

TESIS DE MAESTRÍA  
EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Título:

“Inestabilidad del Equilibrio en Vigas y Columnas de acero con Secciones de Paredes Delgadas mediante el Método de las Bandas Finitas”

Autor: Ing. Laura Cacciante  
Director de Tesis: Dr. Raúl Bertero

Buenos Aires - 2018



*Dedico esta Tesis al Ing. Alberto Hugo Puppo (†) quien desinteresadamente me animó y ayudó a comenzar esta tarea.*

*La dedico también a mi familia biológica y a la Universidad Católica Argentina,  
mi familia Institucional*



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos aquellos quienes directa o indirectamente colaboraron en la elaboración de este trabajo.

En primer lugar a mi tutor, el Dr. Raúl Bertero y al Ing. Alberto Hugo Puppo (†), mis ejemplos de ingeniero y profesor.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina, muy especialmente a su Decana, la Ing. Norma Ciatti, quien me animara y proporcionara los medios para continuar mis estudios.



## **RESUMEN**

En esta tesis se desarrolla el Método de las Bandas Finitas para la resolución analítico – numérica eficiente de los problemas de inestabilidad del equilibrio en vigas y columnas de acero con secciones de paredes delgada, comparando los resultados obtenidos con la teoría clásica de la estabilidad elástica.

## **ABSTRACT**

In this thesis, the Finite Strip Method is developed for the efficient numerical – analytical resolution of Buckling problems in steel beams and columns with thin wall sections, comparing the results obtained with the classical theory of elastic stability.





## CONTENIDO

1.	LISTA DE ABREVIACIONES.....	17
2.	INTRODUCCION GENERAL .....	19
3.	ESTADO DEL ARTE.....	23
4.	SITUACIÓN REGLAMENTARIA.....	25
4.1.	<i>Secciones laminadas en caliente y secciones de chapa soldadas</i> .....	25
4.2.	<i>Secciones de chapa conformadas en frío</i> .....	25
4.2.1.	El método del ancho efectivo .....	25
4.2.2.	El método de la Resistencia Directa .....	27
4.2.2.1.	Introducción .....	27
4.2.2.2.	Pandeo elástico .....	28
4.2.2.2.1.	Soluciones numéricas .....	28
5.	DEFINICIÓN DE MODOS DE PANDEO.....	31
5.1.	<i>Pandeo local</i> .....	31
5.2.	<i>Pandeo distorsional</i> .....	32
5.3.	<i>Pandeo global</i> .....	33
5.3.1.	Pandeo flexional puro.....	33
5.3.2.	Pandeo torsional.....	34
5.3.3.	Pandeo lateral torsional .....	34
6.	EL ANÁLISIS DE LAS BANDAS FINITAS .....	37
6.1.	<i>Introducción</i> .....	37
6.2.	<i>Grados de libertad y funciones de forma</i> .....	38
6.3.	<i>Matriz de rigidez elástica (k)</i> .....	40
6.4.	<i>Matriz de rigidez geométrica (kg)</i> .....	44
6.5.	<i>Ensamble y solución</i> .....	47
6.6.	<i>Participación de la longitud de semionda en términos del número p</i> .....	47
6.7.	<i>Extensión del método de las bandas finitas restringido</i> .....	50
6.7.1.	Descomposición modal .....	51
6.8.	<i>CUFSM</i> .....	51
6.8.1.	Introducción .....	51

6.8.2.	Ingreso de datos .....	52
6.8.3.	Resultado.....	52
7.	ANÁLISIS COMPARATIVO DE CASOS.....	55
7.1.	<i>Introducción</i> .....	55
7.2.	<i>Sección en forma de cruz. Pandeo torsional</i> .....	55
7.2.1.	Características geométricas de la sección .....	55
7.2.2.	Resolución analítica .....	56
7.2.3.	Resolución mediante CUFSM .....	56
7.3.	<i>Perfiles ángulos sometidos a compresión</i> .....	58
7.3.1.	Introducción .....	58
7.3.2.	Perfil L76.1x2 .....	59
7.3.2.1.	Características de la sección .....	59
7.3.2.2.	Cálculo analítico .....	59
7.3.2.3.	Resolución mediante CUFSM .....	60
7.3.3.	Perfil L100x1 .....	61
7.3.3.1.	Características de la sección .....	61
7.3.3.2.	Resolución analítica para $l = 3m$ .....	62
7.3.3.3.	Resolución mediante CUFSM para $l = 3m$ .....	63
7.3.3.4.	Resolución analítica para $l = 8m$ .....	64
7.3.3.5.	Resolución mediante CUFSM para $l = 8m$ .....	64
7.3.4.	Perfil L100x3 .....	65
7.3.4.1.	Características de la sección .....	65
7.3.4.2.	Resolución analítica para $l = 0.5m$ .....	65
7.3.4.3.	Resolución mediante CUFSM para $l = 0.5m$ .....	66
7.3.4.4.	Resolución analítica para $l = 2m$ .....	67
7.3.4.5.	Resolución mediante CUFSM para $l = 2m$ .....	68
7.4.	<i>Perfil doble T sometido a flexión</i> .....	69
7.4.1.	Características geométricas de la sección (IPE80).....	69
7.4.2.	Resolución analítica .....	69
7.4.3.	Resolución mediante CUFSM .....	69
7.5.	<i>Perfil C100x50x5x1.6 sometido a compresión</i> .....	71
7.5.1.	Características de la sección.....	71
7.5.2.	Resolución analítica para $l = 5m$ .....	71
7.5.3.	Resolución mediante CUFSM para $l = 5m$ .....	72
7.5.4.	Resolución analítica para $l = 2m$ .....	73
7.5.5.	Resolución para CUFSM para $l = 2m$ .....	74

7.6.	<i>Perfil C100x50x5x1.6 sometido a flexión</i> .....	75
7.6.1.	Características geométricas de la sección .....	75
7.6.2.	Resolución analítica .....	75
7.6.3.	Resolución mediante CUFSM .....	75
7.7.	<i>Perfil C300x80x30x3.2 sometido a compresión</i> .....	76
7.7.1.	Características de la sección .....	76
7.7.2.	Resolución analítica para $l = 5m$ .....	77
7.7.3.	Resolución mediante CUFSM para $l = 2m$ .....	78
7.8.	<i>Perfil C300x80x30x3.2 sometido a flexión</i> .....	80
7.8.1.	Características geométricas de la sección .....	80
7.8.2.	Resolución analítica .....	80
7.8.3.	Resolución mediante CUFSM .....	81
7.9.	<i>Secciones sin ningún eje de simetría</i> .....	82
7.9.1.	Perfil C de alas desiguales.....	82
7.9.1.1.	Características de la sección .....	82
7.9.1.2.	Cálculo analítico .....	83
7.9.1.3.	Resolución mediante CUFSM .....	84
7.9.2.	Perfil Z modificado.....	85
7.9.2.1.	Características de la sección .....	85
7.9.2.2.	Cálculo analítico .....	86
7.9.2.3.	Resolución mediante CUFSM .....	86
7.10.	<i>Casos singulares</i> .....	88
7.10.1.	Perfil C reforzado.....	88
7.10.1.1.	Características de la sección .....	88
7.10.1.2.	Resolución mediante CUFSM.....	88
7.10.2.	Perfil C de ala ancha .....	90
7.10.2.1.	Características de la sección .....	90
7.10.2.2.	Resolución mediante CUFSM.....	90
8.	CONCLUSIONES.....	93
9.	ANEXO 1 – PANDEO FLEXIONAL PURO .....	95
10.	ANEXO 2 – PANDEO TORSIONAL .....	101
10.1.	<i>Introducción</i> .....	101
10.2.	<i>Pandeo torsional</i> .....	107
10.3.	<i>Pandeo flexotorsional</i> .....	111
10.3.1.	Barra biarticulada .....	114
10.3.2.	Barra biempotrada .....	115

10.3.3.	Sección transversal con un eje de simetría .....	116
11.	ANEXO 3 – PANDEO DE PLACAS RECTANGULARES .....	119
12.	ANEXO 4 – PANDEO LATERAL TORSIONAL .....	123
12.1.	Introducción .....	123
12.2.	Pandeo lateral de vigas en flexión pura .....	126
13.	ANEXO 5: MÉTODO DE LA RESISTENCIA DIRECTA .....	129
13.1.	Introducción .....	129
13.1.1.	Alcance .....	129
13.1.1.1.	Columnas precalificadas .....	129
13.1.1.2.	Vigas precalificadas.....	132
13.1.2.	Pandeo elástico .....	134
13.1.3.	Determinación de la serviciabilidad .....	135
13.2.	Barras.....	135
13.2.1.	Diseño de columnas .....	135
13.2.1.1.	Pandeo flexional, torsional y flexotorsional .....	135
13.2.1.1.1.	Columnas sin perforaciones.....	135
13.2.1.1.2.	Columnas con perforaciones .....	136
13.2.1.2.	Pandeo local.....	136
13.2.1.2.1.	Columnas sin perforaciones.....	136
13.2.1.2.2.	Columnas con perforaciones .....	136
13.2.1.3.	Pandeo distorsional .....	137
13.2.1.3.1.	Columnas sin perforaciones.....	137
13.2.1.3.2.	Columnas con perforaciones .....	137
13.2.2.	Diseño de vigas .....	138
13.2.2.1.	Flexión.....	138
13.2.2.1.1.	Pandeo lateral torsional.....	138
13.2.2.1.1.1	Vigas sin perforaciones.....	138
13.2.2.1.1.1.1	Resistencia al Pandeo Lateral - Torsional.....	138
13.2.2.1.1.1.2	Reserva inelástica para pandeo lateral torsional (Resistencia).....	139
13.2.2.1.1.2	Vigas con perforaciones .....	139
13.2.2.1.2.	Pandeo local.....	139
13.2.2.1.2.1	Vigas sin perforaciones.....	139
13.2.2.1.2.1.1	Resistencia a pandeo local .....	139
13.2.2.1.2.1.2	Reserva inelástica de la Resistencia a pandeo local.....	140
13.2.2.1.2.2	Vigas con perforaciones .....	140
13.2.2.1.3.	Pandeo distorsional .....	141
13.2.2.1.3.1	Vigas sin perforaciones.....	141

13.2.2.1.3.1.1	Resistencia a pandeo distorsional.....	141
13.2.2.1.3.1.2	Reserva inelástica de la Resistencia a pandeo distorsional .....	141
13.2.2.1.3.2	Vigas con perforaciones .....	142
13.2.2.2.	Corte .....	143
13.2.2.2.1.	Vigas sin rigidizadores en el alma .....	143
13.2.2.2.2.	Vigas con rigidizadores en el alma .....	143
13.2.2.3.	Combinación de flexión y corte .....	144
13.3.	<i>Conclusiones</i> .....	144
14.	ANEXO 6: DESARROLLO NUMÉRICO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ DEL MÉTODO DE LAS BANDAS FINITAS.....	145



## INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Secciones típicas de perfiles laminados en caliente.....	19
Figura 2: Ejemplo de perfiles de chapa de acero soldada .....	19
Figura 3: Secciones de chapas de acero conformadas en frío.....	20
Figura 4: Pandeo local de una sección.....	31
Figura 5: Pandeo local de una sección.....	31
Figura 6: Pandeo distorsional de una sección .....	32
Figura 7: Pandeo lateral torsional de una viga .....	35
Figura 8: Coordenadas, grados de libertad y cargas para una banda típica.....	38
Figura 9: Placa de análisis de espesor constante .....	47
Figura 10: Forma de pandeo en el modo $L/b=5$ para una placa biempotrada en su borde cargado y simplemente apoyada en sus bordes longitudinales .....	48
Figura 11: Forma de pandeo en el modo $L/b=5$ para una placa biempotrada en todos sus bordes .....	48
Figura 12: Participación del número de semionda para $L/b=5$ para una placa simplemente apoyada en todos sus bordes.....	49
Figura 13: Participación del número de semionda para $L/b=5$ para una placa C-C, S-S.....	49
Figura 14: Ejemplo de <i>Signature Curve</i> (Curva de cargas de pandeo) .....	53
Figura 15: Características geométricas de la sección en forma de cruz (mm) .....	55
Figura 16: Curva de cargas de pandeo para un perfil en forma de cruz. Tensión crítica de pandeo torsional.....	56
Figura 17: Curva de carga de pandeo para un perfil en forma de cruz. Pandeo por flexión pura .....	57
Figura 18: Placa rectangular uniformemente comprimida según el eje x.....	58
Figura 19: Características geométricas de la sección (L76x1.2) .....	59
Figura 20: Curva de cargas de pandeo para un perfil L76.1x2 .....	60
Figura 21: Curva de cargas de pandeo para perfil un L76x1.2. Pandeo por flexión pura .....	61
Figura 22: Características de la sección (Perfil L100x1).....	62
Figura 23: Determinante en función de $T_x$ para un perfil L100x1 .....	63
Figura 24: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x1 – Pandeo torsional .....	63
Figura 26: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x1 – Pandeo torsional .....	64
Figura 27: Características de la sección (Perfil L100x3).....	65
Figura 29: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x3 – Pandeo torsional .....	67
Figura 30: Determinante en función de $T_x$ .....	67
Figura 31: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x3 – Pandeo torsional .....	68
Figura 33: Curva de cargas de pandeo para un perfil IPE80. Pandeo lateral torsional .....	70

Figura 34: Características geométricas de la sección (C100x50x5x1.6) .....	71
Figura 35: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo por flexión pura .....	73
Figura 36: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo por flexo–torsión .....	74
Figura 37: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo lateral torsional.....	76
Figura 38: Características geométricas de la sección (C300x80x30x3.2) .....	77
Figura 40: Curva de cargas de pandeo para un perfil C300x50x5x1.6 – Participación de los distintos modos ....	80
Figura 41: Curva de cargas de Pandeo para un perfil C300x80x30x3.2. Pandeo lateral torsional.....	81
Figura 42: Características de la sección C de alas desiguales.....	82
Figura 43: Curva de cargas de pandeo para perfil de alas desiguales.....	84
Figura 44: Característica de la sección Z modificada.....	85
Figura 46: Características Perfil C reforzado .....	88
Figura 47: Curva de cargas de pandeo para perfil C reforzado .....	89
Figura 48: Características del perfil C de ala ancha .....	90
Figura 49: Curva de cargas de pandeo para el perfil C de ala ancha.....	91
Figura 52: pandeo por torsión pura de una sección doble T.....	102
Figura 53: Pandeo por torsión pura de una sección arbitraria.....	103
Figura 54: Análisis de un elemento diferencial de la sección transversal .....	104
Figura 55: Perfil C – Módulo de alabeo .....	106
Figura 56: Barra uniformemente comprimida con forma de cruz .....	108
Figura 57: Barra biarticulada sometida a compresión .....	108
Figura 58: Sección transversal sometida a momento torsor.....	110
Figura 59: Caso general de una columna de sección abierta y pared delgada .....	111
Figura 60. Convención de signos para los momentos $M_x$ , $M_y$ .....	112
Figura 61: Sección con un eje de simetría .....	116
Figura 62: Placa rectangular uniformemente comprimida según el eje x.....	119
Figura 63: Perfil doble T sometido a flexión según su eje fuerte .....	124
Figura 64: Signos de los momentos.....	125
Figura 65: Perfil doble T sometido a $M_\zeta$ .....	125
Figura 66: Perfil doble T sometido a Momento flexor .....	126



## 1. LISTA DE ABREVIACIONES

AISI: American Iron and Steel Institute

ASD: Allowable Stress Design

cFSM: Constrained Finite Strip Method

CUFSM: Constrained and Unconstrained Finite Strip Method

DSM: Direct Strength Method

ECNR: Elemento comprimido no rigidizado

ECR: Elemento comprimido rigidizado

FEM: Finite Element Method

FSM: Finite Strip Method

LRFD: Load and resistance factor design

LSD: Limit States Design



## 2. INTRODUCCION GENERAL

Las estructuras metálicas se materializan con barras, elementos planos y medios de unión. En muchas de sus tipologías estructurales, las barras que se utilizan resultan ser secciones de paredes delgadas.

Las barras de paredes delgadas se definen como aquellas secciones transversales en las que una de las dimensiones –el espesor de la pared– es muy reducido con respecto a la longitud de la línea que contiene los puntos medios de los espesores. Esta longitud es, a su vez, muy pequeña con respecto a la luz.

Dentro de esta clasificación se encuentran los perfiles de acero laminados en caliente, los perfiles de chapa de acero soldada y los perfiles de chapa de acero conformados en frío.

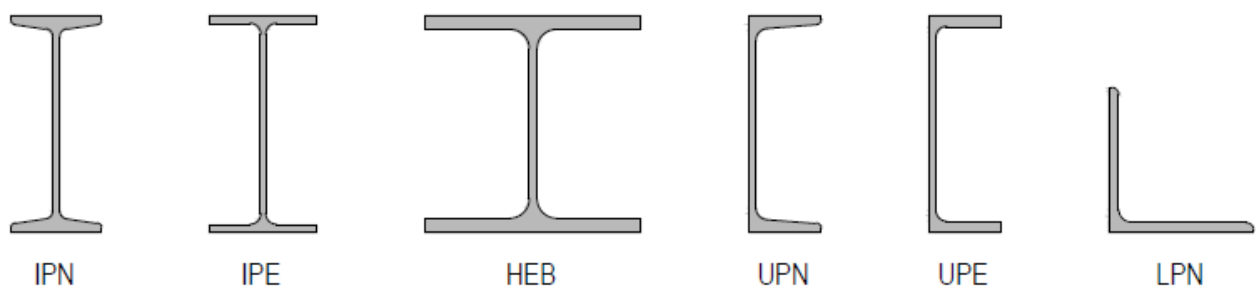


Figura 1: Secciones típicas de perfiles laminados en caliente

En cuanto a las ventajas propias de estos perfiles, se destaca su resistencia y rigidez, el bajo peso, su favorable relación resistencia/peso, la factibilidad de prefabricación y producción industrializada, la facilidad y rapidez de montaje, la eliminación de retrasos debido al clima, la precisión, el ahorro de encofrados, la calidad uniforme de sus materiales y la incombustibilidad. Para el caso de las secciones de chapa conformadas en frío, es importante mencionar que se pueden producir económicamente gran diversidad de secciones, variando los espesores entre 0.5 y 6.4mm y su altura entre 51 y 305mm. Asimismo, debido a que pueden producirse secciones encastrables, es posible acopiar perfiles en empaques compactos, reduciendo costos de almacenamiento y transporte. En particular, y a consecuencia del peso reducido, las estructuras que se obtienen a partir de su uso tienen muy buen comportamiento frente a acciones sísmicas.

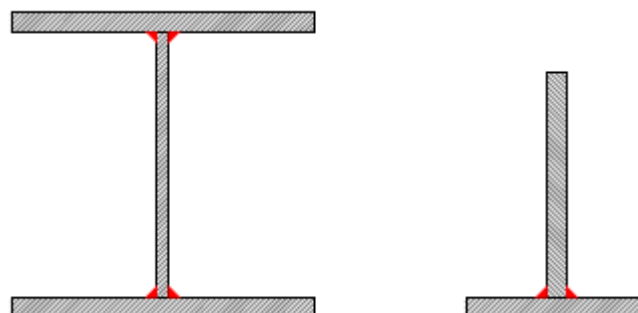


Figura 2: Ejemplo de perfiles de chapa de acero soldada

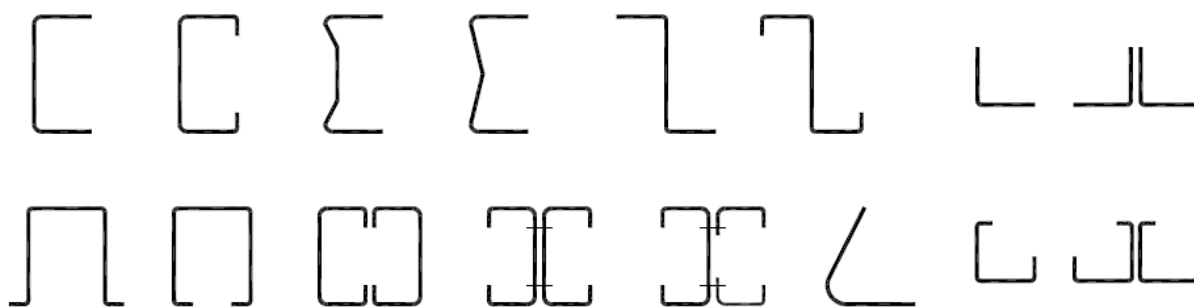


Figura 3: Secciones de chapas de acero conformadas en frío

La aplicación de elementos delgados, sin embargo, requiere de un apropiado conocimiento y manejo del fenómeno de la inestabilidad del equilibrio, que representa uno de los factores más importantes para determinar la capacidad de diseño de un elemento. El acercamiento clásico para determinar esta capacidad asociada al pandeo es calcular la correspondiente carga crítica lineal, luego tener en cuenta las reducciones causadas por todo tipo de imperfecciones y por último considerar el efecto favorable de la reserva post pandeo.

Las especificaciones más modernas básicamente siguen el procedimiento descrito, siendo fundamental la determinación de la carga crítica, ya que la carga de diseño depende de la misma. No deja de ser importante evaluar también el tipo de inestabilidad, pues de ello depende la reserva post pandeo y para considerar correctamente los efectos que las imperfecciones puedan generar.

En el caso de las barras de acero con secciones de paredes delgadas sujetas a compresión axial o momento flector, se distinguen generalmente tres fenómenos básicos de inestabilidad: local, distorsional y global; y cada uno de ellos tiene un comportamiento post pandeo característico.

Dado que los métodos analíticos generalmente no son suficientes, se debe recurrir a métodos numéricos capaces de manejar problemas más generales, en los que intervienen numerosas variables.

El Método de los Elementos Finitos, que es bien conocido por ser poderoso y versátil en el diseño de estructuras complejas y con múltiples condiciones de borde, se torna computacionalmente ineficaz e innecesario para secciones de geometría regular y plana y condiciones de borde simples. En lo que respecta a la resolución de perfiles de paredes delgadas, para poder determinar las cargas críticas, se requiere un gran número de elementos y, por lo tanto, de grados de libertad. Ello a su vez significa la manipulación de grandes matrices y vectores, lo cual se traduce en un trabajo computacional importante; y, si bien es cierto que las computadoras de hoy día pueden realizar este trabajo en poco tiempo, la desventaja se halla en el tiempo posterior que llevará analizar los resultados de las cargas críticas y los modos de pandeo, requeridos para el diseño.

Además, no hay una manera simple de clasificar los modos de pandeo, sin depender del juicio ingenieril del usuario, basado principalmente en el análisis visual del patrón de deformación, lo cual agrega un factor de subjetividad a la resolución de nuestro problema.

Por todo ello se hace necesaria la aplicación de un procedimiento que reúna todas las ventajas del Método de los Elementos Finitos, pero que a su vez reduzca el trabajo computacional y el trabajo posterior del diseñador para poder clasificar los modos de pandeo y obtener la carga crítica.

Todas estas condiciones son satisfechas mediante la aplicación del Método de las Bandas Finitas, que puede considerarse como una forma especial del procedimiento de los Elementos Finitos, utilizando una caracterización analítica de las funciones de desplazamientos que tiene en cuenta el comportamiento estructural a analizar.

En este marco, el objetivo de la presente tesis es la resolución analítico – numérica eficiente de los problemas de inestabilidad del equilibrio en vigas y columnas de acero con secciones de paredes delgadas utilizando el Método de las Bandas Finitas. Para ello, se analizará en detalle este método y posteriormente se plantearán distintos casos a resolver mediante el programa CUFMS, de uso común entre investigadores y abalado por la especificación AISI (American Iron and Steel Institute), comparando los resultados con la teoría clásica de estabilidad elástica.

Acompaña esta tesis el cálculo numérico de las matrices de rigidez y de transformación del Método de las Bandas Finitas que emplea el mencionado programa, desarrolladas mediante el Software *Wolfram Mathematica 9*, que podrán utilizarse como método alternativo para resolver distintos casos de secciones de paredes delgadas.



### 3. ESTADO DEL ARTE

El Método de las Bandas Finitas es una variante especial del Método de los Elementos Finitos. Desarrollado a fines de la década del 60 por Cheung, comenzó a utilizarse en el diseño de estructuras regulares, como ser puentes losa y puentes con secciones cajón.

Posteriormente M. A. Bradford y M. Azari (1995) extrapolaron el Método de las Bandas Finitas para el estudio del pandeo de placas con diferentes condiciones de borde.

Respecto a las secciones de paredes delgadas, el primero en proveer detalles específicos para el análisis de la estabilidad, fue B. W. Shafer (1997); siguiéndole G. Hancock (2001) y Sandor Adany (2004). Todos ellos demostraron convincentemente el importante potencial del método en el diseño de estas secciones y en la predicción de su comportamiento.

Aunque el Método de las Bandas Finitas presenta una metodología general, su implementación convencional en la resolución los problemas de inestabilidad de secciones de paredes delgadas, se aplicó solamente a la condición de borde simplemente apoyada y a estados de carga uniformes. Fueron Z. Li y B. W. Schafer (2010) quienes desarrollaron el fundamento teórico para extender el método a todas las condiciones de borde, utilizando distintas funciones de forma. Por otra parte, Chu, Ye, Kettle y Li (2005) y Bui (2009) adaptaron las formulaciones para condiciones de cargas más generales, incluyendo cargas localizadas.

A partir de entonces se han publicado distintos papers demostrando que el Método de las Bandas Finitas tiene mayor eficiencia en la resolución de estructuras regulares respecto a otros métodos, y en particular el Método de los Elementos Finitos, dado que un número menor de grados de libertad intervienen en la resolución.

Como se desarrollará en el ítem 4.2.2.2.1 en lo que se refiere a la resolución de los perfiles de chapa de acero conformados en frío, el American Iron and Steel Institute no solamente recomendó el uso del Método de la Bandas Finitas, sino que también impulsó a investigadores a desarrollar un programa específico – CUFSM– para la resolución de los mismos.





## **4. SITUACIÓN REGLAMENTARIA**

Se debe hacer una distinción entre las secciones laminadas en caliente y las secciones de chapa soldadas respecto a las secciones conformadas en frío, ya que estas últimas son abordadas por una reglamentación distinta.

### **4.1. Secciones laminadas en caliente y secciones de chapa soldadas**

Las secciones laminadas en caliente y las secciones de chapa soldadas son estudiadas por el “Reglamento Argentino de Estructura de Acero para Edificios” (CIRSOC 301-2005), basado en la especificación “Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Building” correspondiente al año 1999 del American Institute of Steel Construction (AISC)

En su Capítulo E determina la resistencia de diseño para barras prismáticas sometidas a compresión, mientras que en el Capítulo F estudia las vigas y otros miembros en flexión, determinando el estado límite de pandeo lateral torsional.

Actualmente se encuentra en discusión pública nacional la versión 2017, basada en la adopción y adaptación de la Especificación Base ANSI/AISC 360/10 en su formato LRFD.

Respecto a la determinación de la resistencia de diseño para elementos comprimidos y en flexión, no existen diferencias significativas.

### **4.2. Secciones de chapa conformadas en frío**

Estas secciones son estudiadas por el “Reglamento Argentino de Elementos Estructurales de Acero de Sección Abierta Conformados en frío” (CIRSOC 301-2009), el cual ha tomado como base al documento “Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Member”, en su Edición 1996.

En la determinación de la resistencia de diseño de elementos sometidos a problemas de inestabilidad del equilibrio, el Reglamento CIRSOC 303 utiliza el método del ancho efectivo.

#### **4.2.1. El método del ancho efectivo**

El método del ancho efectivo figura como principal medio de evaluación en las primeras especificaciones para perfiles de acero conformados en frío, las que datan de la década del 40 del siglo pasado. Su concepto se utiliza para evaluar la resistencia a pandeo de los elementos planos de las secciones transversales, basándose en las teorías de Von Karman y de Winter y luego corroboradas y ajustadas por ensayos.

Luego del abollamiento, para cargas mayores que la crítica, la tensión deja de ser uniforme en el ancho del elemento. Los valores máximos de la distribución variable de tensiones se encuentran junto a los bordes rigidizados; lejos de esos bordes rigidizados, las tensiones son menores. La carga total del elemento es la resultante de esas tensiones variables. El concepto de ancho efectivo permite calcular de manera sencilla la carga final del elemento, incluyendo el incremento de carga posterior al pandeo, por medio de una cuenta simple. En lugar de calcular la resistencia del elemento integrando las tensiones verdaderas (variables) en el ancho total (verdadero)

del elemento, la resistencia se calcula considerando una tensión uniforme, de valor igual a la tensión máxima, sobre un ancho menor al verdadero, denominado ancho efectivo.

Para evaluar el ancho efectivo correspondiente a cada elemento de la sección transversal, los datos a considerar para cada elemento son:

- La tensión crítica de abollamiento del elemento.
- La tensión máxima sobre el elemento (tensión de fluencia del material, o tensión crítica de pandeo global de la barra)

Los Reglamentos de uso corriente: el CIRSOC 303, en nuestro país y el AISI en su versión 2012 y anteriores, aplican el Método del Ancho Efectivo en la resolución de las secciones abiertas de paredes delgadas.

Resumidamente, este método consta de los siguientes pasos:

Primero se debe identificar entre tres tipos de elementos:

- 1) Elemento comprimido no rigidizado (ECNR): se trata de un elemento plano, comprimido y con un solo rigidizador en un extremo paralelo a las tensiones.
- 2) Elemento comprimido rigidizado o parcialmente rigidizado (ECR): elemento plano, comprimido y rigidizado en ambos extremos paralelos a la dirección de las tensiones mediante un ala, alma, labio o rigidizador intermedio.
- 3) Elemento con rigidización múltiple: elemento con rigidización intermedia entre almas, o entre un alma y un rigidizador de borde, paralelo a la dirección de las tensiones.

La determinación del ancho efectivo dependerá del tipo de elemento, siguiendo la teoría del pandeo de placas, y será el ancho de la placa para el cual la tensión crítica de pandeo global alcance a la tensión de fluencia  $F_y$ , pues esto implica que se ha alcanzado la falla.

Para un perfil trabajando a compresión pura, la resistencia nominal se calculará como:

$$P_n = A_e \cdot F_n \quad \text{Ecuación 1}$$

Siendo,

$A_e$ : Área efectiva calculada para la tensión  $F_n$ .

$F_n$ : Carga crítica corregida

$F_n$  se obtendrá de la siguiente manera:

Para  $\lambda_c \leq 1.5$  
$$F_n = \left( 0.658 \lambda_c^2 \right) \cdot F_y$$
 Ecuación 2

Para  $\lambda_c > 1.5$  
$$F_n = \left( \frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) \cdot F_y$$
 Ecuación 3

donde, 
$$\lambda_c = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}}$$
 Ecuación 4

Siendo  $F_e$  la menor de las tensiones de pandeo elástico: flexional, torsional o flexotorsional según corresponda.

Este procedimiento ha demostrado ser satisfactorio para predecir la resistencia de un perfil e idealizar su comportamiento, pero cuenta con algunas desventajas. En primer lugar, porque ignora la compatibilidad y el equilibrio entre elementos; en segundo lugar, por lo laborioso que implica calcular las propiedades de la sección transversal efectiva. En algunos casos este cálculo se vuelve aún más trabajoso, como ocurre ante la presencia de perfiles con rigidizadores longitudinales. Por otra parte, las versiones más antiguas de la especificación AISI y el CIRSOC 303 no tratan explícitamente al pandeo distorsional como un modo de falla separado; y las ecuaciones existentes para predecir este tipo de pandeo son inadecuadas para una serie de secciones de uso común. Tampoco se considera la interacción entre el modo distorsional y los otros modos de pandeo.

#### 4.2.2. El método de la Resistencia Directa

##### 4.2.2.1. Introducción

Si bien en los comienzos del presente siglo se trabajó mucho en el entendimiento de los perfiles de acero conformados en frío, y se avanzó en el empleo de programas capaces de predecir el comportamiento post pandeo y el estudio de la sensibilidad a imperfecciones, hacía falta un método de diseño consistente que incorporara el fruto de todas las investigaciones. Era necesario también una integración equilibrada entre el pandeo local, distorsional y global en el diseño de perfiles de chapa conformados en frío.

“El método de la Resistencia Directa es un intento de satisfacer las necesidades del diseño. Las ventajas primarias del método son evitar el cálculo del ancho y las propiedades de la sección efectiva, y utilizar la disponibilidad de soluciones libres y robustas para pandeo elástico de toda la sección. El método de la Resistencia Directa se basa en la misma suposición empírica que el método del ancho efectivo: la resistencia última es función del pandeo elástico y de la fluencia del material”<sup>1</sup>

<sup>1</sup> B. W. Schafer, Progress on the Direct Strength Method. Sixteen International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. Orlando, Florida USA, October 17-18, 2002

Se trata de un nuevo procedimiento de diseño para perfiles de acero conformados en frío que emplea soluciones de pandeo elástico para toda la sección transversal, en lugar de considerar el pandeo de cada elemento como placa, de la solución tradicional. La ventaja de analizar a la sección transversal en conjunto asegura la compatibilidad y el equilibrio entre elementos.

La factibilidad de este método se demostró en primer lugar para barras flexadas lateralmente arriostradas, sometidas a pandeo local y distorsional (Schafer y Peköz 1998) y luego para barras biarticuladas en compresión, sometidas a pandeo local, distorsional y global (Schafer 2002). La primera bibliografía que lo menciona como método potencial son los libros de texto de Yu (2000), Hancock (2001), Gherzi (2002); y los ensayos de Davies (2001) y Hancock (2002). Los años posteriores se trabajó en el desarrollo del lenguaje apropiado, adoptándose en el año 2004 por el Comité AISI en el diseño de vigas y columnas como diseño alternativo del método del ancho efectivo, presente en los capítulos A hasta G, y apéndices A hasta C. En la especificación AISI S100, desarrollada para Norteamérica, México y Canadá, publicada en octubre de 2016, el Método de la Resistencia Directa, pasa a formar parte del cuerpo principal (Capítulos E y F).

Como se desarrollará en el punto 0, existen al menos tres modos relevantes de pandeo elástico: local, distorsional y global; los cuales no necesariamente ocurran en todos los miembros. Sin embargo, el diseño completo de un perfil conformado en frío debe incluir consideraciones de estos tres modos.

Las especificaciones AISI tradicionalmente mencionaban sólo el pandeo global y local. El enfoque del AISI respecto al pandeo local es idealizar la barra como una suma de elementos y estudiar el pandeo local de cada uno por separado. El método de la Resistencia Directa utiliza la sección transversal total en la determinación de la carga crítica de pandeo, e incorpora el pandeo distorsional, al local y global. La diferencia clave entre un método y otro radica en la interacción entre elementos en el pandeo local.

#### 4.2.2.2. Pandeo elástico

Mediante el método de la Resistencia Directa se puede determinar la carga axial nominal ( $P_n$ ) y el momento flexor nominal ( $M_n$ ), para una serie de secciones que serán mencionadas oportunamente. Ahora bien, para poder obtener estos esfuerzos nominales será necesario el cálculo de las cargas elásticas de pandeo y los momentos, incluidos en el Apéndice 1 de la Especificación S100 2012. Para columnas esto incluye la carga crítica local, distorsional y global:  $P_{ctrl}$ ,  $P_{crd}$  y  $P_{cre}$ ; mientras que para vigas incluye los momentos críticos local, distorsional y global:  $M_{ctrl}$ ,  $M_{crd}$  y  $M_{cre}$ .

##### 4.2.2.2.1. Soluciones numéricas

Para poder obtener las cargas elásticas de pandeo con suficiente precisión existe una variedad de métodos numéricos: el Método de los Elementos Finitos, el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos de Contorno, la Teoría generalizada de vigas, el Método de las Bandas Finitas y otros.

El Método tradicional de los Elementos Finitos, utilizando elementos de placa plana o elementos de estados planos puede emplearse para la predicción de las cargas de pandeo elástico. A tal fin, el número de elementos requeridos,

debido a la práctica común de utilizar funciones de forma polinómicas, puede ser elevado, si se quiere lograr una buena aproximación.

El Método de las Diferencias Finitas fue implementado por Harik (1991) y otros. El Método de los Elementos de Contorno también puede utilizarse en estabilidad elástica (Elzein, 1991)

La Teoría generalizada de vigas, desarrollada por Schardt (1989), extendida por Davies (1994) e implementada por Davies y Jiang (1996, 1998) y Silvestre y Camotim (2002a, 2002b) ha demostrado ser una herramienta útil en estabilidad elástica de perfiles conformados en frío. La habilidad para separar los diferentes modos de pandeo hace al método especialmente dócil para el diseño.

El Método de las Bandas Finitas, como precisamos en el apartado 0, es una variante especial del Método de los Elementos Finitos que tiene aplicación en estructuras que cumplen con la condición de regularidad longitudinal. En la resolución de perfiles de acero conformados en frío, al igual que en el resto de los perfiles de paredes delgadas, la implementación de este Método, logra la simplificación de diseño buscada, en comparación con las fórmulas típicas de los métodos analíticos; y da lugar a soluciones más precisas, por tomar en consideración la interacción de los distintos elementos de una sección.

El programa CUFMSM, de uso libre, emplea el Método de las Bandas Finitas para obtener las cargas elásticas de pandeo para cualquier perfil de pared delgada bajo la acción de tensiones uniformes longitudinales (axil, flexión, torsión o la combinación de las anteriores). Adicionalmente, el nuevo método desarrollado cFSM (Constrained Finite Strip Method) permite, además de la obtención de los mínimos correspondientes al pandeo local, distorsional y global, determinar la participación de los distintos modos de pandeo con precisión y facilitar en gran medida el diseño.

Por ello a continuación, previo al análisis de cada modo de pandeo, se estudiará en detalle el Método de las Bandas Finitas y posteriormente se plantearán distintos casos a resolver mediante el programa CUFMSM, comparando los resultados con la teoría clásica de la estabilidad elástica.

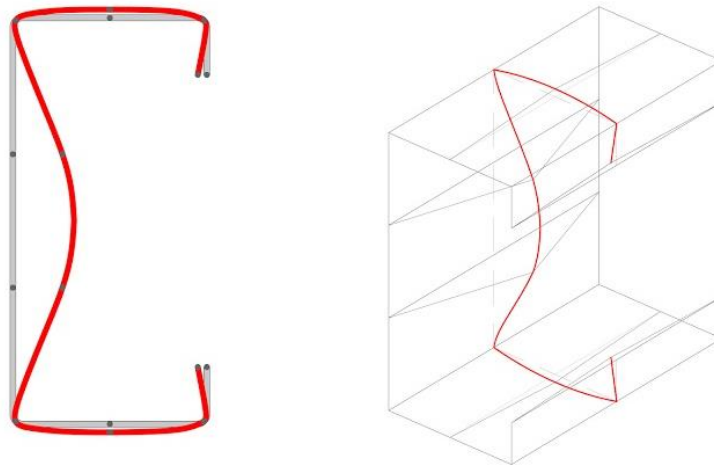


## 5. DEFINICIÓN DE MODOS DE PANDEO

Se distinguen generalmente tres fenómenos básicos de inestabilidad para la mayoría de las secciones de acero abiertas de paredes delgadas: pandeo local, distorsional y global.

### 5.1. Pandeo local

El pandeo local normalmente se define como el modo que involucra deformación como placa solamente, sin translación de la intersección de las líneas de dos elementos de placas adyacentes. Otra característica principal es que la longitud de pandeo asociada al mismo es la más pequeña de los tres modos, y típicamente menor que la mayor dimensión de la sección transversal. En el siguiente ejemplo, en el que se tiene un perfil comercial de 10cm de altura, la carga crítica local ocurrirá a una longitud de semionda menor a ese valor; de hecho, según la Figura 4, la longitud de pandeo crítica local ( $L_{cr1}$ ) es de 0.08m.



Buckled shape for CUFSM results		
Length = 0.08	load factor = 1.1622	mode = 1

Figura 4: Pandeo local de una sección

Como puede observarse en la Figura 5, el pandeo local involucra una importante distorsión de la sección transversal, que supone rotación solamente, sin translación en las líneas de plegado.

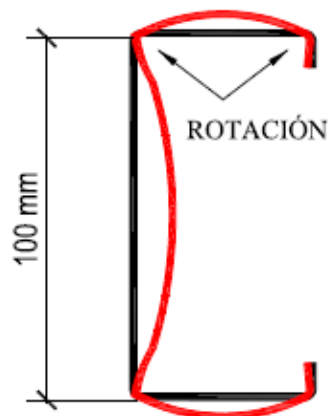


Figura 5: Pandeo local de una sección

Otras características de este tipo de pandeo son:

- ✓ El pandeo local de una placa simplemente apoyada sometida a compresión pura ocurre en ondas cuadradas, es decir, la longitud de semionda es igual al ancho de la placa.
- ✓ Si la placa tuviera algún gradiente de tensiones o posee en sus bordes alguna restricción beneficiosa, la longitud de semionda podrá ser menor al ancho de la placa.
- ✓ Por lo tanto, se asume que el pandeo local, con el potencial para una respuesta post-pandeo estable, ocurrirá sólo si la longitud de semionda es menor que la placa mayor de una barra. Si esta longitud es mayor no ocurrirá pandeo local.

## 5.2. Pandeo distorsional

El pandeo distorsional, también conocido como pandeo local-torsional, parece ser el más problemático. En lo que respecta a la longitud de pandeo, la misma está comprendida entre las que corresponden al pandeo local y al pandeo global, mientras que la deformación transversal involucra tanto deformación como placa como también translación y rotación de una o múltiples líneas de plegado. En una parte de la sección predominará la distorsión mientras que en la otra se impondrá una deformación predominantemente rígida. En secciones con elementos rigidizados el pandeo distorsional se caracteriza por el desplazamiento del rigidizador en dirección normal al plano del elemento.

La longitud de semionda para este tipo de pandeo depende en gran medida de la carga y de la geometría.

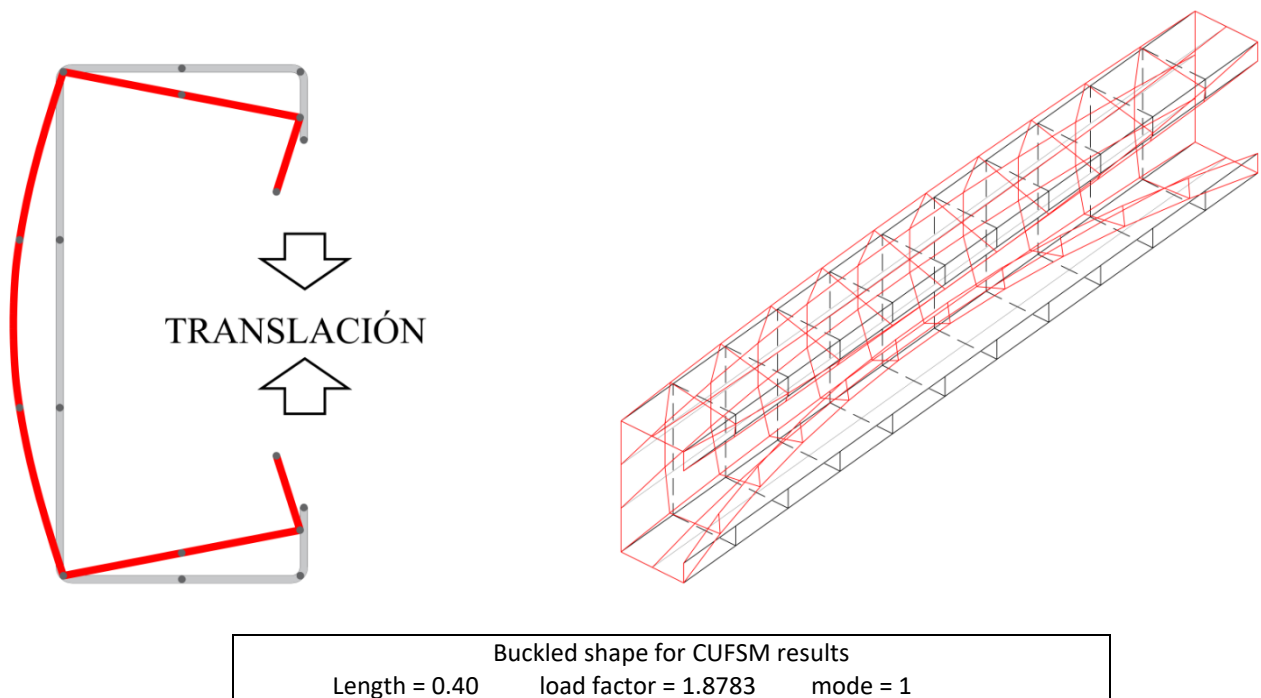


Figura 6: Pandeo distorsional de una sección



Si la tensión de pandeo crítica local es mucho menor que la tensión crítica distorsional, entonces este tipo de pandeo podrá ser ignorado. Sin embargo, existen varias situaciones en las cuales deberá ser considerado, incluso en un diseño de rutina, debido a la inferioridad de su carga crítica con respecto al pandeo local.

Como se verá oportunamente en los ejemplos desarrollados, el pandeo distorsional suele ser más desfavorable en los siguientes casos:

- Secciones en las que las alas son excesivamente anchas, acercándose a una proporción cuadrada, y no tienen suficiente rigidización capaz de evitar el desplazamiento de las mismas.
- Secciones en las que se agrega un rigidizador intermedio en el alma con alas estrechas.
- En columnas de sección C con labios rigidizadores, para relaciones entre altura y espesor  $h/t < 100$ .
- En columnas de sección Z, para relaciones entre altura y espesor  $h/t < 100$ .

### 5.3. Pandeo global

El caso de pandeo global puede considerarse el más simple y claro y se trata del modo en el que la barra se deforma sin cambio de la sección transversal. Adicionalmente, se pueden caracterizar a las deformaciones por el desplazamiento y torsión del eje de la barra. Dependiendo de la deformación y del tipo de carga, se pueden realizar subdivisiones, como ser: pandeo flexional, flexo–torsional y lateral–torsional. Es importante mencionar que todos estos modos se pueden resolver analíticamente, para las secciones más comunes y también para distintas condiciones de borde.

#### 5.3.1. Pandeo flexional puro

“Es un hecho experimental el que una pieza sometida a compresión, aunque aparentemente sea recta, flecha lateralmente adoptando una deformada llamada *elástica de pandeo*, con características especiales, entre las que destacan un aumento desproporcionado de las flechas respecto a las cargas y una posible pérdida del equilibrio interno”<sup>2</sup>

El Pandeo por flexión pura ocurre en barras solicitadas a compresión centrada con dos ejes de simetría o en barras que poseen al menos un eje de simetría, cuando el pandeo se genera el rededor del eje que no lo es.

El análisis del pandeo de dichas piezas comprimidas consiste en la determinación de la posible elástica de pandeo; el tipo de equilibrio: estable, inestable o indiferente; y el valor mínimo de la carga de compresión –denominada carga crítica– que ocasiona la condición de equilibrio indiferente o el agotamiento de la pieza comprimida. Interesa el equilibrio indiferente porque marca la terminación de un estado deseable y la iniciación de un fenómeno que debe evitarse.

---

<sup>2</sup> Cudós, Vicente; Cálculo de estructuras de acero, 1978

La determinación de la carga crítica de pandeo elástico para una columna comprimida fue presentada por Euler en “*De Curvis Elasticis*” en 1744, considerando el comportamiento de una columna ideal, la cual se asume perfectamente recta, con una carga de compresión centrada.

Para una barra biarticulada, como se demostrará en el ANEXO I, el valor de la carga crítica será:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad \text{Ecuación 5}$$

Siendo,

E: Módulo de elasticidad del material

I: Momento de inercia en la dirección del pandeo

l: longitud de la barra

### 5.3.2. Pandeo torsional

En el apartado anterior, se asumió que la columna pandearía en un plano de simetría de la sección transversal. Sin embargo, en algunos casos la columna podrá pandear tanto por torsión como por una combinación de flexión y torsión. En estos casos, la falla ocurrirá si la rigidez torsional de la barra es muy baja, como es en el caso de perfiles abiertos de paredes delgadas.

Se presenta el caso de torsión pura cuando se tiene una barra en cuyos extremos actúan pares aplicados en planos normales a su eje y la misma es libre de alabear. En cada sección de la barra se producirán solamente tensiones tangenciales y su distribución dependerá de la forma de la sección transversal y será la misma para todas las secciones. Para una barra de sección abierta y paredes delgadas se puede asumir con precisión razonable que las tensiones tangenciales en cada punto son paralelas a la tangente correspondiente a la línea media de la sección y es proporcional a la distancia desde esa línea.

### 5.3.3. Pandeo lateral torsional

Este tipo de inestabilidad ocurre en barras simples o doblemente simétricas, cargadas en su plano de simetría, que sufren deformaciones en este plano hasta alcanzar la carga crítica, en la que la barra se deforma y torsiona fuera de dicho plano. Este comportamiento puede darse en perfiles doble T que posean una inercia mucho mayor en uno de sus planos principales respecto del otro.

De manera análoga a lo que sucede con las barras comprimidas, en las barras flexionadas se puede hablar de un momento crítico comparable con la carga crítica de Euler y que corresponde a aquel valor del momento flector para el cual el plano medio de la viga pierde su posición inicial, presentándose un desplazamiento lateral y un giro, tal como se indica en la Figura 7.

Se justifica este fenómeno de inestabilidad debido a que el cordón superior, a consecuencia de la flexión, se encuentra comprimido; oponiéndose a ello el cordón inferior, que se encuentra traccionado, motivo por el cual el pando lateral está acompañado de torsión.

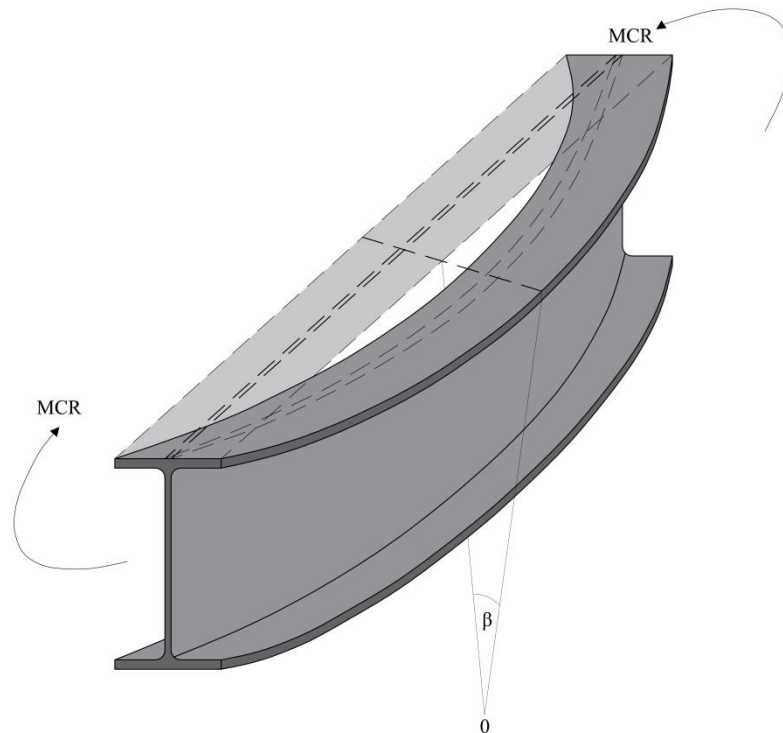


Figura 7: Pandeo lateral torsional de una viga

El mínimo valor del momento que lleva a esta inestabilidad se conoce como momento crítico y se obtiene de acuerdo con la Ecuación 6:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{E \cdot J_y \cdot C \cdot \left( 1 + \frac{C_1}{C} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \quad \text{Ecuación 6}$$

donde  $C = G \cdot J$  Rigidez a torsión

$C_1 = E \cdot C_w$  Módulo de alabeo

$l$ : longitud de la barra

$E$ : Módulo de elasticidad del material

$J_y$ : Momento de inercia según el eje débil

En la práctica, ocurre con frecuencia que el patrón de deformación de un elemento muestra características de dos o tres modos de pandeo. Estos casos suelen conocerse como modos de pandeo acoplados.



## 6. EL ANÁLISIS DE LAS BANDAS FINITAS

### 6.1. Introducción

Es bien conocido el empleo del Método de los Elementos Finitos (FEM) para el diseño de estructuras por ser muy poderoso y versátil. El mismo permite resolver geometrías complejas con distintas condiciones de borde, y también es posible determinar las cargas críticas elásticas y los modos de pandeo. Por otra parte, ya existe una tradición en su uso: la mayoría de los investigadores y diseñadores están cada vez más familiarizados, tanto con su sustento teórico, como con su aplicación práctica.

“Sin embargo, para estructuras de geometría regular y plana y condiciones de borde simples, un análisis completo de elementos finitos es muchas veces extravagante e innecesario, y algunas veces incluso imposible”<sup>3</sup>.

Como se ha mencionado, en la resolución de perfiles de paredes delgadas, la aplicación de este análisis requerirá – además de un trabajo computacional importante – el tiempo posterior del diseñador para interpretar los resultados de las cargas críticas y los modos de pandeo.

Adicionalmente, “no hay una manera simple de clasificar los modos de pandeo: local, distorsional y global, sin depender del juicio ingenieril del usuario, basado principalmente en el análisis visual del patrón de deformación”<sup>4</sup>, lo cual agrega un factor de subjetividad a la resolución de nuestro problema.

Por último, aunque hay un gran número de programas disponibles, los mismos sirven para los propósitos generales del FEM y no contienen herramientas especiales para los perfiles de paredes delgadas.

Por todo ello se hace necesaria la aplicación de un procedimiento que reúna todas las ventajas del Método de los Elementos Finitos, pero que a su vez reduzca el trabajo computacional y el trabajo posterior del diseñador para poder clasificar los modos de pandeo.

Todas estas condiciones son satisfechas mediante la aplicación del Método de las Bandas Finitas, que puede considerarse como una forma especial del procedimiento de los Elementos Finitos, utilizando una simplificación en las funciones de desplazamientos. A diferencia del Método de los Elementos Finitos, que emplea funciones de desplazamiento polinómicas en todas las direcciones, este método utiliza polinomios simples en algunas direcciones y series continuamente diferenciables en la otra, con la salvedad de que cumplan con las condiciones de borde en los extremos de las bandas.

La forma general de la función de desplazamiento está dada entonces por el producto de polinomios y series. Por tanto, para una banda, un problema de dos dimensiones se transforma en un problema de una sola dimensión.

---

<sup>3</sup> Cheung, Y. K., “Finite Strip Method in Structural Analysis”, First Edition, 1976.

<sup>4</sup> Ádány, Sandor: “Buckling mode classification of Members with open thin-walled cross-sections by using the Finite Strip Method”, John Hopkins University, 2004

## 6.2. Grados de libertad y funciones de forma

Mediante el Método de las Bandas Finitas (FSM) un perfil de pared delgada, como se muestra en la Figura 8, se discretiza solamente según su sección transversal; a la vez que los desplazamientos longitudinales son representados mediante funciones de forma trigonométricas elegidas juiciosamente. En esto se diferencia del método de los elementos finitos que aplica la discretización en ambos sentidos. Es posible realizar esta discretización simple cuando la estructura que analizamos tiene una geometría constante a lo largo de uno o dos ejes de coordenadas, de modo que el ancho de la banda o de la sección transversal permanece constante desde un extremo al otro.

Se utilizan dos sistemas de coordenadas según la regla de la mano derecha: Terna Global y Terna local. El sistema de coordenadas globales lo llamamos  $X, Y, Z$ , con el eje  $Y$  paralelo al eje longitudinal de la barra. La terna local la denominamos:  $x, y, z$ , la cual está asociada al elemento de placa (banda) del miembro, de modo que el eje  $x$  es paralelo al ancho de la banda y perpendicular al eje longitudinal de la barra. El eje  $y$  local es paralelo al eje  $Y$  global y el eje  $z$  local es perpendicular al plano  $x$ - $y$ . Tres traslaciones ( $U, V, W$ ) y una rotación ( $\Theta$ ) son consideradas como desplazamientos globales.

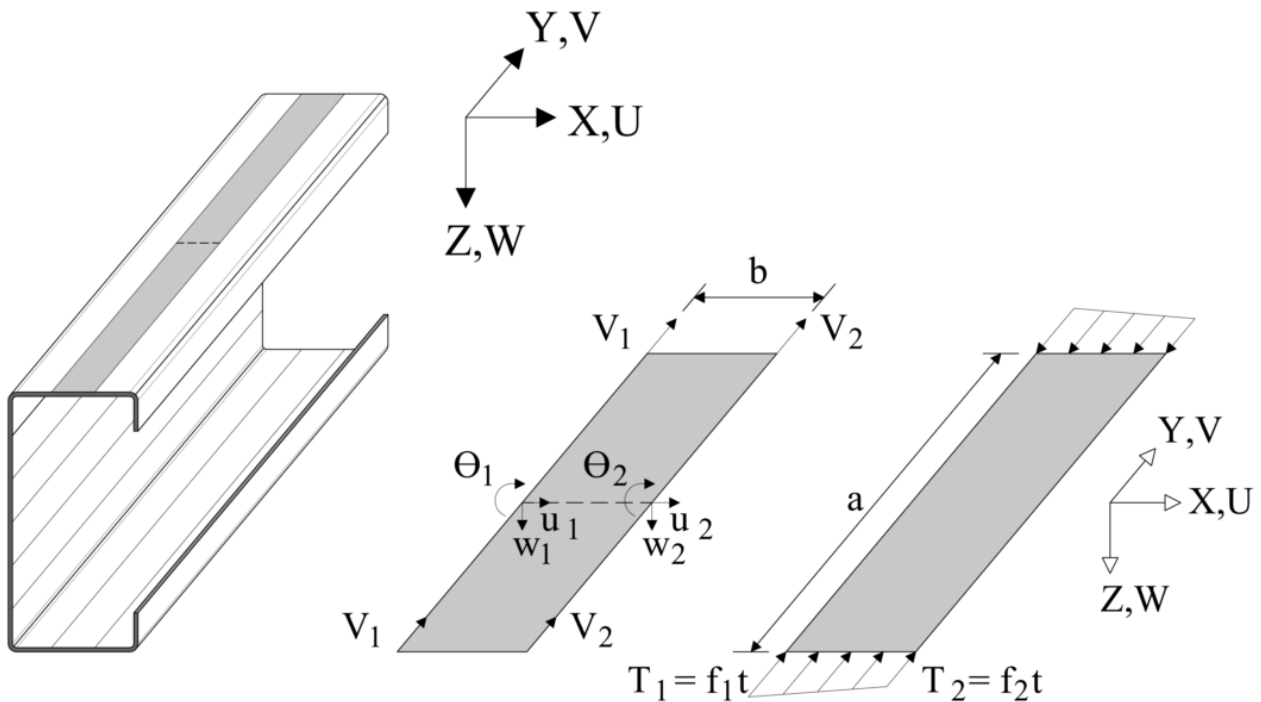


Figura 8: Coordenadas, grados de libertad y cargas para una banda típica

Los desplazamientos locales están asociados con la deformación de un elemento de placa simple: tres traslaciones ( $u, v, w$ ) y una rotación ( $\theta$ ).

En la Figura 8 se resalta una banda con sus grados de libertad correspondientes (DOF), sus dimensiones y sus fuerzas aplicadas en los extremos de la misma. El subíndice  $p$  indica el número de términos longitudinales o semiondas que serán empleados en el análisis.

Las ecuaciones generales de *desplazamiento*  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , se obtienen como el producto de polinomios y series. Así, en una banda de dos dimensiones, el problema se reduce a una sola dimensión:

$$u = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \quad \frac{x}{b} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_{1,p} \\ u_{2,p} \end{pmatrix} \right] \cdot Y_p \right] \quad \text{Ecuación 7}$$

$$v = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \quad \frac{x}{b} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_{1,p} \\ v_{2,p} \end{pmatrix} \right] \cdot Y_p \cdot \frac{a}{\mu_p} \right] \quad \text{Ecuación 8}$$

$$w = \sum_{m=1}^q \left[ \left[ 1 - \frac{3 \cdot x^2}{b^2} + \frac{2 \cdot x^3}{b^3} \quad x \left( 1 - \frac{2 \cdot x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \quad \frac{3 \cdot x^2}{b^2} - \frac{2 \cdot x^3}{b^3} \quad x \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b} \right) \right] \cdot \begin{pmatrix} w_{1,p} \\ \theta_{1,p} \\ w_{2,p} \\ \theta_{2,p} \end{pmatrix} \cdot Y_p \right] \quad \text{Ecuación 9}$$

Siendo,

$\mu_p = p\pi$  y  $p$ , según se ha mencionado, el número de términos longitudinales, el cual también representa cierta longitud de semionda a lo largo de la dirección longitudinal;  $m$  es el máximo número de semiondas empleado en el análisis, el cual es siempre un número entero positivo;  $Y_p$  es la función de forma en la dirección longitudinal que representa el desplazamiento en esa dirección y depende de la sustentación de la banda.

Como vemos en las Ecuación 7 a la Ecuación 9, las funciones de forma en el plano o membranales son exactamente los mismos polinomios lineales en la dirección transversal para todas las condiciones de borde. El desplazamiento fuera del plano en la dirección transversal se representa mediante una función polinómica cúbica.

En la dirección longitudinal, la función de forma  $Y_p$  será:

$$Y_p = \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \quad \text{Para la condición de borde articulada – articulada (S-S)}$$

$$Y_p = \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{a}\right) \quad \text{Para la condición de borde empotrada – empotrada (C-C)}$$

$$Y_p = \sin\left[\frac{(p+1) \cdot \pi \cdot y}{a}\right] + \left(\frac{p+1}{p}\right) \cdot \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \quad \text{Para la condición de borde articulada – empotrada (S-C)}$$

$$Y_p = 1 - \cos\left[\left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot y}{a}\right] \quad \text{Para la condición de borde empotrada – libre (C-F)}$$

$$Y_p = \sin\left[\left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot y}{a}\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{2 \cdot a}\right) \quad \text{Para la condición de borde empotrada – guiada (C-G)}$$

Las expresiones de los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  se pueden escribir en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^m \left[ (N_{uv}) \cdot \begin{pmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{pmatrix} \right] = \sum_{p=1}^m \left[ (N_{uv}) \cdot d_{uv}^p \right]$$

Ecuación 10

$$w = \sum_{p=1}^m \left[ (N_w) \cdot \begin{pmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{pmatrix} \right] = \sum_{p=1}^m \left[ (N_w) \cdot d_w^p \right]$$

### 6.3. Matriz de rigidez elástica (k)

La matriz de rigidez elástica consta de dos partes: la membranal y la flexional, como se demuestra a continuación:

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_B \quad \text{Ecuación 11}$$

$$\varepsilon_M = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} u \\ \frac{d}{dy} v \\ \frac{d}{dy} u + \frac{d}{dx} v \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^m \left[ (N'_{uv}) \cdot \begin{pmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{pmatrix} \right] = \sum_{p=1}^m \left[ (B_M^p) \cdot d_{uv}^p \right] \quad \text{Ecuación 12}$$

$$\varepsilon_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -z \left( \frac{d^2}{dx^2} w \right) \\ -z \left( \frac{d^2}{dy^2} w \right) \\ 2 \cdot z \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dy} w \right) \right] \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^m \left[ (N''_w) \cdot \begin{pmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{pmatrix} \right] = \sum_{p=1}^m \left[ (B_B^p) \cdot d_w^p \right] \quad \text{Ecuación 13}$$



Las deformaciones  $\varepsilon_M$  y  $\varepsilon_B$  se pueden escribir en términos apropiados de las derivadas de las funciones de forma  $N_{uv}$  y  $N_w$ , y de los desplazamientos nodales, para cada número de semionda  $p$ .

Siendo,

$$N_{uv} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) & 0 & \frac{x}{b} \cdot \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) & 0 & \frac{x}{b} \cdot \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 14}$$

$$N_w = \left[ \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{b^2} + \frac{2 \cdot x^3}{b^3}\right) \left[ x \left(1 - \frac{2 \cdot x}{b} + \frac{x^2}{b^2}\right) \right] \left( \frac{3 \cdot x^2}{b^2} - \frac{2 \cdot x^3}{b^3} \right) x \left( \frac{-x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \right] \quad \text{Ecuación 15}$$

Debido a que el desplazamiento membranal  $u, v$  se encuentra desacoplado del comportamiento flexional  $w$ , la energía interna de deformación puede dividirse en dos partes, según la siguiente ecuación:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_M^T \cdot \sigma_M dV + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_B^T \cdot \sigma_B dV \quad \text{Ecuación 16}$$

Para un espesor constante  $t$ , aplicando la relación constitutiva membranal  $\{\sigma_M\} = [D_M] \{\varepsilon_M\}$ , y la relación generalizada tensiones–momentos,  $\{\sigma_B\} = [D_B] \{\varepsilon_B\}$ , la energía interna de deformación puede reescribirse de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \int_0^a \int_0^b \varepsilon_M^T \cdot D_M \cdot \varepsilon_M dx dy + \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \int_0^b \varepsilon_B^T \cdot D_B \cdot \varepsilon_B dx dy \quad \text{Ecuación 17}$$

donde,

$$D_M = \begin{pmatrix} E_1 & \nu_x \cdot E_2 & 0 \\ \nu_y \cdot E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad D_B = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix} \quad E_1 := \frac{E_x}{1 - \nu_x \cdot \nu_y}$$

$$E_2 := \frac{E_y}{1 - \nu_x \cdot \nu_y} \quad D_x = \frac{E_x \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \cdot \nu_y)} \quad D_y = \frac{E_y \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \cdot \nu_y)}$$

$$D_1 = \frac{\nu_y \cdot E_x \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \cdot \nu_y)} = \frac{\nu_x \cdot E_y \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \cdot \nu_y)} \quad D_{xy} = \frac{G t^3}{12}$$

La matriz de rigidez elástica se obtiene directamente de la energía interna de deformación, según:

$$U = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left[ \frac{1}{2} \cdot d_{uv}^p \cdot \left( t \cdot \int_0^a \int_0^b B_M^p \cdot D_M \cdot B_M^q dx dy \right) d_{uv}^q \right] + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left[ \frac{1}{2} \cdot d_w^p \cdot \left( t \cdot \int_0^a \int_0^b B_B^p \cdot D_B \cdot B_B^q dx dy \right) d_w^q \right] \quad \text{Ecuación 18}$$

O en forma reducida:

$$U = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left( \frac{1}{2} \cdot d_p^T \cdot k_e^{pq} \cdot d_q \right) \quad \text{Ecuación 19}$$

siendo

$$d_p = \begin{pmatrix} d_{uv}^p \\ d_w^p \end{pmatrix} \quad d_q = \begin{pmatrix} d_{uv}^q \\ d_w^q \end{pmatrix}$$

Y  $k_e^{pq}$  es la matriz de rigidez elástica correspondiente a los números de semionda  $p$  y  $q$ , la cual se puede separar en dos matrices desacopladas: una matriz de rigidez elástica membranal y otra flexional:

$$k_e^{pq} = \begin{pmatrix} k_{eM}^{pq} & 0 \\ 0 & k_{eB}^{pq} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 20}$$

$$k_{eM}^{pq} = t \cdot \int_0^a \int_0^b B_M^p \cdot D_M \cdot B_M^q dx dy \quad k_{eB}^{pq} = \int_0^a \int_0^b B_B^p \cdot D_B \cdot B_B^q dx dy \quad \text{Ecuación 21}$$

Luego la matriz de rigidez se puede expresar brevemente en la siguiente forma:

$$k = [k_e^{pq}]_{m \times m} \quad \text{Ecuación 22}$$

Sustituyendo y realizando las correspondientes integrales, se llegan a las expresiones de las matrices de rigideces membranal  $K_{eM}^{pq}$  y flexional  $K_{eB}^{pq}$ , correspondientes a las semiondas  $p$  y  $q$ :

$$k_{eM}^{pq} = t \begin{bmatrix} \left( \frac{E_1 \cdot I_1}{b} + \frac{G \cdot b \cdot I_5}{3} \right) & \left( \frac{-E_2 \cdot v_x \cdot I_3}{2 \cdot c_2} - \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_2} \right) & \left( \frac{-E_1 \cdot I_1}{b} + \frac{G \cdot b \cdot I_5}{6} \right) & \left( \frac{-E_2 \cdot v_x \cdot I_3}{2 \cdot c_2} + \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_2} \right) \\ \left( \frac{-E_2 \cdot v_x \cdot I_2}{2 \cdot c_1} - \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_1} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot b \cdot I_4}{3 \cdot c_1 \cdot c_2} + \frac{G \cdot I_5}{b \cdot c_1 \cdot c_2} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot v_x \cdot I_2}{2 \cdot c_1} - \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_1} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot b \cdot I_4}{6 \cdot c_1 \cdot c_2} - \frac{G \cdot I_5}{b \cdot c_1 \cdot c_2} \right) \\ \left( \frac{-E_1 \cdot I_1}{b} + \frac{G \cdot b \cdot I_5}{6} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot v_x \cdot I_3}{2 \cdot c_2} - \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_2} \right) & \left( \frac{E_1 \cdot I_1}{b} + \frac{G \cdot b \cdot I_5}{3} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot v_x \cdot I_3}{2 \cdot c_2} + \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_2} \right) \\ \left( \frac{-E_2 \cdot v_x \cdot I_2}{2 \cdot c_1} + \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_1} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot b \cdot I_4}{6 \cdot c_1 \cdot c_2} - \frac{G \cdot I_5}{b \cdot c_1 \cdot c_2} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot v_x \cdot I_2}{2 \cdot c_1} + \frac{G \cdot I_5}{2 \cdot c_1} \right) & \left( \frac{E_2 \cdot b \cdot I_4}{3 \cdot c_1 \cdot c_2} + \frac{G \cdot I_5}{b \cdot c_1 \cdot c_2} \right) \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 23}$$

donde,

$$c_1 = \frac{m \cdot \pi}{a} \quad c_2 = \frac{n \cdot \pi}{a}$$

$$I_1 = \int_0^a Y_p \cdot Y_q \, dy \quad I_2 = \int_0^a Y_p'' \cdot Y_q \, dy \quad I_3 = \int_0^a Y_p \cdot Y_q'' \, dy \quad I_4 = \int_0^a Y_p'' \cdot Y_q'' \, dy \quad I_5 = \int_0^a Y_p \cdot Y_q'' \, dy$$

$$k_{eB}^{pq} = \frac{1}{420 b^3} \cdot \begin{bmatrix} k_{eB_{1,1}} & k_{eB_{1,2}} & k_{eB_{1,3}} & k_{eB_{1,4}} \\ k_{eB_{2,1}} & k_{eB_{2,2}} & k_{eB_{2,3}} & k_{eB_{2,4}} \\ k_{eB_{3,1}} & k_{eB_{3,2}} & k_{eB_{3,3}} & k_{eB_{3,4}} \\ k_{eB_{4,1}} & k_{eB_{4,2}} & k_{eB_{4,3}} & k_{eB_{4,4}} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 24}$$

$$k_{eB_{1,1}} = 5040 \cdot D_x \cdot I_1 - 504 b^2 \cdot D_1 \cdot I_2 - 504 b^2 \cdot D_1 \cdot I_3 + 156 b^4 \cdot D_y \cdot I_4 + 2016 b^2 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{2,1}} = 2520 b \cdot D_x \cdot I_1 - 462 b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 - 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 + 22 b^5 \cdot D_y \cdot I_4 + 168 b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{3,1}} = -5040 \cdot D_x \cdot I_1 + 504 b^2 \cdot D_1 \cdot I_2 + 504 b^2 \cdot D_1 \cdot I_3 + 54 b^4 \cdot D_y \cdot I_4 - 2016 b^2 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{4,1}} = 2520 b \cdot D_x \cdot I_1 - 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 - 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 - 13 b^5 \cdot D_y \cdot I_4 + 168 b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{1,2}} = 2520 b \cdot D_x \cdot I_1 - 462 b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 - 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 + 22 b^5 \cdot D_y \cdot I_4 + 168 b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{2,2}} = 1680 b^2 \cdot D_x \cdot I_1 - 56 b^4 \cdot D_1 \cdot I_2 - 56 b^4 \cdot D_1 \cdot I_3 + 4 b^6 \cdot D_y \cdot I_4 + 224 b^4 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{3,2}} = -2520 b \cdot D_x \cdot I_1 + 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 + 42 b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 + 13 b^5 \cdot D_y \cdot I_4 - 168 b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{4,2}} = 840 \cdot b^2 \cdot D_x \cdot I_1 + 14 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_2 + 14 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_3 - 3 \cdot b^6 \cdot D_y \cdot I_4 - 56 \cdot b^4 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{1,3}} = 5040 \cdot D_x \cdot I_1 + 504 \cdot b^2 \cdot D_1 \cdot I_2 + 504 \cdot b^2 \cdot D_1 \cdot I_3 + 54 \cdot b^4 \cdot D_y \cdot I_4 - 2016 \cdot b^2 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{2,3}} = 2050 \cdot b \cdot D_x \cdot I_1 + 42 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 + 42 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 + 13 \cdot b^5 \cdot D_y \cdot I_4 - 168 \cdot b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{3,3}} = 5040 \cdot D_x \cdot I_1 - 504 \cdot b^2 \cdot D_1 \cdot I_2 - 504 \cdot b^2 \cdot D_1 \cdot I_3 + 156 \cdot b^4 \cdot D_y \cdot I_4 + 2016 \cdot b^2 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{1,4}} = 2520 \cdot b \cdot D_x \cdot I_1 - 42 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 - 42 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 - 13 \cdot b^5 \cdot D_y \cdot I_4 + 168 \cdot b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{2,4}} = 840 \cdot b^2 \cdot D_x \cdot I_1 + 14 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_2 + 14 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_3 - 3 \cdot b^6 \cdot D_y \cdot I_4 - 56 \cdot b^4 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{3,4}} = 2520 \cdot b \cdot D_x \cdot I_1 + 462 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_2 + 42 \cdot b^3 \cdot D_1 \cdot I_3 - 22 \cdot b^5 \cdot D_y \cdot I_4 - 168 \cdot b^3 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

$$k_{eB_{4,4}} = 1680 \cdot b^2 \cdot D_x \cdot I_1 - 56 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_2 - 56 \cdot b^4 \cdot D_1 \cdot I_3 + 4 \cdot b^6 \cdot D_y \cdot I_4 + 224 \cdot b^4 \cdot D_{xy} \cdot I_5$$

#### 6.4. Matriz de rigidez geométrica (kg)

Como se observa en la Figura 8, la banda está cargada en sus extremos con fuerzas que varían linealmente ( $T_1$ ,  $T_2$ ). Para determinar la matriz de rigidez geométrica se pueden emplear dos métodos: El primero, considerando la energía potencial adicional que surge cuando los bordes traccionados se desplazan longitudinalmente; o en forma equivalente, en términos de definiciones de deformación de orden superior (Ej: términos de deformación de Green–Lagrange). El segundo método será el que empleemos aquí. La energía potencial  $V_p$  debido a estas fuerzas durante el pandeo se expresa a continuación:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{b} \right] \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} u \right)^2 + \left( \frac{d}{dy} v \right)^2 + \left( \frac{d}{dy} w \right)^2 \right] dx dy \quad \text{Ecuación 25}$$

Nuevamente, las derivadas de los desplazamientos se pueden escribir en términos de las derivadas de las funciones de forma,  $N_{uv}$  y  $N_w$ , y de los desplazamientos nodales, con respecto a los números de semionda  $p$ , similar a la solución elástica:

$$N_w = \left[ \left[ \left( 1 - \frac{3 \cdot x^2}{b^2} + \frac{2 \cdot x^3}{b^3} \right) \cdot Y_p \right] \left[ x \left( 1 - \frac{2 \cdot x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot Y_p \right] \left[ \left( \frac{3 \cdot x^2}{b^2} - \frac{2 \cdot x^3}{b^3} \right) \cdot Y_p \right] \left[ x \left( \frac{-x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot Y_p \right] \right] \quad \text{Ecuación 26}$$

$$N_u = \left[ \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \cdot \sin \left( \frac{p \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right] \quad 0 \quad \left( \frac{x}{b} \cdot \sin \left( \frac{p \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right) \quad 0 \right] \quad \text{Ecuación 27}$$

$$N_v = \left[ 0 \quad \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \cdot \cos \left( \frac{p \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right] \quad 0 \quad \left( \frac{x}{b} \cdot \cos \left( \frac{p \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right) \right] \quad \text{Ecuación 28}$$

$$\left( \frac{d}{dy} w \right)^2 = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \begin{array}{c} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{array} \right] \right]^2 = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \begin{array}{c} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{array} \right] \right]^2 = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left[ \begin{array}{c} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{array} \right]^T \cdot G_B^{pT} \cdot G_B^q \cdot \left[ \begin{array}{c} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{array} \right] \quad \text{Ecuación 29}$$

Respecto a la deformación membranal, las derivadas pueden expresarse como:

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \frac{d}{dy} u \right)^2 \\ \left( \frac{d}{dy} v \right)^2 \end{array} \right] = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \begin{array}{c} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{array} \right] \right]^2 = \sum_{p=1}^m \left[ \left[ \begin{array}{c} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{array} \right] \right]^2 = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left[ \begin{array}{c} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{array} \right]^T \cdot G_M^{pT} \cdot G_M^q \cdot \left[ \begin{array}{c} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{array} \right] \quad \text{Ecuación 30}$$

Luego, la energía potencial puede reescribirse:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{b} \right] \cdot \left[ \sum_{p=1}^m \sum_{p=1}^m \left( d_p^T \cdot G^p \cdot G^q \right) \right] dx dy$$

$$V_p = \sum_{p=1}^m \sum_{p=1}^m \left[ \frac{1}{2} \cdot d_p^T \cdot \left[ \int_0^a \int_0^b \left[ T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{b} \right] \cdot G^p \cdot G^q dx dy \right] \cdot d_q \right] \quad \text{Ecuación 31}$$

O en forma reducida,

$$V_p = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \left( \frac{1}{2} \cdot d_p^T \cdot k_g^{pq} \cdot d_q \right) \quad \text{Ecuación 32}$$

donde  $G^p = \begin{pmatrix} G_M^p & \mathbf{\cdot} \\ \mathbf{\cdot} & G_B^p \end{pmatrix}$  y  $G^q = \begin{pmatrix} G_M^q & \mathbf{\cdot} \\ \mathbf{\cdot} & G_B^q \end{pmatrix}$

La matriz de rigidez  $k_{gp}^q$  correspondiente a los números de semionda  $p$  y  $q$ , se divide en dos partes: la membranal,  $k_{gM}^{pq}$  y la flexional,  $k_{gB}^{pq}$ , similar a lo visto para la matriz de rigidez elástica.

$$k_g^{pq} = \begin{pmatrix} k_{gM}^{pq} & \cdot \\ \cdot & k_{gB}^{pq} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 33}$$

$$k_{gM}^{pq} = \int_0^a \int_0^b \left[ T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{b} \right] \cdot G_M^p \cdot G_M^q \, dx \, dy \quad k_{gB}^{pq} = \int_0^a \int_0^b \left[ T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{b} \right] \cdot G_B^p \cdot G_B^q \, dx \, dy \quad \text{Ecuación 34}$$

Luego, la matriz de rigidez geométrica se puede expresar de la siguiente forma:

$$k_g = [k_g^{pq}]_{m \times m} \quad \text{Ecuación 35}$$

Las expresiones explícitas de las matrices geométricas membranal  $k_{gM}^{pq}$  y flexional  $k_{gB}^{pq}$ , se obtienen sustituyendo y haciendo las correspondientes integrales:

$$k_{gM}^{pq} = \begin{bmatrix} \frac{(3T_1 + T_2) \cdot b \cdot I_5}{12} & 0 & \frac{(T_1 + T_2) \cdot b \cdot I_5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{(3 \cdot T_1 + T_2) \cdot b \cdot a^2 \cdot I_4}{12 \cdot \mu_p \cdot \mu_q} & 0 & \frac{(T_1 + T_2) \cdot b \cdot a^2 \cdot I_4}{12 \cdot \mu_p \cdot \mu_q} \\ \frac{(T_1 + T_2) \cdot b \cdot I_5}{12} & 0 & \frac{(T_1 + 3 \cdot T_2) \cdot b \cdot I_5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{(T_1 + T_2) \cdot b \cdot a^2 \cdot I_4}{12 \cdot \mu_p \cdot \mu_q} & 0 & \frac{(T_1 + 3 \cdot T_2) \cdot b \cdot a^2 \cdot I_4}{12 \cdot \mu_p \cdot \mu_q} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 36}$$

$$k_{gB}^{(m,n)} = \begin{bmatrix} \frac{(10T_1 + 3T_2) \cdot b \cdot I_5}{35} & \frac{(15 \cdot T_1 + 7 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{9(T_1 + T_2) \cdot b \cdot I_5}{140} & \frac{-(7 \cdot T_1 + 6 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} \\ \frac{(15 \cdot T_1 + 7 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{(5 \cdot T_1 + 3T_2) \cdot b^3 \cdot I_5}{840} & \frac{(6 \cdot T_1 + 7 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{-(T_1 + T_2) \cdot b^3 \cdot I_5}{280} \\ \frac{9(T_1 + T_2) \cdot b \cdot I_5}{140} & \frac{(6 \cdot T_1 + 7 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{(3T_1 + 10 \cdot T_2) \cdot b \cdot I_5}{35} & \frac{-(7 \cdot T_1 + 15 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} \\ \frac{-(7 \cdot T_1 + 6 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{-(T_1 + T_2) \cdot b^3 \cdot I_5}{280} & \frac{-(7 \cdot T_1 + 15 \cdot T_2) \cdot b^2 \cdot I_5}{420} & \frac{(3T_1 + 5 \cdot T_2) \cdot b^3 \cdot I_5}{840} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 37}$$

Donde  $\mu_p = p \cdot \pi$   $\mu_q = q \cdot \pi$   $I_4 = \int_0^a Y_p'' \cdot Y_q'' \, dy$   $I_5 = \int_0^a Y_p' \cdot Y_q' \, dy$

Según puede observarse, ambas matrices son simétricas.

### 6.5. Ensamble y solución

Como hemos visto en la Figura 8, el método de las bandas finitas discretiza la sección sólo en sentido transversal. Las condiciones de sustentación de los bordes cargados pueden definirse tanto en forma separada para cada banda como en conjunto. Una vez especificada esta condición, se pueden calcular las matrices de rigidez elástica y geométrica para el máximo número de semiondas  $m$  deseado. Luego, es necesario realizar la transformación de las mismas, de coordenadas locales a globales.

Después de la transformación necesaria desde las coordenadas locales a las globales, basada en la orientación de las bandas y en un ensamble apropiado, se pueden obtener la matriz de rigidez elástica global ( $K_e$ ) y la matriz geométrica ( $K_g$ ).

Para una distribución de fuerzas en los bordes de una barra, la matriz de rigidez geométrica se escala linealmente, resultando un problema de pandeo lineal:

$$K_e \cdot \Phi = \Lambda \cdot K_g \cdot \Phi \tag{Ecuación 38}$$

Donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores (cargas de pandeo) y  $\Phi$  es la matriz correspondiente a los modos de pandeo o eigen-modos en sus columnas.

Nótese que tanto  $K_e$  como  $K_g$  son función de la longitud de la banda  $a$  y la carga elástica de pandeo y los modos también se determinan en función de esta longitud.

### 6.6. Participación de la longitud de semionda en términos del número $p$

Para poder comprender la influencia de la longitud de semionda en el análisis del pandeo se presenta a continuación una placa biempotrada en sus bordes cargados y simplemente apoyada en sus bordes longitudinales. El espesor de la misma es constante y la longitud analizada  $L$ , que es la actual longitud de la placa, varía bajo la acción de cargas de compresión.

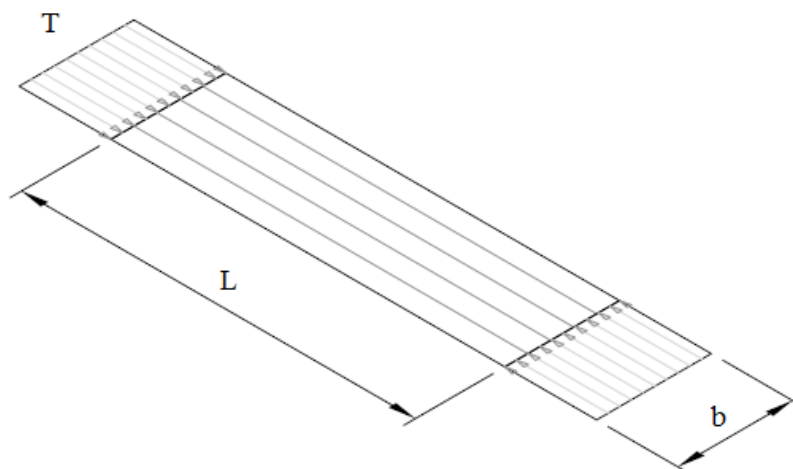


Figura 9: Placa de análisis de espesor constante

La Figura 10 muestra los primeros modos de pandeo de una banda cuando la relación de aspecto  $L/b$  es igual a 5. Puede observarse que hay 5 semiondas y la longitud de cada una parece aproximadamente la misma. Esto significa que 5 es el modo principal de pandeo (controlling mode) o en otras palabras, el número de la semionda  $p = 5$ , tiene una participación mayor.

En la Figura 11, en cambio, se presenta una placa, cuyas bandas se encuentran biempotradas, tanto en sus bordes cargados como en sus bordes longitudinales. En este caso, para la misma relación de aspecto, pueden observarse 7 semiondas, de distinta longitud. Puede verse que las 5 semiondas del medio tienen la misma longitud, distinta a la longitud de las semiondas de los bordes. Esto estaría indicando que hay varias longitudes de semionda, además de  $p = 5$  que contribuyen en los modos de pandeo.

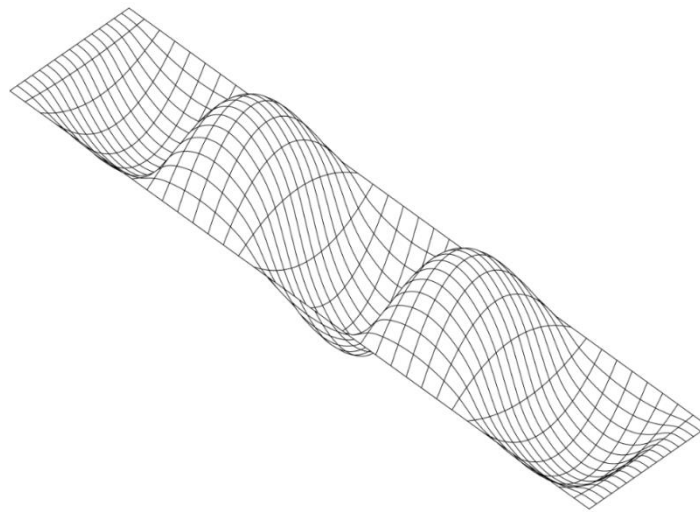


Figura 10: Forma de pandeo en el modo  $L/b=5$  para una placa biempotrada en su borde cargado y simplemente apoyada en sus bordes longitudinales

Si bien no es sencillo determinar cuál de las longitudes de semionda es dominante, esto no representa un problema pues la participación de cada longitud de semionda en términos del número  $p$  puede deducirse fácilmente a partir de la forma de pandeo.

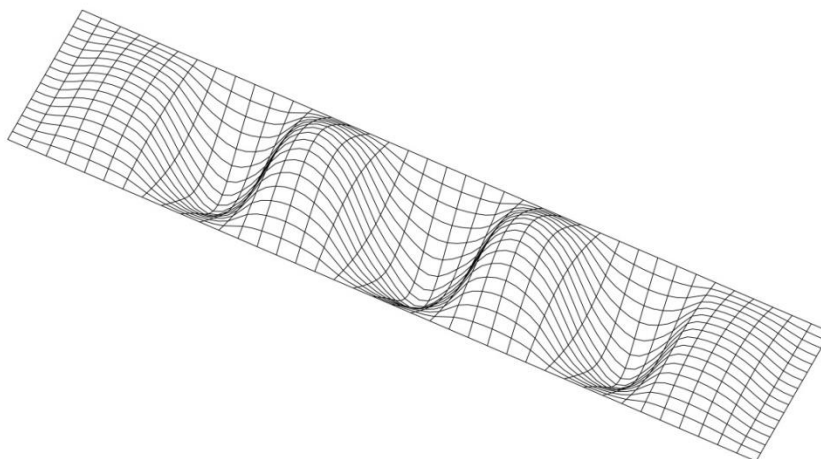


Figura 11: Forma de pandeo en el modo  $L/b=5$  para una placa biempotrada en todos sus bordes



Básicamente, es siempre cierto que ciertas longitudes de semionda tienen una influencia dominante en el modo de pandeo. En otras palabras, para ciertas longitudes, ciertos números  $p$  de semionda deberán tener una mayor contribución al modo de pandeo.

Cuando se tiene una placa simplemente apoyada en todos sus bordes, puede verse fácilmente que no ocurre acoplamiento y que el número de semionda dominante es solamente el cinco, lo cual significa que la longitud de semionda dominante es exactamente igual al ancho  $b$  de la placa.

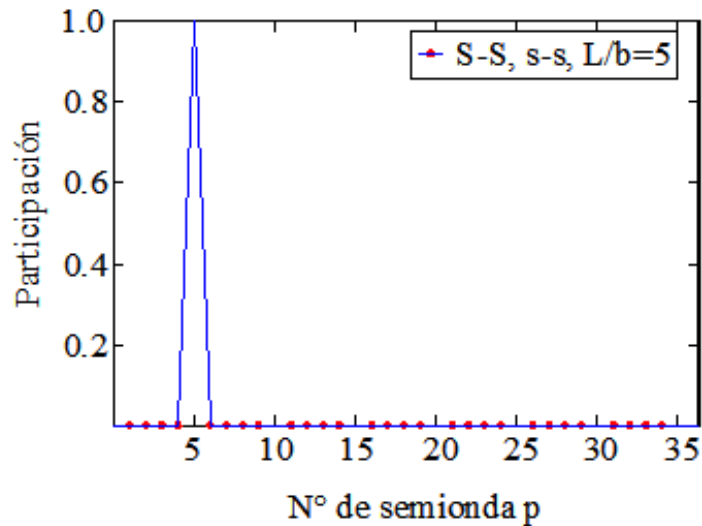


Figura 12: Participación del número de semionda para  $L/b=5$  para una placa simplemente apoyada en todos sus bordes

Para una placa biempotrada en sus bordes cargados y simplemente apoyada en los bordes longitudinales, el número de semionda dominante sigue siendo 5. Sin embargo, hay otros números de semionda que contribuyen, especialmente el 1, 3 y 7, debido al acoplamiento que existe para esa condición de borde. Estos agregan hasta un 10% de la contribución total.

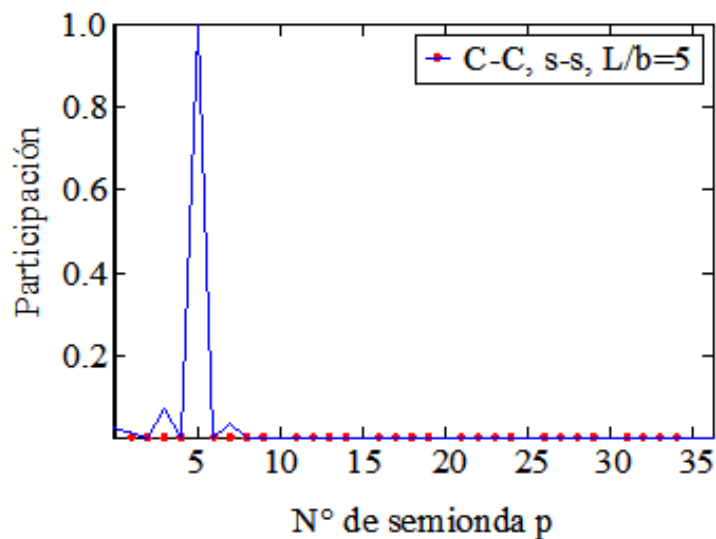


Figura 13: Participación del número de semionda para  $L/b=5$  para una placa C-C, S-S

Ahora tomemos  $m = 1$  y la sustentación de la placa en sus bordes cargados simplemente apoyada, mientras que los bordes longitudinales se encuentran empotrados y ejecutemos el análisis de las bandas finitas. Esta es exactamente la misma solución que desarrolla CUFSM, donde la longitud de la placa se corresponde con la longitud de semionda. El primer mínimo local ocurrirá para una longitud de semionda igual al ancho de la placa  $b$  y para el caso de  $L = 5b$ , el número  $p$  estará alrededor de 7.

Así, generalizando y para todo tipo de secciones y no solamente para placas, se puede resumir el análisis anterior parafraseando lo siguiente: asumiendo que  $L_{cr1}$ ,  $L_{crd}$  y  $L_{cre}$  son las longitudes de semionda del pandeo local, distorsional y global cuando los bordes cargados se encuentran simplemente apoyados y  $m = 1$  (Al igual que en el análisis CUFSM), dependiendo del modo de pandeo, el número de semionda dominante está cerca de uno de estos tres valores:  $L/L_{cr1}$ ,  $L/L_{crd}$  y  $L/L_{cre}$ , donde  $L$  es la longitud real de la placa o columna o viga analizada. Para otras secciones como el perfil C, Z, sigma, etc., probablemente involucrará uno de estos tres ( $L/L_{cr1}$ ,  $L/L_{crd}$  y  $L/L_{cre}$ ).

En la región global, la longitud de semionda del pandeo global  $L_{cre}$  es siempre la longitud real de la barra, así el número dominante de semionda estará siempre cercano a la unidad.

### 6.7. Extensión del método de las bandas finitas restringido

La característica principal del Método de las Bandas Finitas restringido (cFSM) es que el campo del desplazamiento general  $d$  puede ser restringido a cualquier espacio de deformación modal,  $M$ , de la siguiente manera:

$$d = R_M x d_M$$

donde  $R_M$  es la matriz reducida para los espacios modales seleccionados: global (G), distorsional (D), local (L), otro (O), o una combinación de ellos; y  $d_M$  es la deformación resultante dentro de ese espacio. Esto significa que, para cualquier condición de borde, se podrá ejecutar la descomposición modal así como también cuantificar los modos.

La importancia de la aplicación de restricciones radica en la posibilidad de excluir ciertos modos, lo cual puede ayudar a identificar la longitud de pandeo característica y/o la carga crítica para los modos restantes.

Los espacios de deformación se definen mediante supuestos mecánicos inherentes a cada espacio. A continuación, se presentan tres criterios mecánicos necesarios para definir los modos de pandeo:

- ✓ Criterio 1 – Hipótesis de Vlasov:
  - a.  $(\gamma_{xy})_m = 0$ , es decir, sobre la superficie media las distorsiones son nulas.
  - b.  $(\epsilon_x)_m = 0$ , lo cual implica que las secciones transversales son indeformables en su propio plano.
  - c. El desplazamiento  $v$  es lineal.

- ✓ Criterio 2 – Alabeo Longitudinal:
  - a.  $v \neq 0$ , es decir, el desplazamiento por alabeo no es constantemente igual a cero a lo largo de toda la sección transversal.
  - b. La sección se encuentra en equilibrio transversal
- ✓ Criterio 3 – Sección sin distorsión:  $k_{xx} = 0$  (Ej.: no hay flexión transversal)

Mediante la implementación de estos tres criterios se puede hacer la separación de modos de pandeo en G, D, L, O, lo cual se resume en la Tabla 1:

Tabla 1: Clasificación de modos

	G	D	L	O
Criterio 1 – Hipótesis de Vlasov	SI	SI	SI	NO
Criterio 2 – Alabeo longitudinal	SI	SI	NO	n/a
Criterio 3 – Sección sin distorsiones	SI	NO	n/a	n/a

### 6.7.1. Descomposición modal

El problema de eigenvalores restringido se puede transformar en un problema de eigenvalores FSM, para uno o varios modos  $M$ , de la siguiente manera:

$$K_{e.M} \cdot \Phi_M = \Lambda_M \cdot K_{g.M} \cdot \Phi_M \tag{Ecuación 39}$$

donde  $K_{e.M}$  y  $K_{g.M}$  son las matrices de rigidez elástica y geométrica respectivamente del problema de bandas finitas restringido;  $\Lambda_M$  es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores para el o los modos dados, y  $\Phi_M$  es la matriz de los modos correspondientes en sus columnas.

La descomposición modal resulta de gran utilidad para investigar la participación de los términos longitudinales en el pandeo local y distorsional y luego utilizar esta cantidad de términos para forzar a la barra a que pandee según esos modos.

## 6.8. CUFSM

### 6.8.1. Introducción

El programa CUFSM aplica el Método semianalítico de las Bandas Finitas para proveer soluciones de estabilidad a las secciones de paredes delgadas. En Estados Unidos, donde se desarrolló, es de uso común entre investigadores, educadores, estudiantes y diseñadores. Si bien la aplicación fundamental son los perfiles de acero conformados en frío, se utiliza también para perfiles de acero laminados en caliente, perfiles de chapa soldadas y una gran variedad de otros materiales.

### 6.8.2. Ingreso de datos

Pensado originalmente para la condición de borde simplemente apoyada, en la última versión –4.05– se extendió a todas las condiciones de borde. Otro adelanto importante respecto a la versión original –3.12– disponible durante 4 años, fue la implementación del método de las bandas finitas restringido.

Los datos que deben ingresarse son:

- Geometría de la sección, con su discretización en bandas finitas.
- Características mecánicas del material.
- Distribución de tensiones, que puede provenir de esfuerzo axial, flexión, torsión o una combinación de las anteriores.
- Longitudes de semionda.
- Condiciones de borde.

A cada nodo se puede asociar un resorte externo, debiéndose indicar sobre qué grado de libertad actúa y cuál es su rigidez. De esta manera se puede tener en cuenta, por ejemplo, la acción que una chapa de techo ejerce sobre una correa. Los resortes pueden modelarse con un valor constante o variable en función de la longitud del modelo.

Incorporando ciertas restricciones que vinculen el desplazamiento o rotación de un nodo a otro se pueden modelar abrazaderas u otros tipos de conexiones entre perfiles.

En un mismo modelo es posible utilizar materiales múltiples, no quedando excluidos los materiales ortotrópicos, como plásticos o aceros altamente trabajados.

### 6.8.3. Resultado

El resultado que se obtiene es la denominada *Signature Curve* (Figura 14), que es una combinación de las curvas de pandeo global, distorsional y local.

Mediante la opción del Método de las bandas finitas restringido, se pueden distinguir además las combinaciones y la participación de los distintos modos de pandeo.

Ingresando la longitud de la barra de análisis podremos saber cuál es la carga, momento o tensión crítica y a qué tipo de pandeo corresponde.

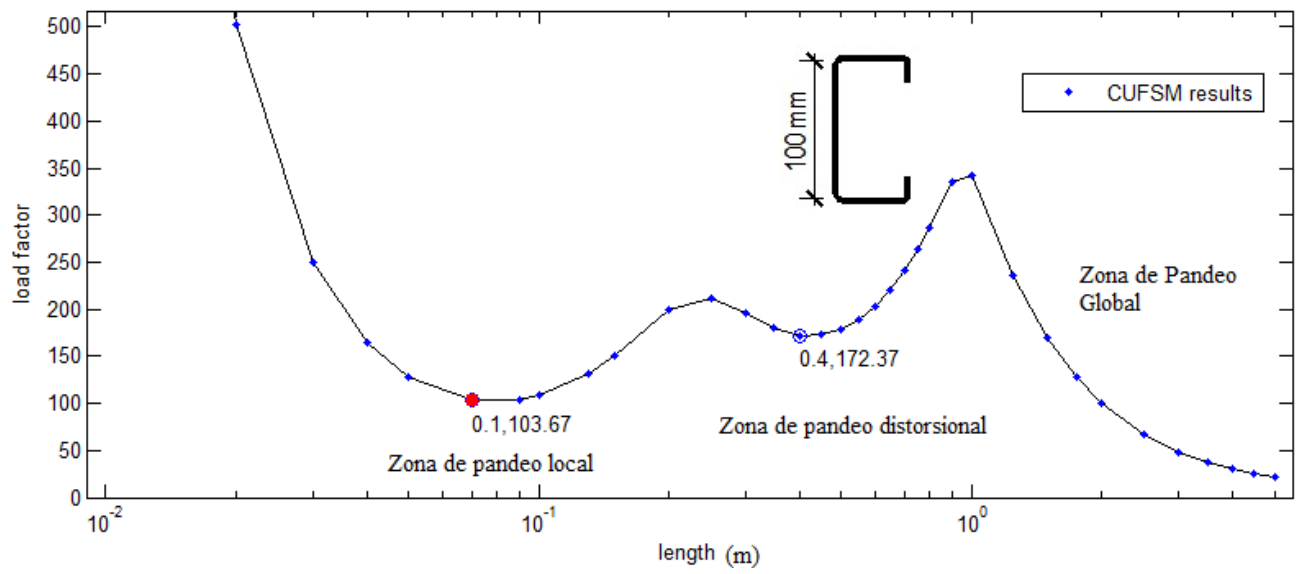


Figura 14: Ejemplo de *Signature Curve* (Curva de cargas de pandeo)



## 7. ANÁLISIS COMPARATIVO DE CASOS

### 7.1. Introducción

A continuación, se analizarán distintas secciones sometidas a un determinado estado tensional, comparando los resultados obtenidos mediante CUFSM, con la teoría clásica de estabilidad elástica.

En todos los perfiles analizados, se utilizarán las siguientes propiedades del material:

$$E = 206000 \text{ MPa} \quad \text{Módulo de elasticidad longitudinal}$$

$$\nu = 0.30 \quad \text{Coeficiente de Poisson}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 79230 \text{ MPa} \quad \text{Módulo de elasticidad transversal}$$

### 7.2. Sección en forma de cruz. Pandeo torsional

“Existen algunos casos en los que una sección abierta de pared delgada sujeta a una compresión uniforme pandeará torsionalmente mientras su eje longitudinal permanece recto. Para mostrar cómo una fuerza de compresión produce pandeo torsional puro, se considerará el ejemplo de una barra doblemente simétrica”<sup>5</sup>. En el ANEXO 3 se obtendrá el valor de la tensión crítica de pandeo torsional, siguiendo el desarrollo de Timoshenko–Gere.

#### 7.2.1. Características geométricas de la sección

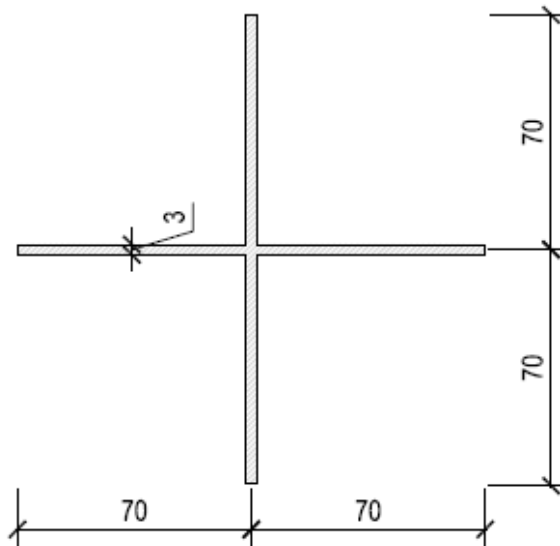


Figura 15: Características geométricas de la sección en forma de cruz (mm)

<sup>5</sup> Timoshenko, Gere; Theory of Elastic Stability, 1963

### 7.2.2. Resolución analítica

Se demuestra que para estos casos el valor de la tensión crítica de compresión es independiente de la longitud de la barra y se obtiene según la siguiente ecuación (Ver ANEXO 3, Ecuación 69)

$$\sigma_{crit} = \frac{Gt^2}{b^2}$$

Para la sección de análisis en que,

$$t = 3\text{mm}$$

$$b = 70\text{mm}$$

$$\sigma_{crit}=145.526\text{MPa}$$

### 7.2.3. Resolución mediante CUFSM

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.

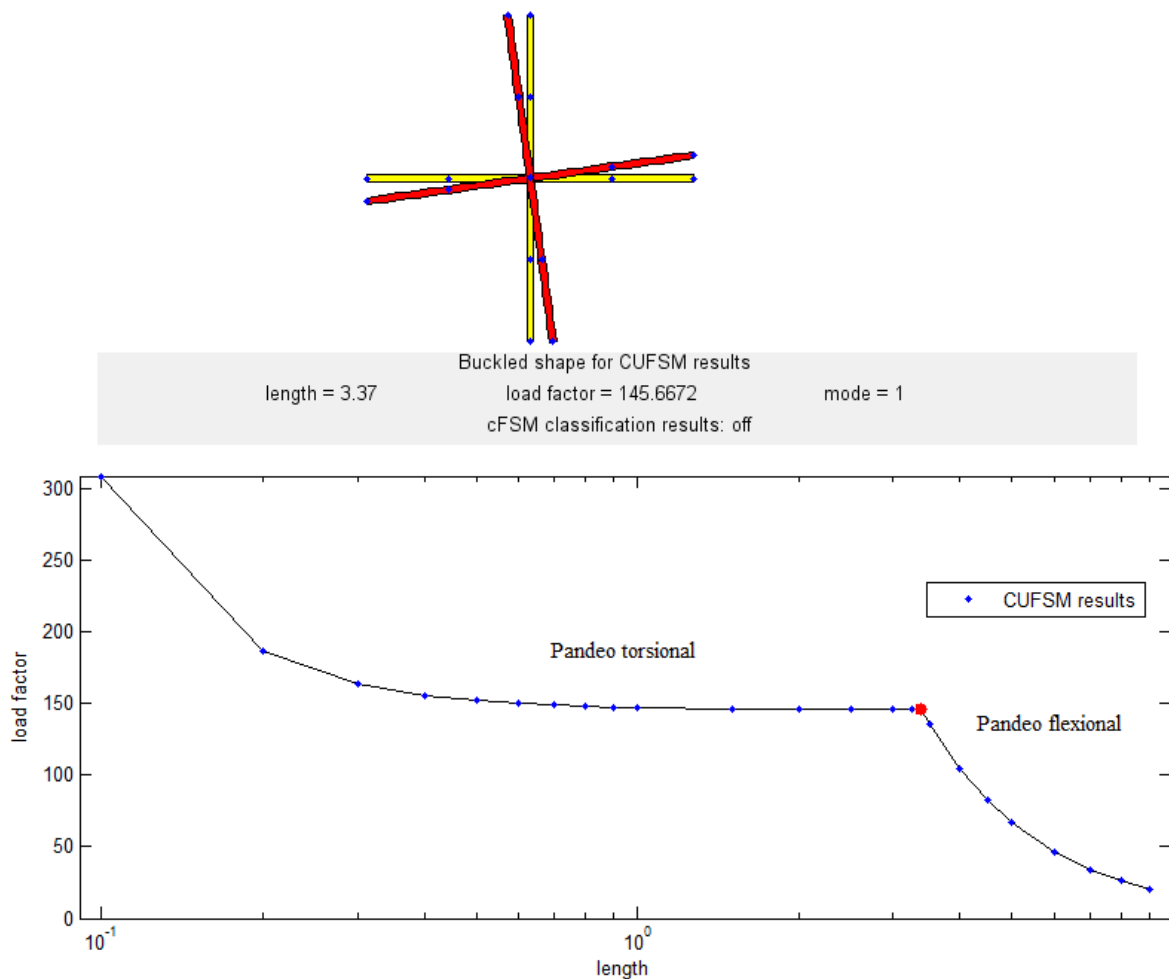


Figura 16: Curva de cargas de pandeo para un perfil en forma de cruz. Tensión crítica de pandeo torsional



De la Figura 16 y analizando las deformaciones del perfil, se desprende que la sección dato pandea torsionalmente hasta una longitud de barra de 3.37m, a partir de la cual el pandeo es flexional puro.

El menor valor de la tensión para el cual para el cual la barra pandea torsionalmente, será la tensión crítica de pandeo torsional, en este caso de 145.6672MPa. Como se observa, este valor es prácticamente coincidente con el análisis analítico.

Para una longitud de barra de 5m, se tendrá:

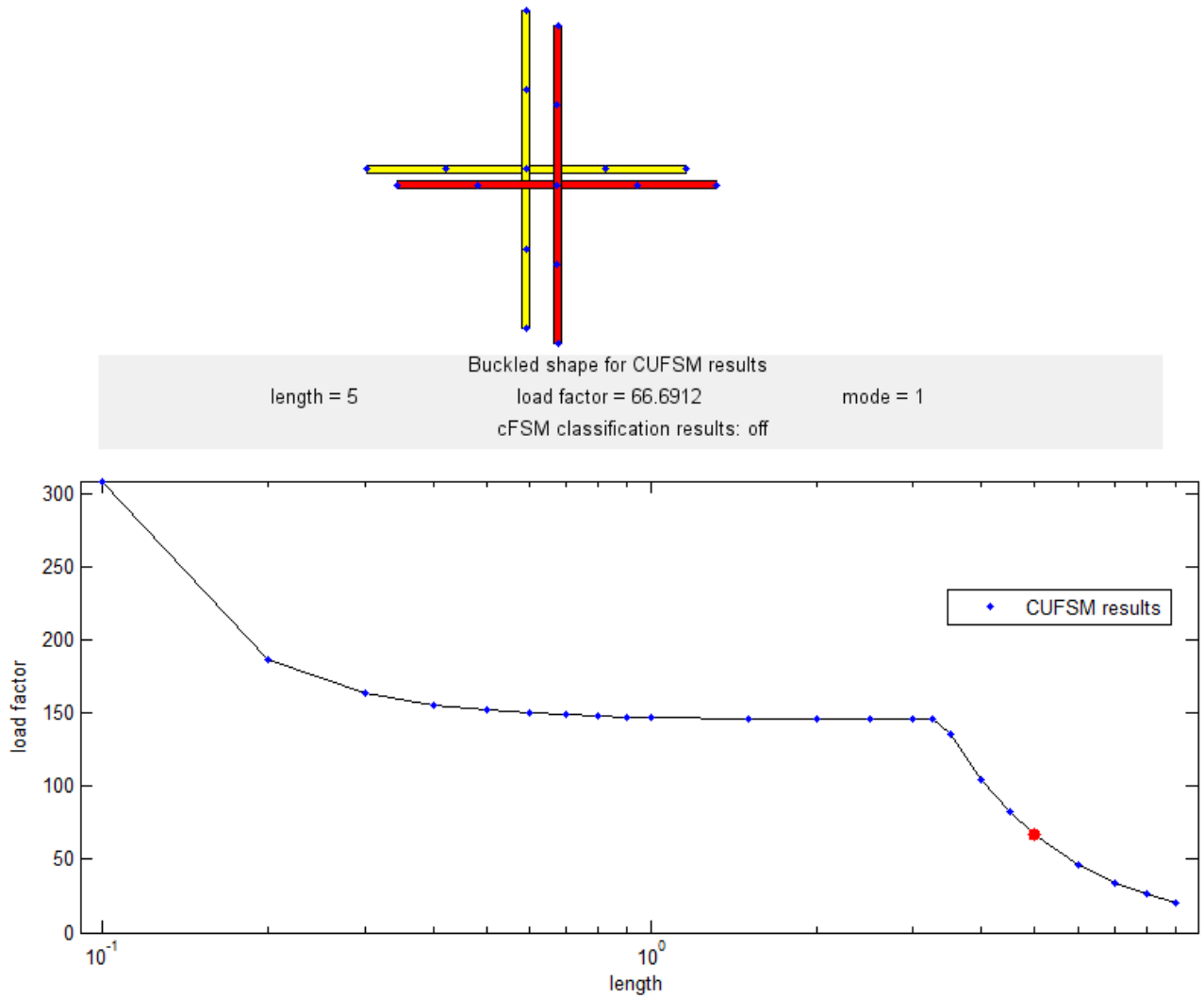


Figura 17: Curva de carga de pandeo para un perfil en forma de cruz. Pandeo por flexión pura

De la Figura 17 se desprende que para una longitud de barra de 5m, el perfil pandea por flexión pura, en cuyo caso, el valor de la tensión crítica se puede obtener, para una sección simplemente apoyada, de la siguiente manera:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot A}$$

siendo,

$A = 8.4\text{cm}^2$	Área de la sección
$I = 68.6\text{cm}^4$	Momento de inercia
$\sigma_{\text{crit}} = 66.416\text{MPa}$	Tensión crítica flexional

En este caso los valores también son prácticamente coincidentes.

### 7.3. Perfiles ángulos sometidos a compresión

#### 7.3.1. Introducción

La obtención de la carga crítica para un perfil ángulo sometido a compresión es posible analizando al mismo mediante la teoría de pandeo de las placas planas delgadas.

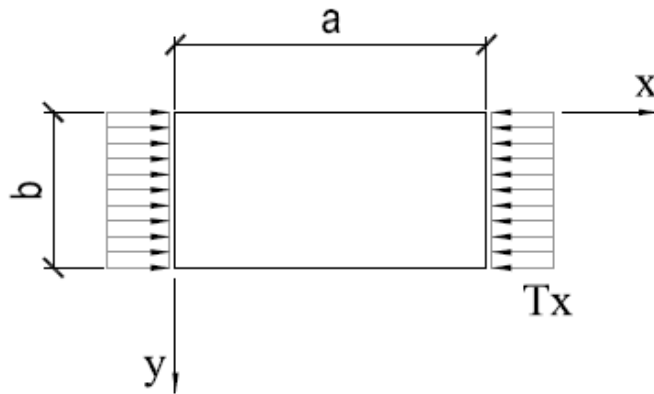


Figura 18: Placa rectangular uniformemente comprimida según el eje  $x$

Para el caso en que los bordes cargados se encuentran simplemente apoyados, el lado  $y = 0$  articulado y el lado  $y = b$  libre, como el caso de un perfil L de alas iguales, la magnitud de la carga crítica de compresión se puede representar mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_{x,\text{crit}} = \frac{T_{x,\text{cr}}}{h} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot h} \tag{Ecuación 40}$$

Siendo  $h$  el espesor de las placas que forman al perfil y  $k$  un factor numérico que depende de la relación  $a/b$ .<sup>6</sup> Para placas largas se puede considerar con suficiente precisión:

$$k = 0.456 + \frac{b^2}{a^2} \tag{Ecuación 41}$$

<sup>6</sup> En su libro “Theory of Elastic Stability”, Timoshenko obtiene el valor de  $k$  para distintas relaciones de  $a/b$

### 7.3.2. Perfil L76.1x2

#### 7.3.2.1. Características de la sección

$a = 0.38\text{m}$  Longitud del perfil

$b = 76.1\text{mm}$  Lado del ángulo

$h = 2\text{mm}$  espesor

$A = 3.004\text{cm}^2$  Área

$I_{22} = 7.059\text{cm}^4$  Momento principal de inercia mínimo

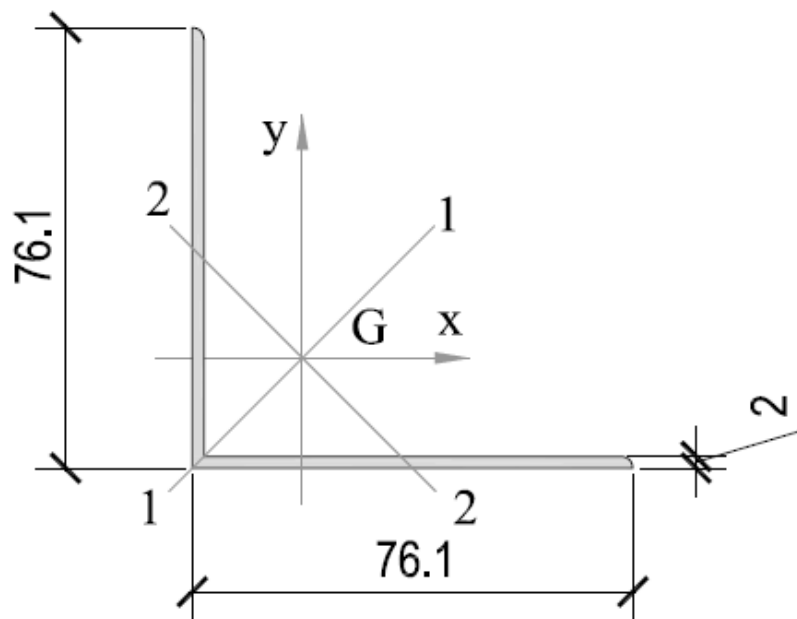


Figura 19: Características geométricas de la sección (L76x1.2)

Para este caso particular, dado que la Tabla 2 del ANEXO 3, utilizada en la resolución de este ejercicio, fue elaborada para un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ , emplearemos el mismo valor.

#### 7.3.2.2. Cálculo analítico

Para  $\frac{a}{b} = 5$   $k = 0.506$

$$D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 0.146 \text{ kNm}$$

Como se demostrará en el ANEXO 3, la tensión crítica será

$$\sigma_{\text{crit}} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot h} = 63.162 \text{ MPa}$$

7.3.2.3. Resolución mediante CUFSM

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.

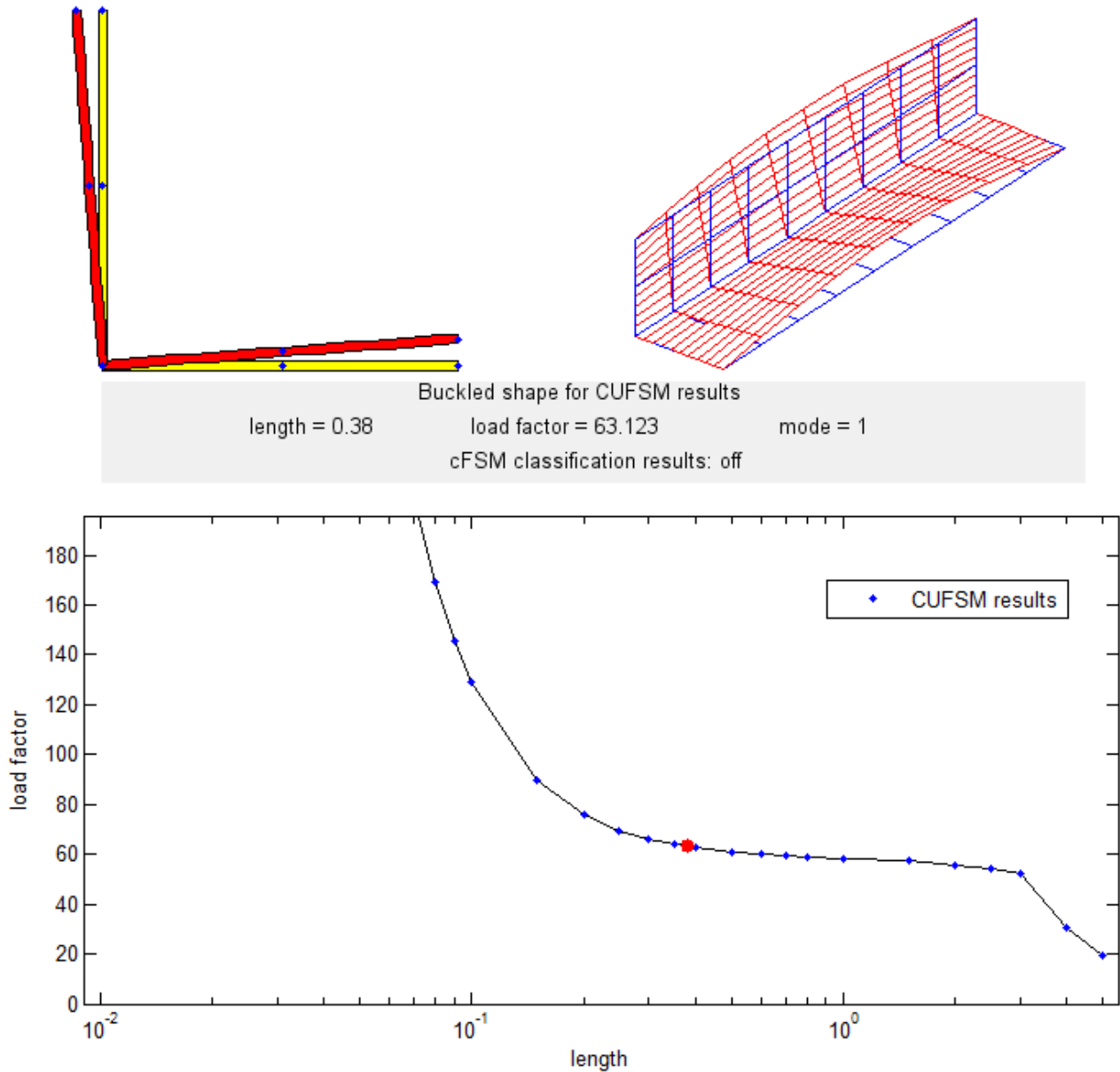


Figura 20: Curva de cargas de pandeo para un perfil L76.1x2

De la Figura 20 vemos que el perfil pandea torsionalmente, siendo el valor de su carga crítica  $\sigma_{crit} = 63.123\text{MPa}$ , es decir prácticamente coincidente con el cálculo analítico. Para longitudes mayores a 3m el perfil pandea globalmente. Para una longitud de 4.0m, por ejemplo, analíticamente el valor de esta tensión será:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{22}}{A \cdot l^2} = 29.862 \text{MPa}$$

Este valor dista en un 1.6% respecto al que obtenemos mediante el programa, como se observa de la Figura 21.

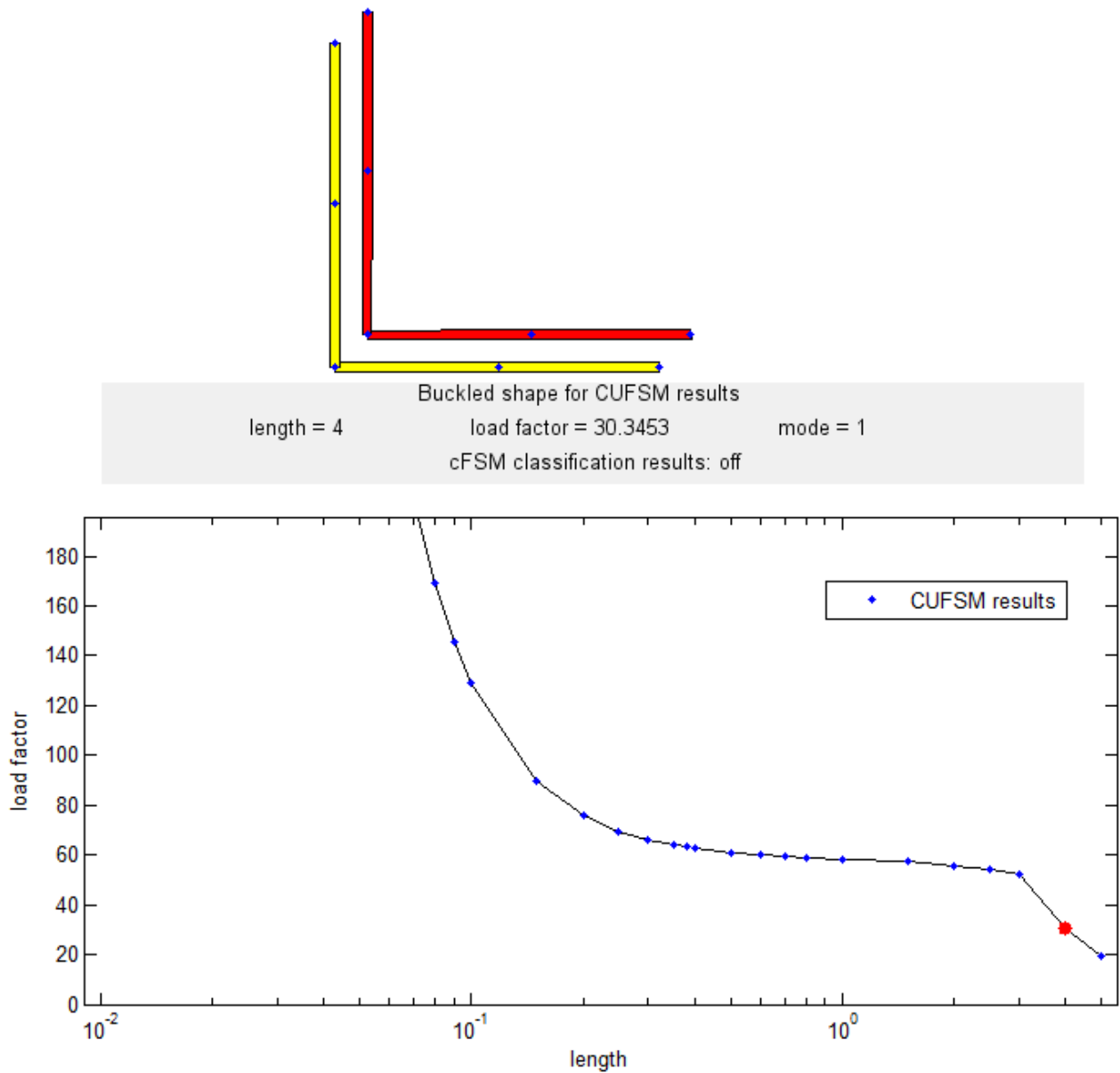


Figura 21: Curva de cargas de pandeo para perfil un L76x1.2. Pandeo por flexión pura

### 7.3.3. Perfil L100x1

#### 7.3.3.1. Características de la sección

b = 100mm      Lado del ángulo

h = 1mm      espesor

A = 1.99cm<sup>2</sup>      Área

$I_{11} = 32.837\text{cm}^4$  Momento principal de inercia máximo

$I_{22} = 8.211\text{cm}^4$  Momento principal de inercia mínimo

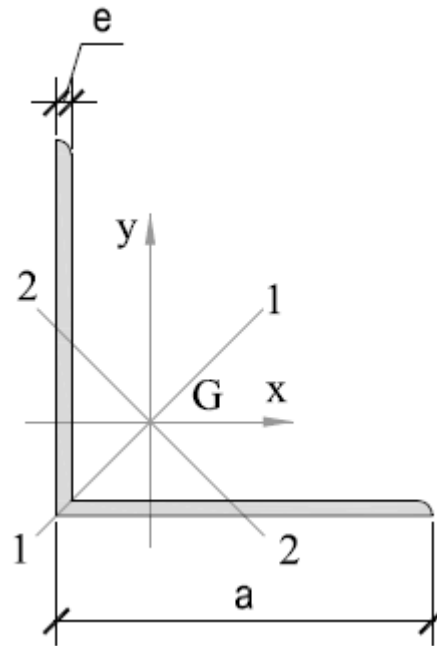


Figura 22: Características de la sección (Perfil L100x1)

### 7.3.3.2. Resolución analítica para $l = 3\text{m}$

Se obtendrá la tensión crítica empleando el método de integración de la ecuación diferencial de deformación de la placa comprimida; en el cual se asume que la placa, bajo cargas de compresión, padece en  $m$  semiondas sinusoidales, planteándose una función que cumpla con las condiciones de borde.

$$D = \frac{E \cdot e^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 0.019\text{kNm}$$

$$p = \left( \frac{m \cdot \pi}{l} \right)^2 = 1.097 \frac{1}{\text{m}^2} \quad \text{Para } m = 1$$

$$\alpha(T_x) = \sqrt{p + \sqrt{\frac{T_x}{D} \cdot p}} \quad \beta(T_x) = \sqrt{-p + \sqrt{\frac{T_x}{D} \cdot p}}$$

$$\Delta(T_x) = \beta(T_x) \cdot \left( \alpha(T_x)^2 - \nu \cdot p \right)^2 \tanh(\alpha(T_x) \cdot b) - \alpha(T_x) \cdot \left( \beta(T_x)^2 + \nu \cdot p \right)^2 \cdot \tan(\beta(T_x) \cdot b)$$

Luego, graficando el determinante, en función de  $T_x$ , hallando la raíz se tiene el valor de la carga crítica.

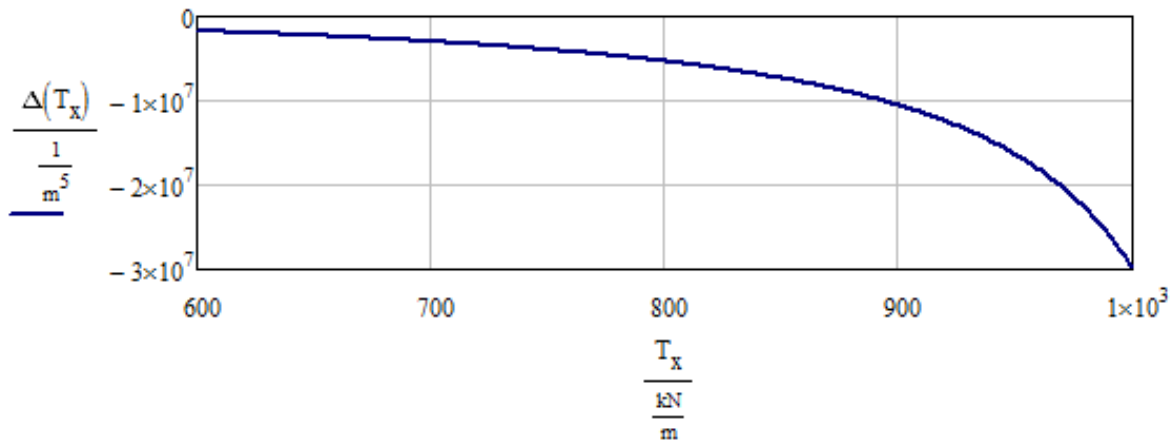


Figura 23: Determinante en función de  $T_x$  para un perfil L100x1

El valor de la raíz será:

$$T_{xc} = \text{root}(\Delta(T_x), T_x) = 8.023 \text{ kN/m}$$

$$P_{\text{crit}} = 2 \cdot T_{xc} \cdot b = 1.597 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}}{A} = 8.023 \text{ MPa}$$

7.3.3.3. Resolución mediante CUFSM para  $l = 3\text{m}$

Buckled shape for CUFSM results  
 length = 3      load factor = 7.9574      mode = 1  
 cFSM classification results: off

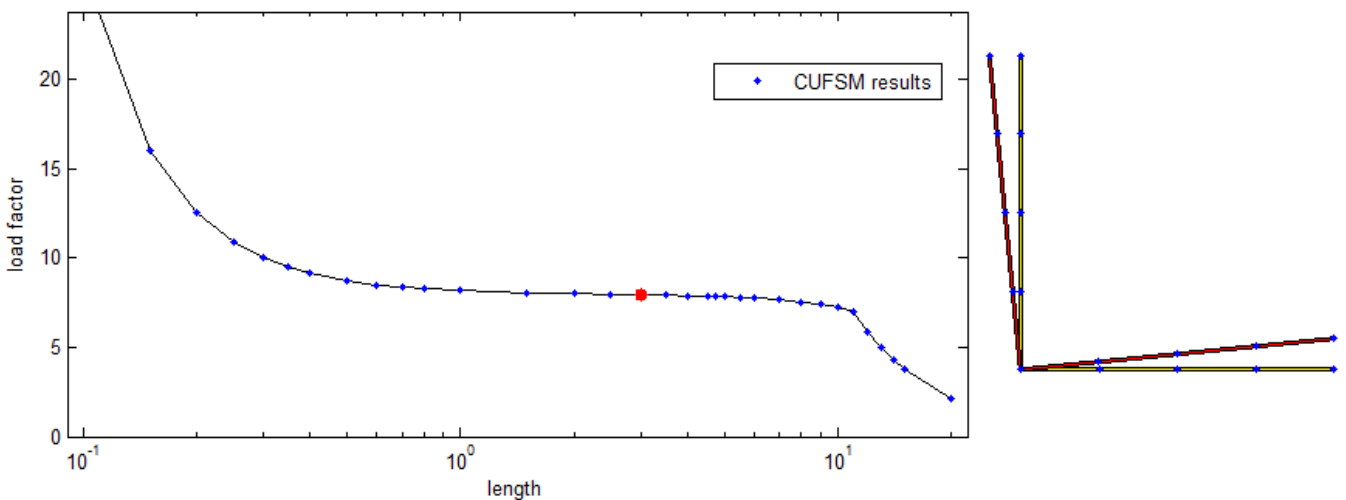


Figura 24: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x1 – Pandeo torsional

El valor de la tensión crítica es de 7.9574MPa, siendo la diferencia respecto al método analítico de 1%.

Probaremos de aumentar la longitud del perfil a 8m, comparando nuevamente los resultados.

7.3.3.4. Resolución analítica para  $l = 8\text{m}$

$$p = \left( \frac{m \cdot \pi}{l} \right)^2 = 0.154 \frac{1}{\text{m}^2}$$

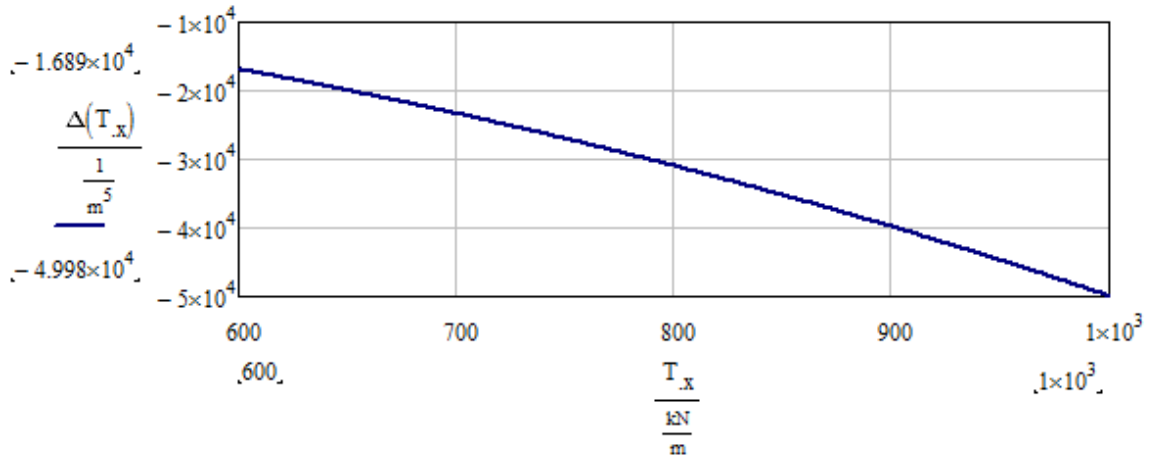


Figura 25: Determinante en función de  $T_x$

El valor de la raíz será:

$$T_{xc} = \text{root}(\Delta(T_x), T_x) = 8.006\text{kN/m}$$

$$P_{\text{crt}} = 2 \cdot T_{xc} \cdot b = 1.593\text{kN}$$

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crt}}}{A} = 8.006\text{MPa}$$

7.3.3.5. Resolución mediante CUFSM para  $l = 8\text{m}$

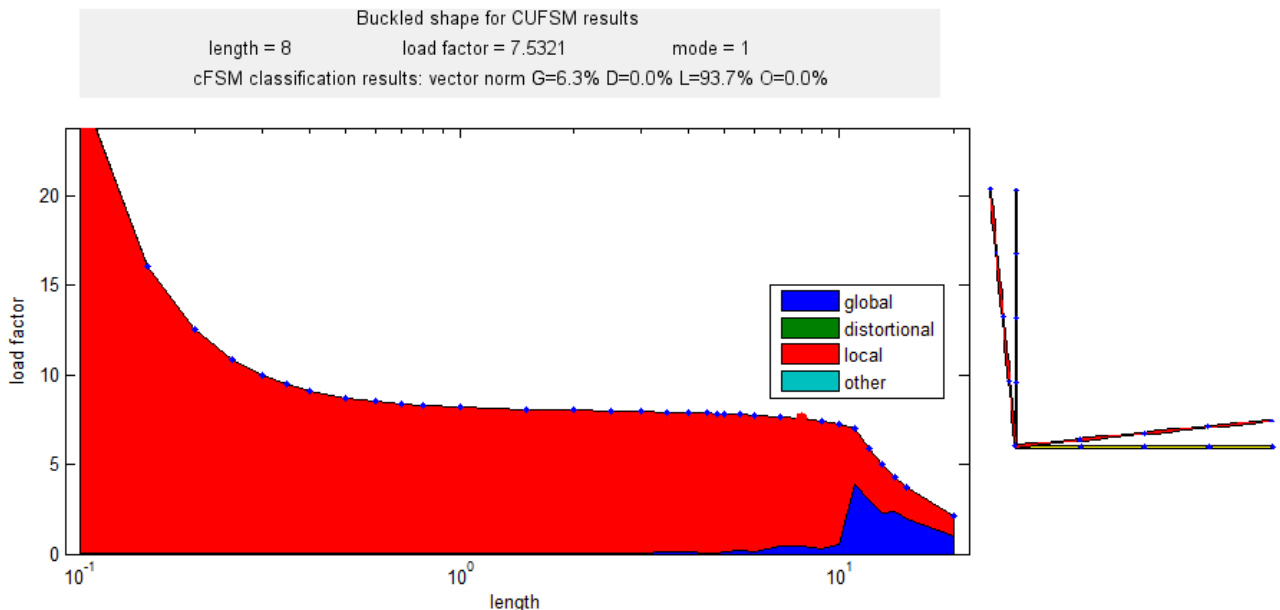


Figura 26: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x1 – Pandeo torsional



El valor de la tensión crítica es de 7.532MPa, siendo la diferencia respecto al método analítico de 6%. Esta diferencia se va acentuando a medida que nos acercamos al límite en el que el perfil pasa de pandear por torsión pura, a hacerlo por flexión alrededor de su eje débil. Se concluye que esta diferencia se debe a la combinación de pandeo local con flexional que existe y se puede determinar mediante la opción cFSM del programa, con la cual se obtiene la participación de cada modo de pandeo.

### 7.3.4. Perfil L100x3

#### 7.3.4.1. Características de la sección

$b = 100\text{mm}$  Lado del ángulo

$h = 3\text{mm}$  espesor

$A = 5.91\text{cm}^2$  Área

$I_{11} = 95.567\text{cm}^4$  Momento principal de inercia máximo

$I_{22} = 23.892\text{cm}^4$  Momento principal de inercia mínimo

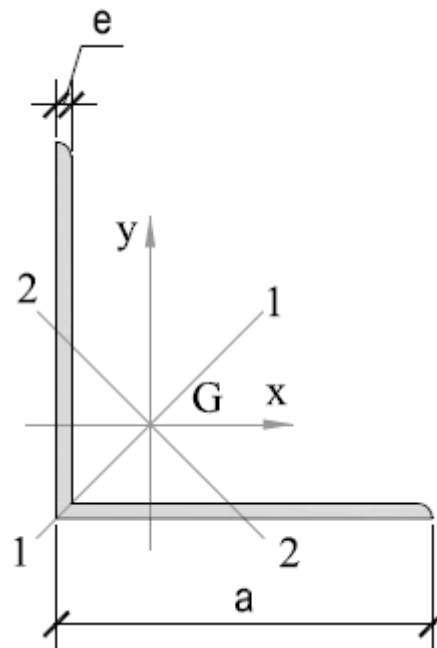


Figura 27: Características de la sección (Perfil L100x3)

#### 7.3.4.2. Resolución analítica para $l = 0.5\text{m}$

$$D = \frac{E \cdot e^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 0.509\text{kNm}$$

$$p = \left( \frac{n \cdot \pi}{1} \right)^2 = 39.478 \frac{1}{\text{m}^2} \quad \text{Para } m = 1$$

$$\alpha(T_x) = \sqrt{p + \sqrt{\frac{T_x}{D} \cdot p}} \quad \beta(T_x) = \sqrt{-p + \sqrt{\frac{T_x}{D} \cdot p}}$$

$$\Delta(T_x) = \beta(T_x) \cdot (\alpha(T_x)^2 - v \cdot p)^2 \cdot \tanh(\alpha(T_x) \cdot b) - \alpha(T_x) \cdot (\beta(T_x)^2 + v \cdot p)^2 \cdot \tan(\beta(T_x) \cdot b)$$

Graficando el determinante, en función de  $T_x$ , hallando la raíz se tiene el valor de la carga crítica.

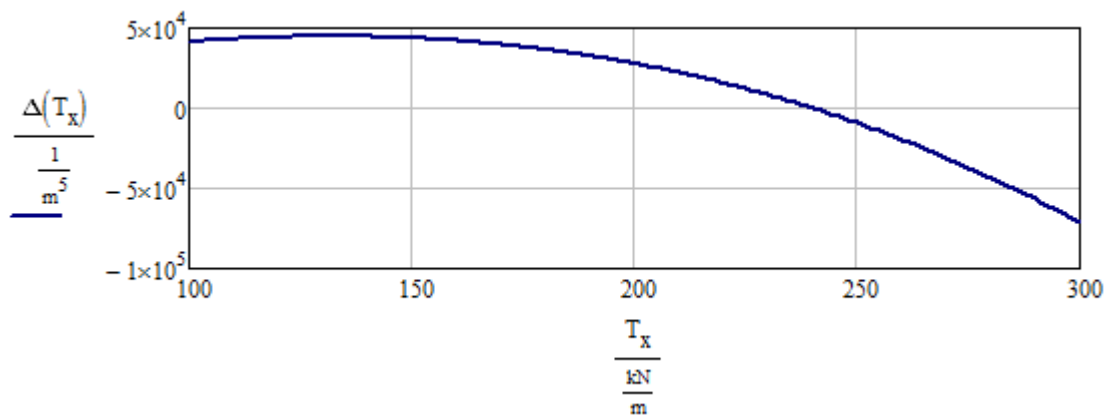


Figura 28: Determinante en función de  $T_x$

El valor de la raíz será:

$$T_{xc} = \text{root}(\Delta(T_x), T_x) = 239.93 \text{ kN/m}$$

$$P_{\text{crt}} = 2 \cdot T_{xc} \cdot b = 47.266 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crt}}}{A} = 79.977 \text{ MPa}$$

#### 7.3.4.3. Resolución mediante CUFSM para $l = 0.5\text{m}$

Como se observa en la Figura 29, el valor de la tensión crítica es de 79.7688MPa, siendo la diferencia respecto al método analítico de 0.3%.

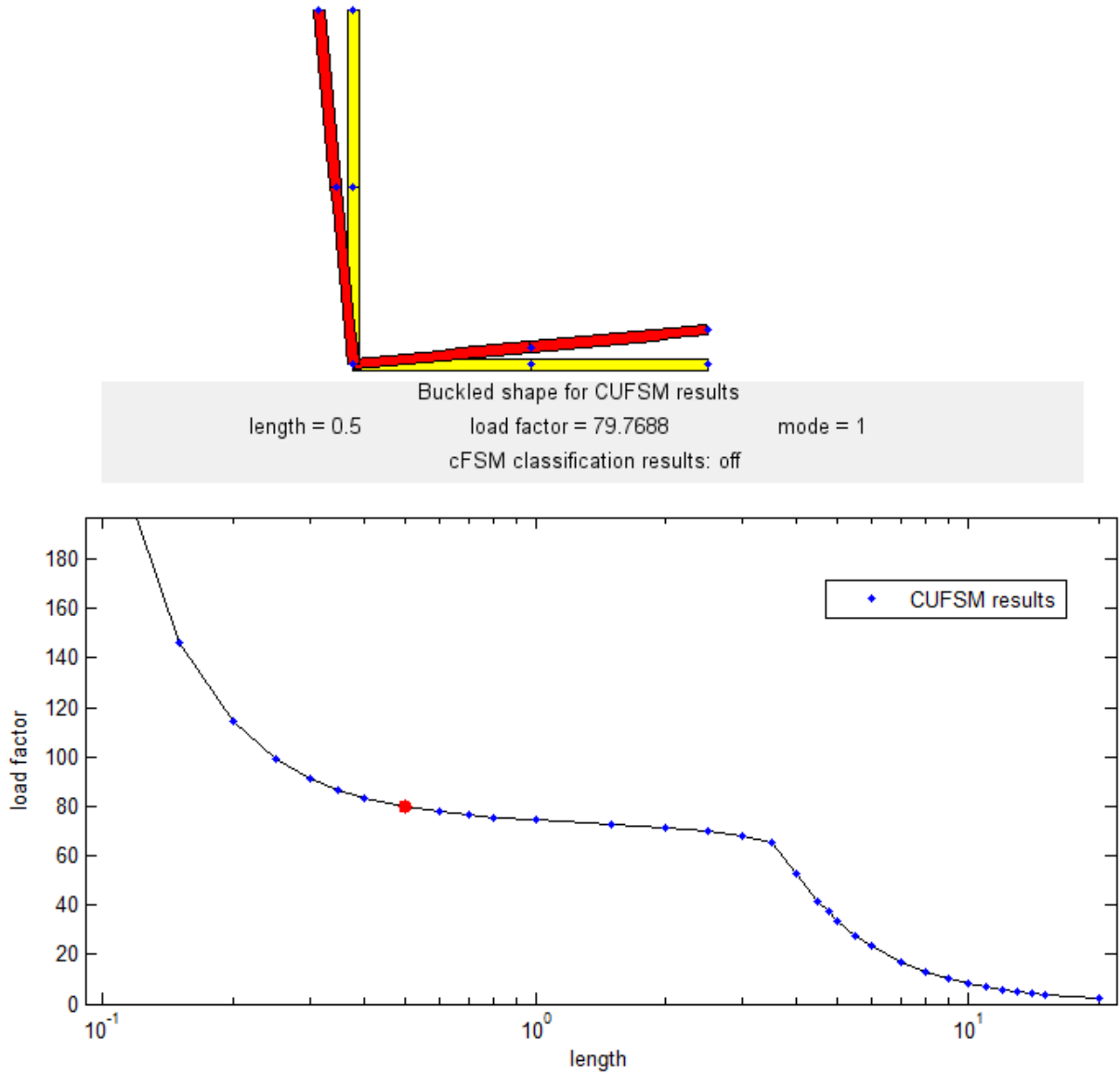


Figura 29: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x3 – Pandeo torsional

7.3.4.4. Resolución analítica para l = 2m

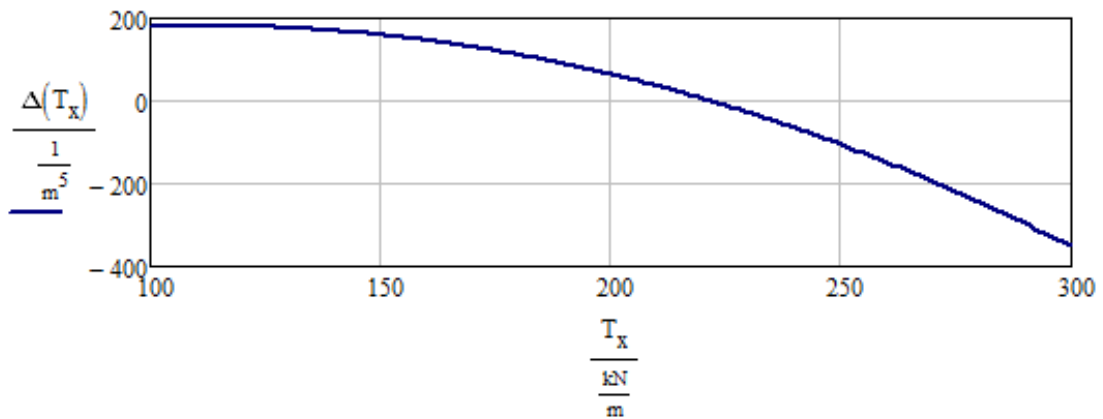


Figura 30: Determinante en función de  $T_x$

El valor de la raíz será:

$$T_{xc} = \text{root}(\Delta(T_x), T_x) = 221.702 \text{ kN/m}$$

$$P_{\text{crt}} = 2 \cdot T_{xc} \cdot b = 43.675 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crt}}}{A} = 73.901 \text{ MPa}$$

7.3.4.5. Resolución mediante CUFSM para  $l = 2 \text{ m}$

De la Figura 31 se desprende que el valor de la tensión crítica es de 71.3344MPa, siendo la diferencia respecto al método analítico de 3.6%.

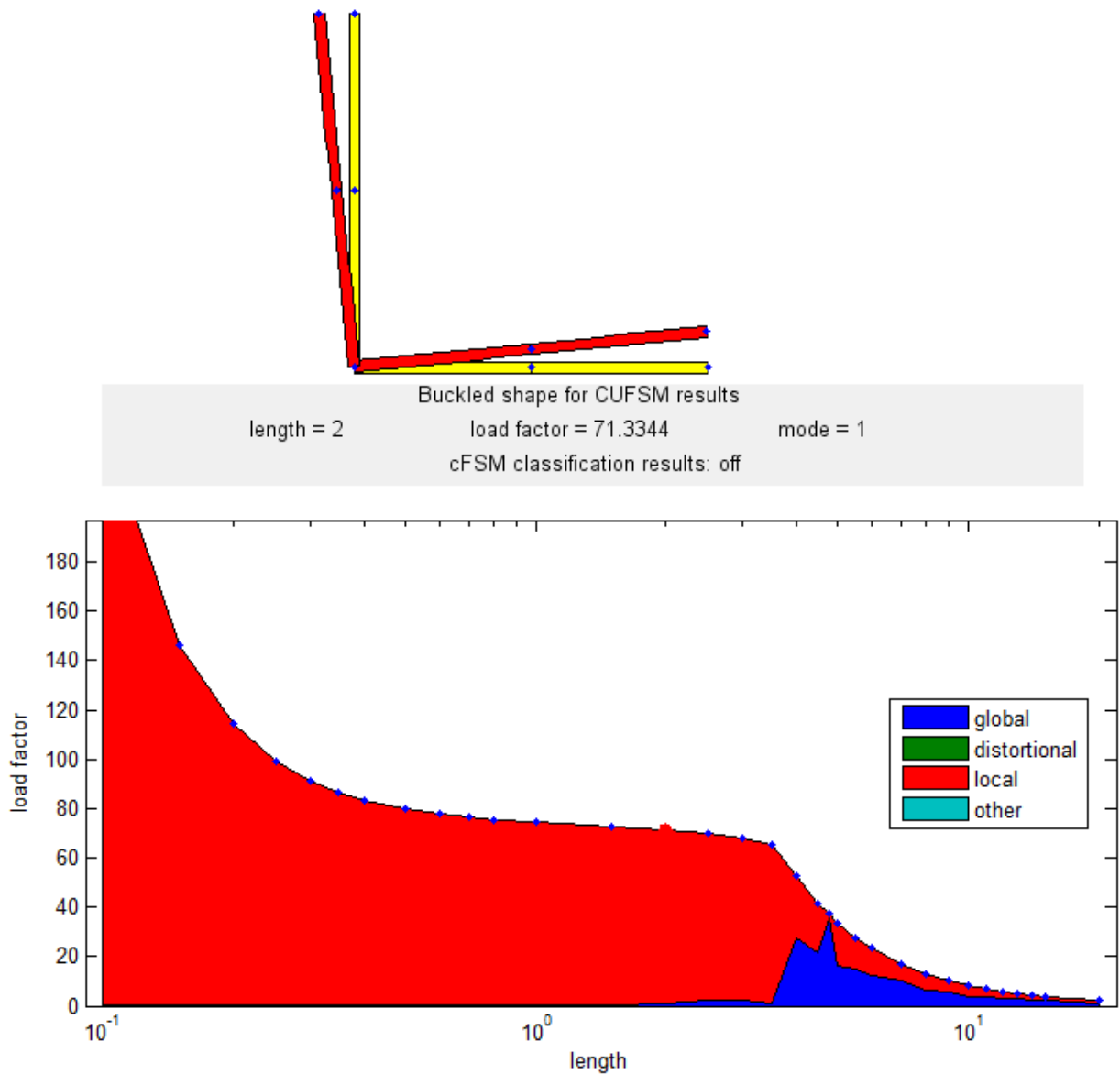


Figura 31: Curva de cargas de pandeo para un perfil L100x3 – Pandeo torsional

Este aumento de diferencia confirma la hipótesis planteada en 7.3.3.5.

## 7.4. Perfil doble T sometido a flexión

### 7.4.1. Características geométricas de la sección (IPE80)

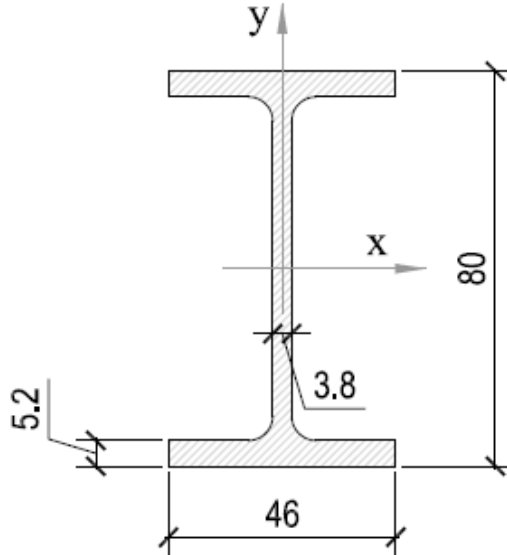


Figura 32: Características geométricas de la sección (IPE80)

$A = 8.49\text{cm}^2$	Área de la sección
$I_y = 8.49\text{cm}^4$	Momento de inercia según el eje y
$J = 0.559\text{cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 118\text{cm}^6$	Módulo de alabeo

### 7.4.2. Resolución analítica

Cuando se tiene una viga flexionada en el plano de mayor rigidez, la misma puede pandear lateralmente para cierto valor de carga que denominamos momento crítico, el cual –como se demostrará en el ANEXO 4– responde a la siguiente expresión:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{E \cdot J_y \cdot C \cdot \left( 1 + \frac{C_1}{C} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \quad \text{Ecuación 42}$$

Este momento crítico, para el perfil de análisis y una longitud de 5m resulta ser:

$$M_{cr} = 1.768\text{kNm}$$

### 7.4.3. Resolución mediante CUFSM

Como estado tensional se ingresa un diagrama de tensiones provocado por flexión según el eje fuerte, de valor unitario. El momento que genere ese valor unitario de tensión, obtenido del programa, será de 0.021kNm.

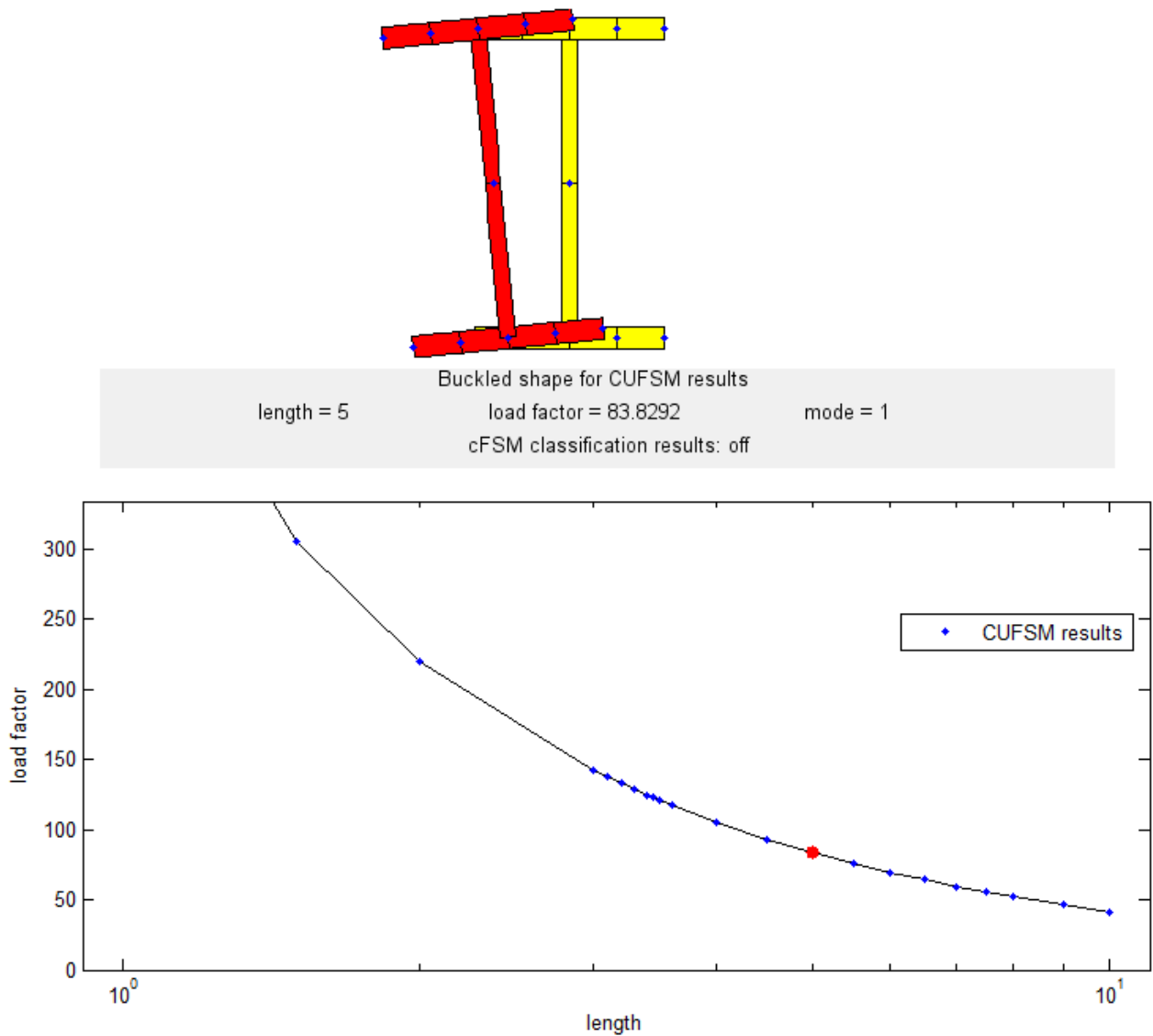


Figura 33: Curva de cargas de pandeo para un perfil IPE80. Pandeo lateral torsional

Por tanto, el valor del momento crítico, en coincidencia con el método analítico, será:

$$M_{cr} = 83.8292 \times 0.021 \text{ kNm} \qquad M_{cr} = 1.76 \text{ kNm}$$

De la curva de cargas de pandeo y analizando la deformada del perfil se desprende que el mismo solo pandea lateralmente cuando está sometido a flexión, y la diferencia respecto al método analítico es de 0.5%.

## 7.5. Perfil C100x50x5x1.6 sometido a compresión

### 7.5.1. Características de la sección

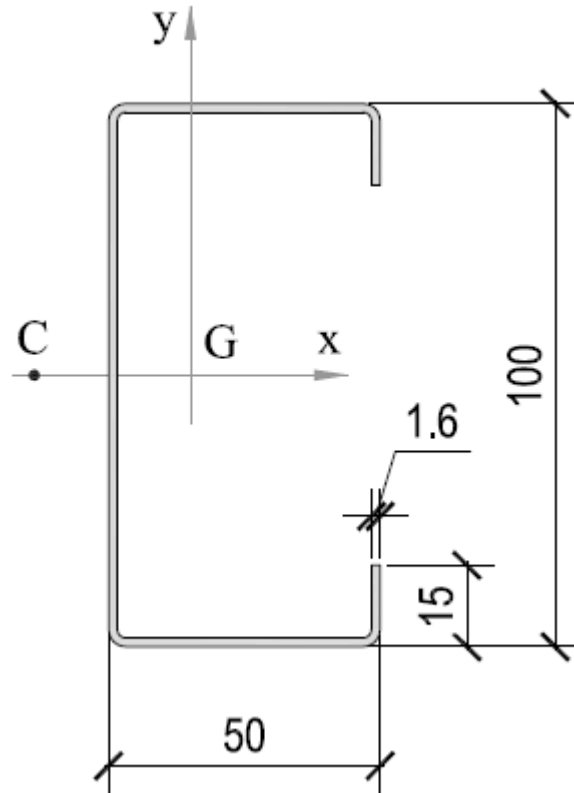


Figura 34: Características geométricas de la sección (C100x50x5x1.6)

$A = 3.5808 \text{ cm}^2$	Área de la sección
$I_x = 58.364 \text{ cm}^4$	Momento de inercia según el eje x
$I_y = 12.884 \text{ cm}^4$	Momento de inercia según el eje y
$J = 0.030556 \text{ cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 285.42 \text{ cm}^6$	Módulo de alabeo
$x_c = 4.1124 \text{ cm}$	Coordenadas del centro de corte
$y_c = 0$	

### 7.5.2. Resolución analítica para $l = 5\text{m}$

Si asumimos que los bordes de las barras están simplemente apoyados, es decir, tienen libertad para alabeo y para rotar alrededor del eje  $x$ , pero restringida la rotación alrededor del eje  $z$ , los perfiles C sometidos a compresión pueden sufrir pandeo por flexión pura alrededor del eje  $y$ , o pandeo por flexo-torsión alrededor del eje  $x$ .

Se propondrán distintas longitudes, y para ellas se calcularán ambas cargas críticas, sabiendo que la menor de ellas es la que corresponda, así como también el tipo de pandeo.

$$l = 5\text{m}$$

$$i_c = \sqrt{\frac{J_x + J_y}{A} + x_c^2 + y_c^2} = 0.061\text{m}$$

Radio de giro polar respecto al centro de corte

$$H = 1 - \frac{x_c^2 + y_c^2}{i_c^2} = 0.541$$

$$F_{ex} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{l^2 \cdot A} = 132.554\text{MPa}$$

Ecuación 43

$$F_{e\theta} = \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{l^2} + G \cdot J_T \right) \cdot \frac{1}{i_c^2 \cdot A} = 31.978\text{MPa}$$

Ecuación 44

$$F_e = \frac{F_{ex} + F_{e\theta}}{2 \cdot H} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{ex} \cdot F_{e\theta} \cdot H}{(F_{ex} + F_{e\theta})^2}} \right] = 31.475\text{MPa}$$

Tensión crítica flexotorsional

Ecuación 45

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{l^2 \cdot A} = 29.262\text{MPa}$$

Tensión crítica por flexión pura

Ecuación 46

Siendo  $F_{ey} < F_e$ , para una longitud de 5m, el perfil análisis pandea por flexión pura alrededor del eje débil, y el valor de la carga crítica es de 29.262MPa.

### 7.5.3. Resolución mediante CUFSM para $l = 5\text{m}$

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.

De acuerdo con la Figura 35, para una longitud de 5m, la barra pandea por flexión pura alrededor del eje débil, siendo el valor de la carga crítica:

$$F_{ey} = 29.401\text{MPa}$$

La diferencia respecto al método analítico es 0.5%



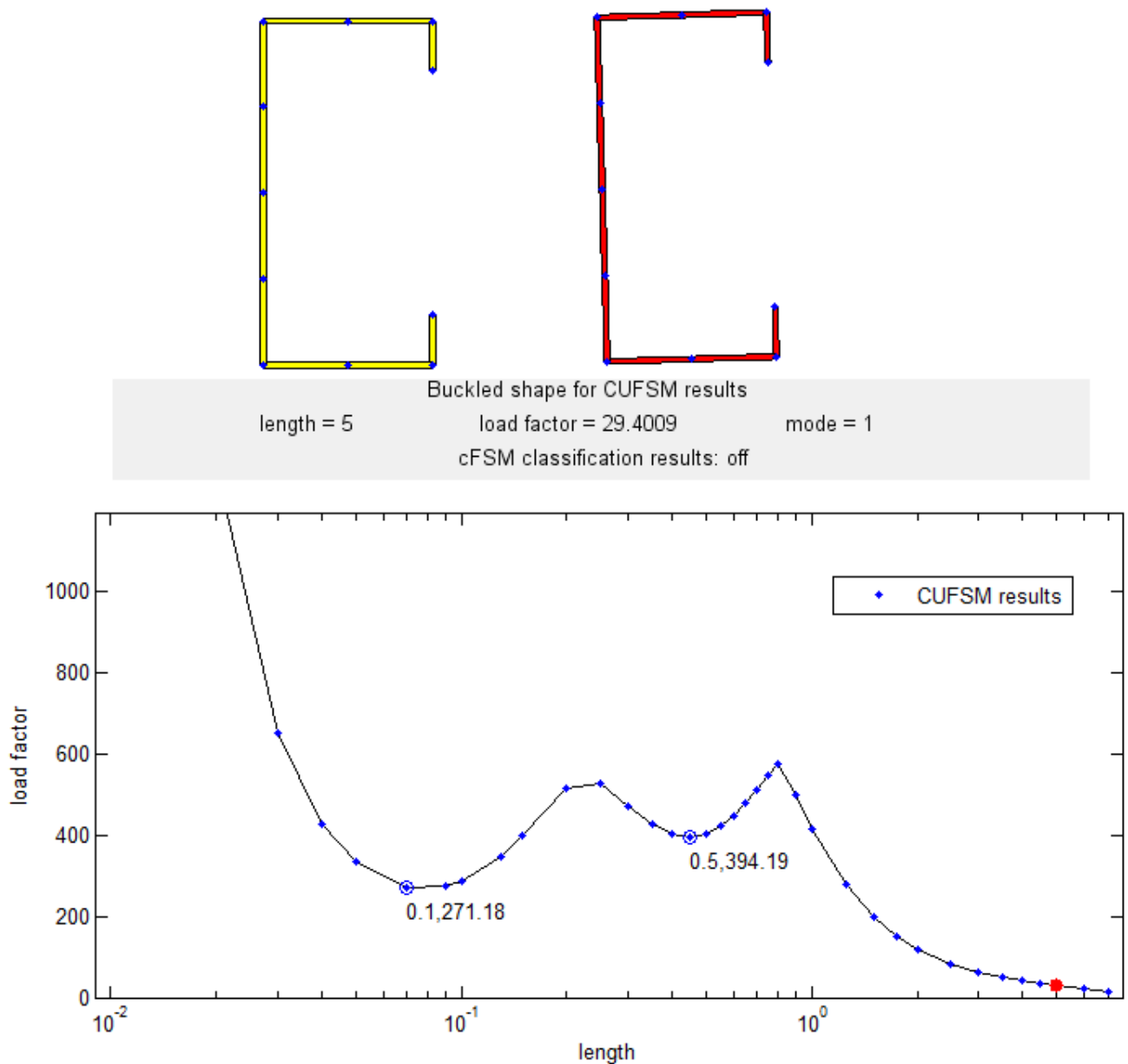


Figura 35: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo por flexión pura

#### 7.5.4. Resolución analítica para $l = 2\text{m}$

Si ahora reducimos la longitud de la barra en 2m, reemplazando el valor en las Ecuación 43 a Ecuación 46, se tendrá:

$$F_{\text{ex}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{l^2 \cdot A} = 828.461 \text{MPa}$$

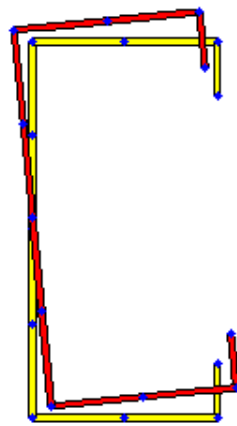
$$F_{\text{e}\theta} = \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{l^2} + G \cdot J_T \right) \cdot \frac{1}{i_c^2 \cdot A} = 128.434 \text{MPa}$$

$$F_e = \frac{F_{ex} + F_{e\theta}}{2 \cdot H} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{ex} \cdot F_{e\theta} \cdot H}{(F_{ex} + F_{e\theta})^2}} \right] = 119.226 \text{MPa} \quad \text{Tensión crítica flexotorsional}$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{l^2 \cdot A} = 182.885 \text{MPa} \quad \text{Tensión crítica por flexión pura}$$

En este caso en que la longitud del perfil es de 2m, siendo  $F_e < F_{ey}$ , el perfil análisis pandeo por flexo–torsión, lo cual puede corroborarse mediante el empleo de CUFSM.

**7.5.5. Resolución para CUFSM para l = 2m**



Buckled shape for CUFSM results  
 length = 2                      load factor = 119.7817                      mode = 1  
 cFSM classification results: off

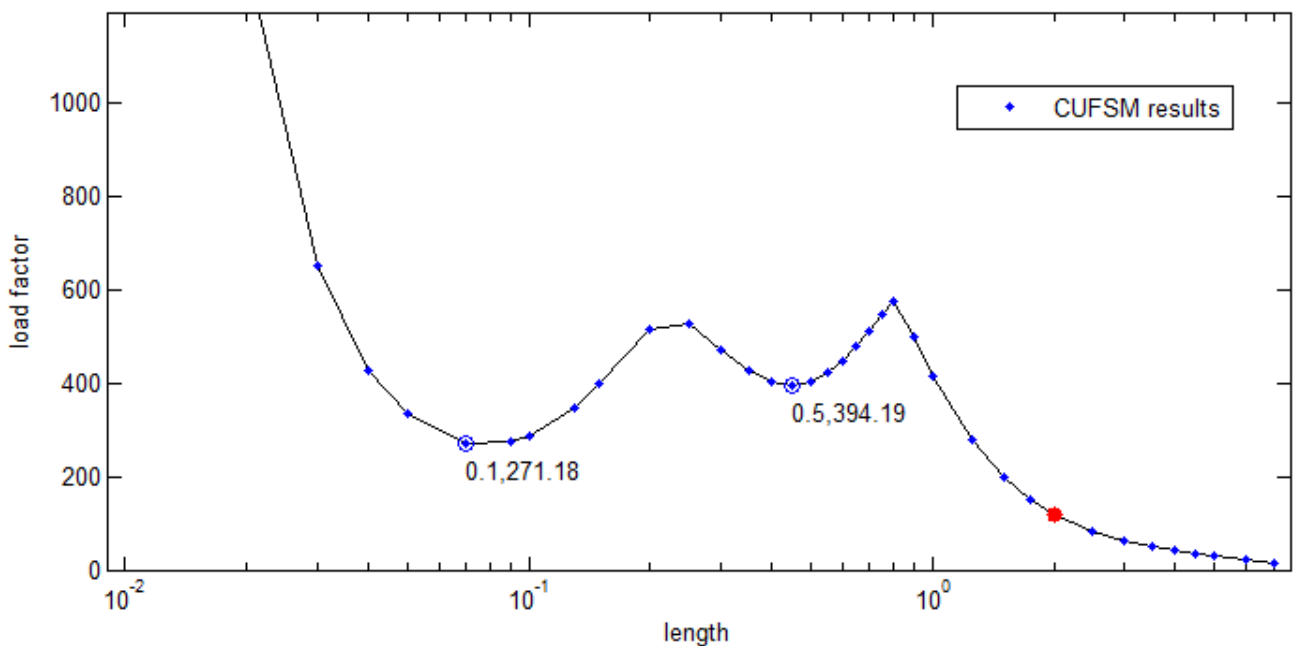


Figura 36: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo por flexo–torsión

De acuerdo con la Figura 36, para una longitud de 2m, la barra pandea por flexo – torsión, siendo el valor de la tensión crítica es de 119.7817MPa. La diferencia de resultados respecto al método analítico es un 0.5%.

## 7.6. Perfil C100x50x5x1.6 sometido a flexión

### 7.6.1. Características geométricas de la sección

Se repiten las características geométricas del punto 7.5.1. para un perfil de 5m de longitud.

### 7.6.2. Resolución analítica

Estando sometido nuestro perfil a una flexión respecto al eje fuerte, el mismo podrá pandear lateralmente cuando se supere el siguiente valor de momento:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{1} \cdot \sqrt{E \cdot J_y \cdot C \cdot \left( 1 + \frac{C_1}{C} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)} = 0.705 \text{ kN.m}$$

Siendo  $C = G \cdot J = 0.024 \text{ kNm}^2$

$C_1 = E \cdot C_w = 0.059 \text{ kNm}^4$

### 7.6.3. Resolución mediante CUFSM

Como estado tensional se ingresa un diagrama de tensiones provocado por flexión según el eje fuerte, de valor unitario. El momento que genere ese valor unitario de tensión será de 0.0118834kNm.

Como se observa en la Figura 37, el perfil pandea lateralmente, siendo el valor del momento crítico:

$$M_{cr} = 0.011834 \times 59.7767 \text{ kNm}$$

$$M_{cr} = 0.707 \text{ kNm}$$

La diferencia respecto al método analítico es sólo de 0.3%.

De la misma figura, analizando la curva de cargas de pandeo, se desprende que este perfil para longitudes menores puede pandear de modo distorsional o local.

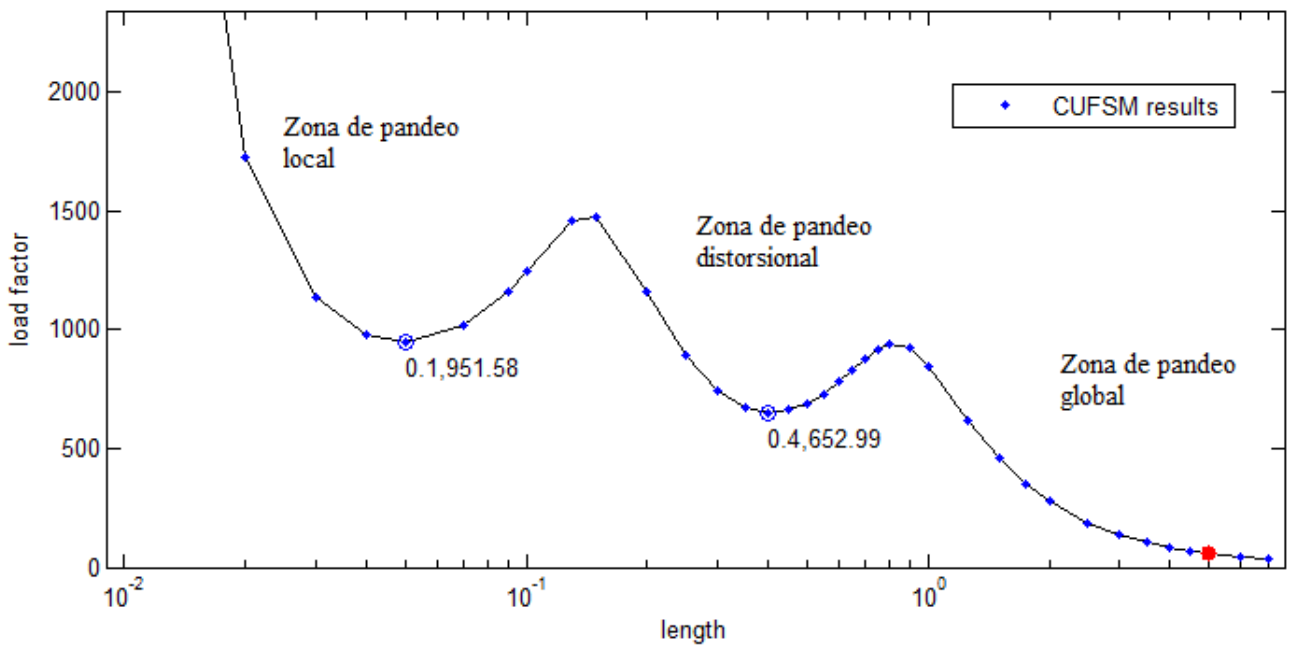
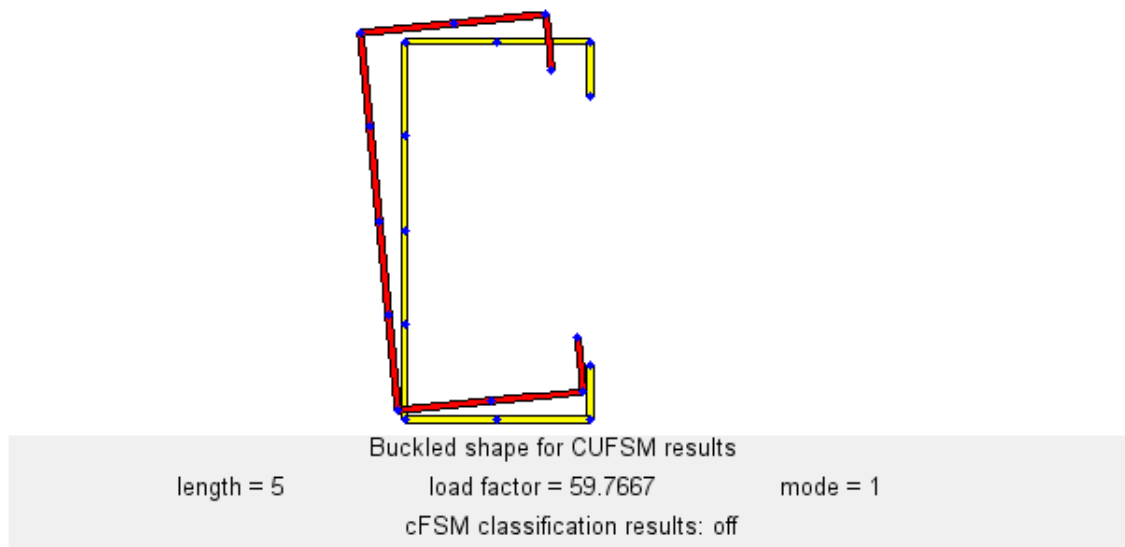


Figura 37: Curva de cargas de pandeo para un perfil C100x50x5x1.6. Pandeo lateral torsional

## 7.7. Perfil C300x80x30x3.2 sometido a compresión

### 7.7.1. Características de la sección

$A = 15.36 \text{ cm}^2$	Área de la sección
$I_x = 1664 \text{ cm}^4$	Momento de inercia según el eje x
$I_y = 134.99 \text{ cm}^4$	Momento de inercia según el eje y
$J = 0.52429 \text{ cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 20664 \text{ cm}^6$	Módulo de alabeo

$$x_c = 5.725 \text{ cm}$$

$$y_c = 0$$

Coordenadas del centro de corte

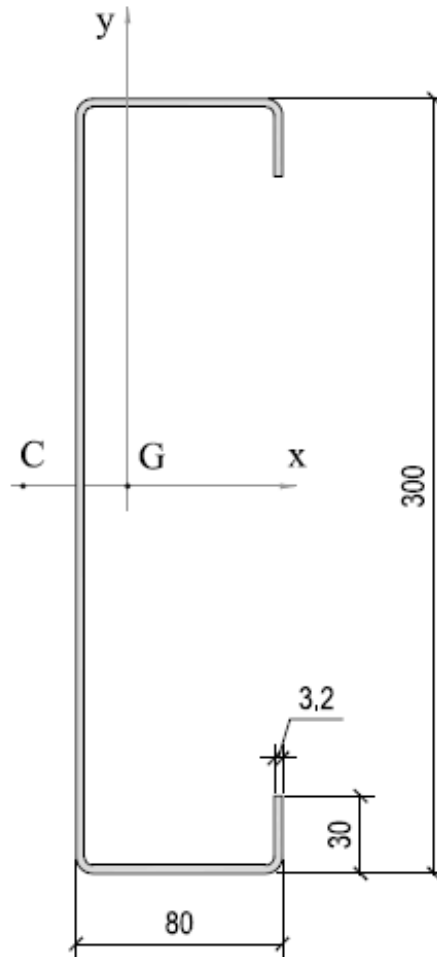


Figura 38: Características geométricas de la sección (C300x80x30x3.2)

### 7.7.2. Resolución analítica para $l = 5\text{m}$

Si asumimos que los bordes de las barras están simplemente apoyados, es decir, tienen libertad para alabeo y para rotar alrededor del eje  $x$ , pero restringida la rotación alrededor del eje  $z$ , los perfiles C sometidos a compresión pueden sufrir pandeo por flexión pura alrededor del eje  $y$ , o pandeo por flexo-torsión alrededor del eje  $x$ .

Se propondrán distintas longitudes, y para ellas se calcularán ambas cargas críticas, sabiendo que la menor de ellas es la que corresponda, así como también el tipo de pandeo.

$$l = 5\text{m}$$

$$i_c = \sqrt{\frac{J_x + J_y}{A} + x_c^2 + y_c^2} = 0.122\text{m}$$

Radio de giro polar respecto al centro de corte

$$H = 1 - \frac{x_c^2 + y_c^2}{i_c^2} = 0.781$$

$$F_{ex} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{l^2 \cdot A} = 881.027 \text{MPa} \quad \text{Ecuación 47}$$

$$F_{e\theta} = \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{l^2} + G \cdot J_T \right) \cdot \frac{1}{i_c^2 \cdot A} = 91.03 \text{MPa} \quad \text{Ecuación 48}$$

$$F_e = \frac{F_{ex} + F_{e\theta}}{2 \cdot H} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{ex} \cdot F_{e\theta} \cdot H}{(F_{ex} + F_{e\theta})^2}} \right] = 88.851 \text{MPa} \quad \text{Tensión crítica flexotorsional} \quad \text{Ecuación 49}$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{l^2 \cdot A} = 71.472 \text{MPa} \quad \text{Tensión crítica por flexión pura} \quad \text{Ecuación 50}$$

Siendo  $F_{ey} < F_e$ , para una longitud de 5m, el perfil de análisis pandea por flexión pura alrededor del eje débil.

### 7.7.3. Resolución mediante CUFSM para $l = 2m$

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.

De acuerdo con la Figura 39, para una longitud de 5m, la barra pandea por flexión pura alrededor del eje débil, siendo el valor de la carga crítica:

$$F_{ey} = 71.083 \text{MPa}$$

La diferencia respecto al método analítico es 0.5%

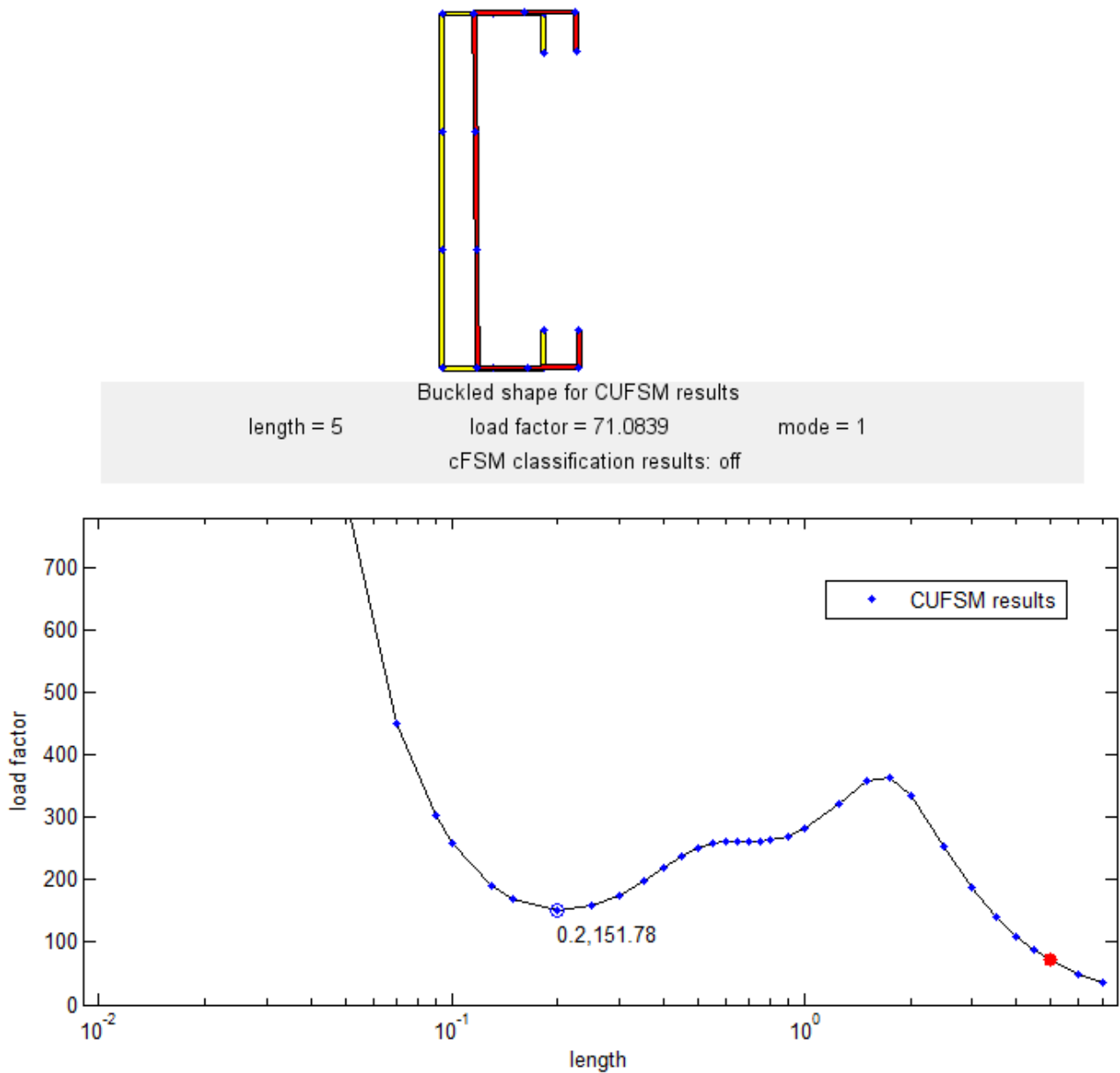


Figura 39: Curva de cargas de pandeo para un perfil C300x80x30x3.2. Pandeo por flexión pura

De la Figura 39 vemos que pueden darse tres modos de pandeo para esta sección: local, distorsional y global. Este último se produce para barras de longitudes mayores a 2m y, tanto de modo analítico como analizando los gráficos se puede comprobar que en todos los casos se trata de pandeo por flexión pura, alrededor del eje débil del perfil. Mediante la opción cFSM, se puede realizar la separación de los tres modos de pandeo y ver para cada longitud de barra qué porcentaje de participación se tiene de cada uno. En la Figura 40, por ejemplo, se observa que para la longitud de barra propuesta –de 2m– ocurre una combinación de pandeo distorsional y global, con disminución del primero y aumento del segundo a medida que se incrementa la longitud de la barra.

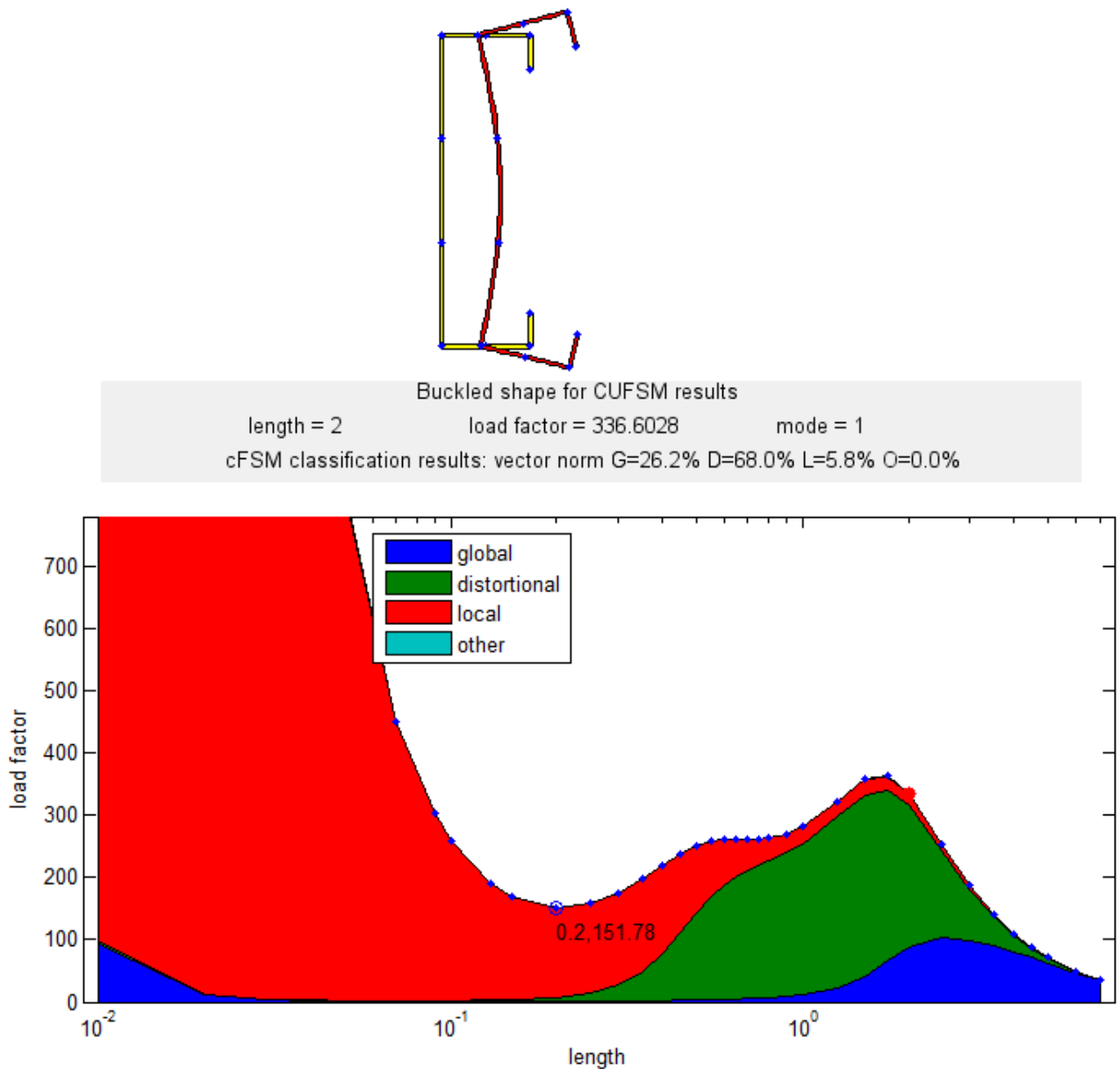


Figura 40: Curva de cargas de pandeo para un perfil C300x50x5x1.6 – Participación de los distintos modos

## 7.8. Perfil C300x80x3x3.2 sometido a flexión

### 7.8.1. Características geométricas de la sección

Se repiten las características geométricas del punto 7.7.1. para un perfil de 5m de longitud.

### 7.8.2. Resolución analítica

Estando sometido nuestro perfil a una flexión respecto al eje fuerte, el mismo podrá pandear lateralmente cuando se supere el siguiente valor de momento:



$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{E \cdot J_y \cdot C \left( 1 + \frac{C_1}{C} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)} = 15.169 \text{ kN.m}$$

Siendo  $C = G \cdot J = 0.415 \text{ kN.m}^2$

$C_1 = E \cdot C_w = 4.257 \text{ kN.m}^4$

### 7.8.3. Resolución mediante CUFSM

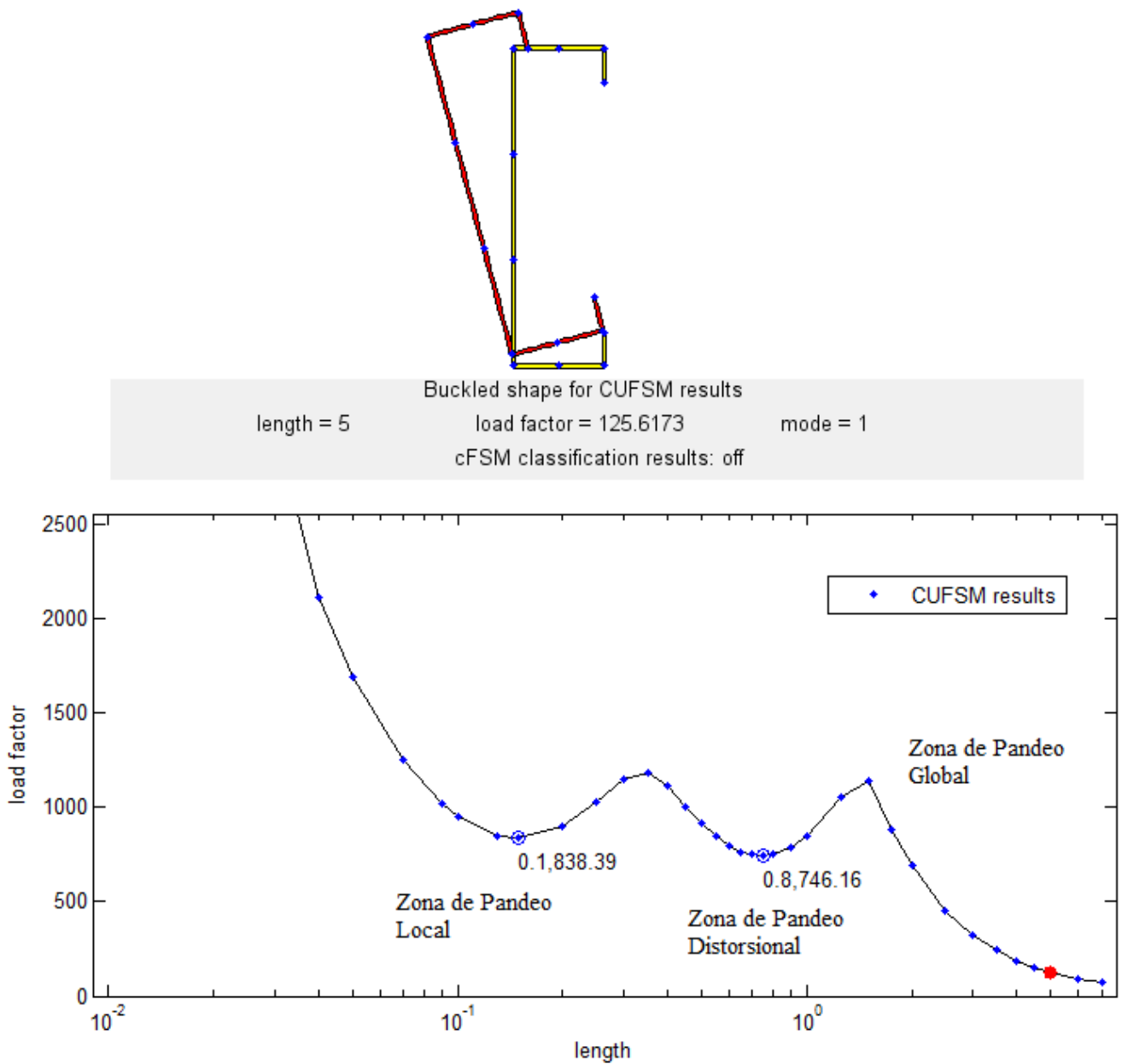


Figura 41: Curva de cargas de Pandeo para un perfil C300x80x30x3.2. Pandeo lateral torsional

Como estado tensional se ingresa un diagrama de tensiones provocado por flexión según el eje fuerte, de valor unitario. El momento que genere ese valor unitario de tensión será de 0.122kNm.

Como se observa en la Figura 41, el perfil pandea lateralmente, siendo el valor del momento crítico:

$$M_{cr} = 0.122 \times 125.6173 \text{ kNm} \qquad M_{cr} = 15.325 \text{ kNm}$$

La diferencia respecto al método analítico es de 1%.

De la misma figura, analizando la curva de cargas de pandeo, se desprende que este perfil para longitudes menores puede pandear de modo distorsional o local.

## 7.9. Secciones sin ningún eje de simetría

### 7.9.1. Perfil C de alas desiguales

#### 7.9.1.1. Características de la sección

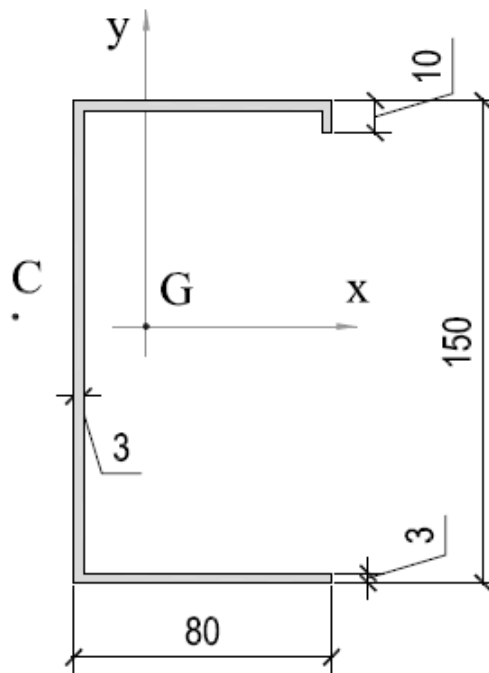


Figura 42: Características de la sección C de alas desiguales

$A = 9.6 \text{ cm}^2$	Área de la sección
$I_{11} = 369.13 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia máximo
$I_{22} = 72.508 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia mínimo
$J = 0.288 \text{ cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 2911 \text{ cm}^6$	Módulo de alabeo

$$x_c = 5.5 \text{ cm}$$

$$y_c = 0.7559 \text{ cm}$$

Coordenadas del centro de corte

La longitud de análisis será de 8m.

### 7.9.1.2. Cálculo analítico

El estudio de las condiciones de equilibrio de una barra axialmente cargada en su posición deformada, para una sección transversal abierta sin ejes de simetría y a cuyo eje se le ha impuesto una deformación arbitraria generalizada (corrimiento y giro) conduce al planteo del siguiente sistema de ecuaciones (Ver Punto 10.3.1.)

$$\begin{aligned} -(C_2 - x_c \cdot C_3) \cdot P + E \cdot J_{11} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot C_2 &= 0 \\ -(C_1 + y_c \cdot C_3) \cdot P + E \cdot J_{22} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot C_1 &= 0 \\ E \cdot J_w \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot C_3 - y_c \cdot P \cdot C_1 + x_c \cdot P \cdot C_2 + (G \cdot J_T - i_c^2 \cdot P) \cdot C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Siendo,

$C_1, C_2, C_3$ : Constantes que forman parte de la solución propuesta para los desplazamientos  $u, v$  y el giro  $\theta$

$$i_c = \sqrt{\frac{J_{11} + J_{22}}{A} + x_c^2 + y_c^2}$$

Escribiendo en forma matricial las tres ecuaciones de equilibrio que preceden, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{22}}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{11}}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{l^2} + G \cdot J_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_c \\ 0 & 1 & -x_c \\ y_c & -x_c & i_c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Que también puede escribirse de la siguiente manera:

$$[M] \cdot \{C\} = [N] \cdot \{C\}$$

Estamos en presencia de un problema de autovalores y autovectores generalizados. De los tres valores de  $P$  que se obtengan, el menor será la carga crítica, en nuestro caso:

$$\text{genvals } (M, N) = \begin{pmatrix} 22.804 \\ 36.142 \\ 228.453 \end{pmatrix}$$

Dividiendo por el área de la sección se tiene la tensión crítica:

$$\sigma_{crit} = \frac{22.804 kN}{0.00096 m^2} = 23.8 MPa$$

### 7.9.1.3. Resolución mediante CUFSM

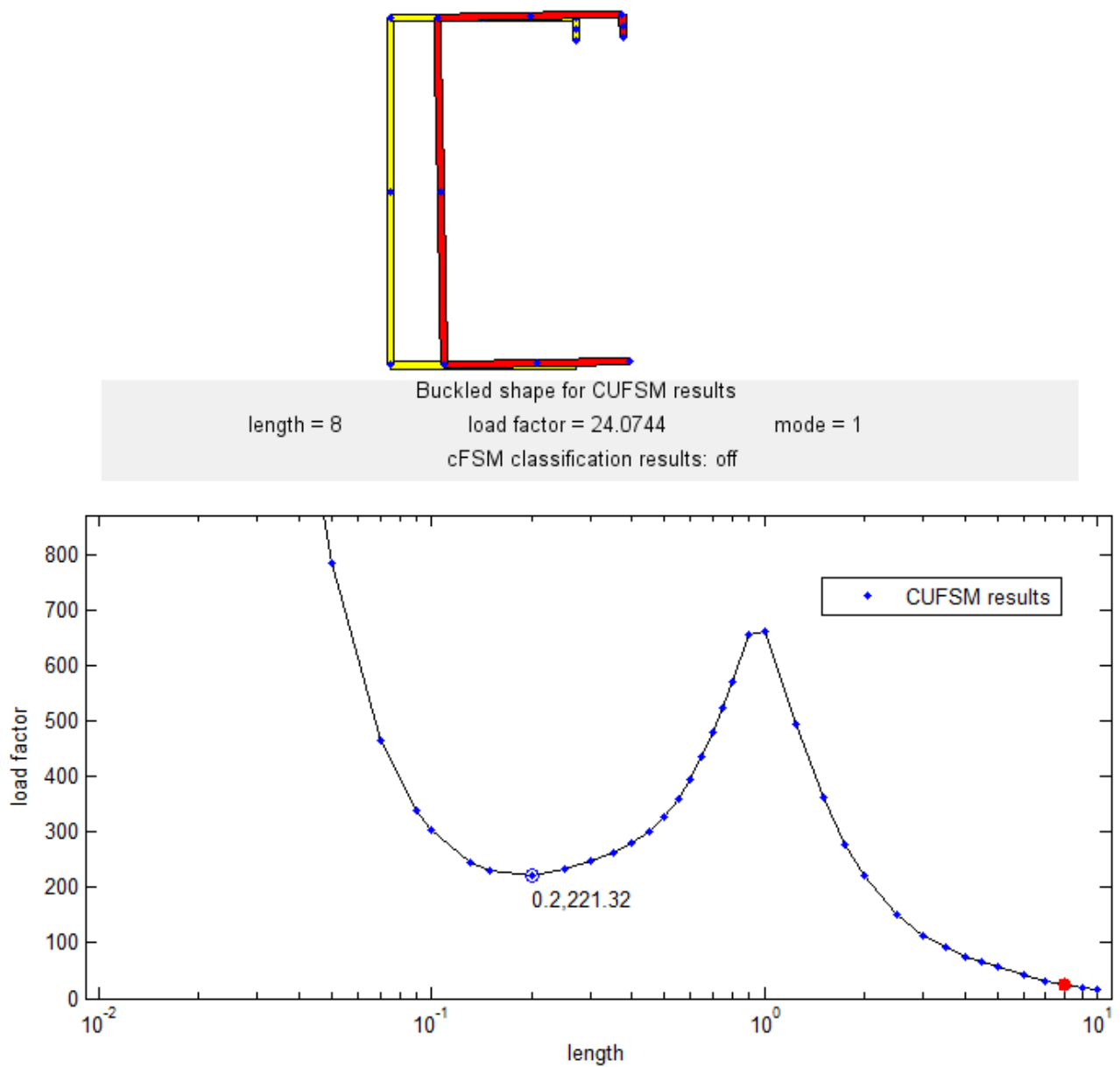


Figura 43: Curva de cargas de pandeo para perfil de alas desiguales

Además de obtener el valor de la tensión crítica, de 24.074MPa, observando el gráfico podemos concluir que el tipo de pandeo al que pertenece es flexional puro. La diferencia respecto al método analítico es de un 1%.

### 7.9.2. Perfil Z modificado

#### 7.9.2.1. Características de la sección

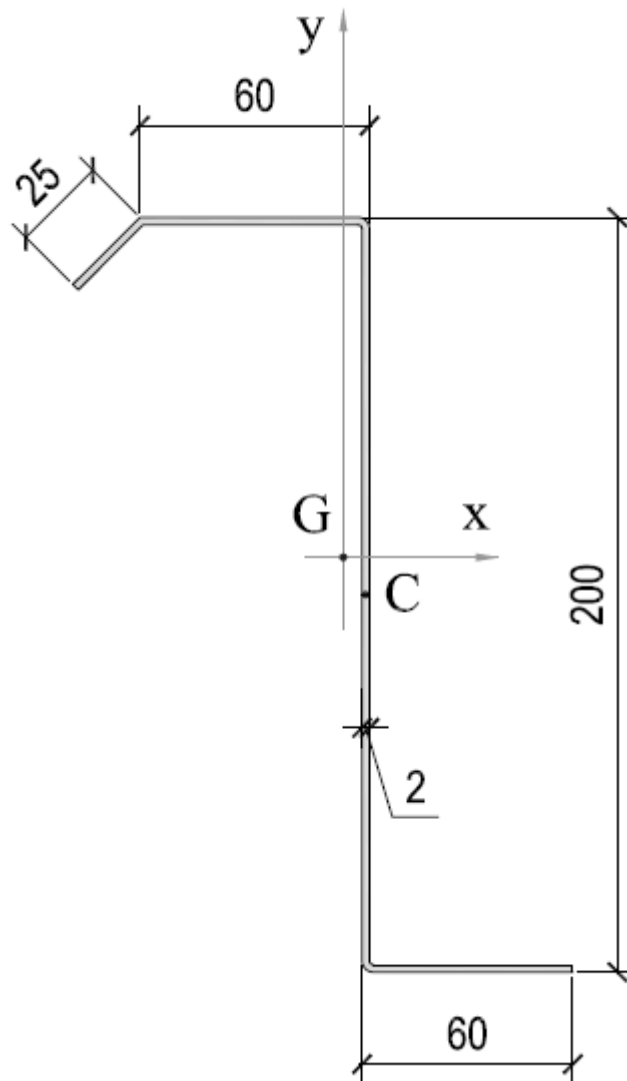


Figura 44: Característica de la sección Z modificada

$$A = 6.7538 \text{ cm}^2$$

Área de la sección

$$I_{11} = 419.57 \text{ cm}^4$$

Momento principal de inercia máximo

$$I_{22} = 23.116 \text{ cm}^4$$

Momento principal de inercia mínimo

$$J = 0.09 \text{ cm}^4$$

Constante de torsión

$$C_w = 2519 \text{ cm}^6$$

Módulo de alabeo

$$x_c = 0.1375 \text{ cm}$$

$$y_c = 5.18 \text{ cm}$$

Coordenadas del centro de corte

La longitud de análisis será de 8m.

### 7.9.2.2. Cálculo analítico

Según hemos visto:

$$[M] \cdot \{C\} = [N] \cdot \{C\}$$

siendo,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{22}}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{11}}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{l^2} + G \cdot J_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.343 & 0 & 0 \\ 0 & 133.288 & 0 \\ 0 & 0 & 0.151 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_c \\ 0 & 1 & -x_c \\ y_c & -x_c & i_c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.052 \\ 0 & 1 & -1.375 \times 10^{-3} \\ 0.052 & -1.375 \times 10^{-3} & 9.224 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Para estos valores,

$$\text{genvals}(M, N) = \begin{pmatrix} 6.233 \\ 27.262 \\ 133.336 \end{pmatrix}$$

Dividiendo por el área de la sección se tiene la tensión crítica:

$$\sigma_{crit} = \frac{6.233 \text{ kN}}{0.00067538 \text{ m}^2} = 9.229 \text{ MPa}$$

### 7.9.2.3. Resolución mediante CUFSM

Ingresando los datos geométricos en el programa y una tensión de compresión unitaria, se obtiene un valor de tensión crítica de 9.1927MPa, con lo cual la diferencia respecto al método analítico es de un 0.4%.

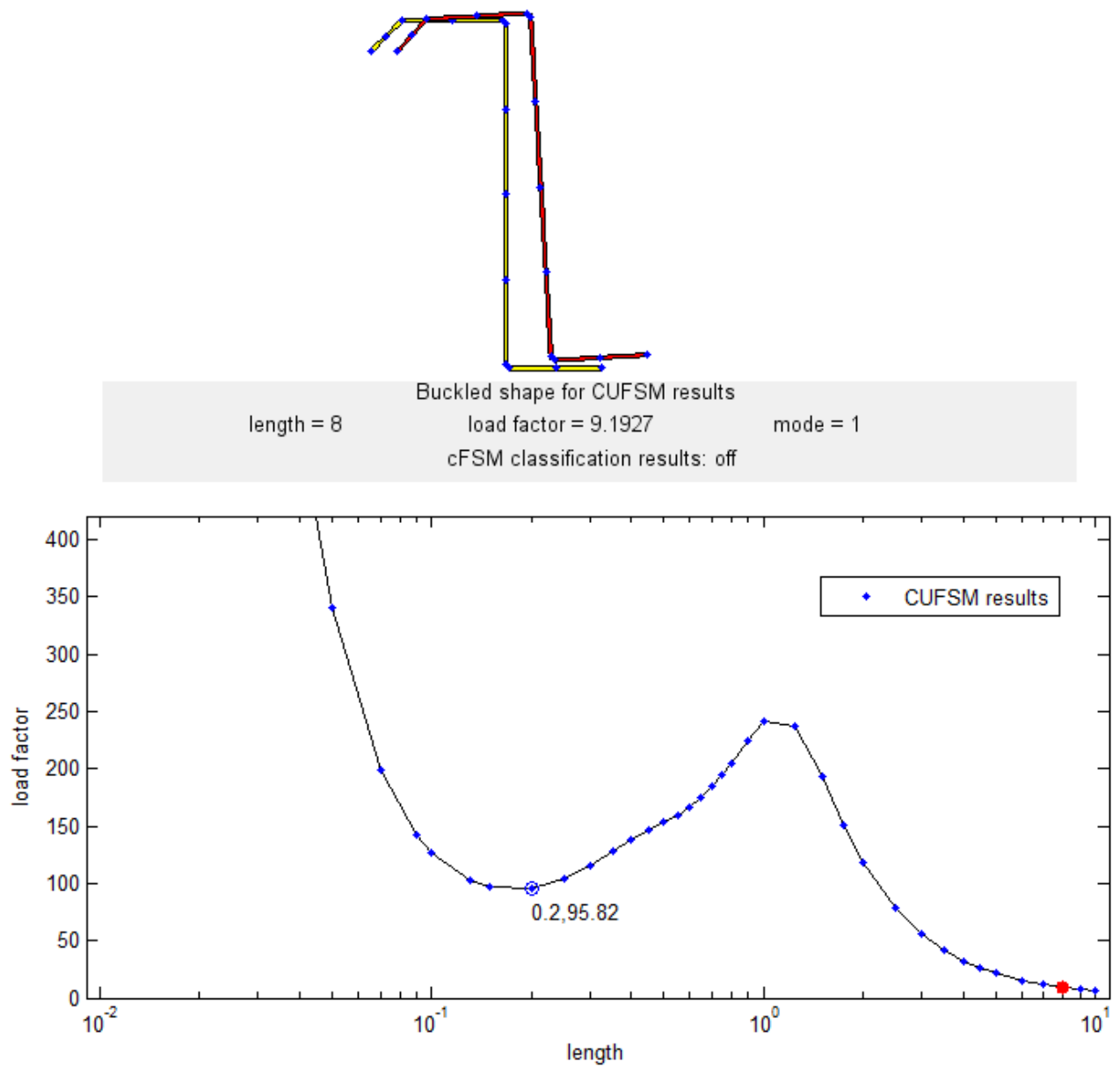


Figura 45: Cargas de pandeo para un perfil Z modificado

De la Figura 45 se desprende que el tipo de pandeo es flexional puro.

### 7.10. Casos singulares

Se plantearán dos secciones, a modo de ejemplo, en la que el pandeo distorsional es más desfavorable que el pandeo local, situación que escapa al análisis corriente de las normas.

#### 7.10.1. Perfil C reforzado

$A = 3.049 \text{ cm}^2$	Área de la sección
$I_{11} = 99.942 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia máximo
$I_{22} = 19.422 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia mínimo
$J = 0.01016 \text{ cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 726.09 \text{ cm}^6$	Módulo de alabeo
$x_c = 5.0 \text{ cm}$	Coordenadas del centro de corte
$y_c = 0$	

##### 7.10.1.1. Características de la sección

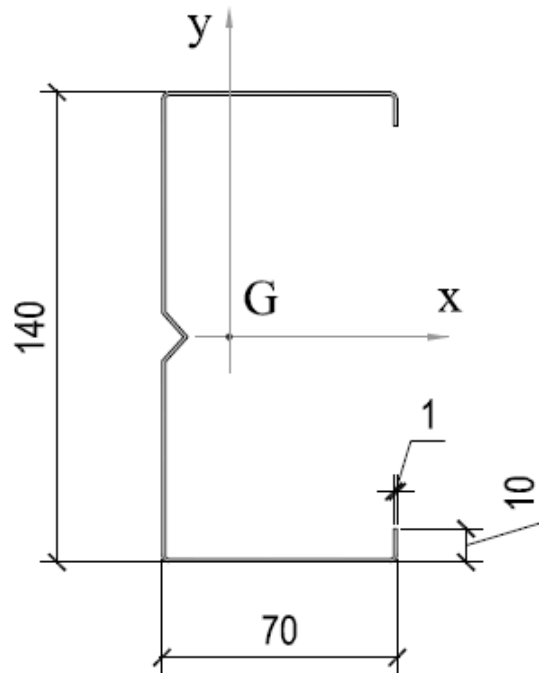


Figura 46: Características Perfil C reforzado

##### 7.10.1.2. Resolución mediante CUFSM

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.



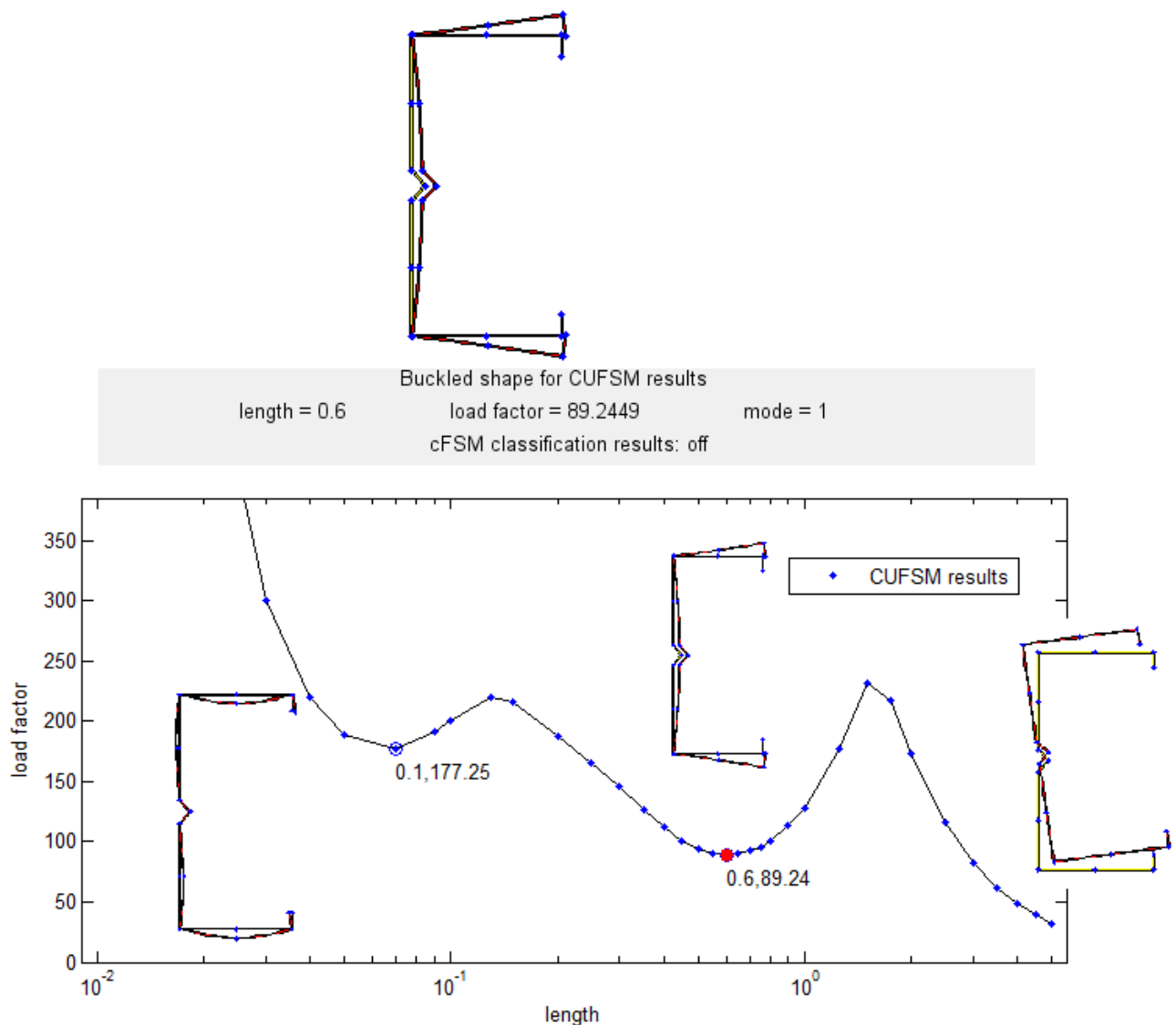


Figura 47: Curva de cargas de pandeo para perfil C reforzado

De la Figura 47 se desprende que la tensión crítica local ocurre para una longitud  $L_{cr1}$  de 0.1m y es de 177.25MPa.

La tensión crítica distorsional, para una longitud  $L_{crd}$  de 0.60m, es de 89.24MPa, menor a la anterior.

Ambas longitudes  $L_{cr1}$  y  $L_{crd}$  son reducidas y por tanto es poco común que se presente esta situación en la realidad, donde las estructuras cuentan con largos mayores y pasa a ser más importante la tensión crítica global; sin embargo, no deben dejar de estudiarse estos casos en los que las normas ponen el acento sobre el pandeo local antes que el distorsional.

### 7.10.2. Perfil C de ala ancha

#### 7.10.2.1. Características de la sección

$A = 2.968 \text{ cm}^2$	Área de la sección
$I_{11} = 55.184 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia máximo
$I_{22} = 31.435 \text{ cm}^4$	Momento principal de inercia mínimo
$J = 0.00989 \text{ cm}^4$	Constante de torsión
$C_w = 602.2 \text{ cm}^6$	Módulo de alabeo
$x_c = 7.56 \text{ cm}$	Coordenadas del centro de corte
$y_c = 0$	

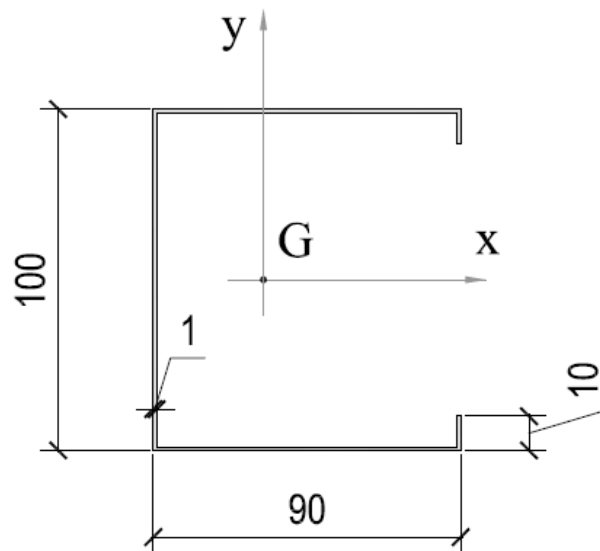


Figura 48: Características del perfil C de ala ancha

#### 7.10.2.2. Resolución mediante CUFSM

Se ingresa como estado tensional un valor de tensión unitario, por lo cual, el valor de la tensión crítica será directamente el que se obtenga de la curva de cargas de pandeo.

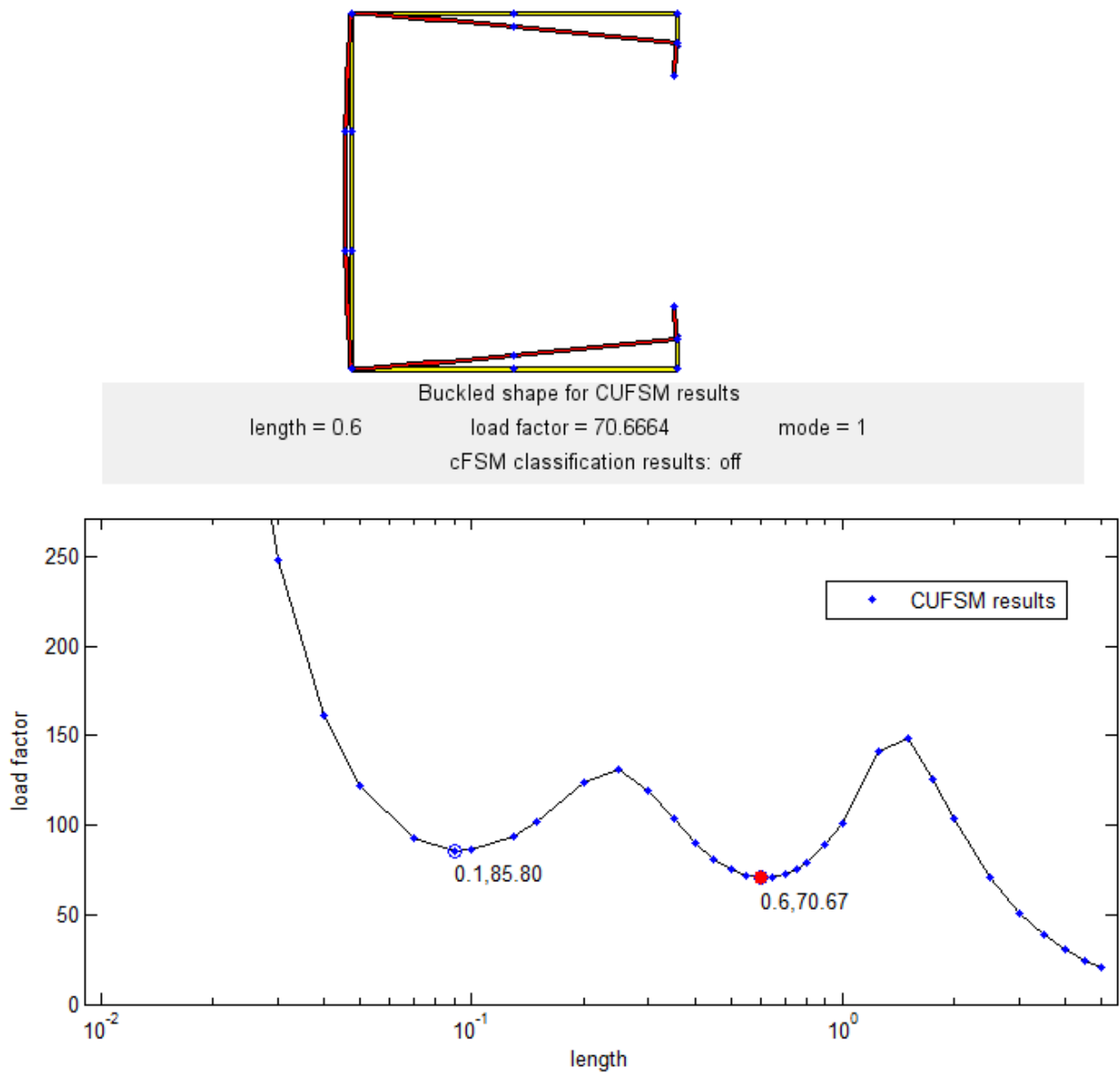


Figura 49: Curva de cargas de pandeo para el perfil C de ala ancha

La tensión crítica local ocurre a para una longitud  $L_{cr1}$  de 0.1m, coincidente con la altura del perfil, y es de 85.798MPa. La tensión crítica distorsional, para una longitud  $L_{crd}$  de 0.67m, es de 70.67MPa, menor a la anterior.



## 8. CONCLUSIONES

En esta tesis se desarrolló en detalle el Método de las Bandas Finitas, aplicado a la resolución de la inestabilidad del equilibrio en secciones abiertas de paredes delgadas, con el objeto de demostrar que se trata de un procedimiento eficiente y que presenta ventajas respecto a otros métodos analíticos y numéricos.

A tal fin, se analizaron distintas secciones sometidas a un determinado estado tensional, comparando los resultados obtenidos mediante CUFSM, con las fórmulas analíticas de la teoría clásica de estabilidad elástica. Como se mencionó en el apartado 6.8, CUFSM es un programa de uso común entre investigadores, que resuelve secciones de distintos materiales que cumplen con la condición de regularidad longitudinal.

En todos los casos analizados se ha comprobado que los resultados obtenidos mediante el Método de las Bandas Finitas presentan diferencias inferiores al 1% respecto a los resultados de los métodos analíticos.

Diferencias mayores ocurren en las secciones que se encuentran en el límite de tensión entre un tipo de pandeo global y otro, combinadas con pandeo local, lo cual añade una deformación transversal a la sección. La existencia del pandeo local puede detectarse mediante la opción cFSM del programa, que permite conocer la participación de cada modo de pandeo. Esto demuestra que el Método de las Bandas Finitas, respecto a las fórmulas típicas de los métodos analíticos, da lugar a soluciones más precisas, por tomar en consideración la interacción de los distintos modos de pandeo.

En las secciones analizadas, además de hallar las tensiones críticas, se obtuvieron los modos de pandeo y la participación de los mismos, sin dar lugar a subjetividades.

Al emplear el Método de las Bandas Finitas, se redujo el número de elementos y de grados de libertad; lo cual se traduce en una reducción del trabajo computacional, y de posterior interpretación de los resultados obtenidos.

En el caso concreto de las secciones de chapa conformadas en frío, el Método de las Bandas Finitas resulta ser una herramienta complementaria para la utilización del Método de la Resistencia Directa, cuya confiabilidad – como lo ha demostrado la especificación AISI – supera al tradicional Método del Ancho Efectivo para una gran base de datos de vigas y columnas.

Por todo ello, queda demostrado que el Método de las Bandas Finitas, ya sea mediante el empleo de las matrices de rigidez desarrolladas, como mediante el uso del programa CUFSM, resuelve de manera rápida y eficiente los problemas de inestabilidad del equilibrio en vigas y columnas con secciones de paredes delgadas,



**9. ANEXO 1 – PANDEO FLEXIONAL PURO**

Siguiendo el desarrollo de Timoshenko<sup>7</sup>, se considera primero una columna ideal esbelta, empotrada en la base y libre en su extremo superior, sujeta a un esfuerzo axial P (Figura 50a) Se asume que la columna es perfectamente elástica y que la tensiones no exceden el límite de proporcionalidad. Si la carga P es menor al valor crítico, la barra permanece recta bajo esfuerzo axial solamente y el equilibrio es estable, lo cual significa que si se aplica una fuerza lateral se generará una deflexión pequeña, pero al quitar esta fuerza la barra volverá a su forma recta original. Si la carga P aumenta gradualmente se alcanzará la condición en que la forma recta de equilibrio se vuelva inestable frente a una pequeña carga lateral aplicada, pues la deflexión lateral no desaparecerá al removerla. Se define como carga crítica (o carga de Euler) al esfuerzo axial suficiente para mantener a la barra en esa forma ligeramente flexada.

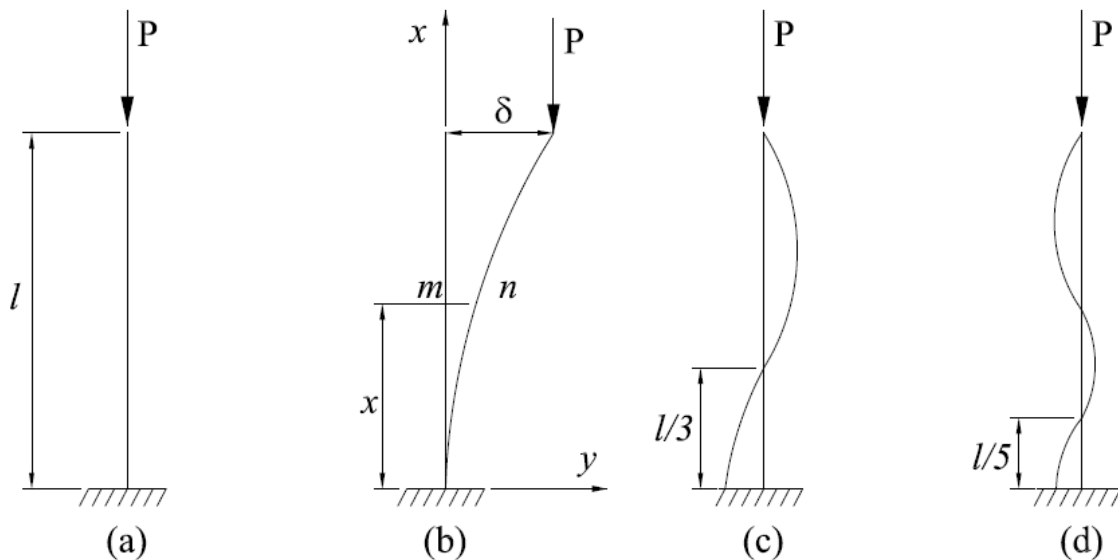


Figura 50: Barra empotrada libre sometida a compresión simple

Se puede calcular la carga crítica utilizando la ecuación diferencial de la elástica:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \tag{Ecuación 51}$$

Cuando se tienen los ejes coordenados según la Figura 50b, y asumiendo que la barra se encuentra en una posición levemente deformada, el momento en una sección transversal *mn* será:

<sup>7</sup> Timoshenko, Gere; Theory of Elastic Stability, Capítulo 2, 1963

$$M = -P \cdot (\delta - y)$$

Luego, reemplazando en la Ecuación 51, se tiene

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2}{dx^2} y = P \cdot (\delta - y) \quad \text{Ecuación 52}$$

Dado que el borde superior de la columna está libre, el pandeo de la barra ocurrirá en el plano de la menor inercia, que asumimos es un eje de simetría. Este valor mínimo de  $EI$  es utilizado en la Ecuación 52.

Usando la notación

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$$

Se puede escribir la Ecuación 52 en la forma

$$\frac{d^2}{dx^2} y + k^2 \cdot y = k^2 \cdot \delta \quad \text{(a)}$$

La solución general de esta ecuación es

$$y = A \cdot \cos(k \cdot x) + B \cdot \sin(k \cdot x) + \delta \quad \text{(b)}$$

en la cual  $A$  y  $B$  son constantes de integración. Estas constantes se determinan de las siguientes condiciones de borde

$$y = \frac{d}{dx} y = 0 \quad \text{en } x = 0$$

Estas dos condiciones se cumplen para

$$A = -\delta \quad B = 0$$

Y luego

$$y = \delta \cdot (1 - \cos(k \cdot x)) \quad \text{Ecuación 53}$$

La condición en el borde superior de la barra se satisface para

$$y = \delta \quad \text{en } x = l$$

lo cual se cumple si



$$\delta \cdot \cos(k \cdot l) = 0 \quad (c)$$

La ecuación (c) se satisface tanto para  $\delta = 0$  como para  $\cos(kl) = 0$ . Si  $\delta = 0$ , no hay deflexión y por lo tanto la barra no padea. Si  $\cos(kl) = 0$ , tendremos la relación

$$k \cdot l = (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{Ecuación 54}$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Esta ecuación determina el valor de  $k$  al cual ocurre el pandeo. La deflexión  $\delta$  permanece indeterminada y, en este caso ideal puede tener cualquier valor dentro del alcance de la teoría de las pequeñas deformaciones.

El menor valor de  $k \cdot l$  que satisface la Ecuación 54 se obtiene para  $n = 1$ . El correspondiente valor de  $P$  será la menor carga crítica

$$k \cdot l = 1 \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} = \frac{\pi}{2}$$

Obteniéndose

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2} \quad \text{Ecuación 55}$$

Esta es la carga crítica para la barra de la Figura 50a, es decir el menor esfuerzo axial que puede mantener a la barra en una posición ligeramente curva. El valor  $k \cdot x$  en la Ecuación 53, varía en este caso de  $0$  a  $\pi/2$ , y la forma de la curva de deflexión es como se muestra en la Figura 50 b.

Sustituyendo  $n = 2, 3, \text{etc.}$  en la Ecuación 54, se obtienen los valores correspondientes de la carga de compresión:

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2} \quad P_{cr} = \frac{25\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2}$$

El valor  $k \cdot x$  en la Ecuación 53, varía en este caso de  $0$  a  $3\pi/2$ , de  $0$  a  $5\pi/2, \dots$  y las correspondientes curvas de deflexión se muestran en la Figura 50c y d. Con lo cual queda demostrado que para  $n = 1$  se tiene la menor carga crítica.

La carga crítica para columnas con cualquier otra condición de borde puede obtenerse del mismo modo. Por ejemplo, en el caso de una barra biarticulada (Figura 51), cada mitad de la barra estará en la misma condición que la barra entera de la Figura 50. Por lo tanto, la carga crítica para este caso se obtiene sustituyendo  $l/2$  por  $l$  en la Ecuación 55, con lo cual:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

Ecuación 56

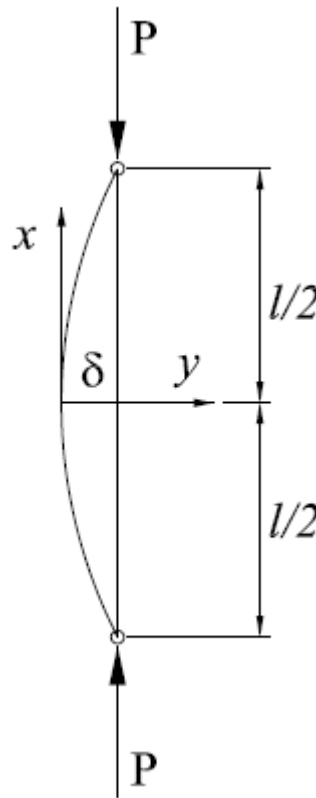


Figura 51: Barra biarticulada sometida a compresión simple

La barra biarticulada probablemente es el caso más común, por lo cual se lo conoce como el caso fundamental de pandeo de una barra prismática.

Tanto para la barra empotrada libre como para la barra biarticulada se supuso que la columna era libre de pandear en cualquier dirección, y por ello  $EI$  representa la menor rigidez flexional. Si una columna está arriostrada de algún modo en que el pandeo es sólo posible en un plano, luego  $EI$  representará la rigidez flexional en dicho plano.

También se asumió que la barra era muy esbelta, de modo que la carga crítica ocurrió dentro del comportamiento elástico del material. Sólo bajo estas condiciones las ecuaciones que precedieron son válidas. Para establecer el límite de aplicación de estas fórmulas, consideremos el caso fundamental de la barra biarticulada. Dividiendo el valor de la carga crítica de la Ecuación 56 por el área de la sección transversal  $A$ , y sabiendo que el radio de giro de la sección es

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

El valor de la tensión crítica será

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \text{Ecuación 57}$$

Esta tensión depende solamente del módulo de elasticidad del material  $E$  y de la esbeltez  $l/r$ . Esta expresión es válida siempre y cuando la tensión crítica permanezca dentro del límite de proporcionalidad, es decir, si no supera la tensión de fluencia del material.



## 10. ANEXO 2 – PANDEO TORSIONAL

### 10.1. Introducción

Se presenta el caso de torsión pura cuando se tiene una barra en cuyos extremos actúan pares aplicados en planos normales a su eje y la misma es libre de alabear. En cada sección de la barra se producirán solamente tensiones tangenciales y su distribución dependerá de la forma de la sección transversal y será la misma para todas las secciones. Para una barra de sección abierta y paredes delgadas se puede asumir con precisión razonable que las tensiones tangenciales en cada punto son paralelas a la tangente correspondiente a la línea media de la sección y proporcional a la distancia desde esa línea.

El ángulo de torsión por unidad de longitud  $\theta$  está dado por la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{M_t}{C} \quad \text{Ecuación 58}$$

Donde  $M_t$  representa al Momento torsor y  $C$  representa a la rigidez torsional de la barra, la cual se puede expresar como:

$$C = GJ \quad \text{Ecuación 59}$$

siendo  $G$  el *módulo de elasticidad transversal* y  $J$  la *constante de torsión*. Para una sección abierta de paredes delgadas y espesor constante  $t$ , la constante de torsión se puede calcular como

$$J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot t^3 \quad \text{Ecuación 60}$$

donde  $m$  es la longitud de la línea media de la sección transversal. Si la sección consiste en diferentes segmentos de espesores distintos, se puede asumir que

$$J = \frac{1}{3} \cdot \left[ \sum_n (m_i \cdot t_i^3) \right] \quad \text{Ecuación 61}$$

Siendo  $n$  la cantidad de segmentos de la sección transversal.

Las fibras longitudinales de la barra, originalmente rectas, se deforman durante la torsión en hélices las cuales, para pequeños ángulos de giro, pueden considerarse líneas rectas inclinadas al eje de rotación. Si se llama  $\rho$  a la distancia entre la fibra y el eje de rotación, el ángulo de inclinación de la fibra al eje será  $\rho\theta$ .

El alabeo de la sección transversal en el caso de una sección abierta de paredes delgadas se puede visualizar si observamos que no hay tensiones tangenciales a lo largo de la línea media de la sección. Esto indica que los elementos de la misma permanecen normales a las fibras longitudinales después de la torsión. Por ejemplo, el alabeo de una sección doble T sometida a torsión se muestra en la Figura 52. Durante la torsión con respecto al

eje  $z$ , las fibras centrales de las alas, que distan  $h/2$  respecto al eje  $z$ , se inclinan hacia el mismo un ángulo  $\theta h/2$ . La línea media de las alas por lo tanto formará el mismo ángulo con el eje  $x$ , como puede observarse en la figura.

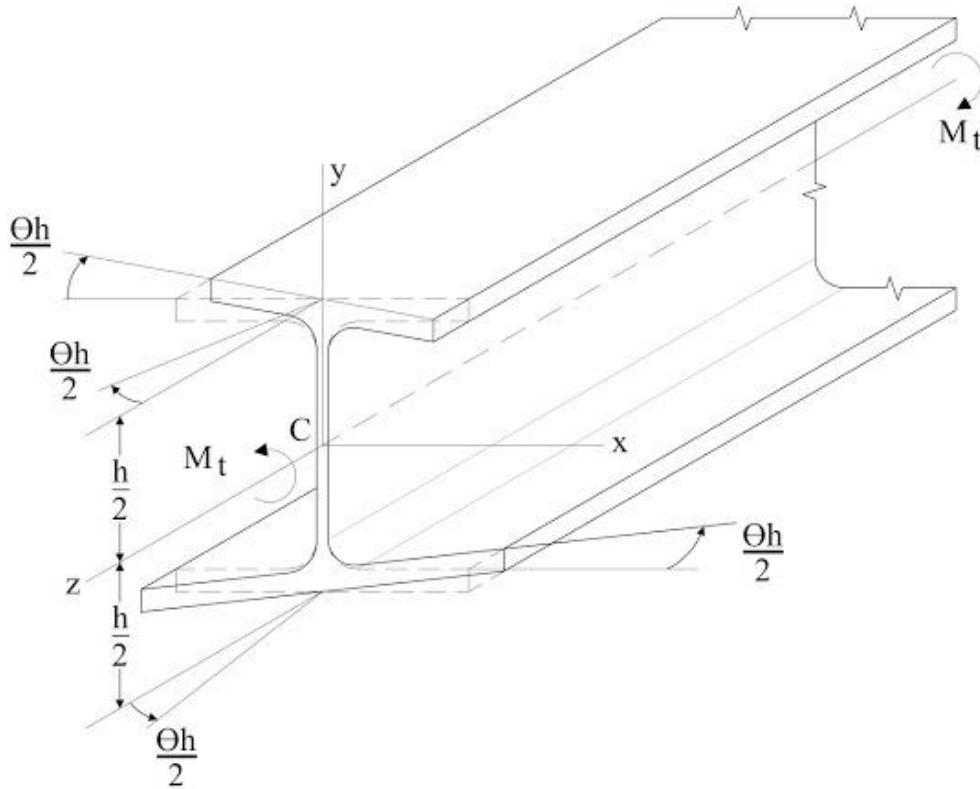


Figura 52: pandeo por torsión pura de una sección doble T

Consideremos ahora un caso más general en el que la línea media de la sección transversal tiene una forma arbitraria (Figura 53)

Asumiendo que durante la torsión la sección transversal de la barra rota con respecto a un eje que pasa por el punto  $A$ , paralelo al eje longitudinal, se observa que cualquier fibra longitudinal  $N$  del plano medio está inclinada un ángulo  $\rho\theta$ . Se define a la fibra  $N$  por la distancia medida a lo largo de la línea media de la sección. La tangente en la línea media en  $N$  permanece perpendicular a la fibra longitudinal, y el ángulo pequeño entre esta tangente y el plano  $xy$ , después de la torsión, es  $\rho\theta \cos\alpha = r\theta$ .

La distancia  $r$  desde la tangente en el punto  $N$  al eje de rotación se considera positiva si un vector a lo largo de la tangente apuntando en la dirección de aumento de  $s$  actúa contrario a las agujas del reloj alrededor del eje de rotación. Por lo tanto, la distancia  $r$  mostrada en la Figura 53 (a) es una cantidad positiva.

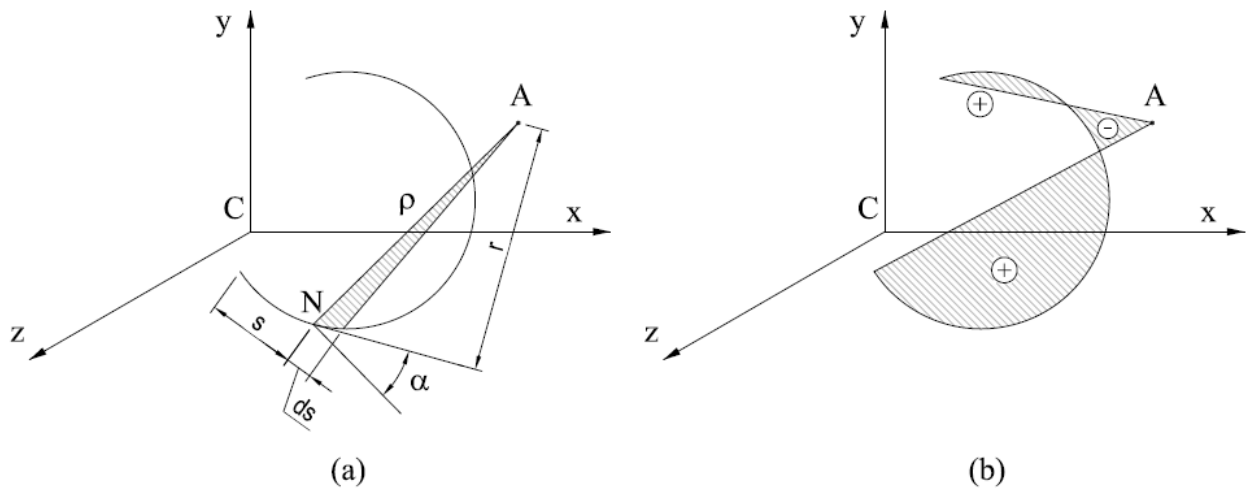


Figura 53: Pandeo por torsión pura de una sección arbitraria

Denominando  $\omega$  al desplazamiento de la línea media de la sección transversal en la dirección  $z$  y considerando el torque positivo como se muestra en la Figura 52, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = -r\theta \quad (a)$$

Mediante integración se obtiene:

$$\omega = \omega_0 - \theta \cdot \int_0^s r \, ds \quad \text{Ecuación 62}$$

donde  $\omega_0$  representa el desplazamiento en la dirección de  $z$  del punto a partir del cual se mide  $s$ . Dado que el área del triángulo en la Figura 53 (a) es igual a  $r \cdot ds/2$ , puede verse que la integral de la Ecuación 62 representa el doble del área sectorial barrida por el radio  $\rho$  a medida que nos movemos a lo largo de la línea media de la sección transversal desde el punto  $s = 0$  hasta el punto  $N$  bajo consideración. El área barrida se considera positiva cuando el radio  $r$  gira en la dirección positiva, es decir, contrario a las agujas del reloj respecto a  $A$ . El valor de la integral para  $s = m$  representará el doble de la suma algebraica del área sombreada en la Figura 53 (b).

En el análisis que precede se asumió que la sección trasversal rota respecto al punto  $A$  arbitrario. Ahora se investigará el efecto en el alabeo por el desplazamiento del centro de rotación. Se asume que el centro de rotación se mueve desde  $A$  hasta  $B$ . Considerando un elemento  $ds$  de la línea media de la sección transversal y denominando  $x, y$  a las coordenadas del punto  $N$  y  $x_a, y_a$  a las coordenadas del centro de rotación  $A$ , de la Figura 54 vemos que:

$$r \cdot ds = (y_a - y) \cdot dx - (x_a - x) \cdot dy$$

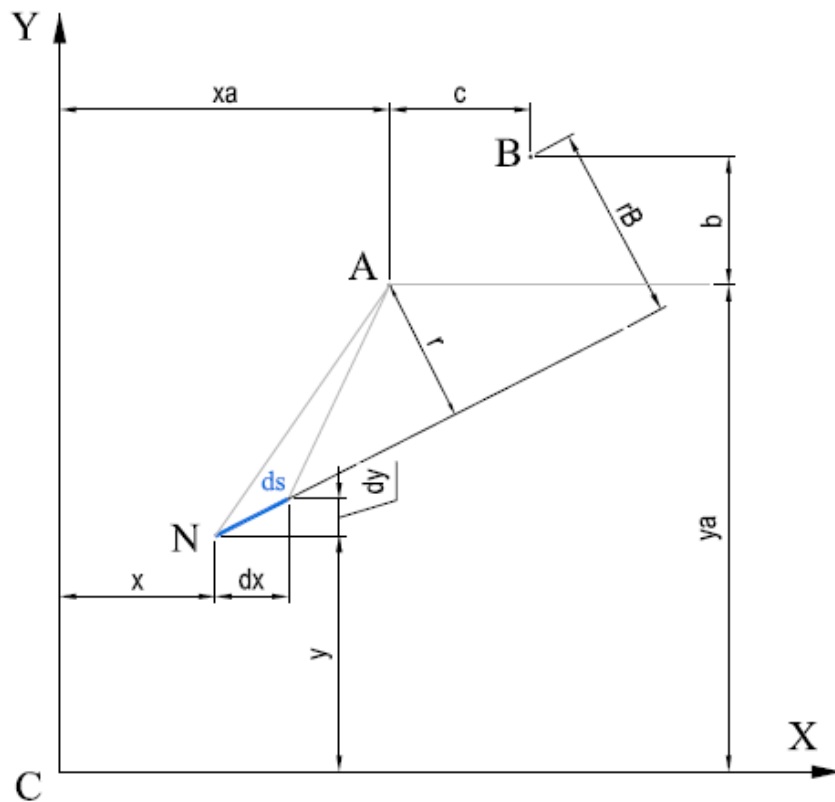


Figura 54: Análisis de un elemento diferencial de la sección transversal

Si el centro de rotación se mueve desde A hasta B, las coordenadas del centro de rotación serán  $x_{a+c}$  y  $y_{a+b}$ ; luego

$$r \cdot ds = r \cdot ds + b \cdot dx - c \cdot dy$$

Para calcular el alabeo que se produce por la rotación alrededor de B, se debe sustituir  $r_B \cdot ds$  en lugar de  $r \cdot ds$  en la Ecuación 62. Esto conduce a lo siguiente:

$$\int_0^s r_B \, ds = \int_0^s r \, ds + \int_0^s b \, dx - \int_0^s c \, dy = \int_0^s r \, ds + b \cdot x - c \cdot y + a$$

donde  $a$  es una constante. Puede verse que un cambio en la posición del centro de rotación conduce a un cambio en el desplazamiento calculado previamente (Ecuación 62), según el siguiente valor:

$$\theta \cdot (b \cdot x - c \cdot y + a)$$

Dado que este desplazamiento es una función lineal de  $x$  y de  $y$ , no se requiere ninguna deformación adicional de la barra y se lleva a cabo moviendo la barra como un cuerpo rígido. Por lo tanto, se concluye que, en el caso de torsión pura de una barra con los extremos libres, la elección de los ejes de rotación es inmaterial y cualquier línea paralela a los ejes principales se puede tomar como centro de rotación.



El valor promedio  $\omega_p$  del desplazamiento por alabeo se puede calcular a partir de la Ecuación 62, como sigue:

$$\omega_p = \frac{1}{m} \cdot \int_0^m \omega \, ds = \omega_0 - \frac{\theta}{m} \cdot \int_0^m \left( \int_0^s r \, ds \right) ds \quad (b)$$

Restando este valor al desplazamiento dado en la Ecuación 62, obtenemos el alabeo de la sección transversal con respecto al plano de alabeo medio. En adelante se utilizará el símbolo  $\omega$  para el desplazamiento con respecto al nuevo plano de referencia, por lo que se tiene:

$$\omega = \frac{\theta}{m} \cdot \int_0^m \left( \int_0^s r \, ds \right) ds - \theta \cdot \int_0^s r \, ds \quad (c)$$

Para simplificar la escritura de esta expresión, se introduce la siguiente notación:

$$\omega_s = \int_0^s r \, ds$$

Ecuación 63

$$\omega_{p,s} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^m \omega_s \, ds$$

El valor  $\omega_s$  se conoce como módulo de alabeo y representa el doble del área sectorial correspondiente al arco  $s$  de la línea media de la sección transversal, mientras que  $\omega_{p,s}$  es el valor promedio de  $\omega_s$ . Utilizando la notación de la Ecuación 63, la expresión para el alabeo adquiere la siguiente forma:

$$\omega = \theta \cdot (\omega_{p,s} - \omega_s) \quad \text{Ecuación 64}$$

A partir de esta ecuación se puede calcular el desplazamiento por alabeo por torsión pura para cualquier barra de sección abierta y paredes delgadas.

Como ejemplo del uso de la Ecuación 64, se considera una sección transversal en forma de canal (Figura 55) Asumiendo que la rotación ocurre alrededor del eje longitudinal a través de  $O$ , centro de corte, se llega a las siguientes expresiones para la función de alabeo:

$$\omega_s = \int_0^s r \, ds = \int_0^s \frac{h}{2} \, ds = \frac{s \cdot h}{2} \quad 0 \leq s \leq b$$

$$\omega_s = \frac{b \cdot h}{2} - \int_0^s e \, ds = \frac{b \cdot h}{2} + b \cdot e - s \cdot e \quad b \leq s \leq b + h$$

$$\omega_s = \frac{b \cdot h}{2} - h \cdot e + \int_{b+h}^s \frac{h}{2} \, ds = -h \cdot e - \frac{h^2}{2} + \frac{s \cdot h}{2} \quad b + h \leq s \leq 2 \cdot b + h$$

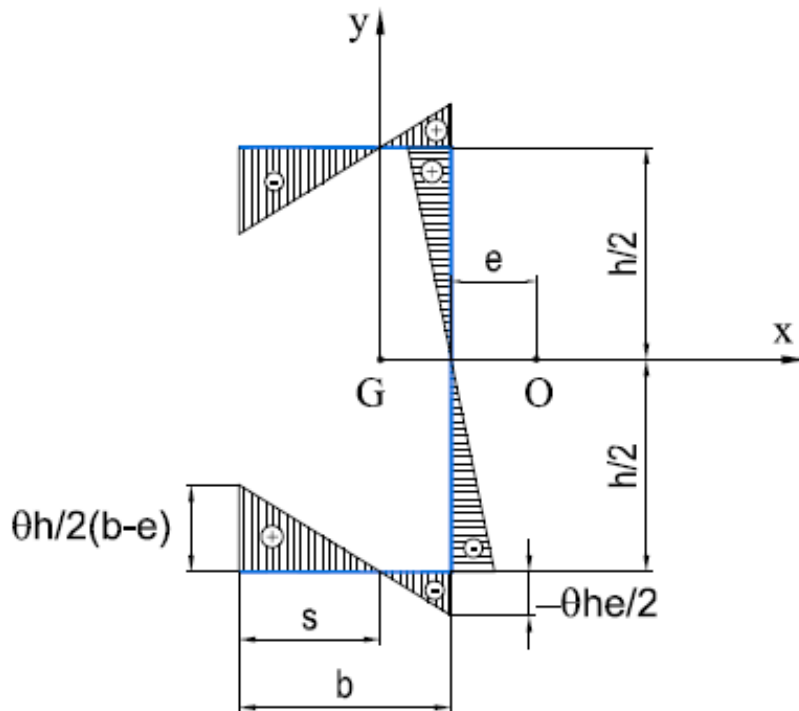


Figura 55: Perfil C – Módulo de alabeo

Utilizando las expresiones anteriores para  $\omega_s$ , se obtiene el valor promedio de la función de alabeo:

$$\omega_{p,s} = \frac{1}{m} \int_0^m \omega_s \, ds$$

$$\omega_{p,s} = \frac{1}{m} \left[ \int_0^b \frac{s \cdot h}{2} \, ds + \int_b^{b+h} \left( \frac{b \cdot h}{2} + b \cdot e - s \cdot e \right) \, ds + \int_{b+h}^{2 \cdot b + h} \left( -h \cdot e - \frac{h^2}{2} + \frac{s \cdot h}{2} \right) \, ds \right]$$

$$\omega_{p,s} = \frac{1}{m} \left[ \frac{h}{2} \cdot (b - e) \cdot (2 \cdot b + h) \right]$$

Dado que  $m = 2b + h$ , nos queda:

$$\omega_{p,s} = \frac{h \cdot (b - e)}{2}$$

Sustituyendo en la Ecuación 63, se obtienen las siguientes expresiones para el desplazamiento:

$$\omega = \theta \cdot \frac{h}{2} \cdot (b - e - s) \quad 0 \leq s \leq b$$

$$\omega = \theta \cdot e \cdot \left( -b - \frac{h}{2} + s \right) \quad b \leq s \leq b + h$$

$$\omega = \theta \cdot \frac{h}{2} \cdot (b + e + h - s) \quad b + h \leq s \leq 2 \cdot b + h$$

La variación de  $\omega$  a lo largo de la línea media de la sección transversal está representada por el área sombreada de la Figura 55.

## 10.2. Pandeo torsional<sup>8</sup>

Existen algunos casos en los que una barra de sección abierta solicitada a compresión uniforme pandeará torsionalmente permaneciendo recto su eje longitudinal. Para ello, consideremos una sección con doble simetría, como se muestra en la Figura 56. Se trata de una barra con forma de cruz, con sus 4 alas iguales, de ancho  $b$ , y espesor  $t$ , cuyos ejes  $x$  e  $y$  son de simetría. Una sección de este tipo, sometida a compresión simple, podrá pandear torsionalmente. El eje longitudinal de la barra permanecerá recto, mientras que cada ala rotará alrededor del eje  $z$ . Para poder determinar el valor de la fuerza de compresión que conducirá a esta inestabilidad, es necesario considerar la deflexión de las alas durante el pandeo.

Para poder explicar el método de análisis, se retornará al caso sencillo de una barra biarticulada, sometida a una carga  $P$ . Inicialmente el puntal, con la carga  $P$  actuando, se encuentra recto. Supongamos ahora que la carga aumenta hasta llegar al valor crítico, de modo que la barra adquiere una forma de equilibrio levemente deformada. Esta deflexión añadirá tensiones de flexión a las tensiones de compresión uniformes originales. Al mismo tiempo, estas tensiones de compresión actuarán sobre una sección transversal, como la  $m-n$  de la Figura 57 (a) y (b).

La ecuación diferencial de la curva de deflexión será:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} = -P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} \quad \text{Ecuación 65}$$

<sup>8</sup> Timoshenko, Gere; Theory of Elastic Stability, 1963, Torsional buckling. Chapter 5.4

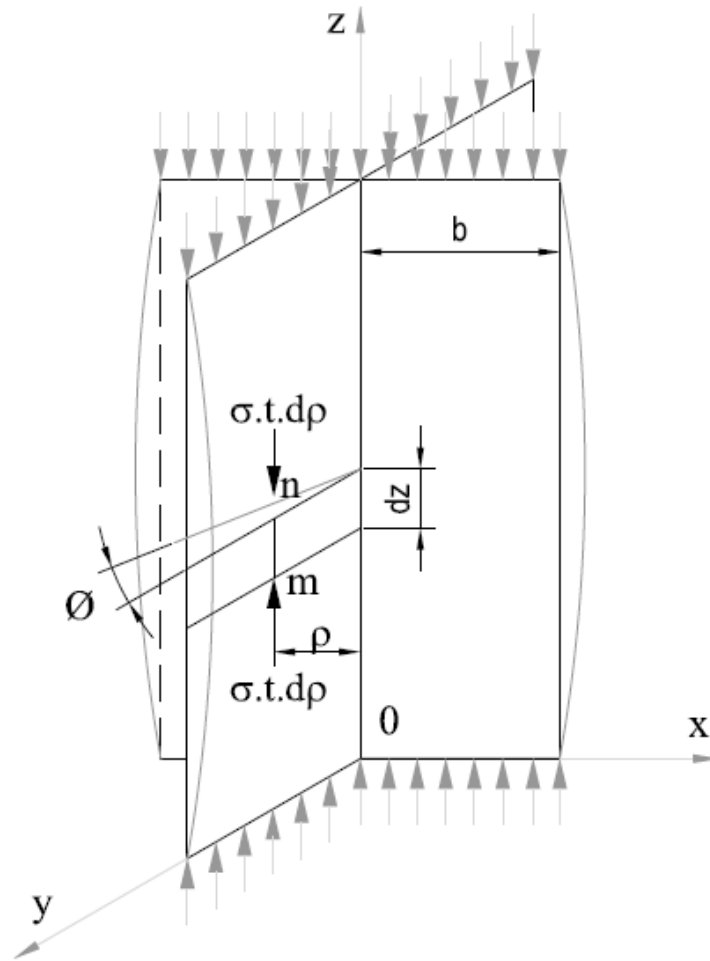


Figura 56: Barra uniformemente comprimida con forma de cruz

En una aproximación al problema del pandeo torsional para una columna como la de la Figura 56, se puede afirmar que, ante la condición crítica, la forma de equilibrio deformada es sostenida por las tensiones de compresión actuando en la sección transversal rotada.

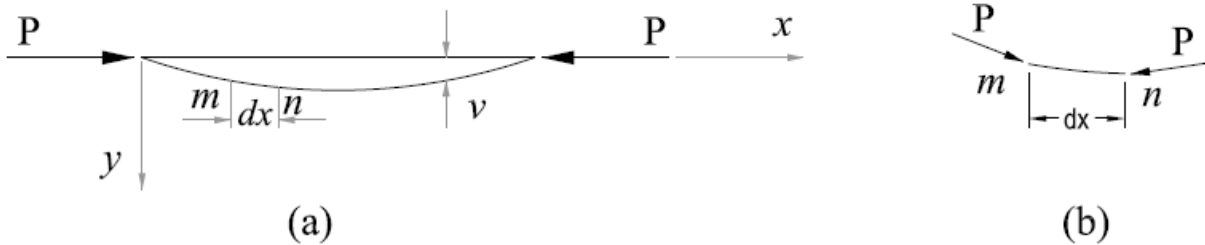


Figura 57: Barra biarticulada sometida a compresión

Se considerará un elemento  $mn$  (Figura 57 b) con forma de banda delgada de longitud  $dx$ , ubicada a una distancia  $\rho$  del eje  $z$ , cuya área de la sección transversal es  $t d\rho$ . Debido al pandeo torsional, la deflexión de este elemento, en la dirección  $y$  es:

$$v = \rho \cdot \phi \tag{a}$$

Siendo  $\phi$  el menor ángulo de torsión de la sección transversal, asumiendo que la forma de dicha sección no cambia. Las fuerzas de compresión actuando en los bordes extremos rotados del elemento  $mn$  son  $\sigma t d\rho$ , donde  $\sigma = P/A$  es la fuerza de compresión inicial. Estas fuerzas de compresión son estáticamente equivalentes a una fuerza lateral de intensidad:

$$-(\sigma \cdot t \cdot d\rho) \cdot \frac{d^2}{dz^2} v$$

La cual, observando la ecuación (a) puede escribirse como:

$$-\sigma \cdot t \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi$$

El momento respecto al eje  $z$  de la fuerza lateral ficticia actuando en el elemento  $mn$  será:

$$-\sigma \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \cdot dz \cdot t \cdot \rho^2 \cdot d\rho$$

Integrando el momento para toda la sección transversal, obtenemos el torque actuando en un elemento de la barra pandeada entre dos secciones transversales consecutivas. Este torque será:

$$-\sigma \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \cdot dz \cdot \int_A t \cdot \rho^2 d\rho = -\sigma \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \cdot dz \cdot I_0$$

Donde  $I_0$  es el momento polar de inercia de la sección transversal respecto del centro de corte  $O$ , coincidente en este caso con el centro de gravedad. Finalmente, utilizando la notación  $m_z$  para el torque por unidad de longitud de la barra se obtiene,

$$m_z = -\sigma \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \cdot I_0 \tag{b}$$

La expresión (b) se aplica a cualquier forma de sección transversal siempre que el centro de corte coincida con el centro de gravedad.

Para establecer una ecuación diferencial para el pandeo torsional, se puede utilizar la ecuación diferencial de la torsión no uniforme:

$$M_t = C \cdot \frac{d}{dz} \phi - C_1 \cdot \frac{d^3}{dz^3} \phi \quad \text{Ecuación 66}$$

Derivando la Ecuación 66 respecto de  $z$  se tiene:

$$\frac{d}{dz} M_t = C \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi - C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi \quad (c)$$

La dirección positiva de  $M_t$  y  $m_z$  están dadas por la regla de la mano derecha, y por lo tanto estos torques actúan en un elemento de la sección torsionada como se muestra en la Figura 58. La consideración del equilibrio en este elemento conduce a:

$$m_z = \frac{d}{dz} M_t \quad (d)$$

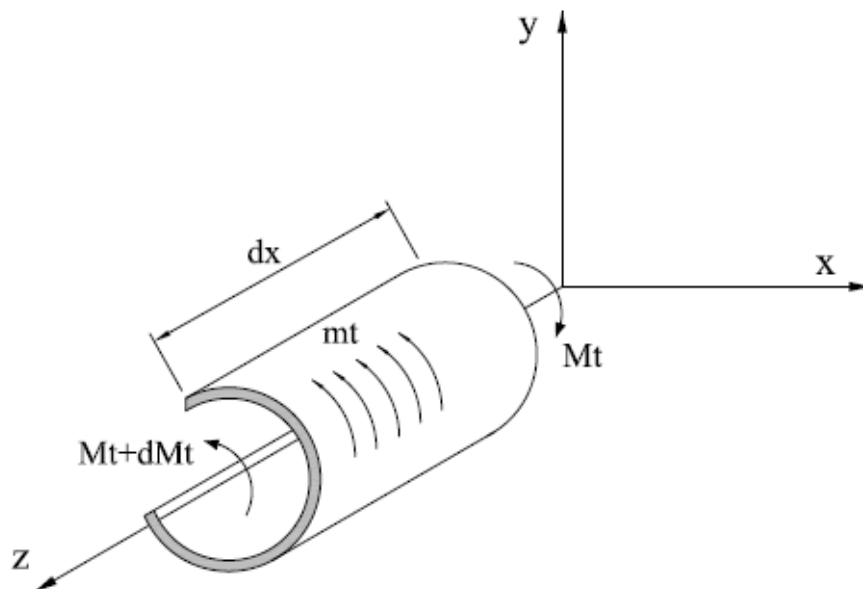


Figura 58: Sección transversal sometida a momento torsor

Y luego, la ecuación (c) toma la forma:

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - C \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi = m_z \quad \text{Ecuación 67}$$

Sustituyendo  $m_z$  por el valor dado en la expresión (b) se obtiene:

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - (C - \sigma \cdot I_0) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi = 0 \quad \text{Ecuación 68}$$

El valor crítico de compresión para la tensión  $\sigma$  y, por lo tanto, la tensión crítica, se pueden calcular a partir de la Ecuación 68. Como hemos dicho, esta ecuación se aplica a cualquier forma de sección transversal siempre que el centro de corte coincida con el centro de gravedad.

Para la columna de la Figura 56, desaparece la rigidez al alabeo  $C_1$ ; por tanto, puede comprobarse que en el caso de pandeo torsional la Ecuación 68 se satisface si:

$$C - \sigma \cdot I_0 = 0$$

Y por tanto:

$$\sigma_{cr} = \frac{C}{I_0} = \frac{\frac{4}{3} \cdot b \cdot t^3 \cdot G}{\frac{4}{3} \cdot t \cdot b^3} = \frac{G t^2}{b^2} \quad \text{Ecuación 69}$$

### 10.3. Pandeo flexotorsional

En el caso general de una columna de sección abierta y paredes delgadas, la falla por pandeo generalmente ocurre por combinación de torsión y flexión. Para poder investigar este tipo de pandeo, se considerará una barra de sección asimétrica como se muestra en la Figura 59. El eje  $x$  y el eje  $y$  son los ejes principales de inercia de la sección y  $x_0, y_0$  son las coordenadas del centro de corte  $O$ . Durante el pandeo, la sección transversal estará sometida a translación y rotación. Así, durante la translación, el punto  $O$  se moverá hasta  $O'$  y el punto  $C$  hasta  $C'$ .

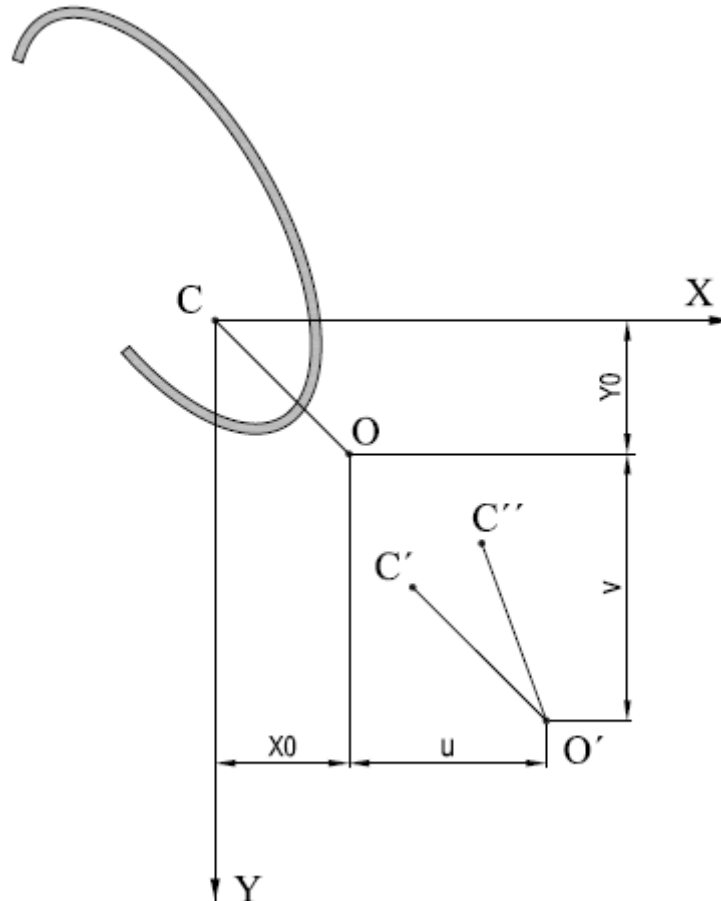


Figura 59: Caso general de una columna de sección abierta y pared delgada

La rotación de la sección transversal alrededor del centro de corte está dada por el ángulo  $\phi$  y la posición final del centro de gravedad será  $C''$ . Por lo tanto, las deflexiones finales del centro de gravedad  $C$  durante el pandeo serán:

$$u + y_0 \cdot \phi \quad v - x_0 \cdot \phi$$

Si la única carga actuante sobre la columna es una compresión centrada  $P$ , como en el caso de la columna biarticulada, el momento flector respecto a los ejes principales de la sección transversal es:

$$M_x = -P \cdot (v - x_0 \cdot \phi) \quad M_y = -P \cdot (u + y_0 \cdot \phi)$$

La convención de signos para los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  se muestra en la Figura 60, en un  $dz$  de la barra. Las ecuaciones diferenciales para la curva de deflexión del centro de corte se indican a continuación:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = M_y = -P \cdot (u + y_0 \cdot \phi) \quad \text{Ecuación 70}$$

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x = -P \cdot (v - x_0 \cdot \phi) \quad \text{Ecuación 71}$$

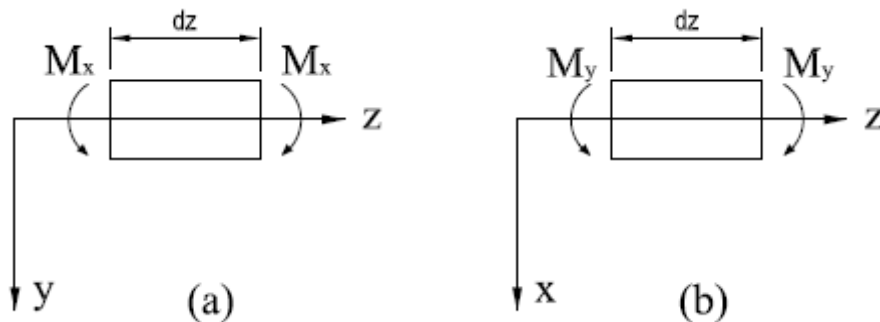


Figura 60. Convención de signos para los momentos  $M_x$ ,  $M_y$

Estas dos ecuaciones de flexión poseen tres incógnitas:  $u$ ,  $v$  y  $\phi$ . La tercera ecuación que se puede considerar para hallarlas es la de la torsión de la barra.

Para obtener la ecuación del ángulo de torsión  $\phi$ , se puede tomar una banda longitudinal  $t ds$  de la sección transversal, definida por las coordenadas  $x$ ,  $y$  en el plano de la sección. Las componentes de su deflexión en las direcciones  $x$  e  $y$  durante el pandeo son, respectivamente:

$$u + (y_0 - y) \cdot \phi \quad v - (x_0 - x) \cdot \phi$$

Tomando la segunda derivada de estas expresiones con respecto a  $z$  y nuevamente, considerando un elemento de longitud  $dz$ , encontramos que las fuerzas de compresión  $\sigma ds$  actuando en los extremos del elemento levemente rotados dan fuerzas en las direcciones  $x$ ,  $y$  de intensidad:



$$-(\sigma \cdot ds) \cdot \frac{d^2}{dz^2} [u + (y_0 - y) \cdot \phi] \quad (a)$$

$$-(\sigma \cdot ds) \cdot \frac{d^2}{dz^2} [v + (x_0 - x) \cdot \phi] \quad (b)$$

Tomando momentos de estas fuerzas respecto a los ejes que pasan por el centro de corte, para una banda longitudinal obtenemos el torque por unidad de longitud de la barra:

$$dmz = -(\sigma \cdot ds) \cdot (y_0 - y) \cdot \left[ \frac{d^2}{dz^2} u + (y_0 - y) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \right] + (\sigma \cdot ds) \cdot (x_0 - x) \cdot \left[ \frac{d^2}{dz^2} v + (x_0 - x) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \right]$$

Integrando para toda el área de la sección transversal y observando que:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \int_A t \, ds &= P & \int_A x \cdot t \, ds &= \int_A y \cdot t \, ds = 0 \\ \int_A y^2 \cdot t \, ds &= I_x & \int_A x^2 \cdot t \, ds &= I_y \\ I_0 &= I_x + I_y + A \cdot (x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

obtenemos

$$m_z = \int_A \cdot dmz = P \cdot \left( x_0 \cdot \frac{d^2}{dz^2} v - y_0 \cdot \frac{d^2}{dz^2} u \right) - \frac{I_0}{A} \cdot P \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi \quad (c)$$

En estas expresiones  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos de inercia respecto a los ejes principales de la sección transversal e  $I_0$  es el momento polar de inercia respecto al centro de corte O. Sustituyendo la expresión (c) en la Ecuación 68 de la torsión no uniforme, encontramos que:

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - \left( C - \frac{I_0}{A} \cdot P \right) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi - P \cdot x_0 \cdot \frac{d^2}{dz^2} v + P \cdot y_0 \cdot \frac{d^2}{dz^2} u = 0 \quad \text{Ecuación 72}$$

Las Ecuación 70 a Ecuación 72 son las tres ecuaciones diferenciales simultáneas para pandeo por flexión y torsión y pueden utilizarse para hallar las cargas críticas. Puede verse que el ángulo de rotación aparece en las tres ecuaciones por lo cual, en el caso general, el pandeo por torsión y flexión ocurre simultáneamente.

En el caso particular en el que el centro de corte coincide con el centro de gravedad, se tiene que  $x_0 = y_0 = 0$  y las tres ecuaciones del pandeo toman la siguiente forma:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^2}{dz^2} u = -P \cdot u$$

$$E I_x \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi = -P \cdot v$$

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - \left( C - \frac{I_0}{A} \cdot P \right) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contienen sólo una incógnita y puede tratarse separadamente, por tanto el pandeo torsional es independiente del flexional. Las primeras dos ecuaciones nos dan los valores de las cargas críticas de Euler para el pandeo en los dos planos principales. La tercer ecuación es la misma que la Ecuación 68 y nos da el valor de la carga crítica para el pandeo por torsión pura. Sólo el menor valor de los tres será la carga crítica de interés en las aplicaciones prácticas.

### 10.3.1. Barra biarticulada

Volviendo ahora a las ecuaciones generales, asumamos que la barra está simplemente apoyada, de modo que los extremos de la misma tienen libertad para alabearse y para rotar alrededor de los ejes  $x$  e  $y$  pero no pueden rotar alrededor de  $z$  ni deformarse en las direcciones  $x$  e  $y$ . En este caso las condiciones de borde son:

$$u = v = \phi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = l$$

$$\frac{d^2}{dz^2} u = \frac{d^2}{dz^2} v = \frac{d^2}{dz^2} \phi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = l$$

Estas condiciones se cumplirán si las soluciones de las ecuaciones generales tienen la siguiente forma:

$$u = A_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right) \quad v = A_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right) \quad \phi = A_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right) \quad (d)$$

Sustituyendo las expresiones (d) en las ecuaciones generales, se obtienen las siguientes ecuaciones para determinar las constantes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ :

$$\left( P - E I_y \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right) \cdot A_1 + P \cdot y_0 \cdot A_3 = 0$$

$$\left( P - E I_x \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right) \cdot A_2 + P \cdot y_0 \cdot A_3 = 0$$

Ecuaciones 73

$$P \cdot y_0 \cdot A_1 - P \cdot x_0 \cdot A_2 - \left( C_1 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} + C - \frac{I_0}{A} \cdot P \right) \cdot A_3 = 0$$

Una posible solución para estas ecuaciones es  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ , la cual corresponde a la forma recta de equilibrio. Pero para obtener la forma de equilibrio en pandeo estos valores no podrán ser cero simultáneamente, lo cual es posible si el determinante de las Ecuaciones 73 se hace cero. Para simplificar las expresiones, introduciremos la siguiente notación:

$$P_x = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{l^2} \quad P_y = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2} \quad P_\phi = \frac{A}{I_0} \cdot \left( C + C_1 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right) \quad \text{Ecuaciones 74}$$

En las que  $P_x$  y  $P_y$  son las cargas críticas de Euler para el pandeo alrededor de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, y  $P_\phi$  es la carga crítica de pandeo por torsión pura. Luego, igualando a cero el determinante de las Ecuaciones 74, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} P - P_y & 0 & P \cdot y_0 \\ 0 & P - P_x & -P \cdot y_0 \\ P \cdot y_0 & -P \cdot x_0 & \frac{I_0}{A} \cdot (P - P_\phi) \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo este determinante se llega a una ecuación cúbica para determinar la carga crítica  $P$ :

$$\frac{I_0}{A} \cdot (P - P_y) \cdot (P - P_x) \cdot (P - P_\phi) - P^2 \cdot y_0^2 \cdot (P - P_x) - P^2 \cdot x_0^2 \cdot (P - P_y) = 0 \quad \text{Ecuación 75}$$

o también,

$$\frac{I_c}{I_0} \cdot P^3 + \left[ \frac{A}{I_0} \cdot (P_x \cdot y_0^2 + P_y \cdot x_0^2) - (P_x + P_y + P_\phi) \right] \cdot P^2 + (P_x \cdot P_y + P_x \cdot P_\phi + P_y \cdot P_\phi) \cdot P - P_x \cdot P_y \cdot P_\phi = 0 \quad \text{Ecuación 76}$$

siendo  $I_0 = I_x + I_y$  el momento polar de inercia respecto del centro de gravedad  $C$  de la sección.

Para hallar el valor de la carga crítica en cada caso, comenzamos por calcular los coeficientes en la Ecuación 76. La solución de esta ecuación cúbica nos da tres valores para la carga crítica, siendo la menor de las tres la que deberá utilizarse en las aplicaciones prácticas. Sustituyendo los valores de las cargas críticas en las Ecuaciones 74, se obtienen las proporciones  $A_1/A_3$  y  $A_2/A_3$  para cada una de las correspondientes formas de pandeo. Estas proporciones establecen las relaciones entre la rotación y traslación de la sección transversal y definen la forma deformada de los ejes del centro de corte.

### 10.3.2. Barra biempotrada

Si los extremos de la barra están empotrados, las condiciones de borde serán:

$$u = v = \phi = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ y } z=l$$

$$\frac{d}{dz} u = \frac{d}{dz} v = \frac{d}{dz} \phi = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ y } z=l$$

Dado que hay momentos en los extremos de la barra durante el pandeo, en lugar de las Ecuación 70 y la Ecuación 71, se tendrán las siguientes ecuaciones:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = -P \cdot (u + y_0 \cdot \phi) + E \cdot I_y \cdot \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0} \quad \text{Ecuación 77}$$

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} = -P \cdot (v + x_0 \cdot \phi) + E \cdot I_x \cdot \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0} \quad \text{Ecuación 78}$$

Estas ecuaciones, junto con la Ecuación 72, definen la forma de pandeo de la barra y la correspondiente carga crítica. Estas tres ecuaciones y las condiciones de borde se satisfacen adoptando una solución con la forma:

$$u = A_1 \cdot \left( 1 - \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{l} \right) \right) \quad v = A_2 \cdot \left( 1 - \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{l} \right) \right) \quad \phi = A_3 \cdot \left( 1 - \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{l} \right) \right)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación 72, Ecuación 77 y Ecuación 78, se obtiene nuevamente la Ecuación 76 para calcular la carga crítica. Es necesario utilizar solamente la expresión  $4\pi^2/l^2$  en lugar de  $\pi^2/l^2$  en las Ecuaciones 74.

### 10.3.3. Sección transversal con un eje de simetría

Asumamos que el eje x es un eje de simetría, como se ilustra en la sección canal en la Figura 61.

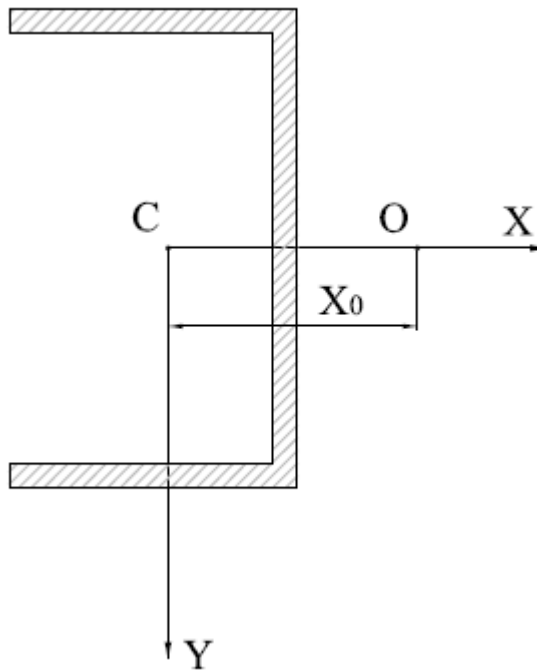


Figura 61: Sección con un eje de simetría

En este caso se tiene  $y_0 = 0$  y las Ecuación 70 a Ecuación 72 se vuelven:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^2}{dz^2} u = -P \cdot u \quad \text{Ecuación 79}$$

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^2}{dz^2} v = -P \cdot (v - x_0 \cdot \phi) \quad \text{Ecuación 80}$$

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - \left( C - \frac{I_0}{A} \cdot P \right) \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi - P \cdot x_0 \cdot \frac{d^2}{dz^2} v = 0 \quad \text{Ecuación 81}$$

La primera ecuación no contiene  $\phi$  y nos muestra que el pandeo alrededor del eje de simetría es independiente de la torsión y que la carga crítica correspondiente se obtiene con la fórmula de Euler. El pandeo perpendicular al eje de simetría es una combinación de flexión y torsión y está dado por la Ecuación 80 y la Ecuación 81. Si se asume que los extremos de la barra están simplemente apoyados, es decir, libres de alabeo y de rotar alrededor del eje  $x$  pero restringida la rotación alrededor del eje  $z$ , las condiciones de borde serán:

$$v = \phi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = 1$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v = \frac{d^2}{dz^2} \phi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = 1$$

Procediendo como antes y tomando una solución de la forma:

$$v = A_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{1}\right) \quad \phi = A_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{1}\right)$$

se obtiene la siguiente expresión para calcular las cargas críticas:

$$\begin{vmatrix} P - P_x & -P \cdot x_0 \\ -P \cdot x_0 & \frac{I_0}{A} \cdot (P - P_\phi) \end{vmatrix} = 0$$

Lo cual da:

$$\frac{I_0}{A} \cdot (P - P_x) \cdot (P - P_\phi) - P^2 \cdot x_0^2 = 0 \quad \text{Ecuación 82}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{I_c}{I_0} \cdot P^2 - (P_x + P_\phi) \cdot P + P_x \cdot P_\phi = 0 \quad \text{Ecuación 83}$$

Mediante esta expresión cuadrática se obtienen dos soluciones para la carga crítica  $P$ . La menor de estas raíces representará la carga crítica de la columna.



## 11. ANEXO 3 – PANDEO DE PLACAS RECTANGULARES

Se analizará el pandeo de placas rectangulares uniformemente comprimidas con distintas condiciones de borde en los lados en los cuales no se aplica la carga.

Empleando el método de integración de la ecuación diferencial de la deformación de la placa comprimida según el eje  $x$  y considerando  $N_x$  positivo para compresión se tiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \times \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{-N_x}{D} \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (a)$$

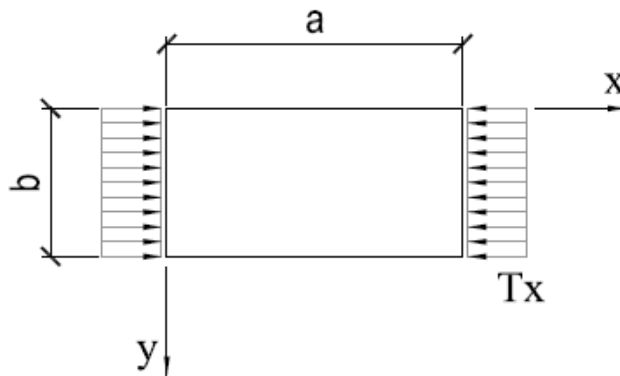


Figura 62: Placa rectangular uniformemente comprimida según el eje  $x$

Se puede asumir que la placa, bajo cargas de compresión, pandea en  $m$  semiondas sinusoidales. Luego, puede proponerse la siguiente solución para la ecuación (a):

$$w = f(y) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad (b)$$

En la cual  $f(y)$  es una función de  $y$  solamente.

La expresión (b) satisface la condición de borde simplemente apoyada en  $x = 0$  y en  $x = a$  de la placa, ya que:

$$w = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{y} \quad x = a$$

Sustituyendo (b) en (a) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria, para determinar  $f(y)$ :

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{2 \cdot m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \left( \frac{m^4 \cdot \pi^4}{a^4} - \frac{N_x}{D} \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot f = 0 \quad (c)$$

Notando que, debido a algunas restricciones a lo largo de  $y = 0$  e  $y = b$ , siempre tenemos que:

$$\frac{N_x}{D} > \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2}$$

Y usando la notación:

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D} \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2}}} \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D} \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2}}} \quad (d)$$

se puede presentar la solución general de la Ecuación (c) de la siguiente manera:

$$f(y) = C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot y} + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot y} + C_3 \cdot \cos(\beta \cdot y) + C_4 \cdot \sin(\beta \cdot y) \quad (e)$$

Siendo  $C_1$  a  $C_4$  constantes de integración a determinar en cada caso particular de acuerdo con las restricciones que tengamos a lo largo de  $y = 0$  e  $y = b$ .

Para el caso de un perfil ángulo, el lado  $y = 0$  se encuentra articulado, mientras que el lado  $y = b$  se encuentra libre. Para estas condiciones de borde se sigue que:

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (f)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{para } y = b \quad (g)$$

Las condiciones de borde (f) se satisfacen en la solución general (e):

$$C_1 = C_2 \quad \text{y} \quad C_3 = 0$$

Entonces, la función  $f(y)$  puede escribirse:

$$f(y) = A \cdot \sinh(\alpha \cdot y) + B \cdot \sin(\beta \cdot y)$$

en la que  $A$  y  $B$  son constantes.

De las condiciones de borde (g) se sigue:

$$A \cdot \left( \alpha^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot \sinh(\alpha \cdot b) - B \cdot \left( \beta^2 + \nu \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot \sin(\beta \cdot b) = 0 \quad (h)$$

$$A \cdot \alpha \cdot \left[ \alpha^2 - 2 \cdot (2 - \nu) \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right] \cdot \cosh(\alpha \cdot b) - B \cdot \beta \cdot \left[ \beta^2 + (2 - \nu) \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot \cos(\beta \cdot b) \right] = 0$$

Estas ecuaciones se satisfacen para  $A = B = 0$ , con lo cual la deflexión en cada punto de la placa sería cero, correspondiente a la forma plana de equilibrio de la placa. Por el contrario, la forma de equilibrio de pandeo de la placa se vuelve posible para valores de  $A$  y  $B \neq 0$ , lo cual requiere:



$$\beta \cdot \left( \alpha^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot \tanh(\alpha \cdot b) = \alpha \cdot \left( \beta^2 + \nu \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot \tan(\beta \cdot b) \quad (i)$$

Dado que  $\alpha$  y  $\beta$  contienen  $N_x$ , la ecuación (i) se puede utilizar para calcular el valor crítico de  $N_x$ , a partir de las medidas de la placa.

Estos cálculos muestran que el menor valor de  $N_x$  se obtiene haciendo  $m = 1$ , es decir, asumiendo que la placa pandea sólo con una semionda. La magnitud de la carga crítica de compresión se puede representar mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_{x,cr} = \frac{N_{x,cr}}{h} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot h} \quad \text{Ecuación 84}$$

en la que  $k$  es un factor numérico que depende de la relación  $a/b$ .

En la Tabla 2 se representan distintos valores de este factor calculados a partir de la ecuación (i) para  $\nu = 0.25$ .

Tabla 2: Valores numéricos del Factor  $k$ , para el borde  $y = 0$  simplemente apoyado y el borde  $y = b$  libre.

<b>a/b</b>	<b>0.50</b>	<b>1.0</b>	<b>1.2</b>	<b>1.4</b>	<b>1.6</b>	<b>1.8</b>	<b>2.0</b>	<b>2.5</b>	<b>3.0</b>	<b>4.0</b>	<b>5.0</b>
<b>k</b>	4.400	1.440	1.135	0.952	0.835	0.755	0.698	0.610	0.564	0.516	0.506
<b><math>\sigma_{x,cr}</math></b>	11.600	3.790	2.990	2.500	2.200	1.990	1.840	1.600	1.480	1.360	1.330

Para placas de longitud considerable se puede considerar con suficiente precisión que,

$$k = 0.456 + \frac{b^2}{a^2} \quad \text{Ecuación 85}$$



## 12. ANEXO 4 – PANDEO LATERAL TORSIONAL<sup>9</sup>

### 12.1. Introducción

Como se ha mencionado en el Punto 5.3.3. cuando se tiene una viga sometida a un momento flector según su plano de mayor rigidez flexional, ésta puede pandear lateralmente para un cierto valor crítico de la carga.

Este pandeo lateral es de gran importancia en el diseño de vigas sin arriostramientos laterales, debido a que la rigidez flexional de la misma en el plano del momento es mayor en comparación con la rigidez lateral a flexión. Siempre que el valor de la carga sea menor que el crítico, la viga permanecerá estable. Pero a medida que aumente la carga, se alcanzará una condición para la cual una forma ligeramente desviada y rotada de equilibrio sea posible. La configuración plana de la viga es ahora inestable y el menor valor de la carga para el cual ocurre la condición crítica representa la carga crítica para la viga.

Para llegar a este valor, se considerará una viga con dos planos de simetría, según se muestra en la Figura 63. Esta viga está sujeta a una carga arbitraria actuando en el plano  $yz$ , el cual es el plano de mayor rigidez. Se asume que una pequeña deflexión lateral ocurre bajo la acción de estas cargas. Luego, a partir de la ecuación diferencial de equilibrio de la viga flexionada se puede obtener el valor de la carga crítica. Al derivar estas ecuaciones, utilizaremos los ejes de coordenadas  $x, y, z$  como se muestran en la figura. Adicionalmente, los ejes de coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  se toman desde el baricentro de la sección transversal en la sección  $mn$ . Los ejes  $\xi$  y  $\eta$  son ejes de simetría y por lo tanto ejes principales de inercia de la sección transversal, y  $\zeta$  está en la dirección de la tangente al eje flexionado de la viga luego del pandeo. La deflexión de la viga se define por las componentes  $u$  y  $v$  del desplazamiento del baricentro de la sección en el eje  $x$  e  $y$ , respectivamente, y por el ángulo de rotación  $\phi$  de la sección transversal. Este ángulo de rotación se toma positivo alrededor del eje  $z$  de acuerdo con la regla de la mano derecha, y  $u$  y  $v$  son positivos en la dirección positiva de sus correspondientes ejes. Por tanto, en la Figura 63 el desplazamiento del punto  $C'$  se muestra negativo.

Tabla 3: Cosenos de los ángulos entre los ejes para la Figura 63

	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
<b>ξ</b>	1	$\phi$	$-\frac{d}{dz}u$
<b>η</b>	$-\phi$	1	$-\frac{d}{dz}v$
<b>ζ</b>	$\frac{d}{dz}u$	$\frac{d}{dz}v$	1

<sup>9</sup> Timoshenko, Gere; Theory of Elastic Stability, 1963, Torsional buckling. Chapter 6.

En los cálculos que siguen para determinar el momento crítico, se utilizarán las expresiones de los ángulos entre los ejes de coordenadas  $x, y, z$  y  $\xi, \eta, \zeta$ . Cuando los valores  $u, v$  y  $\phi$  considerados son muy pequeños, los cosenos de los ángulos entre las direcciones positivas de los ejes tienen el valor indicado en la Tabla 3.

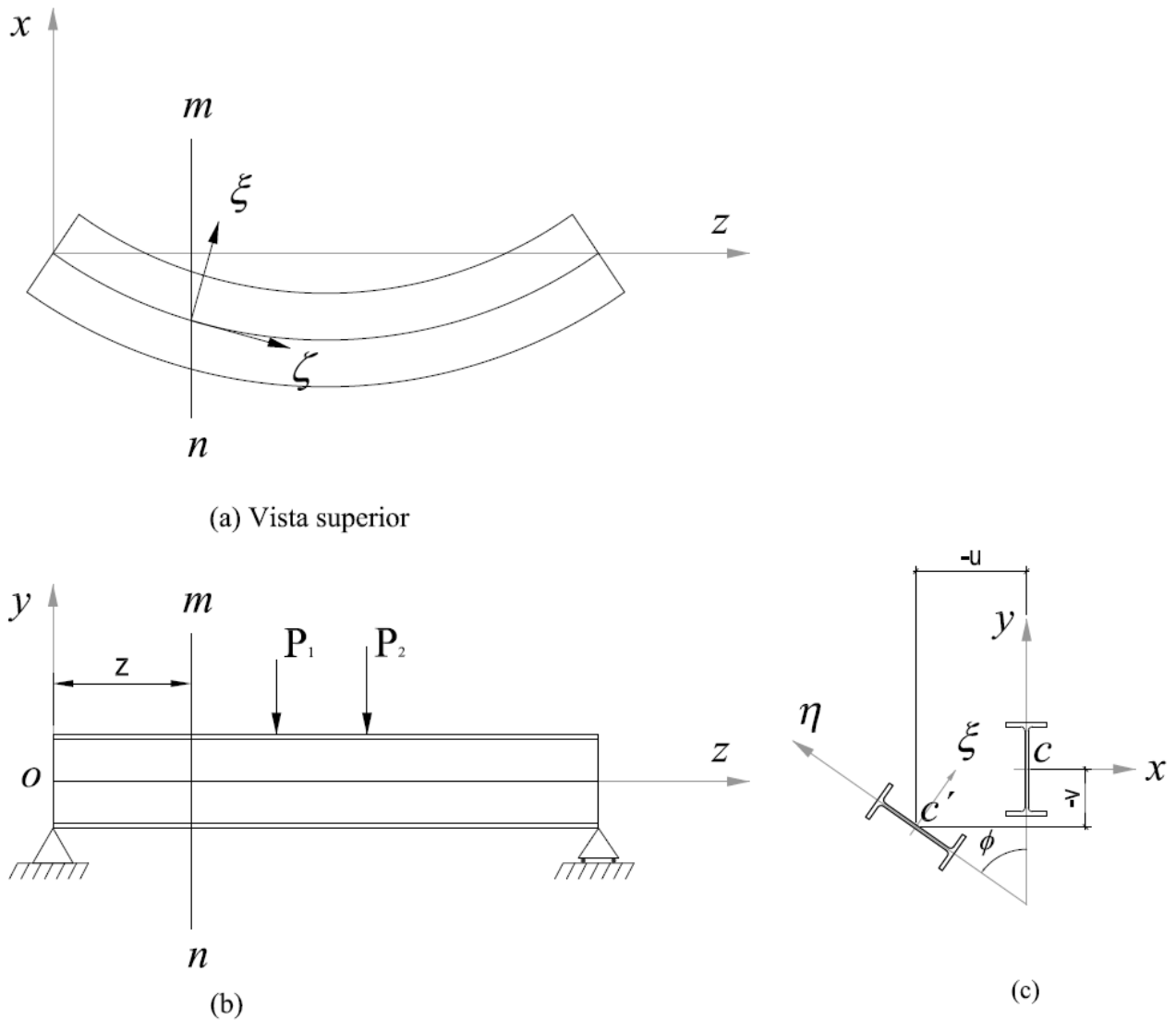


Figura 63: Perfil doble T sometido a flexión según su eje fuerte

Las curvaturas de los ejes desviados de las vigas (Figura 63) en los planos  $xz$  e  $yz$  pueden considerarse como  $d^2u/dz^2$  y  $d^2v/dz^2$ , respectivamente, para pequeñas deformaciones. Para ángulos de torsión  $\phi$  pequeños, se puede asumir que la curvatura en los planos  $\xi\zeta$  y  $\eta\zeta$  tienen el mismo valor. Luego, las ecuaciones diferenciales de momento de la viga serán:

$$E \cdot I_{\xi} \cdot \frac{d^2}{dz^2} v = M_{\xi} \tag{Ecuación 86}$$

Ecuación 87

$$E \cdot I_{\eta} \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = M_{\eta}$$

En estas ecuaciones,  $I_{\xi}$  e  $I_{\eta}$ , son los momentos principales de inercia de la sección transversal alrededor de los ejes  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente. Los valores de  $M_{\xi}$  y  $M_{\eta}$  representan los momentos flectores respecto a los mismos ejes, que se asumen positivos de acuerdo con la Figura 64.

La ecuación diferencial de la torsión no uniforme es:

$$C \cdot \left( \frac{d}{dz} \phi \right) - C_1 \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M_{\xi}$$

Ecuación 88

Donde  $C = GJ$  es la rigidez torsional y  $C_1 = EC_w$  es la rigidez al alabeo. El momento torsor  $M_{\xi}$  se considera positivo de acuerdo con la Figura 64, lo cual muestra que los pares torsores actúan en un elemento de viga.

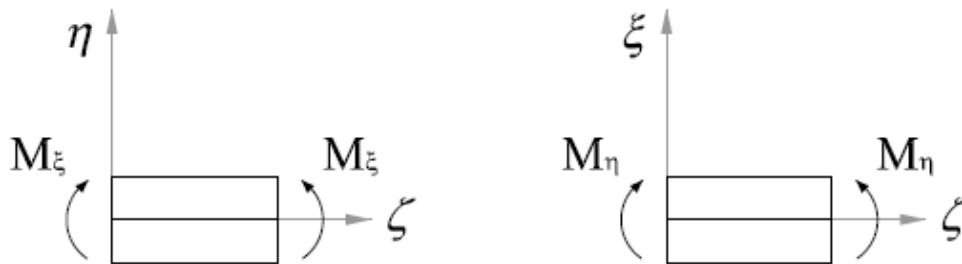


Figura 64: Signos de los momentos

La Ecuación 88 es válida para una barra de sección abierta de paredes delgadas, como lo es la viga doble T de la Figura 65. Las tres ecuaciones diferenciales (Ecuación 86, Ecuación 87 y Ecuación 88) representan las ecuaciones de equilibrio para la viga deformada, y a partir de ellas se puede obtener el valor crítico de la carga.

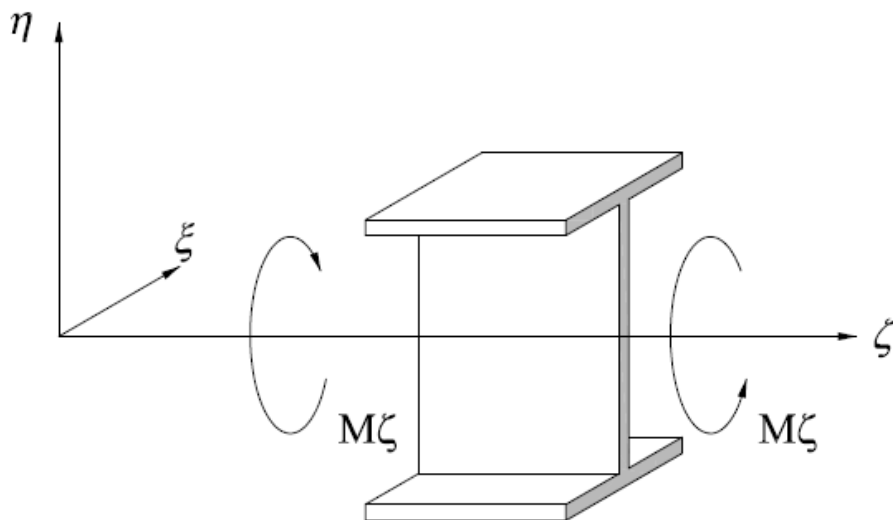


Figura 65: Perfil doble T sometido a  $M_{\zeta}$

## 12.2. Pandeo lateral de vigas en flexión pura

Si se somete una viga doble T a dos cuplas  $M_0$  en sus extremos, el momento y la torsión en cualquier sección transversal pueden hallarse tomando las componentes de  $M_0$  en los ejes  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$ . Además, utilizando los valores dados en la primera columna de la Tabla 3, y considerando las direcciones positivas de los Momentos (Figura 64 y Figura 65), se obtiene:

$$M_0 = M_\xi$$

$$M_\eta = \phi \cdot M_0$$

$$M_\zeta = -\frac{d}{dz} u \cdot M_0$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación 86 a Ecuación 88, se obtienen las siguientes ecuaciones en  $u$ ,  $v$  y  $\phi$ :

$$E \cdot I_\xi \cdot \frac{d^2}{dz^2} v - M_0 = 0 \quad \text{Ecuación 89}$$

$$E \cdot I_\eta \cdot \frac{d^2}{dz^2} u - \phi \cdot M_0 = 0 \quad \text{Ecuación 90}$$

$$C \cdot \left( \frac{d}{dz} \phi \right) - C_1 \cdot \frac{d^3}{dz^3} \phi + \frac{d}{dz} u = 0 \quad \text{Ecuación 91}$$

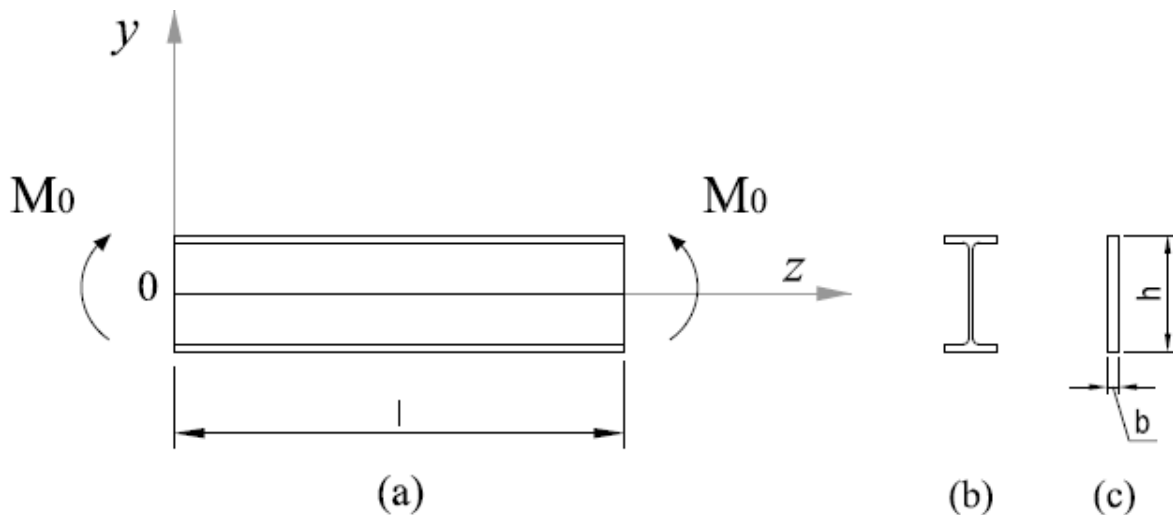


Figura 66: Perfil doble T sometido a Momento flexor

Diferenciando la última ecuación respecto a  $z$ , eliminando  $d^2u/dz^2$  y combinando con la Ecuación 90, se obtiene la siguiente ecuación para el ángulo de torsión  $\phi$ :

$$C_1 \cdot \frac{d^4}{dz^4} \phi - C \cdot \frac{d^2}{dz^2} \phi - \frac{M_0^2}{E \cdot I_\eta} = 0 \quad \text{Ecuación 92}$$

$$\frac{d^4}{dz^4}\phi - 2\cdot\alpha\cdot\frac{d^2}{dz^2}\phi - \beta\cdot\phi = 0 \quad \text{Ecuación 93}$$

$$\alpha = \frac{C}{2\cdot C_1} \quad \beta = \frac{M_0^2}{E\cdot I_\eta \cdot C_1} \quad \text{Ecuación 94}$$

La solución general de la Ecuación 93 es:

$$\phi = A_1\cdot\sin(m\cdot z) + A_2\cdot\cos(m\cdot z) + A_3\cdot e^{n\cdot z} + A_4\cdot e^{-n\cdot z} \quad (a)$$

en la que  $m$  y  $n$  son cantidades reales, positivas, definidas por las siguientes ecuaciones:

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \quad n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \quad (c)$$

Las constantes de integración  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  se deben determinar mediante las condiciones de borde de las barras. Asumiendo que los extremos no pueden rotar alrededor del eje  $z$  (Figura 63) pero son libres de alabeo, las condiciones de borde son:

$$\phi = \frac{d^2}{dz^2}\phi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = l$$

Para la condición de  $z = 0$  se concluye que,

$$A_2 = 0 \quad A_3 = -A_4$$

y luego el ángulo de torsión  $\phi$  se puede representar de la siguiente manera:

$$\phi = A_1\cdot\sin(m\cdot z) - 2A_4\cdot e^{-n\cdot z}$$

Ahora, utilizando la condición en  $z = l$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1\cdot\sin(m\cdot l) - 2A_4\cdot\sinh(n\cdot l) &= 0 \\ A_1\cdot m^2\cdot\sin(m\cdot l) + 2A_4\cdot n^2\cdot\sinh(n\cdot l) &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Igualando a cero el determinante de esta ecuación,

$$\sin(m\cdot l)\cdot\left[n^2\cdot(\sinh(n\cdot l) + m^2\cdot\sinh(n\cdot l))\right] = 0$$

Dado que  $n$  y  $m$  son positivos y distintos a cero,

$$\sin(m\cdot l) = 0 \quad (e)$$

y de la ecuación (d) concluimos que  $A_4 = 0$ , por lo tanto, la forma de pandeo responde a la siguiente ecuación:

$$\phi = A_1 \cdot \sin(mz)$$

y la viga pandea con la forma de una onda sinusoidal.

El menor valor de  $m$  que satisface la ecuación (e) es

$$m = \frac{\pi}{l}$$

o, utilizando la expresión (b)

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

Sustituyendo con la Ecuación 94 y resolviendo el valor crítico de  $M_0$  de la última ecuación se obtiene:

$$M_{0,cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{E \cdot I_{\eta} \cdot C \cdot \left( 1 + \frac{C_1}{C} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \quad \text{Ecuación 95}$$

La magnitud del momento crítico dado por la Ecuación 95, no depende de la rigidez flexional  $EI_{\xi}$  de la viga en el plano vertical. Esta conclusión se obtiene como resultado de asumir que las deflexiones en el plano vertical son pequeñas, lo cual es justificable cuando la rigidez flexional  $EI_{\xi}$  es mucho mayor que la rigidez  $EI_{\eta}$ .



## 13. ANEXO 5: MÉTODO DE LA RESISTENCIA DIRECTA

### 13.1. Introducción

Se hará referencia al Apéndice 1 de la especificación AISI (American Iron and Steel Institute), Edición 2012. Este Apéndice provee un método de diseño alternativo al indicado en los Capítulos A hasta G y Apéndices A y B, para perfiles de acero laminados en frío. El Método de la Resistencia Directa requiere previamente la determinación del comportamiento elástico de un elemento estructural y provee una serie de curvas de resistencia nominal para predecir la resistencia del mismo, basada en dicho comportamiento elástico. El procedimiento no requiere el cálculo del ancho efectivo o la iteración. Por el contrario, utiliza las propiedades de la sección bruta y el comportamiento de pandeo elástico para predecir la resistencia.

#### 13.1.1. Alcance

Los contenidos del Apéndice 1 se aplican para determinar la resistencia axial nominal ( $P_n$ ) y flexional ( $M_n$ ) de los perfiles de acero laminados en frío. Las secciones 13.2.1. y 13.2.2. presentan un método aplicable a todas las secciones laminadas en frío de vigas y columnas. Aquellas barras que cumplen con las limitaciones geométricas y del material de la Sección 13.1.1.1 para columnas y 13.1.1.2 para vigas han sido precalificadas para su uso debiéndose aplicar el factor de calibración,  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$ .

El Método de la Resistencia directa no se ocupa de barras en tensión, abolladura local del alma, la combinación de flexión y abolladura local del alma, o la combinación de esfuerzo axial y flexión en vigas y columnas. Tampoco provee información para el cálculo de elementos ensamblados o de conexiones y uniones.

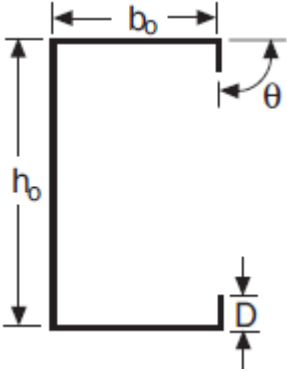
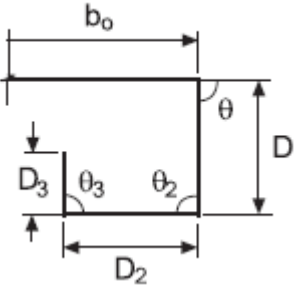
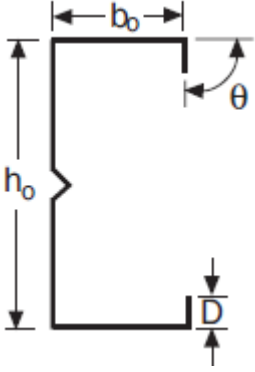
Para aquellas barras o situaciones en las cuales no es aplicable la Especificación principal, se recurrirá a este Apéndice.

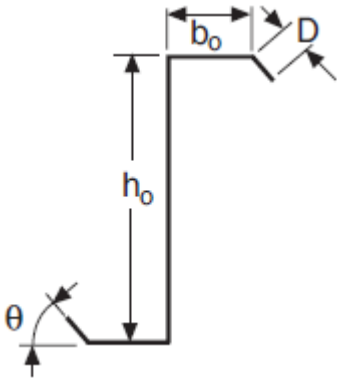
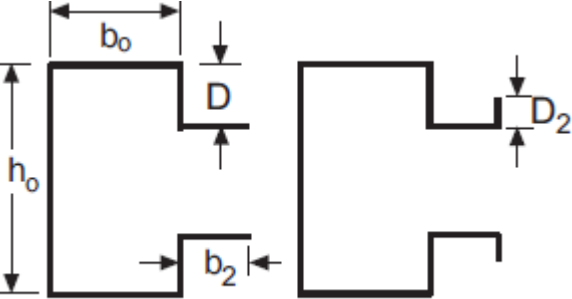
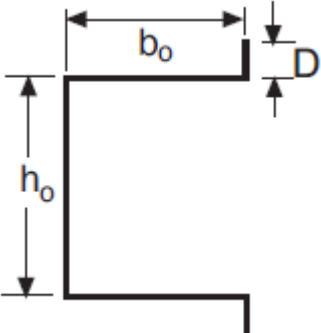
##### 13.1.1.1. Columnas precalificadas

Las columnas que cumplan con las limitaciones geométricas y del material de la Tabla 4 podrán ser diseñadas utilizando el factor  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$  definidos en la sección 13.2.1. y se permite su diseño ya sea que tengan perforaciones o no.

En aquellas columnas que no cumplan con estos requerimientos se permite todavía utilizar el factor  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$  definidos en la sección 13.2.1. siempre que el factor  $\phi$  indicado por el Capítulo F de la especificación principal sea igual o mayor que el de esta sección 13.2.1.

Tabla 4: Límites para columnas precalificadas (1)

<p>Sección C con labios simples:</p>  <p>Labios complejos:</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 472</math>  <math>b_0/t &lt; 159</math>  <math>4 &lt; D/t &lt; 33</math>  <math>0.7 &lt; h_0/b_0 &lt; 5.0</math>  <math>0.05 &lt; D/b_0 &lt; 0.41</math>  <math>\theta = 90^\circ</math>  <math>E/F_v &gt; 340</math> [<math>F_v &lt; 86\text{ksi}</math> (593MPa o 6050kg/cm<sup>2</sup>)]         </p> <p>Para secciones C con labios complejos:</p> <p> <math>D_2/t &lt; 34</math>  <math>D_2/D &lt; 2</math>  <math>D_3/t &lt; 34</math>  <math>D_3/D_2 &lt; 1</math> </p> <p>Nota:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Se permite que la variación de <math>\theta_2</math> (El labio <math>D_2</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</li> <li>b) Se permite que la variación de <math>\theta_3</math> (El labio <math>D_3</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</li> </ul>
<p>Sección C con labios y rigidizador en el alma:</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 489</math>  <math>b_0/t &lt; 160</math>  <math>6 &lt; D/t &lt; 33</math>  <math>1.3 &lt; h_0/b_0 &lt; 2.7</math>  <math>0.05 &lt; D/b_0 &lt; 0.41</math>                  Uno o dos rigidizadores intermedios  <math>E/F_v &gt; 340</math> [<math>F_v &lt; 86\text{ksi}</math> (593MPa o 6050kg/cm<sup>2</sup>)]         </p>

<p>Sección Z:</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 137</math>  <math>b_0/t &lt; 56</math>  <math>0 &lt; D/t &lt; 36</math>  <math>1.5 &lt; h_0/b_0 &lt; 2.7</math>  <math>0.00 &lt; D/b_0 &lt; 0.73</math>  <math>\theta = 50^\circ</math>  <math>E/F_v &gt; 590 [F_v &lt; 50\text{ksi} (345\text{MPa o } 3520\text{kg/cm}^2)]</math> </p>
<p>Sección estante vertical:</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 51</math>  <math>b_0/t &lt; 22</math>  <math>5 &lt; D/t &lt; 8</math>  <math>2.1 &lt; h_0/b_0 &lt; 2.9</math>  <math>1.6 &lt; b_2/D &lt; 2.0</math> (<math>b_2 =</math> rigidizador paralelo a <math>b_0</math>)  <math>D_2/D = 0.3</math> (<math>D_2 =</math> segundo labio paralelo a <math>D</math>)  <math>E/F_v &gt; 340 [F_v &lt; 86\text{ksi} (593\text{MPa o } 6050\text{kg/cm}^2)]</math> </p>
<p>Sección sombrero:</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 50</math>  <math>b_0/t &lt; 20</math>  <math>4 &lt; D/t &lt; 6</math>  <math>1.0 &lt; h_0/b_0 &lt; 1.2</math>  <math>D/b_0 = 0.13</math>  <math>E/F_v &gt; 428 [F_v &lt; 69\text{ksi} (476\text{MPa o } 4850\text{kg/cm}^2)]</math> </p>

(1)  $r/t < 10$ , donde  $r$  es el radio de la línea media

- $b_0 =$  ancho general
- $D =$  altura general del labio
- $T =$  espesor del metal base
- $h_0 =$  altura general de la sección

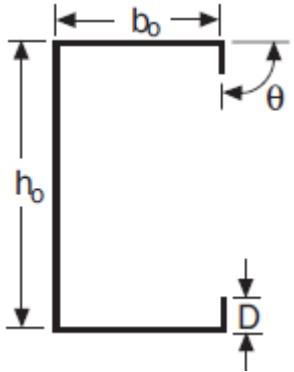
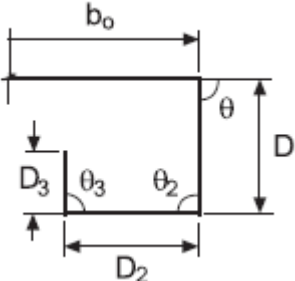
13.1.1.2. Vigas precalificadas

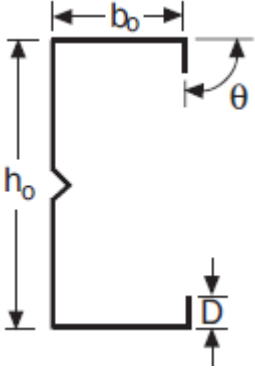
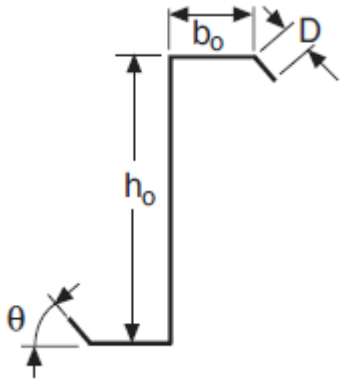
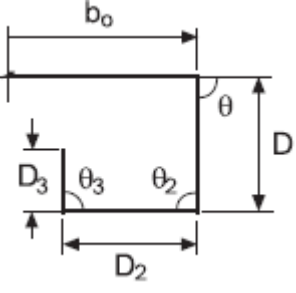
Vigas en flexión que cumplan con las limitaciones geométricas y del material de la Tabla 5 podrán ser diseñadas utilizando el factor  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$  definidos en la sección 13.2.2. y se permite su diseño ya sea que tengan perforaciones o no. No habrá limitaciones en el tamaño, forma o espaciamiento de las perforaciones en vigas para el diseño a flexión.

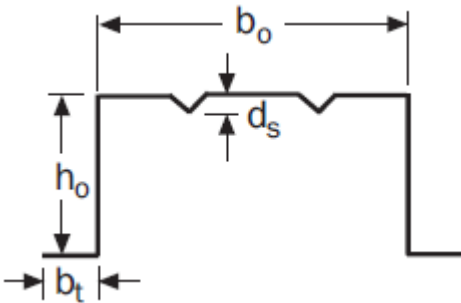
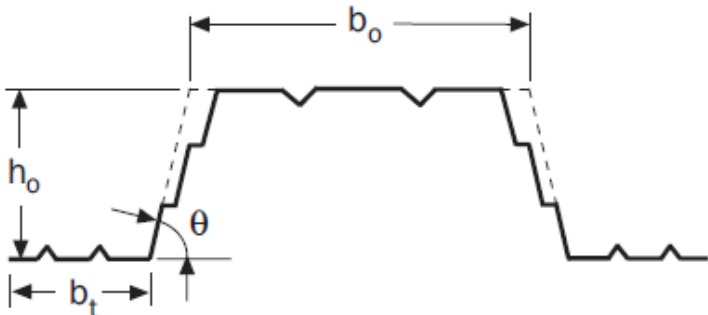
Las vigas en corte sin perforaciones que cumplan con las limitaciones geométricas y del material de la Tabla 5 podrán ser diseñadas utilizando el factor  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$  definidos en la sección 13.2.2.

En aquellas vigas que no cumplan con estos requerimientos se permite todavía utilizar el factor  $\Omega$  y el factor de resistencia  $\phi$  definidos en la sección 13.2.1. siempre que el factor  $\phi$  indicado por el Capítulo F de la especificación principal sea igual o mayor que el de esta sección 13.2.2.

Tabla 5: Límites para vigas precalificadas (1)

<p>Sección C con labios simples:</p> 	<p><math>h_0/t &lt; 321</math></p> <p><math>b_0/t &lt; 75</math></p> <p><math>0 &lt; D/t &lt; 34</math></p> <p><math>1.5 &lt; h_0/b_0 &lt; 17.0</math></p> <p><math>0 &lt; D/b_0 &lt; 0.70</math></p> <p><math>44^\circ &lt; \theta &lt; 90^\circ</math></p> <p><math>E/F_v &gt; 421</math> [<math>F_v &lt; 70\text{ksi}</math> (483MPa o 4920kg/cm<sup>2</sup>)]</p>
<p>Labio complejo:</p> 	<p>Para secciones C con labios complejos:</p> <p><math>D_2/t &lt; 34</math></p> <p><math>D_2/D &lt; 2</math></p> <p><math>D_3/t &lt; 34</math></p> <p><math>D_3/D_2 &lt; 1</math></p> <p>Nota:</p> <p>c) Se permite que la variación de <math>\theta_2</math> (El labio <math>D_2</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</p> <p>d) Se permite que la variación de <math>\theta_3</math> (El labio <math>D_3</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</p>

<p>Sección C con labios y rigidizador en el alma:</p> 	$h_0/t < 358$ $b_0/t < 58$ $14 < D/t < 317$ $5.5 < h_0/b_0 < 11.7$ $0.27 < D/b_0 < 0.56$ $\theta = 90^\circ$ $E/F_v > 578$ [ $F_v < 51\text{ksi}$ (352MPa o 3590kg/cm <sup>2</sup> )]
<p>Sección Z:</p> 	$h_0/t < 183$ $b_0/t < 71$ $10 < D/t < 16$ $2.5 < h_0/b_0 < 4.1$ $0.15 < D/b_0 < 0.34$ $36^\circ < \theta < 90^\circ$ $E/F_v > 440$ [ $F_v < 67\text{ksi}$ (462MPa o 4710kg/cm <sup>2</sup> )]
<p>Labios complejos:</p> 	<p>Para secciones C con labios complejos:</p> $D_2/t < 34$ $D_2/D < 2$ $D_3/t < 34$ $D_3/D_2 < 1$ <p>Nota:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Se permite que la variación de <math>\theta_2</math> (El labio <math>D_2</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</li> <li>b) Se permite que la variación de <math>\theta_3</math> (El labio <math>D_3</math> puede estar rotado hacia adentro o hacia afuera)</li> </ul>

<p>Sección sombrero (Decks) con alma rigidizada en compresión</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 97</math>  <math>b_0/t &lt; 467</math>  <math>0 &lt; d_s/t &lt; 26</math> (profundidad del rigidizador)  <math>0.14 &lt; h_0/b_0 &lt; 0.87</math>  <math>0.88 &lt; b_0/t &lt; 5.4</math>  <math>0 &lt; n \leq 4</math> (número de rigidizadores en compresión)  <math>E/F_v &gt; 492</math> [<math>F_v &lt; 60\text{ksi}</math> (414MPa o 4220kg/cm<sup>2</sup>)]         </p>
<p>Sección trapezoidal (Decks) con alma rigidizada en compresión</p> 	<p> <math>h_0/t &lt; 203</math>  <math>b_0/t &lt; 231</math>  <math>0.42 &lt; (h_0/\sin\theta)/b_0 &lt; 1.91</math>  <math>1.10 &lt; b_0/b_t &lt; 3.38</math>  <math>0 &lt; n_c \leq 2</math> (número de rigidizadores del ala en compresión)  <math>0 &lt; n_w \leq 2</math> (número de rigidizadores del alma / pliegues)  <math>0 &lt; n_t \leq 2</math> (número de rigidizadores del ala en tracción)  <math>52^\circ &lt; \theta &lt; 84^\circ</math>  <math>E/F_v &gt; 310</math> [<math>F_v &lt; 95\text{ksi}</math> 655 o 6680 kg/cm<sup>2</sup>)]         </p>

(1)  $r/t < 10$ , donde  $r$  es el radio de la línea media

$b_0$  = ancho general

Ver sección 13.1.1.1 para la definición de las otras variables en la Tabla 5.

### 13.1.2. Pandeo elástico

Se requiere un análisis previo para determinar la carga crítica o el momento crítico elásticos para utilizar en este apéndice. Para columnas esto incluye las cargas críticas local, distorsional y global:  $P_{crL}$ ,  $P_{crD}$  y  $P_{crE}$  de la sección

13.2.1. Para vigas esto incluye el momento crítico local, distorsional y global:  $M_{crL}$ ,  $M_{crd}$  y  $M_{cre}$ , de la sección

13.2.2. Para determinada columna o viga dada no necesariamente existirán los tres modos de pandeo. En ese caso, el mismo se ignorará.

### 13.1.3. Determinación de la serviciabilidad

La deformación por flexión para un determinado momento ( $M$ ) debido a cargas nominales, se podrá determinar reduciendo el momento de inercia de la sección bruta,  $I_g$ , a un momento de inercia efectivo debido a la deflexión, según la Ecuación 96:

$$I_{\text{eff}} = I_g \cdot \left( \frac{M_d}{M} \right) \leq I_g \quad \text{Ecuación 96}$$

donde

$M_d$  = Resistencia nominal  $M_n$  definida en la sección, pero reemplazando  $M_y$  por  $M$  en las fórmulas de dicha sección.

$M$  = Momento debido a las cargas nominales en la barra considerada ( $M \leq M_y$ )

## 13.2. Barras

### 13.2.1. Diseño de columnas

El esfuerzo axial nominal,  $P_n$ , es el mínimo de  $P_{crL}$ ,  $P_{crd}$  y  $P_{cre}$ , como se indica a continuación. Para columnas que cumplen con las características geométricas y del material dadas en la sección 13.1.1.1,  $\Omega_c$  y  $\phi_c$  son:

USA y México		Canadá
$\Omega_c$ (ASD)	$\phi_c$ (LRFD)	$\phi_c$ (LSD)
1.80	0.85	0.80

Para otras columnas  $\Omega$  y  $\phi$  se obtienen de la sección A1.1(b).

#### 13.2.1.1. Pandeo flexional, torsional y flexotorsional

##### 13.2.1.1.1. Columnas sin perforaciones

El esfuerzo axial nominal  $P_{ne}$ , para pandeo flexional, torsional y flexotorsional es:

Para  $\lambda_c \leq 1.5$  
$$P_{ne} = \left( 0.658^{\lambda_c^2} \right) \cdot P_y \quad \text{Ecuación 97}$$

Para  $\lambda_c > 1.5$

$$P_{ne} = \left( \frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) \cdot P_y \quad \text{Ecuación 98}$$

donde

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cre}}} \quad \text{Ecuación 99}$$

$$P_y = A_g \cdot F_y \quad \text{Ecuación 100}$$

$P_{cre}$  = La menor de las cargas críticas elásticas: flexional, torsional o flexotorsional determinada de acuerdo con la sección 13.1.2.

#### 13.2.1.1.2. Columnas con perforaciones

El esfuerzo axial nominal,  $P_{ne}$  para pandeo flexional, torsional o flexo-torsional de columnas con perforaciones se calculará de acuerdo con la sección 13.2.1.1.1, excepto  $P_{cre}$  que será determinada teniendo en cuenta la influencia de la perforación.

#### 13.2.1.2. Pandeo local

##### 13.2.1.2.1. Columnas sin perforaciones

El esfuerzo axial nominal  $P_{nl}$ , para pandeo local es:

Para  $\lambda_1 \leq 0.776$

$$P_{nl} = P_{ne} \quad \text{Ecuación 101}$$

Para  $\lambda_1 > 0.776$

$$P_{nl} = \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \right] \cdot \left( \frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \cdot P_{ne} \quad \text{Ecuación 102}$$

donde

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{P_{ne}}{P_{crl}}} \quad \text{Ecuación 103}$$

$P_{crl}$  = Carga crítica elástica local de la columna de acuerdo con la sección 13.1.2.

$P_{ne}$  es definida en la sección 13.2.1.1

##### 13.2.1.2.2. Columnas con perforaciones

El esfuerzo axial nominal  $P_{nl}$ , para pandeo local de columnas con perforaciones será calculado de acuerdo con la sección 13.2.1.2.1, excepto  $P_{crl}$  que será determinada incluyendo la influencia de las mismas, y:

$$P_{nl} \leq P_{ynet} \quad \text{Ecuación 104}$$



donde  $P_{ynet} = A_{net} \cdot F_y$  Resistencia a la fluencia del elemento en el área neta Ecuación 105

$A_{net}$  Área neta de la sección transversal donde está la perforación

### 13.2.1.3. Pandeo distorsional

#### 13.2.1.3.1. Columnas sin perforaciones

El esfuerzo axial nominal  $P_{nd}$ , para pandeo distorsional es:

Para  $\lambda_d \leq 0.561$   $P_{nd} = P_y$  Ecuación 106

Para  $\lambda_d > 0.561$   $P_{nd} = \left[ 1 - 0.25 \left( \frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \right] \cdot \left( \frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \cdot P_y$  Ecuación 107

donde  $\lambda_d = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crd}}}$  Ecuación 108

$P_{crd}$  = Carga crítica elástica distorsional de la columna de acuerdo con la sección 13.1.2.

$P_y$  es definida en la Ecuación 100

#### 13.2.1.3.2. Columnas con perforaciones

El esfuerzo axial nominal  $P_{nd}$ , para pandeo distorsional de columnas con perforaciones se calculará de acuerdo con la sección 13.2.1.3.1, excepto  $P_{crd}$  que se determinará teniendo en cuenta la influencia de la perforación, si  $\lambda_d \leq \lambda_{d2}$ , luego:

Para  $\lambda_d \leq \lambda_{d1}$   $P_{nd} = P_{ynet}$  Ecuación 109

Para  $\lambda_{d1} < \lambda_d \leq \lambda_{d2}$   $P_{nd} = P_{ynet} - \left( \frac{P_{ynet} - P_{d2}}{\lambda_{d2} - \lambda_{d1}} \right) \cdot (\lambda_d - \lambda_{d1})$  Ecuación 110

donde  $\lambda_d = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crd}}}$  Ecuación 111

$\lambda_{d1} = 0.561 \cdot \left( \frac{P_{ynet}}{P_y} \right)$  Ecuación 112

$$\lambda_{d2} = 0.561 \cdot \left[ 14 \cdot \left( \frac{P_y}{P_{ynet}} \right)^{0.4} - 13 \right] \quad \text{Ecuación 113}$$

$$P_{d2} = \left[ 1 - 0.25 \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{d2}} \right)^2 \right] \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{d2}} \right)^2 \cdot P_y \quad \text{Ecuación 114}$$

$P_y$  = Límite de elasticidad de la barra de acuerdo con la Ecuación 100

$P_{ynet}$  = Resistencia a la fluencia del elemento en el área neta de acuerdo con la Ecuación 105

### 13.2.2. Diseño de vigas

#### 13.2.2.1. Flexión

El momento nominal,  $M_n$ , es el mínimo de  $M_{ne}$ ,  $M_{nl}$  y  $M_{nd}$ , como se indica a continuación. Para vigas que cumplen con las características geométricas y del material dadas en la sección 13.1.1.2,  $\Omega_c$  y  $\phi_c$  son:

USA y México		Canadá
$\Omega_c$ (ASD)	$\phi_c$ (LRFD)	$\phi_c$ (LSD)
1.67	0.90	0.85

Para otras vigas  $\Omega$  y  $\phi$  se obtienen de la sección A1.1(b) de la especificación principal. La resistencia disponible (factoreada) se determinará de acuerdo con el método de diseño de las secciones A4, A5 o A6 de la especificación principal.

#### 13.2.2.1.1. Pandeo lateral torsional

El momento nominal,  $M_{ne}$ , para pandeo lateral torsional se calculará conforme a esta sección. Se permite utilizar la resistencia nominal incrementada por la reserva inelástica de acuerdo con el punto 13.2.2.1.1.1

##### 13.2.2.1.1.1 Vigas sin perforaciones

##### 13.2.2.1.1.1.1 Resistencia al Pandeo Lateral - Torsional

El momento nominal,  $M_{ne}$ , para pandeo lateral torsional es:

Para  $M_{cre} < 0.56M_y$   $M_{ne} = M_{cre}$  Ecuación 115

Para  $2.78M_y \geq M_{cre} \geq 0.56M_y$   $M_{ne} = \frac{10}{9} \cdot M_y \cdot \left( 1 - \frac{10 \cdot M_y}{36 \cdot M_{cre}} \right)$  Ecuación 116

Para  $M_{cre} > 2.78M_y$   $M_{ne} = M_y$  Ecuación 117

donde  $M_y = S_f \cdot F_y$  siendo  $S_f$  el módulo de la sección bruta referenciado a la fibra extrema que primero alcanza la fluencia Ecuación 118

$M_{cre}$  = Momento crítico lateral torsional determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

13.2.2.1.1.2 Reserva inelástica para pandeo lateral torsional (Resistencia)

Para  $M_{cre} > 2.78 M_y$   $M_{ne} = M_p - (M_p - M_y) \cdot \frac{\sqrt{\frac{M_y}{M_{cre}}} - 0.23}{0.37} \leq M_p$  Ecuación 119

donde  $M_{cre}$  = Momento lateral-torsional crítico elástico, determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

$M_y$  = Momento de fluencia determinado de acuerdo con la Ecuación 118

$M_p = Z_f \cdot F_y$  Momento plástico Ecuación 120

$Z_f$  = Módulo plástico de la sección

13.2.2.1.1.2 Vigas con perforaciones

La resistencia nominal flexional,  $M_{ne}$ , para pandeo lateral-torsional de vigas con perforaciones será calculada de acuerdo con la sección 13.2.2.1.1.1, excepto  $M_{cre}$ , que será determinado incluyendo la influencia de las perforaciones.

13.2.2.1.2. Pandeo local

El momento nominal,  $M_{nl}$ , para pandeo local se calculará de acuerdo con esta sección. Se permite tener en cuenta la resistencia nominal incrementada por la reserva inelástica de acuerdo con la sección 13.2.2.1.2.1.2

13.2.2.1.2.1 Vigas sin perforaciones

13.2.2.1.2.1.1 Resistencia a pandeo local

Para  $\lambda_1 \leq 0.776$   $M_{nl} = M_{ne}$  Ecuación 121

Para  $\lambda_1 > 0.776$   $M_{nl} = \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{M_{crl}}{M_{ne}} \right)^{0.4} \right] \cdot \left( \frac{M_{crl}}{M_{ne}} \right)^{0.4} \cdot M_{ne}$  Ecuación 122

donde  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{M_{ne}}{M_{crl}}}$  Ecuación 123

$M_{crl}$  = Momento crítico elástico local determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

$M_{ne}$  es definido en la sección 13.2.2.1.1

#### 13.2.2.1.2.1.2 Reserva inelástica de la Resistencia a pandeo local

Para  $\lambda_1 \leq 0.776$  y  $M_{ne} \geq M_y$

Secciones simétricas respecto al eje de flexión o secciones con la primera fluencia en compresión:

$$M_{nl} = M_y + \left(1 - \frac{1}{C_{y1}^2}\right) \cdot (M_p - M_y) \quad \text{Ecuación 124}$$

Secciones con la primera fluencia en tracción:

$$M_{nl} = M_{yc} + \left(1 - \frac{1}{C_{y1}^2}\right) \cdot (M_p - M_{yc}) \leq M_{yt3} \quad \text{Ecuación 125}$$

donde  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{M_y}{M_{crl}}}$  Ecuación 126

$M_{ne}$  = Resistencia nominal flexional según se definió en la sección 13.2.2.1.1.1

$$C_{y1} = \sqrt{\frac{0.776}{\lambda_1}} \leq 3 \quad \text{Ecuación 127}$$

$M_{crl}$  = Momento crítico elástico de pandeo local, determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

$M_p$  = Momento plástico de acuerdo con la Ecuación 120

$M_y$  = Momento de fluencia de acuerdo con la Ecuación 118

$M_{yc}$  = Momento para el cual la fluencia se inicia en compresión (después de la fluencia en tensión).

Se puede considerar  $M_{yc} = M_y$  como aproximación conservativa

$$M_{yt3} = M_y + \left(1 - \frac{1}{C_{yt}^2}\right) \cdot (M_p - M_y) \quad \text{Ecuación 128}$$

$C_{yt}$  = Máxima relación entre la tensión de tracción y la tensión de fluencia = 3

#### 13.2.2.1.2.2 Vigas con perforaciones

La resistencia nominal flexional,  $M_{nl}$ , para pandeo local de vigas con perforaciones se calculará de acuerdo con la sección 13.2.2.1.2.1.1, excepto  $M_{crl}$  que será determinado teniendo en cuenta la influencia de las perforaciones, luego:

$$M_{nl} \leq M_{ynet} \quad \text{Ecuación 129}$$

donde  $M_{ynet}$  = Momento de fluencia de la sección neta =  $S_{fnet} F_y$  Ecuación 130

$S_{fnet}$  = Módulo de la sección neta referenciado a la fibra extrema al comienzo de la fluencia

### 13.2.2.1.3. Pandeo distorsional

El momento nominal,  $M_{nd}$ , para pandeo distorsional se calculará de acuerdo con esta sección. Se permite tener en cuenta la reserva inelástica de acuerdo con la sección 13.2.2.1.3.1.2

#### 13.2.2.1.3.1 Vigas sin perforaciones

##### 13.2.2.1.3.1.1 Resistencia a pandeo distorsional

Para  $\lambda_d \leq 0.673$   $M_{nd} = M_y$  Ecuación 131

Para  $\lambda_d > 0.673$   $M_{nd} = \left[ 1 - 0.22 \left( \frac{M_{crd}}{M_y} \right)^{0.5} \right] \cdot \left( \frac{M_{crd}}{M_y} \right)^{0.5} \cdot M_y$  Ecuación 132

donde  $\lambda_d = \sqrt{\frac{M_y}{M_{crd}}}$  Ecuación 133

$M_{crd}$  = Momento crítico elástico distorsional determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

$M_y$  está dado por la Ecuación 118.

##### 13.2.2.1.3.1.2 Reserva inelástica de la Resistencia a pandeo distorsional

Para  $\lambda_l \leq 0.776$  y  $M_{nd} = M_y$

Secciones simétricas respecto al eje de flexión o secciones con la primera fluencia en compresión:

$$M_{nd} = M_y + \left( 1 - \frac{1}{C_{yd}^2} \right) \cdot (M_p - M_y) \quad \text{Ecuación 134}$$

Secciones con la primera fluencia en tracción:

$$M_{nd} = M_{yc} + \left( 1 - \frac{1}{C_{yd}^2} \right) \cdot (M_p - M_{yc}) \leq M_{yt3} \quad \text{Ecuación 135}$$

donde  $\lambda_d = \sqrt{\frac{M_y}{M_{crd}}}$  Ecuación 136

$$C_{yd} = \sqrt{\frac{0.673}{\lambda_d}} \leq 3$$

Ecuación 137

$M_{crd}$  = Momento crítico elástico de pandeo distorsional, determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

$M_p$  = Momento plástico de acuerdo con la Ecuación 120

$M_y$  = Momento de fluencia de acuerdo con la Ecuación 118

$M_{yc}$  = Momento para el cual la fluencia se inicia en compresión, como se definió en la sección 13.2.2.1.2.1.2

$M_{yt3}$  = Máximo momento para la fluencia en tensión, como se definió en la Ecuación 128

### 13.2.2.1.3.2 Vigas con perforaciones

El momento flexional nominal (Resistencia),  $M_{nd}$ , para pandeo distorsional será calculado de acuerdo con la sección 13.2.2.1.3.1.1, excepto  $M_{crd}$ , que se determinará teniendo en cuenta la influencia de las perforaciones, y cuando  $\lambda_d \leq \lambda_{d3}$  luego:

Para  $\lambda_d \leq \lambda_{d1}$   $M_{nd} = M_{ynet}$  Ecuación 138

Para  $\lambda_{d1} < \lambda_d \leq \lambda_{d2}$

$$M_{nd} = M_{ynet} - \left( \frac{M_{ynet} - M_{d2}}{\lambda_{d2} - \lambda_{d1}} \right) \cdot (\lambda_d - \lambda_{d1}) \leq \left[ 1 - 0.22 \cdot \left( \frac{M_{crd}}{M_y} \right)^{0.5} \right] \cdot \left( \frac{M_{crd}}{M_y} \right)^{0.5} \cdot M_y$$
Ecuación 139

donde  $\lambda_d = \sqrt{\frac{M_y}{M_{crd}}}$  Ecuación 140

$$\lambda_{d1} = 0.673 \cdot \left( \frac{M_{ynet}}{M_y} \right)^3$$
Ecuación 141

$$\lambda_{d2} = 0.673 \cdot \left[ 1.7 \cdot \left( \frac{M_y}{M_{ynet}} \right)^{2.7} - 0.7 \right]$$
Ecuación 142

Límite de esbeltez distorsional en la transición

$$M_{d2} = \left[ 1 - 0.22 \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{d2}} \right) \right] \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{d2}} \right) \cdot M_y$$
Ecuación 143

$M_y$  = momento de fluencia de acuerdo con la Ecuación 118

$M_{ynet}$  = Momento de fluencia de la sección neta de acuerdo con la Ecuación 130

### 13.2.2.2. Corte

La resistencia nominal a corte,  $V_n$ , de vigas sin perforaciones en el alma será calculada de acuerdo con esta sección. Para vigas que cumplan las características geométricas y del material de la Tabla 5,  $\Omega_v$  y  $\phi_v$ , serán:

USA y México		Canadá
$\Omega_v$ (ASD)	$\phi_v$ (LRFD)	$\phi_v$ (LSD)
1.60	0.95	0.80

Para otras vigas  $\Omega$  y  $\phi$  se obtienen de la sección A1.1(c) de la especificación principal. La resistencia disponible (factoreada) se determinará de acuerdo con el método de diseño de las secciones A4, A5 o A6 de la especificación principal.

#### 13.2.2.2.1. Vigas sin rigidizadores en el alma

Para  $\lambda_v = 0.815$   $V_n = V_y$  Ecuación 144

$0.815 < \lambda_v \leq 1.227$   $V_n = 0.815 \cdot \sqrt{V_{cr} \cdot V_y}$  Ecuación 145

$\lambda_v > 1.227$   $V_n = V_{cr}$  Ecuación 146

donde  $\lambda_v = \sqrt{\frac{V_y}{V_{cr}}}$  Ecuación 147

$V_y = 0.6 \cdot A_w \cdot F_y$  Tensión de fluencia a corte de la sección Ecuación 148

$A_w = h \cdot t$  Área del alma del elemento Ecuación 149

$F_y$  = Tensión de fluencia de diseño determinada de acuerdo con la Sección A7.1

$V_{cr}$  = Corte crítico elástico de la sección determinado de acuerdo con la sección 13.1.2.

#### 13.2.2.2.2. Vigas con rigidizadores en el alma

Para vigas con rigidizadores en el alma espaciados una distancia que no exceda el doble de la altura de la misma, esta sección permite determinar la resistencia nominal a corte en lugar de la Sección 13.2.2.2.1.

Para  $\lambda_v \leq 0.776$   $V_n = V_y$  Ecuación 150

$$\lambda_v > 0.776 \quad V_n = \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{V_{cr}}{V_y} \right)^{0.4} \right] \cdot \left( \frac{V_{cr}}{V_y} \right)^{0.4} \cdot V_y \quad \text{Ecuación 151}$$

### 13.2.2.3. Combinación de flexión y corte

Para vigas sujetas a una combinación de flexión y corte, se deberá utilizar la sección C3.3 de la Especificación Principal, sustituyendo  $M_{nxo}$  por  $M_{nlo}$  y  $V_n$  según:

$M_{nlo}$  = Flexión nominal (Resistencia) para pandeo local (Ver Sección 13.2.2.1.2) con  $M_{ne} = M_y$

$V_n$  = Corte nominal (Resistencia) considerando el corte solamente (Ver Sección 13.2.2.2)

Si se utiliza la Sección 13.2.2.2.2 para computar  $V_n$ ,  $M_{nxo}$  se calculará de la siguiente manera:

$M_{nxo}$  = Menor valor de la flexión nominal (resistencia) para pandeo local (Ver Sección 13.2.2.1.2) con  $M_{ne} = M_y$  y la flexión nominal (resistencia) para pandeo distorsional (Ver Sección 13.2.2.1.3)

## 13.3. Conclusiones

- El Método de la Resistencia Directa es una nueva metodología para columnas y vigas con secciones conformadas en frío, adoptado formalmente como procedimiento de diseño alternativo por la especificación AISI.
- Este método emplea las propiedades brutas de la sección transversal, pero requiere un cálculo preciso del pandeo elástico del elemento estructural.
- La mejor elección para predecir este comportamiento elástico son los métodos numéricos, como el Método de las Bandas Finitas (FSM)
- El Software CUFSM, que emplea el Método de las Bandas Finitas, muestra muy buenos resultados en comparación con la teoría clásica de la estabilidad elástica, pudiéndose adoptar como herramienta complementaria para la utilización del Método de la Resistencia Directa.
- La confiabilidad del Método de la Resistencia Directa supera al tradicional Método del Ancho Efectivo para una gran base de datos de vigas y columnas.
- El desarrollo de este Método continúa y proveerá para las distintas secciones una interacción específica con mayor precisión que las ecuaciones simples de interacción – esencialmente lineales – de uso corriente.



## **14. ANEXO 6: DESARROLLO NUMÉRICO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ DEL MÉTODO DE LAS BANDAS FINITAS**

Se adjuntan en digital los archivos en los que se realiza el cálculo de las matrices de rigidez y de transformación del método de las bandas finitas que emplea el programa CUFSM, desarrolladas mediante el Software *Wolfram Mathematica 9*, que podrán utilizarse para resolver distintos casos de secciones abiertas de paredes delgadas.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁDÁNY, Sandor: Bucling Mode classification of members with open thin – walled cross – sections by using the Finite Strip Method, Johns Hopkins University, Baltimore, USA, 2004.
- AISI Standard, Specification for the Design of Cold – Formed Steel Structural Members, Washington DC, USA, 1996 Edition.
- AISI 2004, Appendix 1, Design of Cold – Formed Steel Structural Members using the Direct Strength Method, Washington DC, USA, 2004.
- AISI 2006, Committee on Specifications for the Design of Cold – Formed Steel Structural Members, Distortional Buckling of Cold – Formed Steel Columns, Research report RP00-1, USA, 2006.
- AISI Standard, North American Specification for the Design of Cold – Formed Steel Structural Members, Washington DC, USA, 2006.
- AISI Standard, Specification for the Design of Cold – Formed Steel Structural Members, Washington DC, USA, 2012 Edition.
- AISI Standard, Specification for the Design of Cold – Formed Steel Structural Members, Washington DC, USA, 2016 Edition.
- BRADFORD, M. A., AZHARI, M.: Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, Journal Computers & Structures, 1995.
- CHEUNG, Y. K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, First Edition, Adelaide, AUSTRALIA, 1976.
- CHEUNG, Y.K., THAM, L. G.: A review of the Finite Strip Method, University of Hong Kong, HONG KONG, 2000.
- CHICK, Cameron, RASMUSSEN, Kim, Thin–Walled Beam–Columns. II. Proportional Loading Tests, Journal of Structural Engineering, Vol. 125, N°11, USA, 1999.
- CIRSOC 301-2005: Reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- CIRSOC 301-2016: Reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2016.
- CIRSOC 303-2009: Reglamento Argentino de Elementos Estructurales de Acero de sección abierta conformados en frío, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2009.
- CUDÓNS SAMBLANCAT, Vicente: Cálculo de Estructuras de Acero, H. Blume Ediciones, 1978.
- DUAN, Lian, CHEN, Wai-Fah, Member, ASCE: Design Interaction Equation for Steel Beam – Columns, Journal of Structural Engineering, Vol. 115, N°5, USA, 1989.
- GRAVES SMITH, T.R., SRIDHARAN, S: A Finite Strip Method for the Buckling of Plate Structures under arbitrary loading, Department of Civil Engineering, The University, Southampton, ENGLAND, 1979.

- GUNJAVATE, P. V., JADHAV, M. M.: Applications of Finite Strip Method – A Review, *International Journal of Advanced Engineering Technology*, 2013.
- HAMIDREZA, Naderian, RONAGH, H.R.: Bucling analysis of thin – walled cold – formed steel structural members using complex finite strip method, *Engineering Journal*, USA, 2015.
- HUTTON, David: Fundamentals of Finite Element Analysis, Ed. Mc Graw Hill, New York, USA, 2004.
- KAVEH, A.: Computational Structural Analysis and Finte Element Methods, Ed. Springer, SUIZA, 2014.
- KHENNANE, Amar: Introduction to Finite Element Analysis using Matlab and Abacus, Taylor and Francis Group, LLC, Florida, USA, 2013.
- LI, Zhanjie: Buckling Analysis of the Finite Strip Method and theoretical extension of the Constrained Finite Strip Method for General Boundary conditions, Johns Hopkins University, Baltimore, USA, 2009.
- LOGAN, Daryl, A First Course in the Finite Element Method, Fourth Edition, Wisconsin, USA, 2007.
- MILASINOVIC, Dragan: Buckling Analysis of Thin Sections using the Finite Strip Method with a Coupled Stiffness Matrix, Civil, Comp. Press, Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, SERBIA, 2009.
- MILASINOVIC, Dragan: Quasi – Static and Dynamic Inelastic Buckling and Failure of Plate Structures using the Finite Strip Method, Comp. Press, Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, SERBIA, 2015.
- NGUYEN, Van Vinh, HANCOCK, Gregory, PHAM, Cao Hung: Analysis of thin – walled sections under localised loading for general end boundary conditions – Part 2: Buckling, Sydney, AUSTRALIA, 2016.
- REZK, Horacio: Teoría Lineal de las Barras Elásticas Prismáticas de Sección Abierta y Paredes Delgadas, Ediciones La Línea Recta, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina, 1995.
- REZK, Horacio: Teoría de Segundo Orden de las Barras Elásticas Prismáticas de Sección Abierta y Paredes Delgadas, Ediciones La Línea Recta, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina, 1981.
- SCHAFER, Benjamin, Progress on the Direct Strength Method, International Specialty Conference on Cold – Formed Steel Structures, Missouri, USA, 2002.
- SCHAFER, Benjamin, PEKÖZ, Teoman: Local and distortional Buckling of Cold – Formed Steel Members with Edge Stiffened Flanges.
- SCHAFER, Benjamin, ÁDÁNY, Sandor, Buckling analysis of cold – formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, 18<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold – Formed Steel Structures, Orlando, USA, 2006.
- SCHAFER, Benjamin: Review: The Direct Strength Method of Cold – Formed Steel Member Design, Stability and Ductility of Steel Structures, D. Camotin et al. (Eds.), Lisbon, Portugal, 2006.
- SCHAFER, Benjamin: Computational Modeling of Cold – Formed Steel, Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Sydney, AUSTRALIA, 2008.

SCHAFER, Benjamin, LI, Zhanjie: Buckling analysis of cold – formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, Twentieth International Specialty Conference on Cold – Formed Steel Structures, Saint Louis, Missouri, USA, 2010.

TIMOSHENKO, Stephen, GERE, James: Theory of Elastic Stability, Ed. Mc Graw Hill, Segunda Edición, USA, 1963.

ZHANG, Yu, HE, Bin, YAO, Li-Ke and LONG, Jin: Buckling analysis of thin-walled members via semi-analytical finite strip transfer matrix method, Advances in Mechanical Engineering, Vol. 8(5) I-II, 2016.