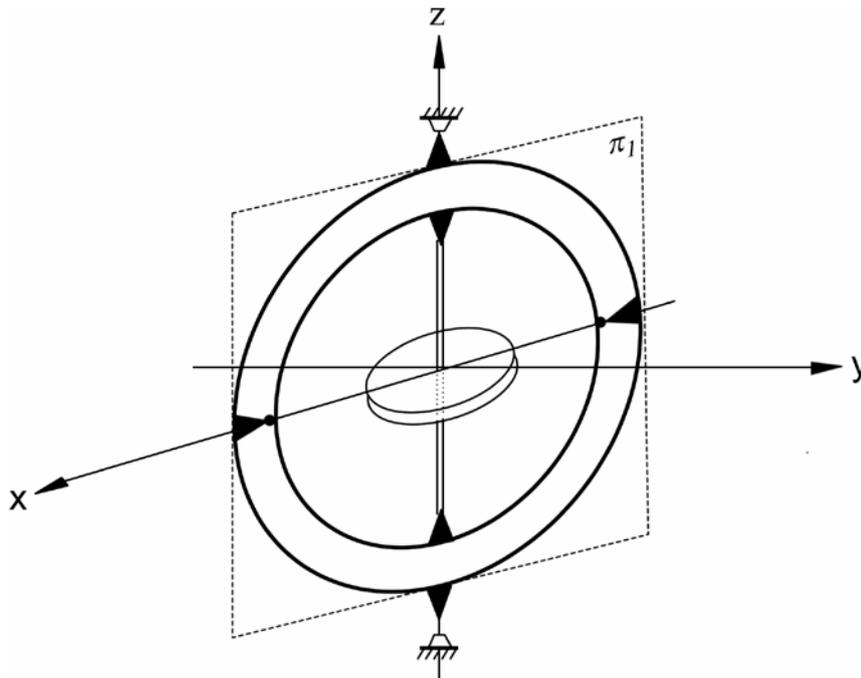
$$y \quad \vec{F}_E = (R_{ox} + \sum F_x) \hat{i}_1 + (R_{oy} + \sum F_y) \hat{j}_1 + (R_{oz} + \sum F_z) \hat{k}_1$$

donde R_{ox} , R_{oy} , R_{oz} son las reacciones (incógnitas) en 0 y $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$, son las fuerzas activas (datos).

Las ecuaciones de Euler (4.27) no son en general integrables, pero resuelven algunos casos particulares, de los cuales los dos más importantes para el ingeniero son:

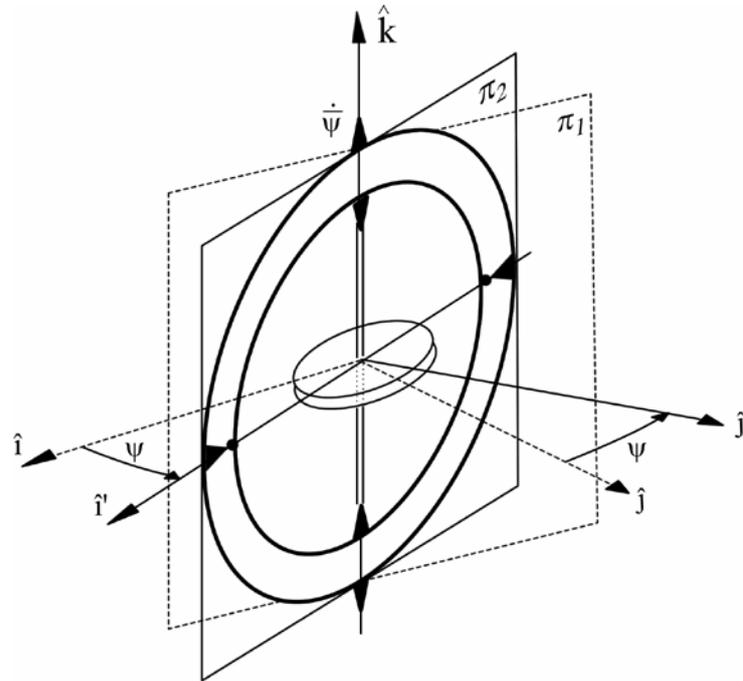
a) Giróscopo liviano en el cual, actuando solamente las fuerzas de gravedad, se deja fijo el baricentro ($0 \equiv G$). El cuerpo con un punto fijo tiene simetría axial y está sometido a un sistema de fuerzas cuya resultante pasa en todo instante por el punto fijo. Es el caso denominado de Euler-Poinsot.

Las condiciones de movimiento de un cuerpo como el aquí estudiado, pueden lograrse mediante la suspensión de Cardan o cardánica que muestra la figura.

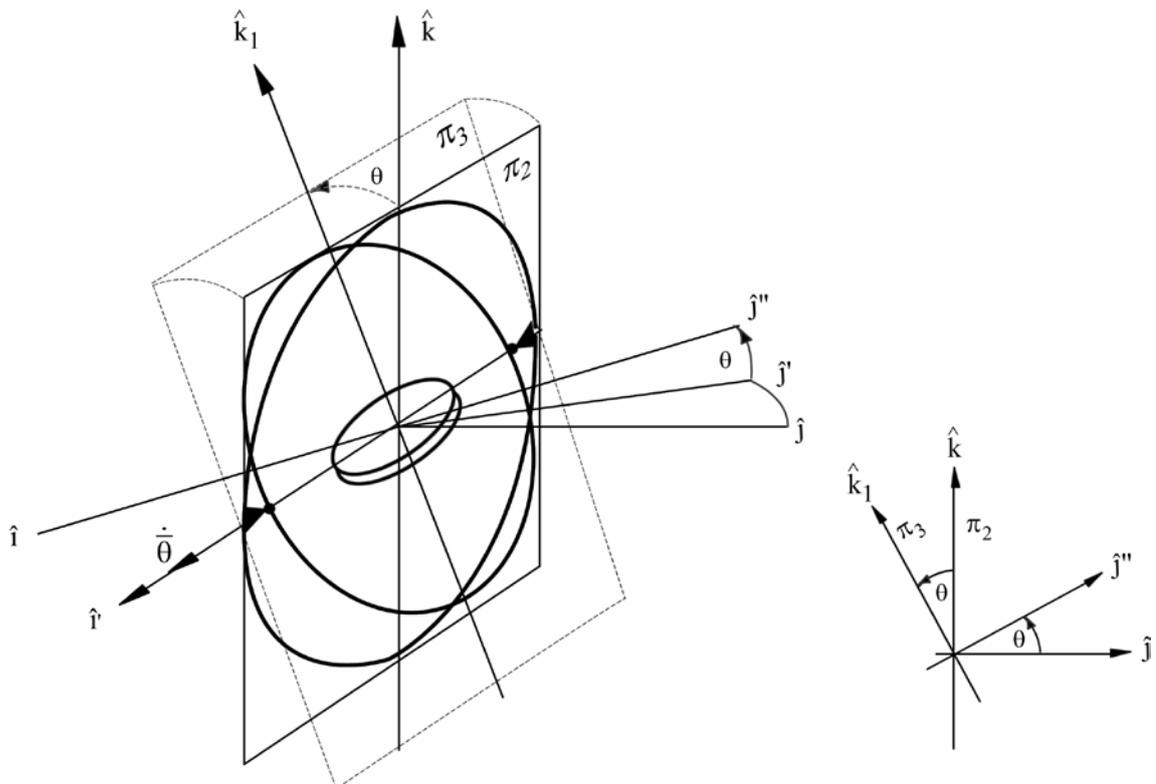


El anillo exterior posee una rótula que le permite el giro sobre el eje \hat{k} . El anillo interior está sujeto con una rótula al exterior que le permite el giro en \hat{i} . El giróscopo está vinculado al anillo interior con una unión que le permite girar sobre su eje de simetría. Los dos aros se encuentran en el plano $\pi_1(\hat{i}, \hat{k})$ cuyo versor normal es \hat{j} ; y el giróscopo en el plano coordenado (\hat{i}, \hat{j}) de versor normal \hat{k} .

Sacando al giróscopo de esta posición, se lo puede "seguir" con los ángulos de Euler. El primer movimiento será el ángulo de precesión ψ alrededor de \hat{k} (único eje fijo), lo que hará que los aros se trasladen al plano $\pi_2(\hat{i}', \vec{k})$; mientras el giróscopo continúa en el plano (\hat{i}', \hat{j}') ,



El segundo movimiento será el ángulo de nutación θ , por el cual el aro interior gira alrededor de \hat{i}' pasando a encontrarse sobre el plano $\pi_3(\hat{i}', \hat{k}_1)$; mientras que el giroscopo se ubica en el plano (\hat{i}', \hat{j}'') normal a \hat{k}_1 .



El último movimiento será el de rotación propia ϕ alrededor de \hat{k}_1 .
 Dado que el cuerpo es de revolución se tomará como terna móvil de referencia a la $(0, \hat{i}', \hat{j}'', \hat{k}_1)$, sin la rotación ϕ a la cual se la denotará $(0, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$. Así, el movimiento del giroscopo será una rotación

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}_1 + \dot{\phi} \hat{k}_1$$

mientras que la de la terna móvil será:

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}_1$$

o, dado que \hat{k} está en el plano (\hat{j}_1, \hat{k}_1) y es $\hat{k} = \cos \theta \hat{k}_1 + \sin \theta \hat{j}_1$; resultan

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}_1 + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \hat{k}_1 \quad (4.28)$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{i}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}_1 + \dot{\psi} \cos \theta \hat{k}_1 \quad (4.29)$$

Las expresiones (4.28) y (4.29) dan los vectores rotación expresados en función de los ángulos de Euler y sus derivadas y están referidos a la terna móvil.

Así, para el giróscopo es:

$$\omega_x = \dot{\theta}$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \quad (4.30)$$

Se convendrá ahora en llamar I_{zz} al momento de inercia principal, respecto del eje de rotación propia y se llamará I a los momentos de inercia respecto de los otros dos ejes, los cuales serán iguales entre sí.

Aplicando la ecuación de Euler,

$$\vec{M}_{E(o)} = \left[\frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o)}$$

donde:

$$\begin{aligned} \vec{K}_{(o)} = \bar{I}_G \vec{\omega} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ & I & 0 \\ sim & & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{bmatrix} = \\ &= I \dot{\theta} \hat{i}_1 + I \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}_1 + I_{zz} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k}_1 \end{aligned}$$

derivando:

$$\left[\frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} \right]_{rel} = I\ddot{\theta}\hat{i}_1 + I(\dot{\psi}\text{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\text{cos}\theta)\hat{j}_1 + (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\text{cos}\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\text{sen}\theta)I_{zz}\hat{k}_1 \quad (4.31)$$

y:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{(o)} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 & \hat{j}_1 & \hat{k}_1 \\ \dot{\theta} & \dot{\psi}\text{sen}\theta & \dot{\psi}\text{cos}\theta \\ I\dot{\theta} & I\dot{\psi}\text{sen}\theta & I_{zz}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta) \end{bmatrix}$$

$$= [I_{zz}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta)\dot{\psi}\text{sen}\theta - I\dot{\psi}^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta]\hat{i}_1 +$$

$$+ [I\dot{\psi}\dot{\theta}\text{cos}\theta - \dot{\theta}I_{zz}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta)]\hat{j}_1 \quad (4.32)$$

Reemplazando (4.31) y (4.32) en la ecuación de Euler

$$\begin{aligned} M_x &= I(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta) + I_{zz}\dot{\psi}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta)\text{sen}\theta \\ M_y &= I\dot{\psi}\text{sen}\theta + 2I\dot{\psi}\dot{\theta}\text{cos}\theta - I_{zz}\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta) \\ M_z &= (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\text{cos}\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\text{sen}\theta)I_{zz} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Estas son las ecuaciones de Euler para determinar el movimiento de un giróscopo sometido a un sistema de fuerzas cualquiera.

Si la única fuerza actuante es el peso

$$M_x, M_y, M_z = 0 \quad y \Rightarrow \frac{d\vec{K}_{(o)}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{K}_{(o)} = cte.$$

y el eje \hat{k}_1 es permanente de rotación; sin embargo las (4.33) resultan muy difíciles de integrar, salvo para casos muy particulares:

Movimiento de precesión estable:

Interesa conocer qué sistema de fuerzas deben aplicarse al giróscopo para que con $\dot{\phi} = CTE$, se tenga una precesión ψ , alrededor de la vertical con θ y $\dot{\psi}$ constantes.

Así, se tiene $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$; reemplazando en las (4.33):

$$\begin{cases} M_x = [I_{zz}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\text{cos}\theta) - I\dot{\psi}\text{cos}\theta]\dot{\psi}\text{sen}\theta \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

o,

$$\vec{M}_{(o)} = [I_{zz}\omega_z - I\dot{\psi}\text{cos}\theta]\dot{\psi}\text{sen}\theta\hat{i}_1$$

Lo que significa que al aplicar un momento respecto al punto 0 según una dirección normal al plano que determinan la rotación propia y la precesión (o sea \hat{k} y \hat{k}_1) se logra poner al giróscopo en precesión estable.

Un caso muy común en ingeniería es el denominado precesión estable normal en el que $\theta = 90^\circ$, de donde $\text{sen } \theta = 1$ y $\text{cos } \theta = 0$, por lo que

$$M_x = I_{zz} \dot{\phi} \dot{\psi}$$

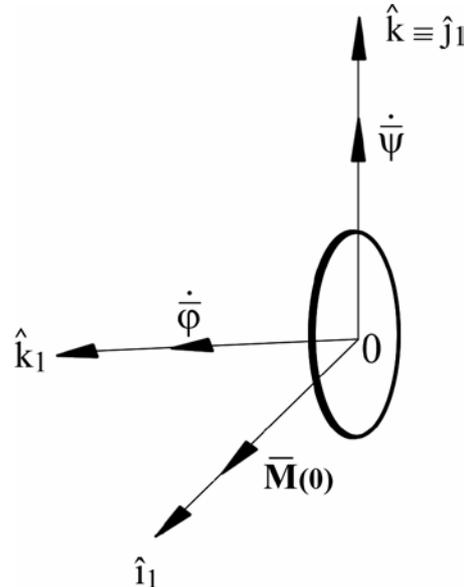
ó
$$\vec{M}_{(o)} = I_{zz} \dot{\phi} \dot{\psi} \hat{i}_1$$

vectorialmente

$$\vec{M}_{(o)} = I_{zz} \dot{\psi} \hat{\psi} \wedge \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$= I_{zz} \dot{\psi} \hat{j}_1 \wedge \dot{\phi} \hat{k}_1 =$$

$$= I_{zz} \dot{\psi} \dot{\phi} \hat{i}_1$$

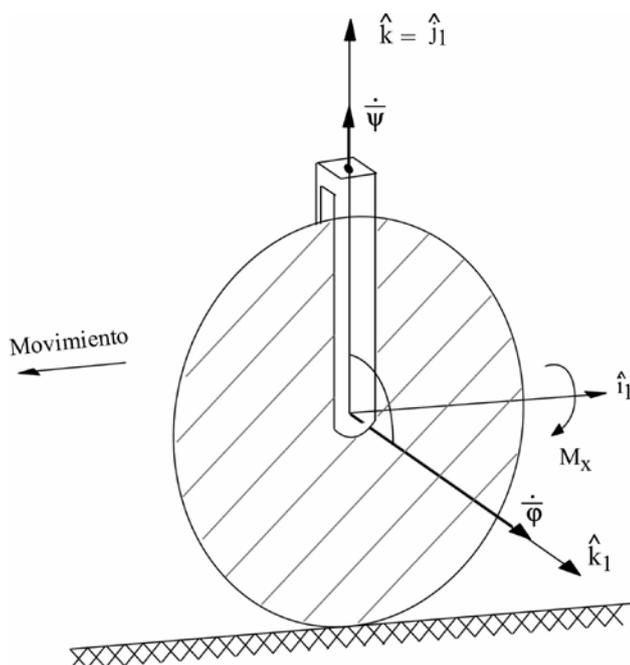


Esta última expresión es la relación que más frecuentemente se emplea en ingeniería mecánica para el movimiento giroscópico y permite hallar el momento dinámico que se produce conociendo $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ cuando la precesión tiene lugar alrededor de un eje normal al eje del rotor.

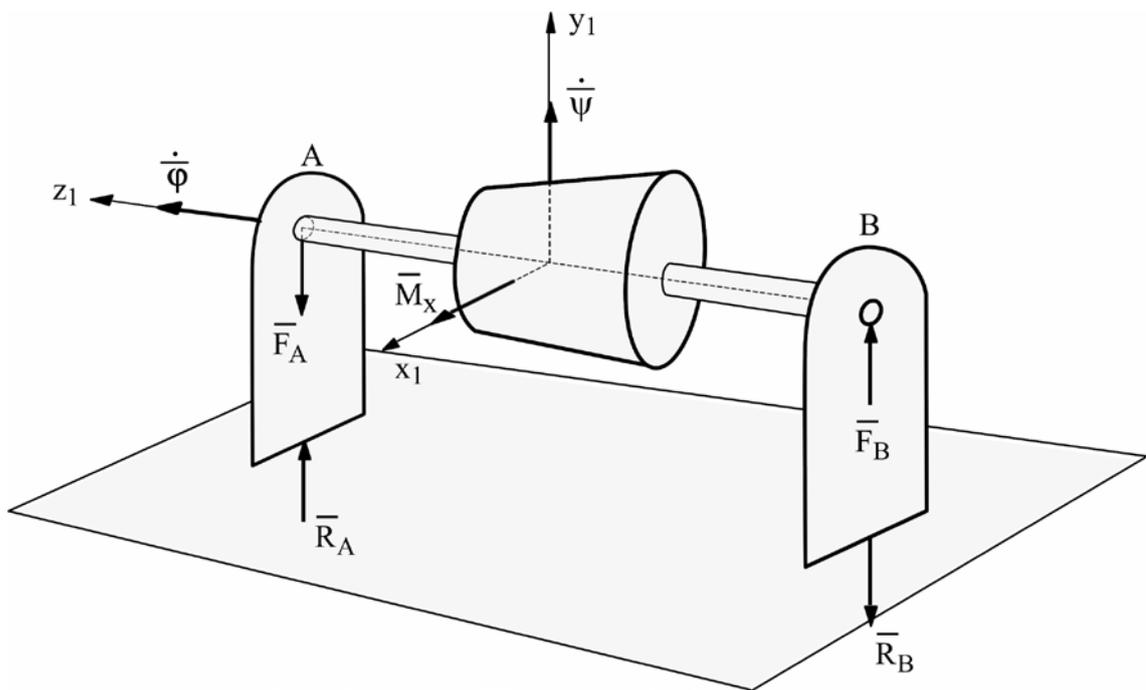
Físicamente, ocurre que si el rotor se encuentra girando con spin $\dot{\phi}$ y se toca el anillo interior (produciendo un momento M_x), el giróscopo entra en precesión, separándose de la mano, deteniéndose al cesar el momento. Este efecto, que suele ser desfavorable para las máquinas, resulta de óptima aplicación en el campo de los estabilizadores.

La rueda de una bicicleta, por ejemplo, se comporta como un giróscopo. Al girar el volante aparece una precesión, generándose un momento normal al plano de $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ que tiende a volcarla.

También este fenómeno tiende a gastar los palieres de los automóviles, ya que al tomar una curva (precesión) aparece un momento normal al plano y la rueda apoya sobre el pavimento forzando la punta de eje.



En el caso de un rotor industrial girando con spin $\dot{\phi}$, la introducción de una precesión normal produce la aparición del momento que tenderá a volcar el rotor generando reacciones en contrafase en los cojinetes.

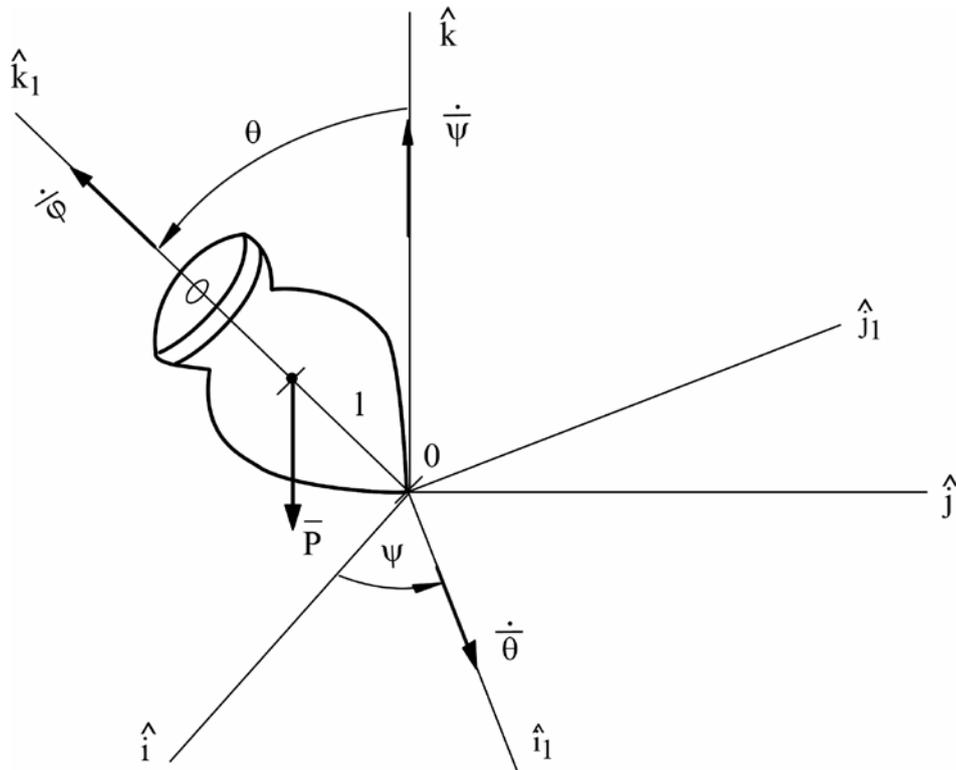


Si la precesión es de carácter alternativo, el momento también lo será y los cojinetes soportarán vibraciones del mismo carácter, generando fatiga que puede conducir a la rotura.

Un caso muy interesante de este fenómeno se produce cuando un avión vira, cambiando la dirección del spin $\dot{\phi}$, apareciendo el momento que según la dirección del giro, forzará al avión a elevarse o a inclinarse hacia el suelo.

b) Trompo o giróscopo pesado. El cuerpo -que es simétrico con respecto a un eje (es decir, cuyo elipsoide de inercia es de revolución: cono, cilindro, pirámide regular, disco, etc.)- posee un punto fijo (O) y además la única fuerza actuante es el peso, que está aplicada en G que pertenece al eje de revolución ($O \neq G$). Es el caso denominado de Lagrange-Poisson.

Considérese al cuerpo rígido simétrico que se observa en la figura:



El $\vec{M}_{(o)}$ referido a la terna móvil para este caso es:

$$\vec{M}_{(o)} = l \hat{k}_1 \wedge (-P \hat{k}) = l \hat{k}_1 \wedge (-P) (\text{sen } \theta \hat{j}_1 + \text{cos } \theta \hat{k}_1)$$

$$\therefore \vec{M}_{(o)} = P l \text{sen } \theta \hat{i}_1$$

es decir:
$$\begin{cases} M_x = P l \text{sen } \theta \\ M_y = M_z = 0 \end{cases}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} P l \text{sen } \theta &= I (\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta) + I_{zz} \dot{\psi} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta) \text{sen } \theta \\ 0 &= I \ddot{\psi} \text{sen } \theta + 2 I \dot{\psi} \dot{\theta} \text{cos } \theta - I \dot{\theta} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta) \\ 0 &= I_{zz} (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \text{cos } \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \text{sen } \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

la última de estas ecuaciones puede escribirse:

$$0 = I_{zz} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta) = I_{zz} \frac{d}{dt} (\omega_z)$$

de donde resulta

$$\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \omega_z = cte.$$

es decir que en este movimiento la velocidad angular total del trompo en la dirección \hat{k}_1 permanece constante.

Se analizará en qué condiciones se producirá una precesión estable; para esto es

$$\theta = cte = \theta_o$$

Si ello ocurre, de la segunda de las (4.34): $0 = I \ddot{\psi} \sin \theta$

de donde resulta $\ddot{\psi} = 0$ y $\therefore \dot{\psi} = cte$

Ahora, en la tercera de las (4.34)

$$0 = I_{zz} \ddot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = cte$$

Así resulta que el trompo tiene una precesión alrededor del eje \hat{k} con un ángulo constante de inclinación θ_o :

De la primera de las (4.34) prosigue que para esta condición:

$$(I_{zz} - I) \cos \theta_o \dot{\psi}^2 + I_{zz} \dot{\phi} \dot{\psi} - P l = 0$$

de donde, resolviendo para $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi}_{1,2} = \frac{-I_{zz} \dot{\phi} \pm \left[I_{zz}^2 \dot{\phi}^2 + 4 P l (I_{zz} - I) \cos \theta_o \right]^{1/2}}{2 (I_{zz} - I) \cos \theta_o} \quad (4.35)$$

como puede observarse, para un mismo ángulo de nutación θ_o , hay en general dos valores para la rapidez de precesión $\dot{\psi}$. Estas se denominan precesión “rápida” y “lenta” según se use el signo + ó - en la expresión (4.35) respectivamente.

Para cualquier movimiento “posible” del trompo, $\dot{\psi}$ debe ser un número real, lo que implica que en la (4.35) debe ocurrir siempre la condición:

$$I_{zz}^2 \dot{\phi}^2 + 4 P l (I_{zz} - I) \cos \theta_o \geq 0$$

Cuanto mayor es el espín $\dot{\phi}$, mayor es ω_z y por lo tanto \hat{k}_1 se acerca a \hat{k} obteniéndose en el límite (si $\omega_z \rightarrow \infty$) un movimiento estable, pues $\hat{k}_1 \rightarrow \hat{k}$ y por lo tanto $\theta \rightarrow 0$.

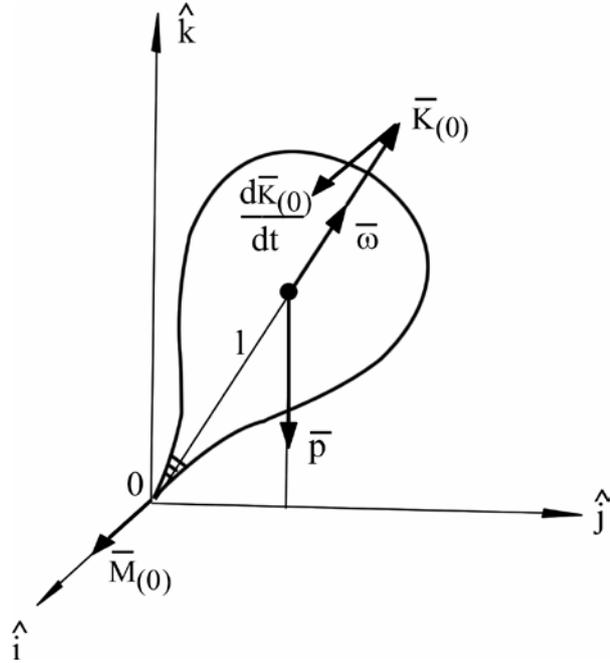
También, cuando la rotación propia sobre el eje \hat{k}_1 es muy grande respecto de las otras dos, el vector momento cinético prácticamente coincide con el versor \hat{k}_1 (coincidiría totalmente si se imprime un movimiento de rotación propia sobre un eje o punto fijo). En este caso es:

$$\vec{K}_{(o)} = \bar{I}_{(o)} \bar{\omega} \cong I_{zz} \omega_z \hat{k}_1$$

pero el peso origina respecto del punto 0 un vector momento

$$\vec{M}_{(o)} = \frac{d \vec{K}_{(o)}}{d t}$$

que representa la velocidad del extremo del vector $\vec{K}_{(o)}$. Por lo tanto, el momento del peso $\vec{M}_{(o)}$ trata de desplazar el extremo de $\vec{K}_{(o)}$ en la dirección de $\vec{M}_{(o)}$ y como $\vec{K}_{(o)}$ debe coincidir con $\bar{\omega}$, el eje de rotación inicia un movimiento de precesión, el cual da lugar al principio de aplicación de los giróscopos.

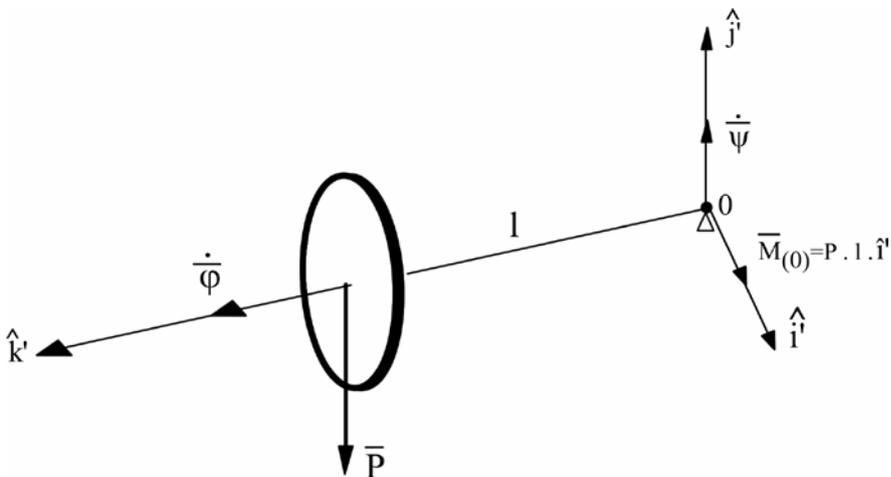


Precesión estable normal: Es particularmente interesante el caso en que $\theta_o = \pi / 2$; si ello ocurre, la $\dot{\psi}$ y la $\dot{\phi}$ son perpendiculares y en la primera de las (4.34) queda:

$$I_{zz} \dot{\phi} \dot{\psi} = P l$$

existiendo sólo una rapidez de precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{P l}{I_{zz} \dot{\phi}}$$

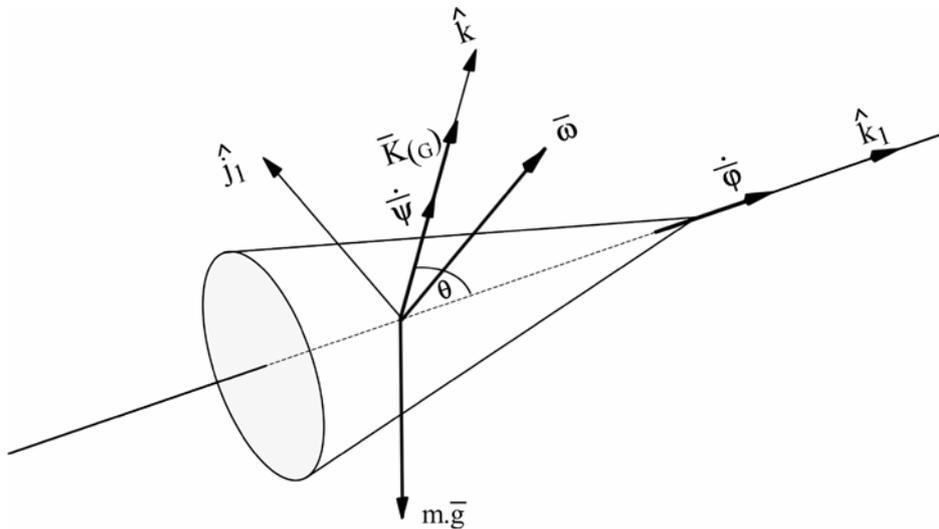


4.8. Movimiento de un cuerpo rígido libre bajo la acción de su propio peso:

Cuando la única fuerza externa que actúa sobre un cuerpo es causada por la gravitación, el movimiento general del cuerpo se conoce como movimiento libre de par motriz. Es característico de los planetas, satélites artificiales y proyectiles (despreciando los efectos de fricción con el aire). Se supondrá que el cuerpo tiene su masa distribuida axialmente simétrica. El origen de los ejes coordenados $\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ se localiza en el centro de masa G. Se nota que $I_{xx} = I_{yy} = I$.

Arrojando el cuerpo hacia el aire, la suma de momentos respecto al baricentro es cero, lo que significa -ecuación (4.23 bis)- que el momento cinético del cuerpo es constante:

$$\vec{M}_{(G)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_{(G)} = cte$$



Tomando $\hat{k} \equiv \vec{K}_{(G)}$ y al eje \hat{j}_1 que quede en el plano formado por los ejes \hat{k}_1 y \hat{k} . El ángulo de nutación θ será el formado por \hat{k} y \hat{k}_1 , y como $\vec{K}_{(G)}$ está en este plano, o sea en el \hat{j}_1, \hat{k}_1 , se tendrá:

$$\vec{K}_{(G)} = K_G \text{ sen } \theta \hat{j}_1 + K_G \text{ cos } \theta \hat{k}_1. \tag{4.36}$$

Además usando la ecuación (4.16b)

$$\begin{aligned} \vec{K}_{(G)} &= \overset{=}{I}_G \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= I \omega_x \hat{i}_1 + I \omega_y \hat{j}_1 + I_{zz} \omega_z \hat{k}_1 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Donde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ representan las componentes según $\hat{i}_1; \hat{j}_1; \hat{k}_1$ de la velocidad angular del cuerpo.

Igualando (4.36) y (4.37) y despejando,

$$\begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = \frac{K_G}{I} \operatorname{sen} \theta \\ \omega_z = \frac{K_G}{I_{zz}} \cos \theta \end{cases}$$

o:

$$\vec{\omega} = \frac{K_G}{I} \operatorname{sen} \theta \hat{j}_1 + \frac{K_G}{I_{zz}} \cos \theta \hat{k}_1$$

y comparando con las (4.30) de giróscopo

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta &= \frac{K_G}{I} \operatorname{sen} \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} &= \frac{K_G}{I_{zz}} \cos \theta \end{aligned}$$

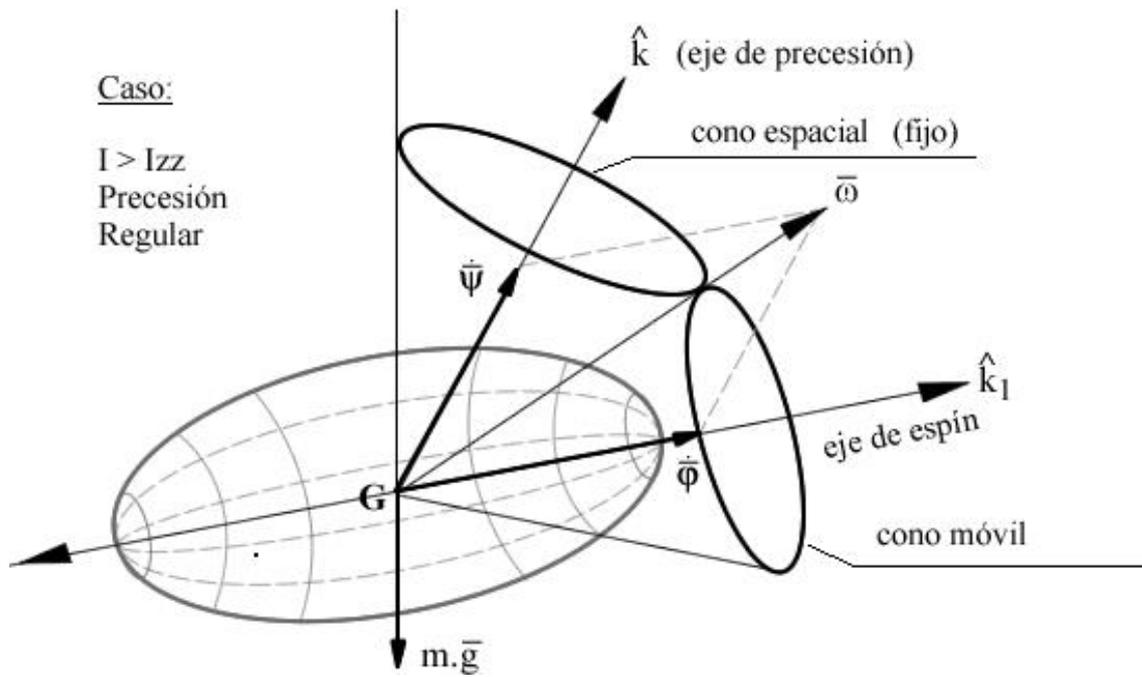
de donde, resolviendo se obtiene:

$$\begin{cases} \theta = cte \\ \dot{\psi} = \frac{K_G}{I} \\ \dot{\phi} = \frac{I - I_{zz}}{I I_{zz}} K_G \cos \theta \end{cases} \quad (4.38)$$

Así, para un movimiento como éste, se observa que el ángulo θ (entre $\vec{K}_{(G)}$ y $\dot{\phi}$) permanece constante durante el movimiento. Además $\vec{K}_{(G)}$, $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ se conservan durante todo el tiempo con lo que éste resulta en una precesión estable. Combinando en (4.38) se tiene la siguiente relación entre el spin y la precesión:

$$\dot{\phi} = \frac{I - I_{zz}}{I_{zz}} \dot{\psi} \cos \theta \quad (4.39)$$

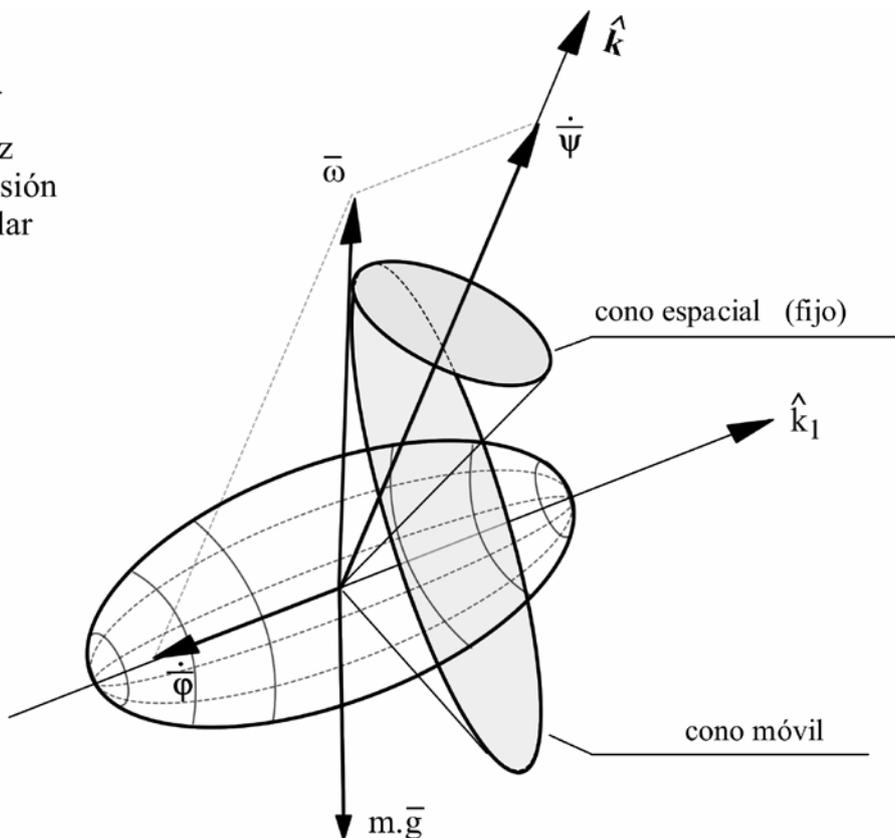
El cuerpo precesa alrededor del eje \hat{k} (fijo) mientras que gira alrededor del \hat{k}_1 (móvil).



El cono espacial (que define la precesión) está fijo, ya que la precesión lo está, mientras que el cono del cuerpo gira alrededor de la superficie exterior del cono espacial sin deslizar.

Como el espín es una función de los momentos de inercia I e I_{zz} del cuerpo puede ocurrir que $I_{zz} > I$ y el espín resulta negativo, siendo la precesión positiva.

Caso:
 $I > I_{zz}$
 Precesión Regular



Capítulo 5

DINÁMICA ANALÍTICA

5. DINÁMICA ANALÍTICA

Desde que Newton enunció formalmente como axiomas las “leyes del movimiento” (Principia Mathematica, Londres, 1686) la Mecánica fue expandiéndose como ciencia a través de numerosos aportes tanto desde la Física como desde la Matemática.

El método de la Dinámica Analítica o de Lagrange presentado un siglo después (Mécanique Analytique, París, 1788), constituye un punto de vista completamente diferente al de sus predecesores. Más que seguir el movimiento de cada masa individual de un sistema, Lagrange introdujo coordenadas generalizadas (q_j) en igual cantidad que los grados de libertad del sistema (k). Suele decirse que el esfuerzo colectivo de organización de la Mecánica del Siglo XVIII culminó con Lagrange, es decir, con la casi perfección formal de la Mecánica Clásica. A partir de aquí se entra en el terreno didáctico.

El método es aplicable a un gran conjunto de problemas de partículas y de cuerpos rígidos que abarca desde los más sencillos hasta los más complejos. Las ventajas de este procedimiento sobre los métodos convencionales, por las razones que se indican a continuación, son de gran importancia.

En gran parte, el método de Lagrange reduce todo el campo de la estática, de la dinámica de partículas y de la dinámica de los cuerpos rígidos a un solo procedimiento que implica las mismas etapas básicas, independientemente del número de masas consideradas, del tipo de coordenadas empleadas, del número de restricciones o vínculos sobre el sistema y de que éstos y el marco de referencia estén o no en movimiento. Por lo tanto, los métodos especiales se reemplazan por un método general único.

Pueden utilizarse una gran variedad de coordenadas generalizadas. Es decir, que las ecuaciones de Lagrange son válidas para cualquier sistema de coordenadas (inerciales o una combinación de inerciales y no inerciales) que resulten adecuadas para representar la configuración del sistema. Estas conducen directamente a las ecuaciones del movimiento en cualquier sistema de coordenadas que se escoja, aunque en ningún caso a la integración de las mismas. No se requiere introducir primero el método vectorial formal y luego hacer la traducción a las coordenadas deseadas.

Las fuerzas de restricción, para los casos de restricciones holónomas lisas, quedan eliminadas automáticamente y no aparecen en las ecuaciones de Lagrange. Como se definió en el Capítulo 2, en las restricciones holónomas las ecuaciones de ligadura o de vínculo pueden expresarse en función de las coordenadas solamente, o de las coordenadas y el tiempo y en ellas el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad. La eliminación de las fuerzas de restricción por métodos convencionales puede presentar dificultades enormes.

El método de Lagrange está basado en gran parte en magnitudes escalares: energía cinética (e), energía potencial (p), trabajo virtual elemental (δW), y en muchos casos, la

potencia (P). Todas ellas pueden expresarse generalmente sin ninguna dificultad en cualquier sistema de coordenadas adecuado. Desde luego, la naturaleza vectorial de la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc, debe tenerse en cuenta en el estudio de los problemas de dinámica. Sin embargo, las ecuaciones de Lagrange, basadas en las anteriores magnitudes escalares tienen en cuenta en forma completa y automática estas magnitudes vectoriales sin necesidad de recurrir a métodos vectoriales formales. Por complejo que sea un sistema, los términos de la ecuación del movimiento de Lagrange consisten en las componentes adecuadas de la fuerza y la aceleración expresadas en el sistema de coordenadas elegido.

Las ideas básicas empleadas en la deducción de las ecuaciones de Lagrange son sencillas. La aplicación de las ecuaciones de Lagrange a los problemas prácticos resulta sencilla aún cuando se trate de problemas complicados. Excepto en los problemas muy elementales, el procedimiento es en general más sencillo y requiere invertir menos tiempo que otros métodos.

Sobre la base de los estudios de Lagrange, en 1853 el matemático irlandés William R. Hamilton introdujo el concepto de las “funciones fuerza” (energía potencial con signo negativo). Sus ecuaciones canónicas transforman el sistema de k ecuaciones diferenciales de segundo orden de Lagrange para el caso de sistemas holónomos conservativos, en un sistema de 2k ecuaciones de primer orden, con la ventaja de incluir una única función, la hamiltoniana (H).

Por cuestiones de tiempo y espacio, este Capítulo pretende presentar en forma resumida los principios básicos de la dinámica de Lagrange y ofrecer al alumno suficiente entrenamiento en las técnicas –físicas y matemáticas- necesarias para aplicar sus ecuaciones. Debido a que esta teoría abarca a la totalidad de la Mecánica, no es posible incluir los aspectos más sofisticados de la misma, alentando al estudiante con inquietudes a consultar la excelente y profusa bibliografía especializada. En cada apartado se incluyen varios problemas ejemplos para facilitar la fijación de conceptos. Asimismo, dado que la aplicación de las ecuaciones de Lagrange conduce en forma directa a las ecuaciones diferenciales del movimiento, gran parte de ellas de muy complicada integración, se deja para los alumnos la resolución de las mismas, incentivando la utilización de la herramienta computacional mediante diferentes software de ingeniería.

5. 1. Ecuaciones de Lagrange para un punto material

Sea una partícula P de masa m sometida a una fuerza externa aplicada, resultante de las cargas activas y reactivas, de componentes F_x , F_y , F_z . Multiplicando cada una de las componentes cartesianas escalares de la ecuación del movimiento de Newton para m (3.1) por el desplazamiento virtual respectivo, se tiene:

$$F_x \delta x = m \ddot{x} \delta x$$

$$F_y \delta y = m \ddot{y} \delta y$$

$$F_z \delta z = m \ddot{z} \delta z$$

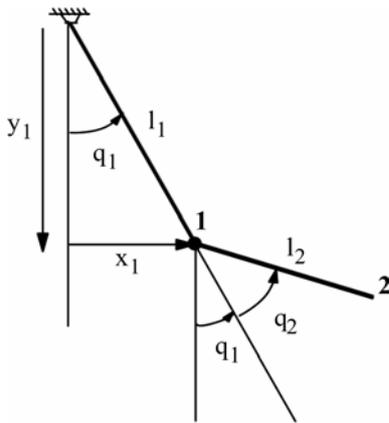
Recuérdese que un desplazamiento virtual es un desplazamiento posible, arbitrario, compatible con los vínculos, infinitesimal.

Sumando miembro a miembro

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = m(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) \quad (5.1)$$

Se pasará ahora de coordenadas rectangulares (x, y, z) a generalizadas (q_k). Para ello se establecen las relaciones funcionales de x, y, z con las q₁, q₂, ..., q_k de la misma partícula m (y del sistema del cual forma parte) -donde k coincide con los grados de libertad del sistema.

El sistema de dos barras articuladas de la figura posee dos grados de libertad y constituye un sencillo ejemplo de estas relaciones. En él:



$$\begin{cases} x_1 = l_1 \operatorname{sen} q_1 \\ y_1 = l_1 \operatorname{cos} q_1 \\ x_2 = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen} (q_1 + q_2) \\ y_2 = l_1 \operatorname{cos} q_1 + l_2 \operatorname{cos} (q_1 + q_2) \end{cases}$$

Así,

$$\begin{cases} x_1 = x_1 (q_1) \\ y_1 = y_1 (q_1) \\ x_2 = x_2 (q_1, q_2) \\ y_2 = y_2 (q_1, q_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de las} \\ \text{restricciones para} \\ \text{dos grados de} \\ \text{libertad} \end{array}$$

En general, se tendrá:

$$\begin{cases} x = f_1 (q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y = f_2 (q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z = f_3 (q_1, q_2, \dots, q_k) \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones de las restricciones para el sistema de k grados de libertad del cual forma parte m. No se estudiarán en este curso coordenadas rectangulares que sean funciones del tiempo además de las q_j, como así tampoco ejes coordenados y restricciones móviles.

Las variaciones (virtuales infinitesimales) de x, y, z en función de las variaciones de q₁, q₂, q₃, SON:

$$\begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k \end{cases}$$

Como las q_i son independientes, puede examinarse el movimiento para el efecto de la variación arbitraria de una de ellas mientras se mantienen constantes las demás. Supóngase:

$$\delta q_1 \neq 0; \quad \delta q_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, k$$

entonces

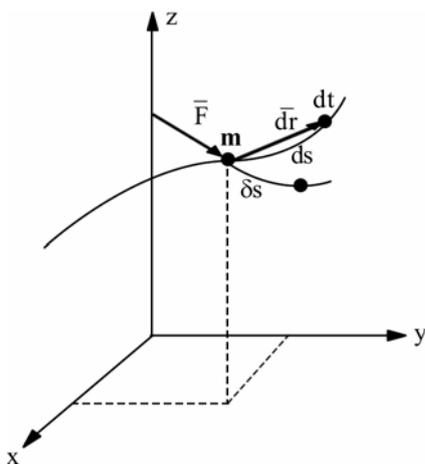
$$\begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión (5.1), se obtiene:

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (5.2)$$

Se analizará cada uno de los miembros de esta igualdad:

a) Miembro izquierdo:



Recordando que se ha definido como *trabajo elemental* para una partícula a:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos(\vec{F}, d\vec{r})$$

$$d\vec{r} = ds \hat{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (5.3)$$

Donde “ ds ” indica un desplazamiento elemental “real”

Considerando ahora un desplazamiento arbitrario, infinitesimal cualquiera δs , no necesariamente *sobre* la trayectoria dada, a este desplazamiento se lo llama “*virtual*”: δs ($\delta x, \delta y, \delta z$). El “*trabajo virtual elemental*” realizado por la fuerza F para ese δs , es

$$\delta W = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = F \delta s \cos(\bar{F}, \delta \bar{r}) = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (5.4)$$

que es el lado izquierdo de la ecuación (5.2).

Se observa por lo tanto que el lado izquierdo de la (5.2) es el trabajo W efectuado por la fuerza F durante el desplazamiento virtual δq_1 ; llamando *fuerza generalizada* Q_1 a la cantidad dentro del paréntesis, $Q_1 \delta q_1$ será el *trabajo virtual* efectuado.

Nótese que una *fuerza generalizada* es una magnitud de tal naturaleza que el producto $Q_j \delta q_j$ es el trabajo realizado por todas las fuerzas activas (sin incluir fuerzas inerciales ni de restricción) cuando únicamente q_j varía en una cantidad $+ \delta q_j$ (dejando constantes todas las demás coordenadas y el tiempo).

Estas *fuerzas generalizadas* no son siempre fuerzas en el sentido corriente de la palabra.

Por ejemplo, si q_j es un ángulo θ , entonces Q_θ debe ser un momento, a fin de que $Q_\theta \delta \theta$ sea un trabajo.

b) Miembro derecho:

Partiendo de la identidad

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$$

es:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$$

Por otra parte, de las ecuaciones de restricciones:

$x = f(q_1, q_2, \dots, q_k)$ resulta

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dots$$

donde es: $\dot{x} = f(q_j, \dot{q}_j)$ y $\dot{q}_j = v_j$

$$\therefore \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial^2 x}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_1} \dots$$

en la cual, el primer sumando es nulo porque $\partial x / \partial q_j$ es función solamente de q_j y el último sumando se anula por cuanto $\dot{q}_2 \neq f(\dot{q}_1)$, ya que son independientes.

$$\therefore \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \quad (\text{procedimiento de "eliminación de puntos"})$$

reemplazando más arriba:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \right)$$

Operando en el segundo miembro,

$$\left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) \quad \text{y} \quad \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right), \text{ y por similitud} \\ \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} \right), \\ \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\dot{z}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\dot{z}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Este miembro de la expresión (5.2), automáticamente toma en cuenta todas las fuerzas inerciales. En efecto, los términos como, $m\ddot{x}$, $m r \dot{\theta}^2$, $2m\omega \dot{x}$, etc., aparecen en las expresiones de este miembro.

Volviendo a la ecuación (5.2):

$$\delta W_{q_1} = Q_1 \delta q_1 = m \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right\} \delta q_1$$

pero como: $e = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ resulta

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial e}{\partial q_1}$$

Repetiendo el proceso para $\delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_k$ se llega a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial e}{\partial q_j} = Q_j \quad ; j = 1, 2, \dots, k \quad (5.5)$$

que son las ecuaciones de Lagrange para un punto material sometido a cualquier clase de fuerzas.

Estas k ecuaciones de segundo orden para cada grado de libertad j, darán la ecuación de movimiento del punto material que corresponde a cada grado de libertad.

Aplicaciones Ejemplo. Punto material bajo una fuerza cualquiera.

Obtención de las expresiones para las fuerzas generalizadas. Se observa que para la aplicación de las ecuaciones (5.5) deben calcularse las fuerzas generalizadas correspondientes a cada coordenada q_j , que se hace mediante el trabajo virtual.

1) Considerando el movimiento de un proyectil (m) con respecto a un sistema de ejes rectangulares inercial, se toma: $x \equiv q_1$; $y \equiv q_2$; $z \equiv q_3$.

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\therefore e = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

y las fuerzas generalizadas $F_x, F_y, F_z \equiv F_{q_j}$

Aplicando la ecuación (5.5):

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ \frac{\partial e}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \\ \frac{\partial e}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) \begin{cases} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{cases} \quad \frac{\partial e}{\partial q_j} \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m\ddot{x} = F_x = 0 \\ m\ddot{y} = F_y = 0 \\ m\ddot{z} = F_z = -mg \end{cases}$$

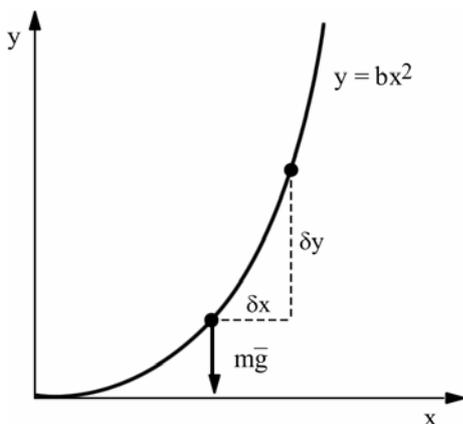
Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza generalizada es la atracción de la gravedad en $-\hat{k}$

Así: $\delta W_z = -mg\delta z$

y $\therefore F_z = -mg$

Que son las ecuaciones diferenciales del movimiento de Newton.

2) Una esfera perforada de masa m se desliza libremente a lo largo de un alambre parabólico rígido, cuya forma está dada por $y = bx^2$. Hallar la ecuación del movimiento en el plano xy .



En este caso, la trayectoria es lineal (el alambre), y el movimiento posee sólo un grado de libertad. Tomando como q_j a x e y ; la ecuación de vínculo es $y = bx^2$ (se adoptaron dos coordenadas generalizadas que están vinculadas entre sí: $m = 2$, $n = 1$; $g_l = k = m - n = 1$)

Así:
$$e = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

pero $\dot{y} = 2bx\dot{x} \Rightarrow e = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4b^2x^2\dot{x}^2) =$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4b^2x^2)$$

Aplicando la ecuación (5.5)

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial e}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4b^2x^2); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) = m\ddot{x}(1 + 4b^2x^2) + 8mb^2\dot{x}^2x$$

$$\frac{\partial e}{\partial q_j} = \frac{\partial e}{\partial x} = 4m\dot{x}^2xb^2$$

Por lo tanto;

$$m\ddot{x}(1 + 4b^2x^2) + 4m\dot{x}xb^2 = Fx = Q_j \quad (j=1)$$

Para hallar F_x se supone que el eje y es vertical y que la única fuerza activa es la atracción de la gravedad. Imprimiendo a la esfera un desplazamiento $+\delta x$, necesariamente se moverá una distancia correspondiente $+\delta y$ por el alambre, como se observa en la Figura. El trabajo hecho por la fuerza de gravedad será $\delta W = -mg\delta y$ Pero según la ecuación de la restricción, $\delta y = 2bx\delta x$

Por lo tanto, $\delta W = -2mgbx \delta x = F_x \delta x$, de donde

$$F_x = -2mgbx$$

y la ecuación del movimiento queda

$$m\ddot{x}(1 + 4b^2x^2) + 4m\dot{x}xb^2 = -2mgbx$$

A los fines ilustrativos, se considera una fuerza \vec{f} aplicada a la esfera mediante un hilo en el plano x - y , cuyo ángulo de inclinación ϕ con la horizontal se mantiene constante (los cosenos directores c_{11} y c_{12} son constantes).

$$\vec{f} = f(\cos\phi\hat{i} + \text{sen}\phi\hat{j})$$

$$\cos\phi = c_{11}$$

$$\text{sen}\phi = c_{12}$$

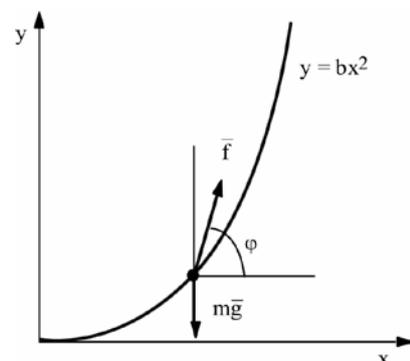
Para un desplazamiento pequeño, se tiene según (5.4):

$$\delta W = -mg\delta y + c_{12}f\delta y + c_{11}f\delta x$$

y como $\delta y = 2bx\delta x$, se tiene

$$\delta W = (-2mgbx + c_{11}f + 2bxc_{12}f)\delta x \text{ y}$$

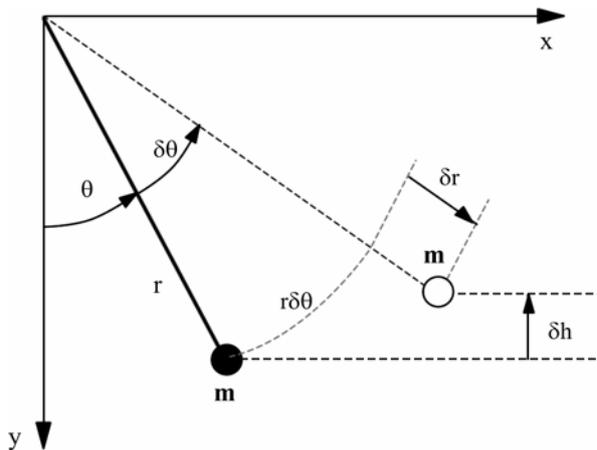
$$F_x = -2mgbx + c_{11}f + 2bxc_{12}f = 2bx(c_{12}f - mg) + c_{11}f$$



Permaneciendo inalterado el miembro izquierdo de la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x}(1 + 4b^2 x^2) + 4m\dot{x}^2 x b^2 = 2bx(c_{12}f - mg) + c_{11}f$$

3) Sea el péndulo de masa m de la figura sostenido por una banda elástica de constante k y longitud r_0 cuando no está estirada.



Este es un caso de 2 grados de libertad. Se toman r y θ como coordenadas q_j , luego

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$e = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Aplicando la ecuación (5.5):

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ \frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial e}{\partial q_j} = \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial e}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} = F_\theta \end{cases}$$

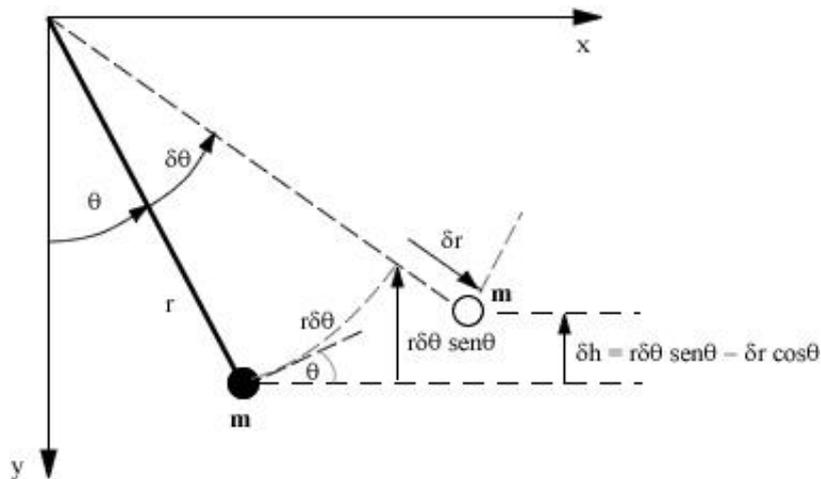
Las fuerzas generalizadas pueden hallarse por dos métodos:

a) Trabajo virtual: se da a m un desplazamiento arbitrario δs , con r y θ sufriendo cambios positivos $+\delta r$ y $+\delta\theta$. El trabajo virtual elemental total debido a la gravedad y a la banda elástica es:

$$\partial W_{tot} = -mg\delta h - k(r - r_0)\delta r$$

Ambos trabajos son negativos porque los sentidos de las fuerzas y los desplazamientos virtuales son opuestos.

De la figura, δh es:



$$\begin{aligned} \therefore \delta W_{TOT} &= -mg(r\delta\theta\text{sen}\theta - \delta r \cos\theta) - k(r - r_0)\delta r \\ &= -mgsen\theta\delta\theta - [k(r - r_0) - mg \cos\theta]\delta r \end{aligned}$$

Así el trabajo correspondiente a un cambio de r únicamente, es

$$\delta W_r = -[k(r - r_0) - mg \cos\theta]\delta r = F_r \delta r,$$

de donde: $F_r = -k(r - r_0) + mg \cos\theta$

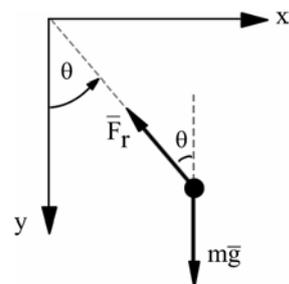
y similarmente: $F_\theta = -mgrsen\theta$.

b) Por aplicación directa de la ecuación (5.2). Es $Q_j = F_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_j}$

Las componentes x e y de las fuerzas sobre m, son:

$$\begin{aligned} F_x &= -k(r - r_0)\text{sen}\theta \\ F_y &= mg - k(r - r_0)\text{cos}\theta \end{aligned}$$

Pero como: $x = r\text{sen}\theta$
 $y = r \text{cos}\theta$



Resulta para $\frac{\partial x}{\partial q_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \text{sen}\theta; \frac{\partial y}{\partial r} = \text{cos}\theta; \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \text{cos}\theta; \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\text{sen}\theta; \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 = F_r &= -k(r - r_0)\text{sen}^2\theta + [mg - k(r - r_0)\cos\theta]\cos\theta = \\
 &= -k(r - r_0)(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + mg\cos\theta = \\
 &= -k(r - r_0) + mg\cos\theta \\
 Q_2 = F_\theta &= -k(r - r_0)\text{sen}\theta.r\cos\theta + [mg - k(r - r_0)\cos\theta](-r\text{sen}\theta) = \\
 &= -mgr\text{sen}\theta
 \end{aligned}$$

4) Se sujeta un anillo A de masa m a uno de los extremos de una varilla uniforme de longitud $2a$ y de masa $2m$. El anillo se ensarta a un alambre liso, horizontal y rígido, imponiéndole una velocidad (\dot{x}) sobre el alambre, mientras se da a la varilla un movimiento oscilatorio en el plano vertical. Encontrar la ecuación del movimiento.

Las coordenadas generalizadas son aquí x y θ .

Aplicando las ecuaciones (5.5.a),

La energía cinética del anillo será:

$$e_A = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

y la de la barra:

$$e_B = \frac{1}{2}(2m)V_A^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 + 2m\bar{V}_A \cdot \dot{\theta} \wedge \bar{r}_{G/A}$$

$$e_B = \frac{1}{2} \cdot 2mV_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} 2m(2a)^2 \dot{\theta}^2 + 2mV_A \hat{i} \cdot \dot{\theta} \hat{k} \wedge a [\text{sen}\theta(-\hat{i}) + \cos\theta\hat{j}]$$

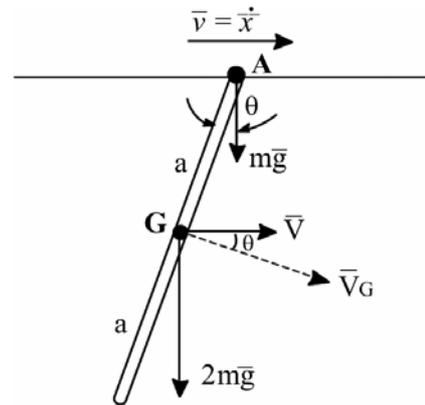
$$= mV_A^2 + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + 2mV_A \hat{i} \cdot [-\dot{\theta}a(\text{sen}\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i})]$$

$$= mV_A^2 + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}^2 - 2am\dot{\theta}V_A \cos\theta$$

La energía cinética total:

$$e = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + 2m\dot{x} - 2ma\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} = m\frac{8}{3}a^2\dot{\theta} - 2am\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{x}} \right) = 3m\ddot{x} - 2ma\ddot{\theta} \cos \theta + 2am\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta \right.$$

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{8}{3} ma^2 \ddot{\theta} - 2a\ddot{x} \operatorname{sen} \theta + 2am\dot{x} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right.$$

$$\frac{\partial e}{\partial q_j} \Rightarrow \left| \frac{\partial e}{\partial x} = 0; \frac{\partial e}{\partial \theta} = 2am\dot{x} \operatorname{sen} \theta \right.$$

Luego, aplicando la ecuación (5.5):

$$3m\ddot{x} - 2ma\ddot{\theta} \cos \theta + 2ma\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta = Q_x$$

$$\frac{8}{3} ma^2 \ddot{\theta} - 2am\ddot{x} \operatorname{sen} \theta = Q_\theta$$

Para hallar las fuerzas generalizadas, en el desplazamiento virtual x se incrementa en δx hacia la derecha y θ en $\delta \theta$ en sentido horario. Sólo hace trabajo el peso de la varilla, y como su centro de masa recorre una distancia vertical a $\delta \theta \operatorname{sen} \theta$, se observa que:

$$\delta W_T = -2mga \delta \theta \operatorname{sen} \theta = Q_\theta \delta \theta$$

Por lo tanto,

$$Q_x = 0$$

$$Q_\theta = -2mga \operatorname{sen} \theta$$

y las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\begin{cases} 3\ddot{x} - 2a\ddot{\theta} \cos \theta + 2a\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \\ \frac{8}{3} a^2 \ddot{\theta} - 2a\ddot{x} \operatorname{sen} \theta = -2g \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

5.2. Ecuaciones de Lagrange para fuerzas conservativas

Si

$$\bar{F} = \nabla u$$

$$\bar{F} = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} = du$$

y como $du = -dp$,

$$\text{es: } \bar{F} = -\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = -\nabla p$$

Se ha visto en (5.2) que la fuerza generalizada para la variación de la coordenada q_j , es:

$$Q_j = F_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

Puede entonces escribirse

$$Q_j = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial q_j}$$

en (5.5):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial e}{\partial q_j} = - \frac{\partial p}{\partial q_j}$$

O sea:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (e - p) = 0 \quad (5.5')$$

Introduciendo la llamada “función de Lagrange” o “función lagrangiana”

$$L = e - p$$

y tomando en cuenta que en los problemas de Mecánica p no resulta ser función de la velocidad, $p \neq f(\dot{q}_j)$, resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,k \quad (5.6)$$

Que son las ecuaciones de Lagrange para un punto material bajo la acción de fuerzas conservativas.

Aplicaciones Ejemplo. Punto material bajo fuerzas conservativas.

1) Se toma para el análisis el péndulo elástico del apartado anterior

Solución:

$$\text{Sabido que: } e = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

la energía potencial acumulada en el resorte será:

$$p_r = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

y la energía potencial gravitatoria respecto a un nivel de referencia coincidente con el eje x:

$$p_g = -mgr \cos \theta$$

$$\therefore p = p_r + p_g = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 - mgr \cos \theta$$

$$\text{Así, } L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + mgr \cos \theta$$

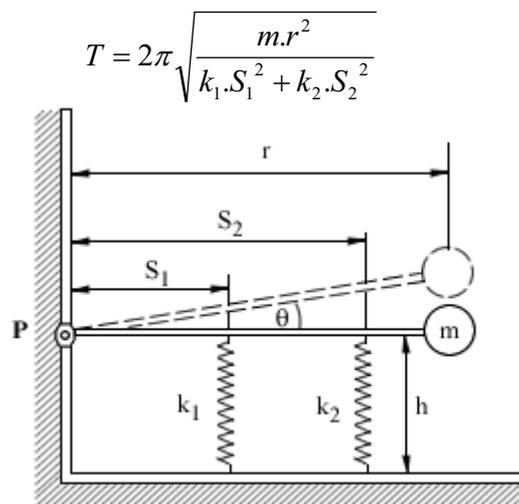
Aplicando la ecuación (5.6):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - r_0) + mg \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Luego, } \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - r_0) - mg \cos \theta = 0 \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} + mgr \sin \theta = 0 \end{cases}$$

2) Aplicar las ecuaciones de Lagrange para encontrar la ecuación del movimiento de la partícula de masa m adherida a la varilla liviana articulada en P que se mueve en el plano vertical. Las longitudes naturales de los resortes son L_1 y L_2 , y los desplazamientos angulares son tan pequeños que $\sin \theta \cong \theta$. Suponiendo que los resortes se ajustan de tal manera que la varilla está en equilibrio estático cuando $\theta = 0$, demostrar que m ejecuta un movimiento armónico simple de período:



En este caso, la energía cinética es:

$$e = \frac{1}{2}.m.(\dot{\theta}.r)^2$$

En tanto que la energía potencial estará compuesta por la gravitacional más la de los resortes:

$$p_G = m.g.(h + r.\theta)$$

$$p_{r_1} = \frac{1}{2}.k_1.(h - L_1 + s_1.\theta)^2$$

$$p_{r_2} = \frac{1}{2}.k_2.(h - L_2 + s_2.\theta)^2$$

Por lo tanto la función Lagrangiana resulta:

$$L = \frac{1}{2}.m.(\dot{\theta}.r)^2 - [m.g.(h + r.\theta) + \frac{1}{2}.k_1.(h - L_1 + s_1.\theta)^2 + \frac{1}{2}.k_2.(h - L_2 + s_2.\theta)^2]$$

Las derivadas parciales de L respecto de la coordenada generalizada, y con respecto al tiempo son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m.\dot{\theta}.r^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m.\ddot{\theta}.r^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -[m.g.r + k_1.s_1.(h - L_1 + \theta.s_1) + k_2.s_2.(h - L_2 + \theta.s_2)]$$

Luego reemplazando y acomodando se obtiene

$$m.\ddot{\theta}.r^2 + [m.g.r + k_1.s_1.(h - L_1 + \theta.s_1) + k_2.s_2.(h - L_2 + \theta.s_2)] = 0$$

ó

$$m.\ddot{\theta}.r^2 + \theta.(k_1.s_1^2 + k_2.s_2^2) + k_1.s_1.(h - L_1) + k_2.s_2.(h - L_2) + m.g.r = 0$$

Que es la ecuación del movimiento de la partícula m.

Ahora, utilizando la expresión anterior y dividiendo miembro a miembro por $m.r^2$, queda:

$$\ddot{\theta} + \theta.\frac{(k_1.s_1^2 + k_2.s_2^2)}{m.r^2} + \frac{k_1.s_1.(h - L_1) + k_2.s_2.(h - L_2) + m.g.r}{m.r^2} = 0$$

Si el equilibrio estático se obtiene cuando $\theta = 0$, entonces el numerador del término independiente en la ecuación anterior se anula, resultando:

$$\ddot{\theta} + \frac{(k_1.s_1^2 + k_2.s_2^2)}{m.r^2} \theta = 0$$

Que es la ecuación diferencial de un movimiento oscilatorio armónico, de donde:

$$\omega^2 = \frac{k_1 \cdot s_1^2 + k_2 \cdot s_2^2}{m \cdot r^2}$$

por lo tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 \cdot s_1^2 + k_2 \cdot s_2^2}{m \cdot r^2}}$$

El período del movimiento armónico simple que ejecuta la partícula m es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{k_1 \cdot s_1^2 + k_2 \cdot s_2^2}{m \cdot r^2}}}$$

o sea:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot r^2}{k_1 \cdot s_1^2 + k_2 \cdot s_2^2}}$$

como se quería demostrar.

5.3. Ecuaciones de Lagrange para un sistema de puntos materiales

Las ecuaciones de Lagrange tienen poca utilidad para estudiar el movimiento de un solo punto material. Su utilización principal reside en el análisis de sistemas de puntos materiales, particularmente en los de múltiples grados de libertad.

Sea un sistema de n puntos materiales. Representando con i al i -ésimo de ellos, en la ecuación (5.5) se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial e_i}{\partial q_j} \right\} = \sum_{i=1}^n Q_{ji} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

pero $\sum_{i=1}^n e_i$ es la energía cinética de *todo* el sistema, y

$\sum_{i=1}^n Q_{ji} = Q_{j1} + Q_{j2} + \dots + Q_{jn}$ es la fuerza generalizada *resultante* que elimina

las fuerzas interiores del sistema, puesto que $\sum_{i=1}^n \bar{F}_{int_i} = \vec{0}$

$$\text{Entonces: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial e}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (5.5.a)$$

que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema general de puntos materiales, conservativo o no.

$$\text{y: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (5.6.a)$$

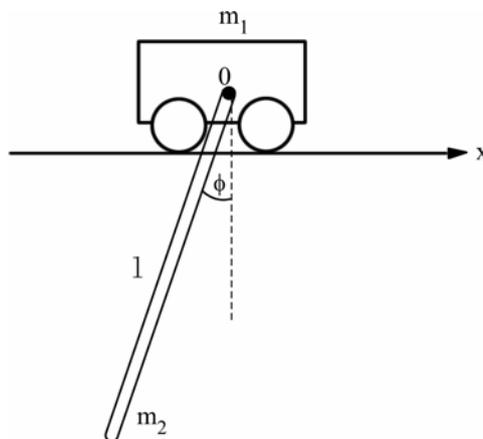
son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de puntos materiales sometido a la acción de fuerzas conservativas.

Donde e y $L = e - p$, son los términos energéticos totales del sistema.

Como antes, existen tantas ecuaciones como grados de libertad k .

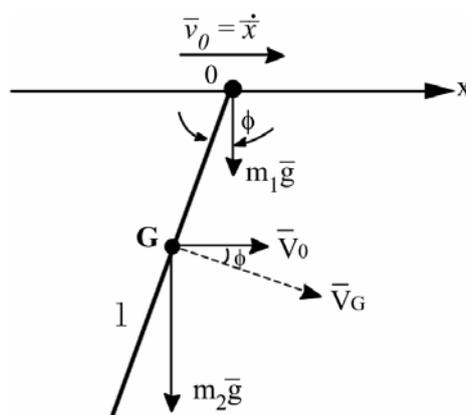
Aplicaciones Ejemplo. Sistemas de puntos materiales.

1) Un carro de puente grúa de masa m_1 que se desplaza en línea recta suspendido de un riel, transporta una varilla uniforme de longitud l y masa m_2 mediante una articulación O . Durante el transporte con velocidad \dot{x} respecto del riel, la varilla oscila en el plano vertical, comportándose el sistema como conservativo.



Encontrar las ecuaciones de movimiento mediante las ecuaciones de Lagrange

Teniendo en cuenta que el sistema tiene dos grados de libertad ($k = 2$), en el esquema simplificado de la figura se adoptan como coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = \phi$



La energía cinética del carro es:
$$e_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

y la energía cinética de la varilla:
$$e_v = \frac{1}{2} m_2 V_o^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\phi}^2 + m_2 \vec{V}_o \cdot \dot{\phi} \wedge \vec{r}_{oG}$$

$$e_v = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_2 \ell^2 \dot{\phi}^2 + m_2 \dot{x} \hat{i} \cdot \dot{\phi} \hat{k} \wedge \frac{\ell}{2} [-\text{sen} \phi \hat{i} + \text{cos} \phi \hat{j}]$$

$$e_v = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m_2 \ell^2 \dot{\phi}^2 - m_2 \dot{x} \dot{\phi} \frac{\ell}{2} \text{cos} \phi$$

Tomando el nivel de referencia para la energía potencial coincidente con el eje x, la energía potencial del carro es:

$$p_c = 0$$

y la energía potencial de la varilla:

$$p_v = -m_2 g y = -m_2 g \frac{\ell}{2} \text{cos} \phi$$

La función Lagrangiana, será:

$$L = e - p = e_c + e_v - (p_c + p_v)$$

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\phi}^2 - \ell \dot{x} \dot{\phi} \text{cos} \phi + g \ell \text{cos} \phi \right)$$

Aplicando ahora la ecuación (5.6.a), se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\phi}^2 - \ell \dot{x} \dot{\phi} \text{cos} \phi + g \ell \text{cos} \phi \right) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} - \frac{m_2}{2} \ell \dot{\phi} \text{cos} \phi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \ddot{x} - \frac{m_2}{2} \ell (\ddot{\phi} \text{cos} \phi - \dot{\phi}^2 \text{sen} \phi)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Ahora, para $q_2 = \phi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{m_2}{2} \left(\frac{2}{3} \ell^2 \dot{\phi} - \ell \dot{x} \text{cos} \phi \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{m_2}{2} \left(\frac{2}{3} \ell^2 \ddot{\phi} - \ell \ddot{x} \text{cos} \phi + \ell \dot{x} \dot{\phi} \text{sen} \phi \right)$$

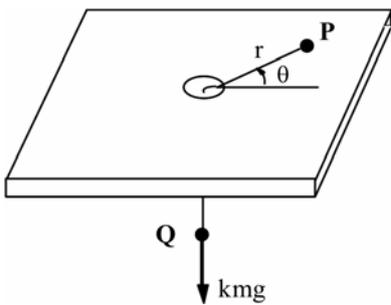
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{m_2}{2} \ell (\dot{x} \dot{\phi} \text{sen} \phi - g \text{sen} \phi)$$

Obteniéndose el sistema de ecuaciones de movimiento:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - \frac{m_2}{2}\ell(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\text{sen}\phi) = 0$$

$$\frac{m_2}{2}\ell\left(\frac{2}{3}\ell\ddot{\phi} - \ddot{x}\cos\phi - g\text{sen}\phi\right) = 0$$

2) Una partícula P de masa m se encuentra sobre una mesa lisa horizontal, sujeta a una cuerda larga e inextensible de longitud l que pasa por un agujero liso en su superficie. El otro extremo de la cuerda soporta una partícula Q de masa km, que cuelga libremente. Se impulsa a la partícula P a partir del reposo formando ángulos rectos con la cuerda, con una velocidad $\sqrt{8ag}$ cuando está a una distancia a del agujero. Encontrar las ecuaciones del movimiento para el sistema de dos partículas.



Las coordenadas generalizadas son r y θ .

La energía potencial de Q puede tomarse como:

$$p = -kmg(l - r)$$

y omitiendo el término constante:

$$p = kmg r$$

La energía cinética es:

$$e = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}km\dot{r}^2$$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m(k+1)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - kmgr$$

Aplicando las ecuaciones (5.6.a):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(k+1)\dot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \Rightarrow m(k+1)\ddot{r} \quad ; \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}$$

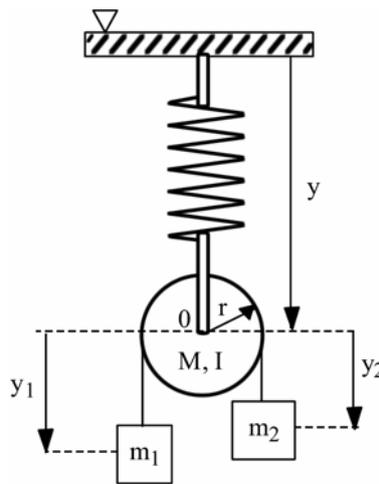
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \Rightarrow \left| \frac{\partial L}{\partial r} = -kmg + mr\dot{\theta}^2; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \right.$$

Entonces, por (5.6.a):

$$\begin{cases} m(k+1)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kmg = 0 \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

3) El sistema conservativo de masas m_1 y m_2 y polea de masa M de la figura puede ejecutar únicamente movimiento vertical. Cuando el resorte de constante k no ha sufrido ninguna deformación, su longitud es y_0 .

Se desea encontrar las ecuaciones de movimiento correspondientes a las coordenadas y e y_1 utilizando las ecuaciones de Lagrange.



La energía cinética total del sistema será la suma de la correspondiente a la rotación más la de traslación:

$$e = e_r + e_t = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V_o^2 + \frac{1}{2} m_1 (\bar{V}_o + \bar{V}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\bar{V}_o + \bar{V}_2)^2$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\bar{V}_2 = -\bar{V}_1$

$$e = e_r + e_t = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V_o^2 + \frac{1}{2} m_1 (V_o + V_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_o - V_1)^2$$

La velocidad angular de la polea puede expresarse como:

$$\omega = \frac{\dot{y}_1}{r}$$

y las velocidades:

$$V_o = \dot{y}$$

$$V_1 = \dot{y}_1$$

Así, la energía cinética será:

$$e = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y} + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - \dot{y}_1)^2$$

La energía potencial p está compuesta por la gravitatoria y la elástica:

$$p = p_g + p_e$$

Energía potencial gravitatoria:

$$p_g = -M \cdot g \cdot y - m_1 \cdot g \cdot (y + y_1) - m_2 \cdot g \cdot (y + y_2)$$

Pero, como la longitud de la cuerda l es constante

$$y_1 + \pi \cdot r + y_2 = \ell$$

$$y_2 = C - y_1$$

Donde $C = l - \pi r$

$$p_g = -M \cdot g \cdot y - m_1 \cdot g \cdot (y + y_1) - m_2 \cdot g \cdot (y + C - y_1)$$

Energía potencial elástica

$$p_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (y - y_0)^2$$

Por lo tanto la ecuación de Lagrange $L = e - p$, será:

$$L = \left[\frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y} + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - \dot{y}_1)^2 \right] -$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot (y - y_0)^2 - M \cdot g \cdot y - m_1 \cdot g \cdot (y + y_1) - m_2 \cdot g \cdot (y + C - y_1) \right]$$

$$L = L\{y_1, y, \dot{y}_1, \dot{y}\}$$

Habrán tantas ecuaciones como grados de libertad tenga el sistema. En este caso se tienen dos grados de libertad.

Las derivadas parciales de L respecto de las coordenadas generalizadas, y con respecto al tiempo son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \cdot \dot{y} + m_1 (\dot{y} + \dot{y}_1) + m_2 (\dot{y} - \dot{y}_1) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \frac{I}{r^2} \cdot \dot{y}_1 + m_1 (\dot{y} + \dot{y}_1) - m_2 (\dot{y} - \dot{y}_1) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = M \ddot{y} + m_1 (\ddot{y} + \ddot{y}_1) + m_2 (\ddot{y} - \ddot{y}_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = \frac{I}{r^2} \ddot{y}_1 + m_1 (\ddot{y} + \ddot{y}_1) - m_2 (\ddot{y} - \ddot{y}_1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = -k \cdot (y - y_0) + M \cdot g + m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \end{cases}$$

Finalmente, aplicando la ecuación (5.6.a):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = 0$$

Resulta

$$M \ddot{y} + m_1 (\ddot{y} + \ddot{y}_1) + m_2 (\ddot{y} - \ddot{y}_1) - [-k \cdot (y - y_0) + Mg + m_1 g + m_2 g] = 0$$

$$\left(\frac{I_0}{r^2} \cdot \ddot{y}_1 + m_1 (\ddot{y} + \ddot{y}_1) - m_2 (\ddot{y} - \ddot{y}_1) \right) - (m_1 \cdot g - m_2 \cdot g) = 0$$

Reordenando:

$$\ddot{y} \cdot (M + m_1 + m_2) + \ddot{y}_1 (m_1 - m_2) + k \cdot (y - y_0) - g \cdot (M + m_1 + m_2) = 0$$

$$\ddot{y} (m_1 - m_2) + \ddot{y}_1 \cdot \left(\frac{I}{r^2} + m_1 + m_2 \right) - g \cdot (m_1 - m_2) = 0$$

Son las dos ecuaciones que describen el movimiento.

Puede demostrarse que despejando de la última ecuación \ddot{y}_1 en función de \ddot{y} para reemplazar luego en la ecuación anterior, se obtiene una ecuación del movimiento para la masa M en función de la variable y .

5.4. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton constituyen otra manera de expresar las ecuaciones dinámicas del movimiento. En el apartado 5.2, ecuación (5.5'), se ha visto que para el caso de un sistema holónomo bajo la acción de fuerzas conservativas, es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} (e - p) \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Introduciendo nuevas variables ψ_j relacionadas con las q_j mediante

$$\psi_j = \frac{\partial e}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.7)$$

las ecuaciones (5.5') toman la forma:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \frac{\partial (e - p)}{\partial q_j} \quad (5.5'')$$

que constituyen un sistema de k ecuaciones lineales que vinculan los k parámetros ψ_j y permiten calcular las \dot{q}_j en función de las p_j , de las q_j y de t , después de reemplazar en las ecuaciones de Lagrange las \dot{q}_j por los valores obtenidos.

A estas nuevas variables ψ_j suelen denominárselas “ímpetus” del sistema, y están directamente vinculadas al concepto de “cantidad de movimiento” cuando se trabaja con las ecuaciones de Newton.

Si además se define ahora una función H dada por la ecuación

$$H = \sum_{j=1}^k \psi_j \dot{q}_j - (e - p) = \sum_{j=1}^k \psi_j \dot{q}_j - L$$

hallando su derivada parcial respecto a ψ_j y teniendo en cuenta la definición (5.7), se obtiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_j} = \frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j \quad (5.8)$$

De igual forma, derivando parcialmente a H respecto de q_j se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{d\psi_j}{dt} = -\dot{\psi}_j \quad (5.9)$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) forman $2k$ ecuaciones diferenciales de primer orden que reemplazan a las ecuaciones de Lagrange que, como se ha visto, son de segundo orden. Se denominan Ecuaciones de Hamilton, siendo H la función de Hamilton o “función hamiltoniana”.

Como medio para analizar la mayor parte de los problemas aplicados, este método no es tan conveniente como el de Lagrange. Su utilidad crece en problemas que se tratan por técnicas de transformación, perturbación, mecánica estadística y cuántica.

Aplicaciones ejemplo. Ecuaciones de Hamilton.

- 1) Considérese nuevamente el caso del proyectil del ejemplo 1) correspondiente al punto material bajo una fuerza cualquiera.

Es
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

de donde

$$\psi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \psi_2 = m\dot{y} \quad ; \quad \psi_3 = m\dot{z}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^3 \psi_j \dot{q}_j - L = \psi_1 \dot{q}_1 + \psi_2 \dot{q}_2 + \psi_3 \dot{q}_3 - L \\ &= \psi_1 \frac{\psi_1}{m} + \psi_2 \frac{\psi_2}{m} + \psi_3 \frac{\psi_3}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\psi_1^2}{m^2} + \frac{\psi_2^2}{m^2} + \frac{\psi_3^2}{m^2}\right) + mgz \\ &= \frac{1}{2m}(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) + mgz \end{aligned}$$

las ecuaciones (5.8) en este caso, dan:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1} = \frac{\psi_1}{m} = \dot{x}; \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = \frac{\psi_2}{m} = \dot{y}; \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_3} = \frac{\psi_3}{m} = \dot{z}$$

y las (5.9)

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 = -\dot{\psi}_1; \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0 = -\dot{\psi}_2; \quad \frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\partial H}{\partial z} = mg = -\dot{\psi}_3$$

Estas son las $2k = 6$ ecuaciones de Hamilton.

Tomando la derivada de las (5.8) con respecto al tiempo y eliminando ψ_j de las (5.9) se obtienen las ecuaciones usuales del movimiento. Es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi_1}\right) = \ddot{x} = \frac{\dot{\psi}_1}{m}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi_2}\right) = \ddot{y} = \frac{\dot{\psi}_2}{m}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi_3}\right) = \ddot{z} = \frac{\dot{\psi}_3}{m}$$

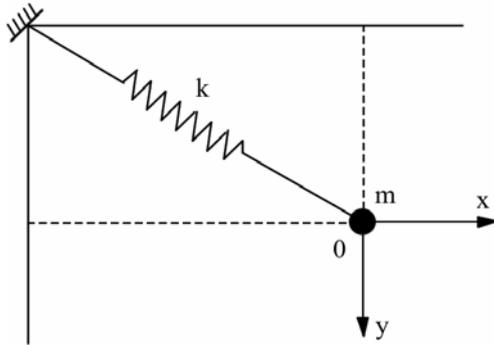
$$\therefore \quad \dot{\psi}_1 = m\ddot{x}; \quad \dot{\psi}_2 = m\ddot{y}; \quad \dot{\psi}_3 = m\ddot{z}$$

Reemplazando ahora en las expresiones (5.9)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

Estas últimas tres ecuaciones son las relaciones halladas por aplicación directa de las ecuaciones de Newton primero y de Lagrange después. Por lo tanto, es evidente que las ecuaciones de Hamilton en este problema no presentan ninguna ventaja.

2) Se analizará el movimiento sobre un plano horizontal liso de un punto material de masa m sujeto a una fuerza elástica. Se adopta como origen de coordenadas el extremo libre del resorte cuando no se encuentra deformado (en $x = 0, y = 0$ es $\delta_r = 0$).



Aquí las coordenadas x e y son independientes.

$$q_1 = x; \quad q_2 = y$$

La energía potencial del resorte es:

$$p_r = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

y la energía cinética de la masa:

$$e = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Luego:

$$L = e - p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

De (5.7):

$$\psi_1 = \frac{\partial e}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial e}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\psi_2 = \frac{\partial e}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial e}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^2 \psi_j \dot{q}_j - L = \psi_1 \frac{\psi_1}{m} + \psi_2 \frac{\psi_2}{m} - \frac{1}{2}m \left(\frac{\psi_1^2}{m^2} + \frac{\psi_2^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2m}(\psi_1^2 + \psi_2^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Luego, de (5.8):

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1} = \frac{\psi_1}{m} = \dot{x}; \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = \frac{\psi_2}{m} = \dot{y}$$

y de (5.9):

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial x} = kx = -\dot{\psi}_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\partial H}{\partial y} = ky = -\dot{\psi}_2$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}_1} \right) = \frac{\dot{\psi}_1}{m} = \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_1 = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}_2} \right) = \frac{\dot{\psi}_2}{m} = \ddot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_2 = m\ddot{y}$$

y reemplazando en (5.9)

$$-m\ddot{x} = kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$-m\ddot{y} = ky \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{k}{m}y$$

Estas últimas son las ecuaciones diferenciales de dos movimientos oscilatorios armónicos en x e y . El movimiento del punto P resulta entonces de la composición de dos movimientos oscilatorios armónicos ortogonales de pulsación $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dando lugar a la correspondiente figura de Lissajous.

APÉNDICE 1

A.1. TENSORES CARTESIANOS

Se presentan algunos conceptos aclaratorios sobre la magnitud tensorial $\overline{\overline{T}}_{(01)}$. Recordando que desde el punto de vista matemático, específicamente del álgebra lineal, el tensor es una transformación lineal $\overline{\overline{T}}: V \rightarrow V$. Es decir, el tensor $\overline{\overline{T}}$ es una transformación lineal que a cada vector $\vec{V} \in V$ asigna un único vector $\vec{u} = \overline{\overline{T}} \vec{V}$ cumpliendo con las operaciones lineales:

$$\overline{\overline{T}}(\vec{x} + \vec{y}) = \overline{\overline{T}}(\vec{x}) + \overline{\overline{T}}(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}; \vec{y} \in V$$

y
$$\overline{\overline{T}}(\lambda \vec{x}) = \lambda \overline{\overline{T}}(\vec{x}) \quad (\lambda = \text{número real})$$

Desde el punto de vista de la ingeniería, el tensor es un ente que describe un fenómeno físico y resulta ser independiente del sistema de coordenadas, por lo que constituye una magnitud.

En los vectores se vio que si se cambia el sistema coordenado, se alteran sus componentes, no el vector en sí mismo. El tensor tampoco se modifica si se cambia el sistema de coordenadas en el cual se lo definió, sólo cambiarán sus elementos.

Las magnitudes tensoriales tienen tantas componentes como 3^n , donde n se denomina "orden" del tensor. Si n = 0, tiene una única componente y el tensor representará un escalar. Si n = 1, tiene tres componentes y el tensor es un vector. Si n = 2, el tensor se denomina de orden dos y posee nueve elementos.

A1.1. Transformación por Rotación de Ejes

Toda magnitud tensorial de orden dos permite pasar por giro de ejes coordenados (ver transformaciones ortogonales de coordenadas en álgebra lineal) a sus nuevas componentes mediante expresiones de transformación del tipo:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^T$$

ó:

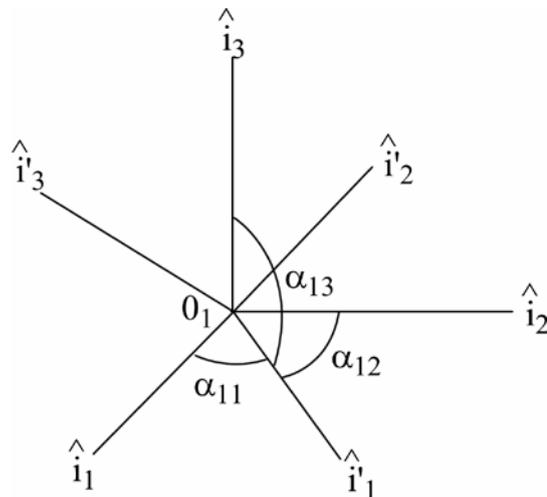
$$t'_{ij} = c_{im} c_{jn} t_{mn} \quad (\text{A.1})$$

Donde c_{im} y c_{jn} resultan ser los cosenos directores entre los ejes girados y los originales. La expresión A1 está escrita en la notación indicial de Einstein, donde se entiende que los subíndices que se repiten en un mismo miembro suman, permaneciendo fijos los que no varían; así por ejemplo:

$$\begin{aligned} t'_{13} = & c_{11} c_{31} t_{11} + c_{11} c_{32} t_{12} + c_{11} c_{33} t_{13} + \\ & + c_{12} c_{31} t_{21} + c_{12} c_{32} t_{22} + c_{12} c_{33} t_{23} + \\ & + c_{13} c_{31} t_{31} + c_{13} c_{32} t_{32} + c_{13} c_{33} t_{33} \end{aligned}$$

$$y \quad c_{ij} = \cos \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

gráficamente:



Matricialmente, t'_{13} representa el valor del elemento ubicado en la fila 1 y columna 3 del tensor $\overline{\overline{T}}$:

$$\overline{\overline{T}}_{0_1, \{i'_j\}} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix}$$

que cuando se lo refería al sistema $\{0_1, \hat{i}_1; \hat{i}_2; \hat{i}_3\}$ tenía como expresión

$$\overline{\overline{T}}_{0_1, \{\hat{i}_j\}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Así, como un vector de tres componentes (tensor de orden 1) es invariante respecto del sistema de coordenadas (sólo varían sus componentes al referirlo a uno u otro), el tensor de orden 2 también lo es.

Por estar representado por una matriz (como toda transformación lineal), el tensor de orden 2 goza de todas las propiedades vistas en cálculo matricial (álgebra lineal); entre ellas: "La suma de las componentes principales (traza) es un invariante:

$$t_{11} + t_{22} + t_{33} = t'_{11} + t'_{22} + t'_{33} "$$

Tensor de inercia.

Tomando ahora la expresión (4.15) se tiene que el tensor de inercia de un cuerpo referido a un sistema coordenado con origen en 0_1 es:

$$\bar{I}_{(o1)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Es muy fácil demostrar que este tensor de inercia es simétrico, por cuanto:

$$I_{xy} = \sum_1^N m_i x_i' y_i' \quad \text{y} \quad I_{yx} = \sum_1^N m_i y_i' x_i'$$

por lo que en general: $I_{ij} = I_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$)

Luego, en la aplicación de la expresión (4.16) del momento cinético, para el caso del tensor de inercia respecto a ejes rotados, será:

a) Para un elemento con subíndices iguales (momentos de inercia o axiales)

$$I'_{yy} = I'_{22} = c_{21}^2 I_{11} + c_{21} c_{22} (-I_{12}) + c_{21} c_{23} (-I_{13}) + \dots + c_{23}^2 I_{33}$$

b) Para un elemento con subíndices desiguales (momento centrífugo)

$$-I'_{zy} = -I'_{32} = c_{31} c_{21} I_{11} + c_{31} c_{22} (-I_{12}) + c_{31} c_{23} (-I_{13}) + \dots + c_{33} c_{23} I_{33}$$

Notar que los momentos de inercia axiales son directamente elementos del tensor, pero los momentos centrífugos (o productos de inercia) son los elementos del tensor con signo cambiado.

A1.2. Transformación por traslación de ejes

Con respecto a las propiedades de los elementos del tensor de inercia, conviene recordar una muy importante: el Teorema de Steiner o de los ejes paralelos. Según este teorema, para una traslación de ejes se tiene:

$$I_{x'x'} = I_{x_G x_G} + m d_x^2 = I_{y_G y_G} + m (y_G'^2 + z_G'^2) \tag{A.2}$$

y

$$I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + m x_G' y_G'$$

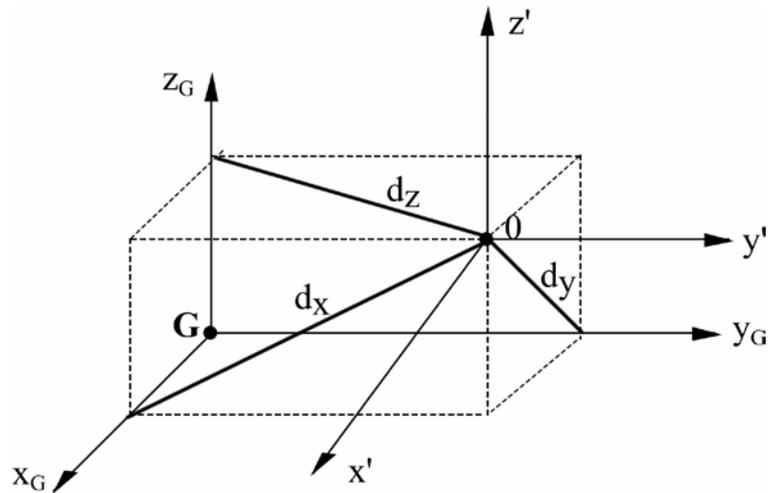
donde:

{0, x', y', z'} son ejes paralelos a los ejes baricéntricos (x_G, y_G, z_G)

d_x, d_y, d_z son las distancias entre los ejes x_G, y_G, z_G y los x', y', z', respectivamente.

x'_G, y'_G, z'_G, son las distancias de m a los planos coordenados denotados por sus versores normales i, j y k.

$$m = \sum_1^N m_i \text{ masa del sistema}$$



Así también:

$$I_{y'y'} = I_{y_G y_G} + m d_y^2 = I_{y_G y_G} + m(x'_G{}^2 + z'_G{}^2)$$

$$I_{z'z'} = I_{z_G z_G} + m d_z^2 = I_{y_G y_G} + m(x'_G{}^2 + y'_G{}^2)$$

$$I_{x'z'} = I_{x_G z_G} + m x'_G z'_G$$

$$I_{y'z'} = I_{y_G z_G} + m y'_G z'_G$$

A1. 3. Elipsoide de Inercia

Para examinar el efecto de la orientación de los ejes sobre las propiedades inerciales para un origen 0 dado de coordenadas, se considera el momento de inercia I'_{11} de un cuerpo rígido respecto a una recta cualquiera que pase por el origen 0.

Los cosenos directores de la recta serán c_{11}, c_{12}, c_{13} y su versor director puede escribirse:

$$\hat{r} = c_{11}\hat{i}_1 + c_{12}\hat{i}_2 + c_{13}\hat{i}_3$$

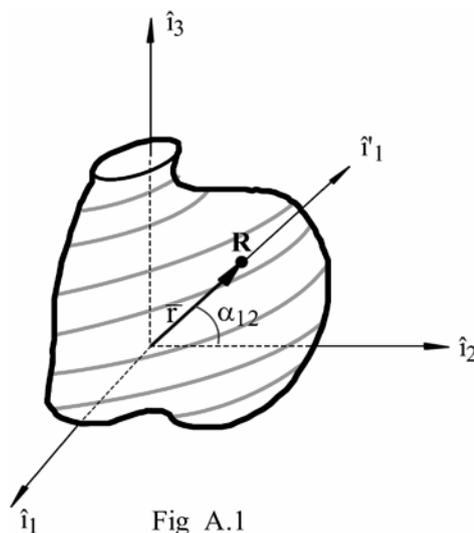


Fig A.1

También se supondrán conocidos todos los momentos de segundo orden del cuerpo con respecto al sistema o base $\{\hat{i}_i\}$. Esto es, se conoce el tensor de inercia

$$\bar{I}_{(o)} = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ & I_{22} & -I_{23} \\ Sim & & I_{33} \end{bmatrix}$$

Tomando la recta como eje \hat{i}'_1 de un nuevo sistema de coordenadas $\{\hat{i}'_i\}$ y calculando el momento de inercia del cuerpo respecto de este nuevo eje,

$$\begin{aligned} I'_{11} &= c_{11} c_{11} I_{11} - c_{11} c_{12} I_{12} - c_{11} c_{13} I_{13} - c_{12} c_{11} I_{12} + c_{12}^2 I_{22} + \dots \\ &= c_{11}^2 I_{11} + c_{12}^2 I_{22} + c_{13}^2 I_{33} - 2 c_{11} c_{12} I_{12} - 2 c_{11} c_{13} I_{13} - c_{12} c_{13} I_{23} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Con esta expresión se obtiene el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje $\hat{r}(\hat{i}'_1)$ cualquiera en función de los momentos de inercia respecto a las direcciones coordenadas originales y de los productos de inercia (o momentos centrífugos) respecto a los pares de planos coordenados.

Con el fin de establecer de una manera gráfica la ley de variación de I'_{11} , se toma sobre la recta un punto R situado a una distancia $r_R = \frac{1}{\sqrt{I'_{11}}}$ de 0. Se tiene que

$$|\bar{r}|^2 = \frac{1}{I'_{11}} \text{ y teniendo en cuenta que: } \cos \alpha_{11} = c_{11} = \frac{x_1}{|\bar{r}|} = \frac{x_1}{r_R}$$

y también que

$$c_{12} = \frac{x_2}{r_R} \quad c_{13} = \frac{x_3}{r_R}$$

entonces:

$$c_{11}^2 = \frac{x_1^2}{r_R^2} \quad c_{12}^2 = \frac{x_2^2}{r_R^2} \quad c_{13}^2 = \frac{x_3^2}{r_R^2}$$

reemplazando en (A.3); o sea multiplicando ambos miembros por r_R^2 :

$$1 = I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 - 2 I_{12}x_1x_2 - 2 I_{13}x_1x_3 - 2 I_{23}x_2x_3 \tag{A.4}$$

Esta expresión es la de una superficie cuádrica centrada en 0, llamada elipsoide (para un cuerpo rígido finito no puede existir ninguna orientación $\hat{r}(\hat{i}_1)$ para la cual I'_{11} sea nulo y r_R finito).

También se denomina a esta superficie elipsoide de inercia relativo al punto 0 del cuerpo rígido dado. La geometría del elipsoide define por completo las propiedades inerciales del cuerpo respecto de 0, es decir que representa gráficamente el tensor de inercia en 0. En general, a cada punto del cuerpo irá asociado un elipsoide diferente. En otras palabras, los I_{ij} son constantes, pero a medida que r va girando alrededor de 0 las coordenadas de R deben satisfacer la expresión (A.4) (Fig. A.2).

El elipsoide (de inercia en este caso) tiene tres ejes de simetría y siempre será posible orientar las direcciones coordenadas de manera que coincidan con dichos ejes (Fig. A.3) obteniéndose la ecuación canónica. En Algebra Lineal, se demuestra que estos ejes son los autovectores de la matriz, y sus elementos principales los autovalores.

Los momentos de inercia respecto a estos ejes reciben el nombre de momentos principales de inercia $I''_{11}, I''_{22}, I''_{33}$ y a los ejes se les llama ejes principales de inercia. Para esta orientación de los ejes se anulan los productos de inercia y la ecuación cuádrica (A.4) se convierte en:

$$1 = I''_{11}x_1^2 + x_2^2 I''_{22} + I''_{33}x_3^2 \tag{A.5}$$

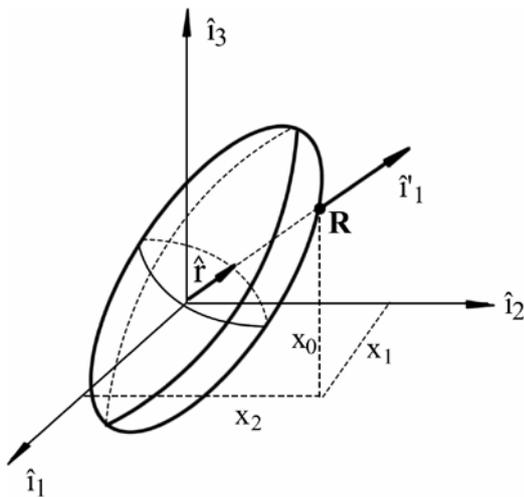


Fig A.2

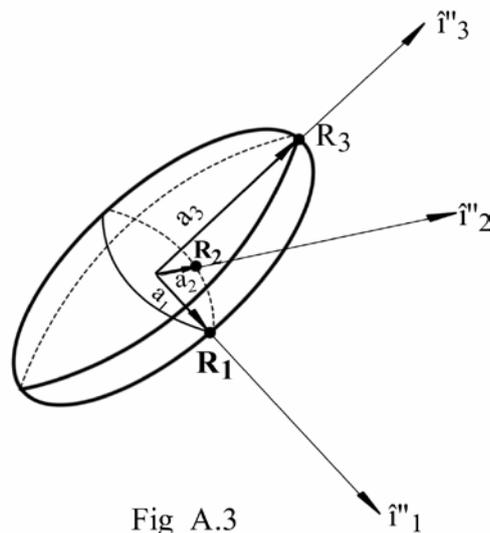


Fig A.3

Como se estudia en Geometría Analítica, la ecuación canónica de un elipsoide es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b, c, representan los semiejes del mismo.

En la expresión (A.5) se tiene

$$\frac{x_1^2}{1/I''_{11}} + \frac{x_2^2}{1/I''_{22}} + \frac{x_3^2}{1/I''_{33}} = 1$$

Luego, los semiejes del elipsoide de inercia están dados por:

$$a_1 = \frac{1}{(I''_{11})^{1/2}} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{(I''_{22})^{1/2}} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{(I''_{33})^{1/2}}$$

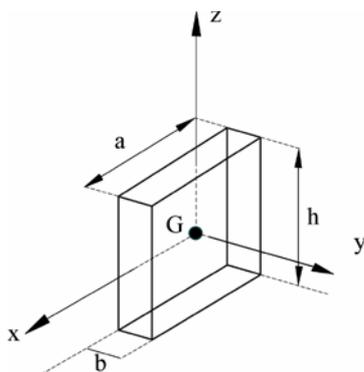
Siendo nulos los momentos centrífugos para estas direcciones de los ejes, el tensor de inercia toma la forma

$$\bar{I}_{(o)} = \begin{bmatrix} I''_{11} & 0 & 0 \\ & I''_{22} & 0 \\ Sim & & I''_{33} \end{bmatrix}$$

y se dice que está diagonalizado. De la definición de a_i y de la Fig. A.3. se observa que el momento de inercia es máximo respecto al eje para el cual a es mínimo.

En cuanto a la forma del elipsoide, si el cuerpo es por ejemplo una esfera o un cubo, el elipsoide será una esfera. A medida que el cuerpo se alarga o se acorta, también lo hace el elipsoide, acompañando la forma del cuerpo.

A modo de ejemplo, analícese las expresiones de los momentos de inercia para el caso de un bloque rectangular de lados a, b, h, tomadas del apartado siguiente (A1.4):



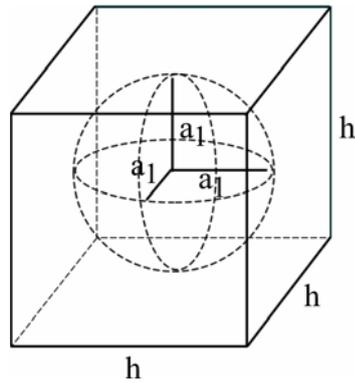
$$I_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + h^2)$$

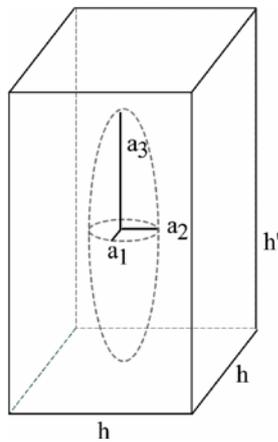
$$I_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Para un cubo, $a = b = h$ y el elipsoide degenera en una esfera:



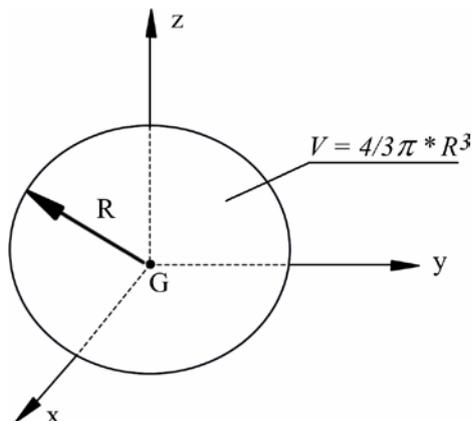
En la figura siguiente se nota que si aumenta h, I_{33} (I_{zz}) permanece constante, pero I_{11} (I_{xx}) e I_{22} (I_{yy}) aumentan, por lo que disminuyen los semiejes en x e y del elipsoide. Gráficamente:



Asimismo, al alejarse del baricentro el semieje disminuye (por Steiner), pues aumenta el momento de inercia.

A1.4. Momentos y productos de inercia de cuerpos homogéneos

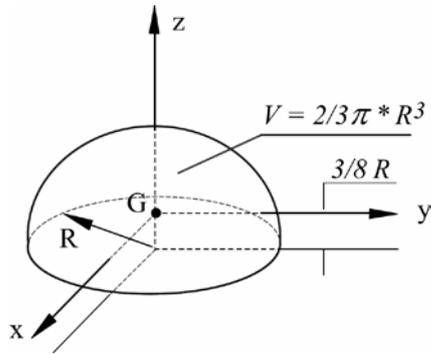
Esfera



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Hemisferio

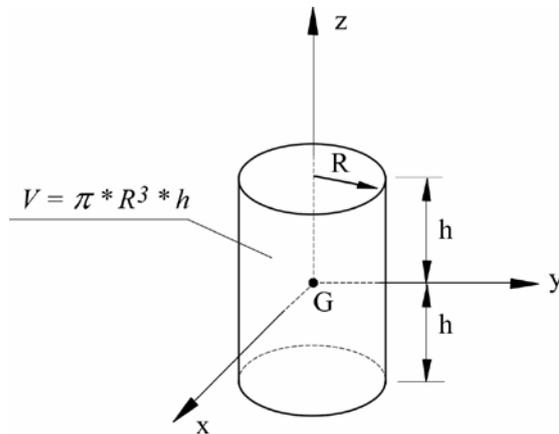


$$I_{xx} = I_{yy} = 0.259 mR^2$$

$$I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Cilindro

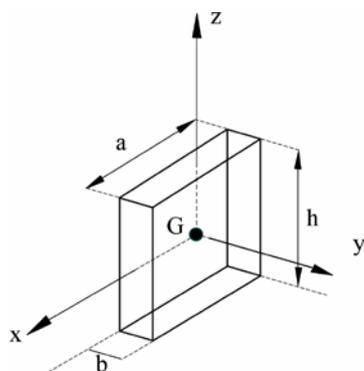


$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m (3R^2 + h^2)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Bloque rectangular



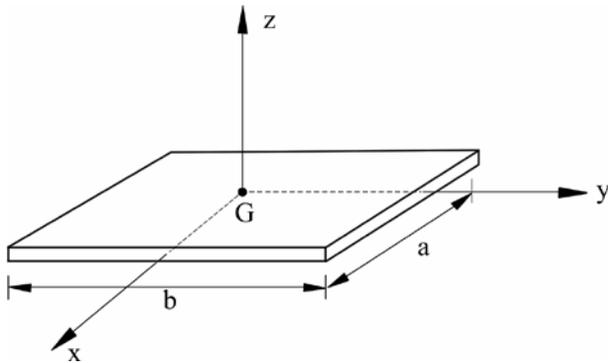
$$I_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + h^2)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Placa rectangular delgada



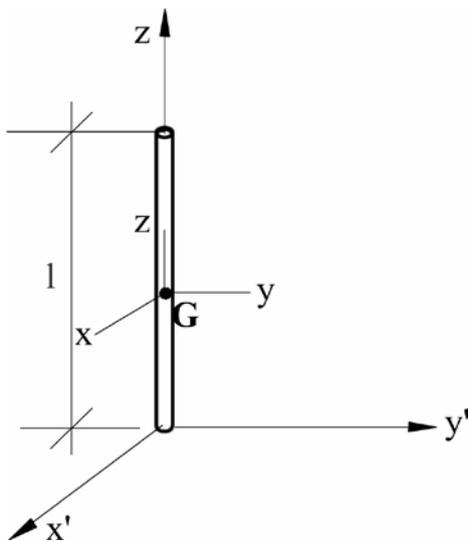
$$I_{xx} = \frac{m}{12} b^2$$

$$I_{yy} = \frac{m}{12} a^2$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Barra delgada



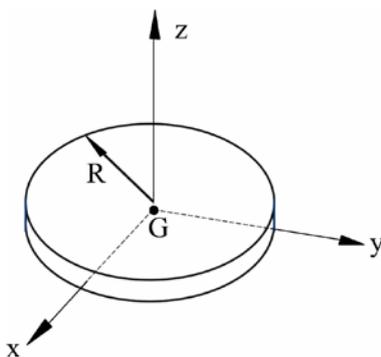
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} ml^2$$

$$I_{zz} = 0$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Disco circular delgado

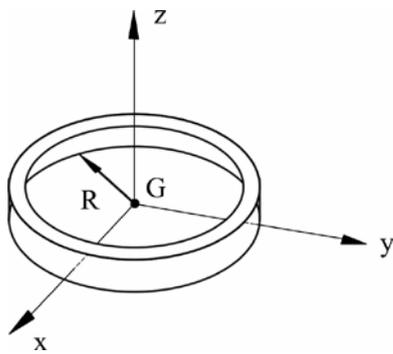


$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Anillo delgado

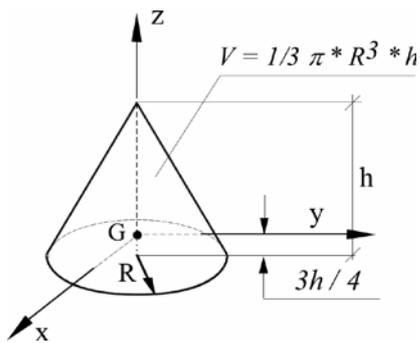


$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mR^2$$

$$I_{zz} = mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Cono

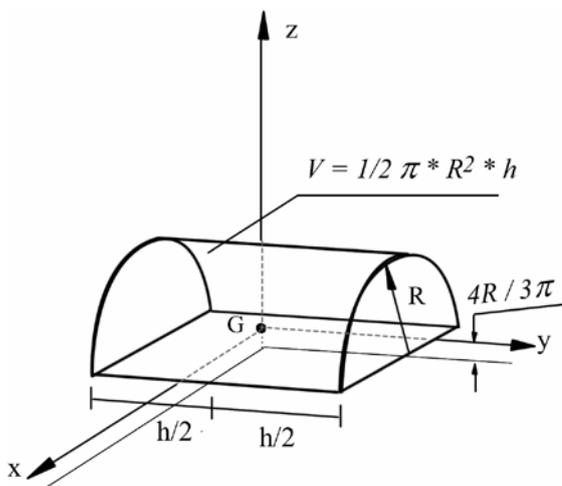


$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80} m(4R^2 + h^2)$$

$$I_{zz} = \frac{3}{10} mR^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Semicilindro



$$I_{xx} = 0.0699 mR^2 + \frac{m}{12} h^2$$

$$I_{yy} = 0.320 mR^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2)$$

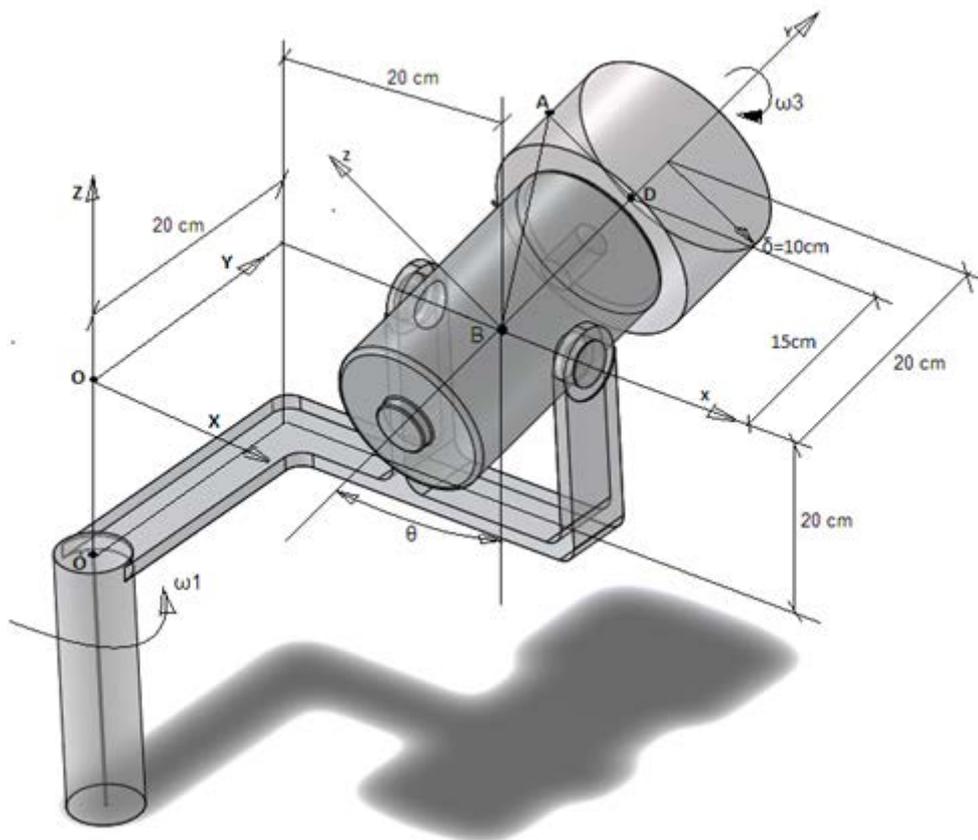
$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

APÉNDICE 2

PROBLEMA INTEGRADOR: Cinemática y cinética del cuerpo rígido.

El rotor del motor eléctrico de la figura está compuesto de la armadura, el devanado y un ventilador en el extremo opuesto del disco de espesor $\rho = 10$ cm, solidario al eje. La distribución de masas de dichos elementos hace que el centro de masas del conjunto se encuentre ubicado en el punto B, como se muestra en la figura. El rotor compuesto de ventilador, devanado y disco posee una masa total $m = 2$ Kg y su longitud es $L = 30$ cm entre extremos.

El motor hace girar al disco a velocidad angular de magnitud constante $\omega_3 = 30$ rad/s. Simultáneamente todo el conjunto gira solidariamente unido al eje vertical Z del sistema coordinado móvil $\{0, X, Y, Z\}$ mediante el bastidor de soporte con velocidad angular constante $\omega_1 = 8$ rad/s.



En el sistema coordinado móvil $\{B, x, y, z\}$ el punto A de la periferia del disco posee coordenada $z_A = 0,10$ m.

Calcular para $\vartheta=30^\circ$:

- 1) Invariantes vectorial, escalar y tipo de movimiento.
- 2) La velocidad del punto A en la periferia del disco aplicando el método del movimiento absoluto, tomando como centro de reducción al punto O y al punto B.
- 3) La aceleración angular del disco.
- 4) La aceleración del punto A aplicando el método del movimiento absoluto tomando como centro de reducción al punto B.
- 5) La velocidad del punto A, aplicando el método del movimiento relativo.
- 6) La aceleración del punto A aplicando el método del movimiento relativo.
- 7) La energía cinética del conjunto rotor-disco de masa $m = 2$ kg cuyos momentos de segundo orden con respecto a los ejes x, y, z fijos a él, pueden aproximarse como:

$$I_{zz} = I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{zy} = 0$$

- 8) La cantidad de movimiento del conjunto.
- 9) El momento cinético del conjunto respecto del punto B tomando como sistema coordinado el $\{B, x, y, z\}$, solidariamente unido al mismo.
- 10) Verificar el valor obtenido en el inciso anterior tomando como sistema coordinado el $\{B, X, Y, Z\}$ que gira con ω_1 , paralelo al que se observa en la figura con origen en O.
- 11) La expresión del momento de las fuerzas exteriores en "B"
- 12) Las reacciones estáticas en el punto de unión O' entre el bastidor y el eje Z.
- 13) Las reacciones dinámicas en el mismo punto
- 14) Las reacciones totales en el mismo punto
- 15) Recalcular la aceleración angular cuando el motor, continuando en su movimiento, gira además con velocidad angular constante $\omega_2 = 10$ 1/s en torno al eje x.

Resolución

- 1) Invariantes vectorial, escalar y tipo de movimiento.

Utilizando el sistema coordinado $\{0, X, Y, Z\}$ con rotación $\vec{\omega}_1$, el invariante vectorial (2.20) toma la forma

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3 = \omega_1 \hat{K} + \omega_3 (\text{sen}\theta \hat{J} + \text{cos}\theta \hat{K})$$

Para $\theta = 30^\circ$, se tiene: $\vec{\omega} = 15\hat{J} + 34\hat{K}$ rad/s

Tomando al punto B para el cálculo del invariante escalar (2.21), será: $\mu = \vec{V}_B \cdot \hat{\omega}$

Es, $\vec{V}_B = \vec{\omega}_1 \wedge 0,2(\hat{I} + \hat{J}) = 1,6(-\hat{I} + \hat{J})$ m/s

y $\omega = \sqrt{15^2 + 34^2} = 37,16$ rad/s

$$\hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = 0,4\hat{J} + 0,91\hat{K}$$

Por lo tanto: $\mu = 0,64$ m/s

Con este valor del invariante escalar, surge que el movimiento es del tipo helicoidal instantáneo, lo cual se corresponde con las dos rotaciones alabeadas que afectan al disco.

2) Velocidad del punto A en la periferia del disco aplicando el método del movimiento absoluto, tomando como centro de reducción al punto O y al punto B.

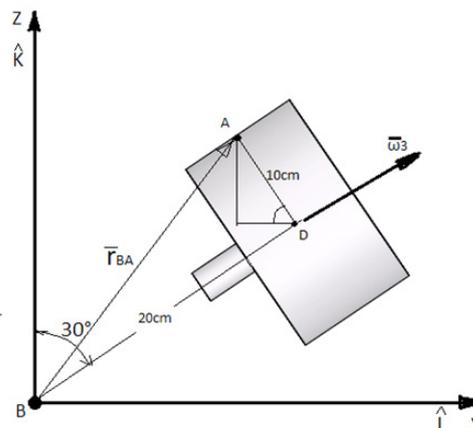
Se resolverá utilizando el sistema coordenado {B, X, Y, Z}.

a) Tomando al punto B como centro de reducción, la forma impropia de la ley de distribución de velocidades (2.14), toma la forma:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA}$$

Del apartado anterior, es:

$$\vec{V}_B = 1,6(-\hat{I} + \hat{J}) \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \vec{\omega} = 15\hat{J} + 34\hat{K} \text{ rad/s}$$



$$\vec{r}_{BA} = 0,2(\text{sen}30\hat{J} + \text{cos}30\hat{K}) + 0,1(-\text{cos}30\hat{J} + \text{sen}30\hat{K}) = 0,0134\hat{J} + 0,22\hat{K} \text{ m}$$

Así: $\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA} = 2,86\hat{I}$

y, resulta finalmente: $\vec{V}_A = 1,26\hat{I} + 1,6\hat{J}$ m/s

b) Tomando ahora a 0 como centro de reducción, será:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0,A}$$

Considerando a 0 como punto del cuerpo, su velocidad es:

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 &= \vec{\omega}_3 \wedge \vec{r}_{B0} = (15\vec{J} + 25,98\hat{K}) \wedge 0,2(-\hat{I} - \hat{J}) = 5,196\hat{I} - 5,196\hat{J} + 3\hat{K} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0,A} &= (15\hat{J} + 34\hat{K}) \wedge (0,2\hat{I} + 0,213\hat{J} + 0,22\hat{K}) = -4,24\hat{I} + 6,8\hat{J} - 3\hat{K}\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $\vec{V}_A = 1,26\hat{I} + 1,6\hat{J}$ m/s

3) Aceleración angular del disco

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(15\hat{J} + 34\hat{K})$$

Aplicando las ecuaciones de Poisson (2.18), se obtiene:

$$\vec{\gamma} = 15\vec{\omega}_1 \wedge \vec{J} = 15,8\hat{K} \wedge \hat{J} = -120\hat{I} \text{ rad/s}^2$$

4) Aceleración del punto A aplicando el método del movimiento absoluto, tomando como centro de reducción al punto B.

Según (2.15), se tendrá:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA}$$

Es: $\vec{a}_B = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_1 \wedge 0,2(\hat{I} + \hat{J}) = -12,8(\hat{I} + \hat{J})$ m/s²

y $\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA} = (34\hat{K} + 15\hat{J}) \wedge (0,0134\hat{J} + 0,22\hat{K}) = 2,845\hat{I}$ m/s

luego $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA} = (34\hat{K} + 15\hat{J}) \wedge 2,845\hat{I} = 96,73\hat{J} - 42,67\hat{K}$ m/s²

también, $\vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{BA} = -120\hat{I} \wedge (0,0134\hat{J} + 0,22\hat{K}) = -1,56\hat{K} + 26,4\hat{J}$ m/s²

Por lo que, finalmente: $\vec{a}_A = -12,8\hat{I} + 110,61\hat{J} - 44,3\hat{K}$ m/s²

5) Velocidad del punto A, aplicando el método del movimiento relativo.

El marco de referencia relativo será el bastidor de soporte. Luego, utilizando la expresión (2.26'), se tiene que $\vec{V} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$

$$\vec{V}_{relA} = \vec{\omega}_3 \wedge \vec{r}_{BA} = (15\hat{J} + 25,98\hat{K}) \wedge (0,0134\hat{J} + 0,22\hat{K}) = 2,96\hat{I} \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_{arrA} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{BA} = 1,6(-\hat{I} + \hat{J}) + 8\hat{K} \wedge (0,0134\hat{J} + 0,22\hat{K}) = -1,704\hat{I} + 1,6\hat{J} \text{ m/s}$$

Resultando,
$$\vec{V}_A = 1,26\hat{I} + 1,6\hat{J} \text{ m/s}$$

6) Aceleración del punto A aplicando el método del movimiento relativo.

Según la expresión (2.28') es: $\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{com}$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_{arrA} = \vec{a}_B + \vec{\gamma}_1 \wedge \vec{r}_{BA} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{BA} = -12,8(\hat{I} + \hat{J}) + 8\hat{K} \wedge 0,107(-\hat{I}) = -12,8\hat{I} - 13,65\hat{J}$$

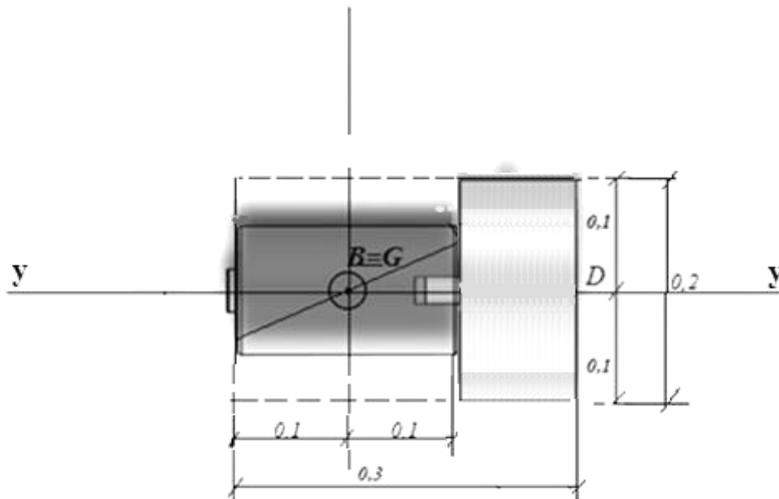
$$\vec{a}_{relA} = \vec{\omega}_3 \wedge \vec{\omega}_3 \wedge \vec{r}_{BA} = (15\hat{J} + 25,98\hat{K}) \wedge 2,96\hat{I} = 76,9\hat{J} - 44,4\hat{K} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{comA} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{V}_{relA} = 2 \cdot 8\hat{K} \wedge 2,96\hat{I} = 47,36\hat{J} \text{ m/s}^2$$

Resultando:
$$\vec{a}_A = -12,8\hat{I} + 110,61\hat{J} - 44,3\hat{K} \text{ m/s}^2$$

7) Energía cinética del conjunto rotante

Según el enunciado, a los efectos de su distribución másica en el espacio el conjunto rotante puede aproximarse como un cilindro equivalente de longitud 0,30 m y diámetro 0,20 m



La expresión (4.8) permite calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rototraslación:

$$e = \frac{1}{2}mV_{o_1}^2 + \frac{1}{2}I_{\omega\omega_{o_1}}\omega^2 + m\vec{V}_{o_1} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{o_1,G}$$

Adoptando al punto B como centro de reducción, la expresión anterior toma la forma

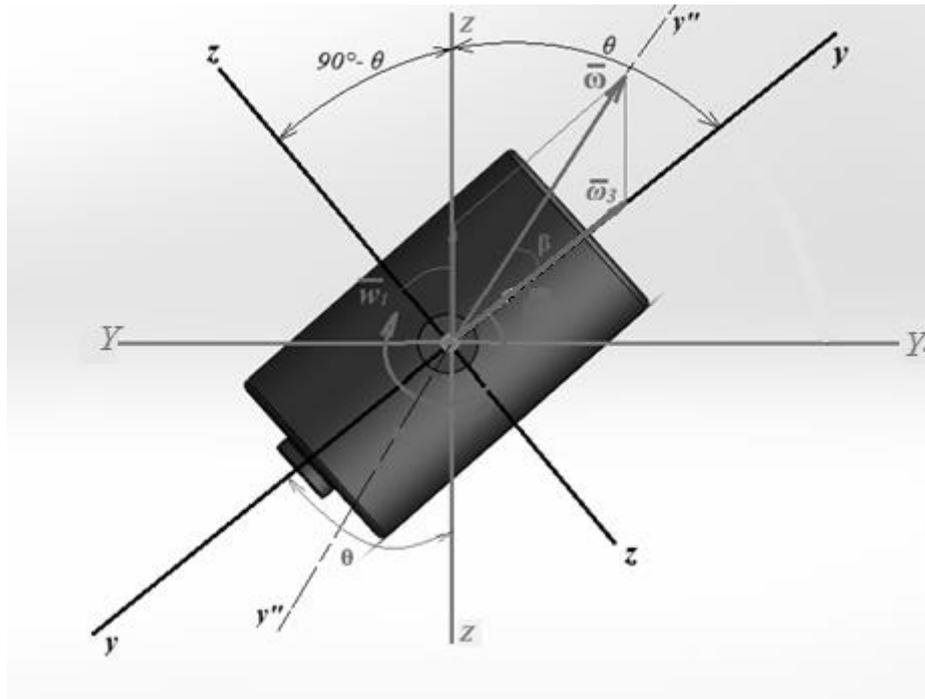
$$e = e_1 + e_2 = \frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}I_{\omega\omega_B}\omega^2$$

Ya que es $e_3 = 0$ por cuanto $\vec{r}_G = \vec{r}_B = \vec{0}$

Siendo $\vec{V}_B = 1,6(-\hat{I} + \hat{J})$ m/s, resulta $V_B^2 = 5,12$ (m/s)² y por lo tanto

$$e_1 = 0,5 \times 2 \times 5,12 = 5,12 \text{ J}$$

Según los datos, los momentos de inercia y centrífugos del conjunto rotante con respecto a los ejes x, y, z fijos a él, resultan:



$$I_{xx} = I_{11} = 0,25 \times 2 \times 0,1^2 + 1/12 \times 2 \times 0,30^2 = 0,02 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{yy} = I_{22} = 0,5 \times 2 \times 0,1^2 = 0,01 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{zz} = I_{33} = I_{11} = 0,02 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{xy} = I_{12} = 0; I_{yz} = I_{23} = 0; I_{xz} = I_{13} = 0$$

Por lo que el tensor de inercia (4.15) del conjunto, referido al sistema coordenado {B, x, y, z} queda expresado como

$$\bar{\bar{I}}_B = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix}$$

En esta base, el vector $\vec{\omega}$ toma la forma:

$$\vec{\omega} = 8(\cos\theta\hat{j} + \text{sen}\theta\hat{k}) + 30\hat{j} = 36,93\hat{j} + 4\hat{k}$$

Por lo que el ángulo β entre el vector rotación y el eje coordenado y, resulta:

$$\text{tg}\beta = \frac{4}{36,93} = 0,108 \quad \text{y} \quad \beta = 6,18^\circ$$

Para el cálculo del momento de inercia $I_{\omega\omega_B}$ del conjunto, se asignará a la dirección del vector $\vec{\omega}$ la notación y'' , por lo que será $I_{\omega\omega_B} = I_{2''2''}$. Utilizando la notación indicial (A.1), se tendrá:

$$I_{2''2''} = c_{2''1}^2 I_{11} + c_{2''2}^2 I_{22} + c_{2''3}^2 I_{33}$$

Donde:

$$c_{2''1} = \cos 90^\circ = 0$$

$$c_{2''2} = \cos 6,18^\circ = 0,994$$

$$c_{2''3} = \cos 276,18^\circ = 0,108$$

Y por lo tanto:

$$I_{2''2''} = 0,994^2 \cdot 0,01 + 0,108^2 \cdot 0,02 = 0,0101 \text{ Kg m}^2$$

Luego,

$$e_2 = 0,5 \cdot 0,0101 \cdot (36,96^2 + 4^2) = 6,97 \text{ J}$$

Resultando, finalmente:

$$e = e_1 + e_2 = 12,1 \text{ J}$$

8) Cantidad de movimiento del conjunto

Según la expresión (4.9) es: $\vec{Q} = m\vec{V}_G$. Por lo tanto:

$$\vec{Q} = 2\text{Kg} \cdot 1,6(-\hat{I} + \hat{J}) \frac{m}{s} = -3,2\hat{I} + 3,2\hat{J} \text{ Kg m/s}$$

9) Momento cinético del conjunto respecto del punto B tomando como sistema coordinado el {B, x, y z}.

Según la expresión (4.16.b), es $\vec{K}_G = \bar{I}_{(G)} \vec{\omega}$.

Por lo tanto:

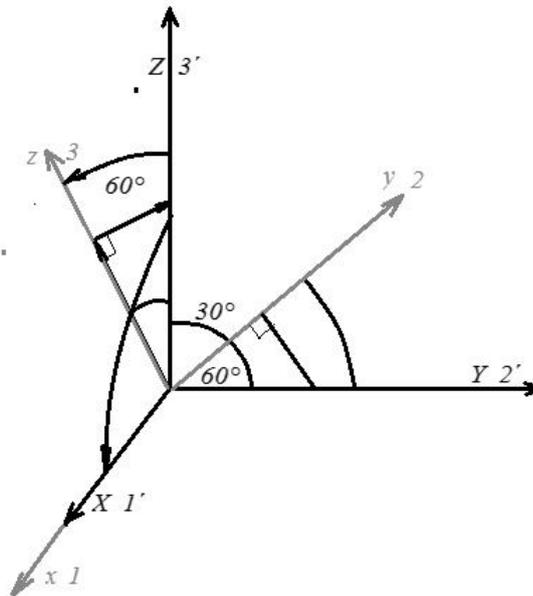
$$\vec{K}_B = \bar{I}_{(B)} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 36,93 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,37 \\ 0,08 \end{bmatrix}$$

o:

$$\vec{K}_B = 0,37\hat{j} + 0,08\hat{k} \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

10) Verificación del valor obtenido para \vec{K}_B en el inciso anterior tomando como sistema coordinado el {B, X, Y, Z} que gira con ω_1 , paralelo al que se observa en la figura con origen en O.

Denotando $X = 1'$, $Y = 2'$ y $Z = 3'$, los ángulos entre los ejes coordenados X, Y, Z y los x, y, z , son:



$$\alpha_{1'1} = 0^\circ ; \alpha_{1'2} = 90^\circ ; \alpha_{1'3} = 90^\circ$$

$$\alpha_{2'1} = 90^\circ ; \alpha_{2'2} = 60^\circ ; \alpha_{2'3} = 150^\circ$$

$$\alpha_{3'1} = 90^\circ ; \alpha_{3'2} = 330^\circ ; \alpha_{3'3} = 60^\circ$$

Por lo que los momentos de segundo orden del conjunto respecto de los ejes X, Y, Z , resultan:

$$I_{1'1'} = I_{11} = 0,02 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{2'2'} = c_{2'1}^2 I_{11} + c_{2'2}^2 I_{22} + c_{2'3}^2 I_{33} = 0,0025 + 0,015 = 0,0175 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{3'3'} = c_{3'1}^2 I_{11} + c_{3'2}^2 I_{22} + c_{3'3}^2 I_{33} = 0,0125 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{1'2'} = I_{1'3'} = 0 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{2'3'} = c_{2'1} \cdot c_{3'1} I_{11} + c_{2'2} c_{3'2} I_{22} + c_{2'3} c_{3'3} I_{33} = -0,00433 \text{ Kg m}^2$$

Por lo tanto:

$$\vec{K}_B = \bar{I}_{(B)} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0175 & -0,00433 \\ 0 & -0,00433 & 0,0125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,12 \\ 0,36 \end{bmatrix}$$

o:
$$\vec{K}_B = 0,12\hat{J} + 0,36\hat{K} \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

Verificación:

es:
$$\begin{aligned}\hat{J} &= \cos 60\hat{j} - \text{sen}60\hat{k} = 0,5\hat{j} - 0,866\hat{k} \\ \hat{K} &= \text{sen}60\hat{j} + \cos 60\hat{k} = 0,866\hat{j} + 0,5\hat{k}\end{aligned}$$

reemplazando en la expresión para \vec{K}_B :

$$\vec{K}_B = 0,12(0,5\hat{j} - 0,866\hat{k}) + 0,36(0,866\hat{j} + 0,5\hat{k}) = 0,37\hat{j} + 0,08\hat{k} \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

como se quería demostrar.

11) Obtención de la expresión del momento de las fuerzas exteriores en "B"

Según la expresión de Euler (4.23'), es

$$\vec{M}_{FE_B} = \left[\frac{d\vec{K}_B}{dt} \right]_{rel} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{K}_B + \vec{V}_B \wedge \vec{Q}$$

Siendo constantes las componentes de \vec{K}_B con respecto a la terna móvil, su derivada resulta nula. También se anula el tercer sumando, por cuanto se trata del producto vectorial de dos vectores colineales. Por lo tanto,

$$\vec{M}_{FE_B} = 8\hat{K} \wedge (0,12\hat{J} + 0,36\hat{K}) = -0,96\hat{I} \text{ N m}$$

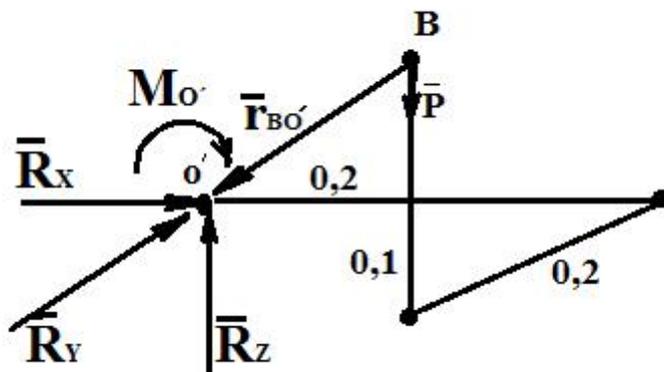
12) Cálculo de las reacciones estáticas en el punto O' de unión entre el bastidor y el eje Z.

Utilizando las ecuaciones de la Estática:

$$\sum \vec{F}_{FE} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{FE_B} = \vec{0}$$

De las primeras, se obtiene



$$R_x = 0$$

$$R_y = 0$$

$$R_z - mg = 0, \text{ de donde } R_z = mg$$

De las segundas:

$$X) \quad -mg \cdot 0,2 + M_{O',x} = 0$$

$$Y) \quad mg \cdot 0,2 + M_{O',y} = 0$$

$$Z) \quad M_{O',z} = 0$$

Por lo tanto, las reacciones estáticas resultan:

$$R_z = mg = 19,6 \text{ N}$$

$$M_{O',x} = mg \cdot 0,2 = 3,92 \text{ N m}$$

$$M_{O',y} = -mg \cdot 0,2 = -3,92 \text{ N m}$$

13) Cálculo de las reacciones dinámicas en el punto de unión O' entre el bastidor y el eje Z.

Según la ecuación de Newton (4.20') es:

$$\vec{F}_E = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}$$

En este caso las componentes de \vec{Q} son constantes con respecto al marco móvil de referencia y $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1$, por lo que:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \vec{Q} = -25,6(\hat{I} + \hat{J}) \text{ N}$$

y en consecuencia:

$$R_x = -25,6 \text{ N}$$

$$R_y = -25,6 \text{ N}$$

$$R_z = 0$$

Estas reacciones en el plano del bastidor representan el esfuerzo que debe ejercer el vínculo para soportar la fuerza centrífuga del conjunto generada por la rotación $\vec{\omega}_1$.

Teniendo en cuenta ahora que las reacciones presentes en O' -vínculo de soporte entre el bastidor y el eje Z- ejecutan momento respecto al punto B a través de la estructura, se tiene:

$$\vec{r}_{B0'} \wedge R_x \hat{I} = 0,2R_x \hat{K} - 0,1R_x \hat{J}$$

$$\vec{r}_{B0'} \wedge R_y \hat{J} = -0,2R_y \hat{K} + 0,1R_y \hat{I}$$

$$\vec{r}_{B0'} \wedge R_z \hat{K} = \vec{0}$$

donde: $\vec{r}_{B0'} = -0,2\hat{I} - 0,2\hat{J} - 0,1\hat{K}$ m, y por lo tanto, aplicando la ecuación de Euler en componentes:

$$M_{Bx} - 0,1 R_y = -0,96 \text{ N m}$$

$$M_{By} + 0,1 R_x = 0$$

$$M_{Bz} - 0,2 R_x + 0,2 R_y = 0$$

de donde resulta:

$$M_{Bx} = 1,6 \text{ N m}; \quad M_{By} = -2,56 \text{ N m}; \quad M_{Bz} = 0 \text{ N m}$$

14) Obtención de las reacciones totales en el vínculo O'

Sumando las reacciones estáticas y las dinámicas en las respectivas direcciones:

$$R_x = -25,6 \text{ N}$$

$$R_y = -25,6 \text{ N}$$

$$R_z = 19,6 \text{ N}$$

$$M_{O'x} = 3,92 + 1,6 = 5,52 \text{ N m}$$

$$M_{O'y} = -3,92 - 2,56 = -6,48 \text{ N m}$$

$$M_{O'z} = 0 \text{ N m}$$

15) Cálculo de la aceleración angular cuando el motor, continuando en su movimiento, gira además con velocidad angular constante $\omega_2 = 10 \text{ 1/s}$ en torno al eje x.

La velocidad angular será ahora:

$$\vec{\omega} = \omega_2 \hat{I} + \omega_3 (\text{sen} \theta \hat{J} + \cos \theta \hat{K}) + \omega_1 \hat{K} \quad \text{ó}$$

$$\vec{\omega} = \omega_2 \hat{I} + \omega_3 \text{sen} \theta \hat{J} + (\omega_1 + \omega_3 \cos \theta) \hat{K}$$

Teniendo en cuenta que los módulos de las componentes de la velocidad angular son constantes, que $\theta = \omega_2 t$ y que los ejes coordenados adoptados giran con $\vec{\omega}_1$,

haciendo uso de las fórmulas de Poisson para las direcciones \hat{I} y \hat{J} se tiene:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega_2 \omega_1 \hat{J} - \omega_2 \omega_3 \text{sen} \theta \hat{K} + \omega_2 \omega_3 \cos \theta \hat{J} - \omega_1 \omega_3 \text{sen} \theta \hat{I}$$

Reemplazando para los datos en la posición del dibujo, resulta finalmente:

$$\vec{\gamma} = -120 \hat{I} + 339,8 \hat{J} - 150 \hat{K} \text{ rad/s}^2$$

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

- A. Bedford y W. Fowler, Mecánica para Ingeniería: Dinámica, ADDISON-WESLEY, 2012
- R. C. Hibbeler, Ingeniería Mecánica: Dinámica, PRENTICE HALL, 2004
- J. L. Merian, Mecánica para Ingenieros: Dinámica, REVERTE, 2013
- F. P. Beer y E. R. Johnston, Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica, Mc GRAW-HILL, 2007
- L. R. Argüello, Mecánica, Answer Just in Time, Buenos Aires, 2003.
- N. R. Nara, Mecánica Vectorial para Ingenieros, LIMUSA, 1979

LIBROS PARA PROFUNDIZAR TEMAS

- H. Goldstein, Mecánica Clásica, AGUILAR, 1977
- K. R. Symon, Mecánica, AGUILAR, 1977
- P. Longhini, Mecánica Racional, EL ATENEO, 1960
- P. Targ, Curso Breve de Mecánica Teórica, MIR, 1974
- I. Meshersky, Problemas de Mecánica Teórica, MIR, 1974
- D. A. Wells, Dinámica de Lagrange, Mc GRAW-HILL, 1972

LIBROS DE LECTURA

- S. W. Hawking, Historia del tiempo, DRAKONTOS, 2002.
- A. Einstein y L. Infeld, La Física, aventura del pensamiento, LOSADA, 2002.

ENLACES DE INTERÉS

- Física con ordenador - <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica>
- Univ. Politécnica de Madrid - <http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/>

INDICE

Capítulo 1 – CINEMÁTICA DEL PUNTO

Cinemática del punto	11
Concepto de velocidad	14
Concepto de velocidades angular y areolar	18
Concepto de aceleración	20
Concepto de aceleraciones angular y areolar	26
Expresiones de Gaston Darboux	27
Diagramas	28
Movimientos	30
Movimientos periódicos	30
Movimientos circulares	31
Movimiento oscilatorio armónico	32
Movimientos centrales	49

Capítulo 2 – CINEMÁTICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS

Cinemática de los sistemas de puntos	57
Definiciones	57
Sistemas materiales rígidos	59
Movimiento de los sistemas rígidos	61
Movimiento rototraslatorio	77
Estudio general del movimiento rígido	80
Primer método: movimiento absoluto	81
Segundo método: movimiento relativo	94
Movimiento polar	97
Cinemática del movimiento plano	99
Trayectorias polares	106

Capítulo 3 – CINÉTICA DEL PUNTO MATERIAL

Cinética del punto material	113
Leyes de Newton	113
Sistemas de referencia en dinámica	116
Principio de D'Alembert (o del equilibrio dinámico)	120
Fuerzas naturales	122
Conceptos mecánicos derivados	125
Trabajo elemental	125
Potencia	130
Energías cinética y potencial	130
Cantidad de Movimiento y Momento de la cantidad de movimiento	132
Algunos casos particulares del movimiento del punto material	133
Movimiento de caída en un medio resistente	133
Movimiento de un punto material en un campo gravitacional newtoniano	135
Vibraciones mecánicas	138
Vibraciones libres de un sistema mecánico de un grado de libertad sujeto a fuerza elástica	138

Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso	141
Vibraciones forzadas de un sistema sin amortiguamiento	145
Vibraciones forzadas de un sistema con amortiguamiento viscoso	151
Concepto de transmisibilidad y aislación	159

Capítulo 4 – CINÉTICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

Cinética de los sistemas materiales	165
Trabajo elemental de las fuerzas que actúan sobre un sistema material	165
Expresión general de la energía cinética para un sistema material	167
Expresión general de la cantidad de movimiento para un sistema material	170
Expresión general del momento cinético para un sistema material	171
Teoremas de la cinética	179
Teorema de la derivada de la cantidad de movimiento	179
Teorema de la derivada del momento cinético	181
Teorema de las fuerzas vivas	183
Potencia	183
Teorema de las áreas	184
Teoremas de conservación	184
Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento	184
Teorema de conservación del momento cinético	185
Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo	185
Dinámica del movimiento polar: movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo	196
Movimiento de un cuerpo libre rígido bajo la acción de su propio peso	209

Capítulo 5 – DINÁMICA ANALÍTICA

Dinámica analítica	213
Ecuaciones de Lagrange para un punto material	214
Ecuaciones de Lagrange para fuerzas conservativas	224
Ecuaciones de Lagrange para un sistema de puntos materiales	228
Ecuaciones de Hamilton	235

APÉNDICE 1

Tensores cartesianos	239
Transformación por rotación de ejes	239
Transformación por traslación de ejes	241
Elipsoide de inercia	242
Momentos y productos de inercia de cuerpos homogéneos	246

APÉNDICE 2

Problema integrador	251
---------------------	-----

La Mecánica tiene como objeto el estudio del movimiento de los cuerpos. Con el desarrollo de las tecnologías en las últimas décadas, las máquinas y estructuras de soporte funcionan a grandes velocidades y con aceleraciones apreciables, mientras que los materiales que las constituyen se vuelven cada vez más livianos y resistentes. Este hecho induce a pensar que excepcionalmente un ingeniero, cualquiera sea su campo de especialización, podrá prescindir de los conocimientos básicos sobre Dinámica.

El presente trabajo sobre Mecánica Racional constituye un aporte que es fruto de muchos años de experiencia en la materia y que ha sido concebido como una solución para el alumno en lo que respecta al seguimiento de las clases con un único texto.

La obra está dirigida a los cursantes de la asignatura mecánica Racional del tercer nivel de la carrera de grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica Nacional, aunque puede ser usada como base por alumnos de otras ingenierías, quienes debieran adaptarla a los contenidos de sus programas.

Liberto Ercoli es Profesor en Docencia Superior, Ingeniero Mecánico y Doctor en Ingeniería. Es Decano y Profesor Ordinario Titular de Mecánica Racional en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, donde desde 1979 se desempeña como docente investigador. Ha realizado numerosos cursos de perfeccionamiento en el país y en el exterior, especializándose en acústica, vibraciones mecánicas y diagnóstico de maquinarias. Fue miembro activo del Vibration Institute y de la American Academy of Mechanics, siéndolo actualmente de la Acoustical Society of America. En 1987 se hizo acreedor a uno de los premios "Dr. B. Housay" otorgados por el CONICET.

Ha dirigido proyectos de investigación, participado como jurado en numerosos concursos docentes y como evaluador de tesis de posgrado y de proyectos en diferentes universidades, además de revistar como referí de diversas publicaciones científicas.

Posee más de sesenta publicaciones en revistas internacionales con referato, como: Journal of Sound and Vibration, Nuclear Engineering and Design, Applied Acoustics, Ocean Engineering, Acustica, Journal of Mechanical Engineering Education, Journal of the Acoustical Society of America, J. of Building Acoustics, etc. Sus trabajos han participado en numerosos congresos y reuniones científicas de la especialidad.

Virginia Azurmendi es Ingeniera Civil. Profesora Titular en los Departamentos de Ciencias Básicas, de Ingeniería Mecánica e Ing. Eléctrica de la Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional y es Profesora Asociada del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

Ha sido jurado de gran cantidad de concursos docentes, es miembro de comisiones evaluadoras de carreras académicas y es docente investigadora de la UTN.

Tiene cargos directivos de gestión universitaria en la Universidad Nacional del Sur y en la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional siendo en la actualidad Directora del Departamentos Ciencias Básicas.

edUTecNe



Libro
Universitario
Argentino

ISBN 978-987-1869-23-3



9 789871 896233