

Una Experiencia en el Aula de Matemática Aplicando Tecnologías Emergentes

Sonia Pastorelli¹, Eva Casco¹, Valeria Bertossi¹, Sandra Ramirez¹

¹Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Lavaisse 610, 3000 Santa Fe, Argentina

[\[spastorelli.ecasco.sramirez@frsf.utn.edu.ar\]](mailto:spastorelli.ecasco.sramirez@frsf.utn.edu.ar), valeriabertossi@live.com.ar

Resumen. En el afán de que contenidos puedan ser comprendidos por los estudiantes se recurre a la incorporación de softwares que colaboren en el proceso. En este sentido es necesario examinar, utilizar, mediar y hasta reformular los disponibles en la web. La selección de las tecnologías existentes y su adaptación para el uso en nuevas situaciones didácticas es lo que actualmente nos preocupa y nos ocupa en la cátedra Análisis Matemático II. Este trabajo resume la experiencia en la que el uso de un applet resultó medular para mejorar los desempeños de comprensión del tópico “sistemas de ecuaciones diferenciales lineales” por parte de estudiantes del ciclo inicial universitario.

Palabras Clave: Tecnologías Emergentes – Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC) – Comprensión – Sistema lineal de ecuaciones diferenciales (SL EDO)

1 Introducción

El logro de desempeños que impliquen comprensión es un elemento clave dentro de la educación matemática. En efecto, después de una época en que la preocupación se centró en la adquisición de técnicas y la repetición de rutinas estandarizadas, se evidencia que es importante atender al desarrollo de habilidades que van más allá de la mecánica aplicación de métodos y algoritmos. El National Council of Teachers of Mathematics postula: “los alumnos de todos los niveles deberían entender la matemática como un campo de investigación plenamente integrado, que apunta a ayudarlos a resolver problemas, razonar y hacer conexiones. Los alumnos deberían estar expuestos a numerosas y diversas experiencias interrelacionadas que los alienten a valorar la empresa matemática, a desarrollar hábitos mentales y comprender y valorar el papel de la matemática en los asuntos humanos; que debería motivárselos para explorar, calcular y hasta cometer y corregir errores para que tengan confianza en su capacidad para resolver problemas complejos; que deberían leer, escribir y discutir y que deberían conjeturar, probar y construir argumentos sobre la validez de una conjetura ...” (en Stone Wiske [1]).

En la experiencia reportada en este artículo se adhiere a que “Comprender es desempeñarse de un modo flexible en un área de conocimiento, es poder realizar una variada gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema, por

ejemplo explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías, y representarlo de una manera nueva” (en Blythe [2]).

Se pretende alentar la comprensión conceptual, las representaciones y conexiones múltiples, la modelación matemática y la resolución de problemas. Y en esta línea, el uso de paquetes de computación que permitan cálculos numéricos y simbólicos con capacidad gráfica puede jugar un papel importante. Aunque el uso de medios tecnológicos, incluidas las computadoras, no garantiza ‘per se’ que los alumnos desarrollen estrategias para aprender, ni fomentan el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior. Se adhiere a dicha postura de Liguori, (en Litwin [3]), en que la calidad educativa depende, más que de sus características técnicas, del uso o explotación didáctica que realice el docente y del contexto en el que se desarrolle.

Según Cabero y Llorente [4], antes de pensar en términos de qué medio, debemos plantearnos para quién, cómo lo vamos a utilizar y qué pretendemos con él.

Cuando se habla de aprendizaje es de destacar que el individuo no es la única variable a considerar, sino que están presentes también su historia personal, los conocimientos adquiridos, las personas que lo rodean y su entorno, las herramientas que dispone; que no sólo apoyan al aprendizaje, sino que también lo determinan.

Para Veletsianos [5], las tecnologías emergentes son herramientas, conceptos, innovaciones y avances utilizados en diversos contextos educativos al servicio de diversos propósitos relacionados con la educación.

Para Siemens [6], el conocimiento se encuentra disperso y el mismo se obtiene en relación con el conocer, se crea y configura gracias a la actividad de muchos. Internet da la posibilidad de acceder, agregar, modificar el conocimiento y su forma de apropiación mediante el uso de tecnologías que están emergiendo.

En el afán de la búsqueda constante de que contenidos puedan ser comprendidos y asimilados por los estudiantes es que se recurre a la incorporación de softwares que colaboren en el proceso. Y en este sentido, es necesario examinar, utilizar, mediar y reformular los disponibles en la web. La selección de las tecnologías existentes y su adaptación para el uso en nuevas situaciones didácticas es lo que actualmente nos preocupa y nos ocupa en la cátedra.

2 El Problema y Una Forma de Afrontarlo

El abordaje analítico predomina en la enseñanza de ecuaciones diferenciales. Se asienta en el desarrollo de un menú de algoritmos que permiten resolverlas, el que, por lo común, redundante en un aprendizaje mecánico, carente de utilidad para el estudiante, que no invita a la interpretación de la(s) solución(es). Por su parte, el enfoque cualitativo trata de investigar las propiedades de las soluciones sin necesidad de resolver la EDO. Este tipo de estudio, combinado con la visualización de campos vectoriales, curvas solución y expresiones algebraicas obtenidas de resolución analítica, permite un mejor entendimiento e interpretación de las soluciones.

En el Nuevo Diseño Curricular de la UTN se toma esta idea y en la resolución 68/94 se incluyen en la asignatura Análisis Matemático II los siguientes contenidos: “Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales”, “Aplicaciones del álgebra lineal a las ecuaciones diferenciales”, “Solución fundamental: la exponencial matricial”, “Teoría

cuantitativa: puntos de equilibrio, estabilidad”, “Ejemplos con modelos de situaciones de la realidad”, “Simulación computacional”. Uno de los grandes desafíos para los docentes de la cátedra es que los contenidos *mínimos* enumerados por el diseño son muchos y el calendario académico resulta ajustado. El uso de la matriz exponencial para obtener la solución de un SL EDO y la gráfica de la solución obtenida (que tanta riqueza experimental ofrece) no se explotan porque cálculos y gráficos son difíciles de obtener con calculadora, lápiz y papel. Los temas son de difícil abordaje teórico. La exponencial matricial, por ejemplo, necesita de numerosos conceptos previos (tales como diagonalización de matrices en el campo de los complejos y formas de Jordan, que, en general, no son desarrollados en Álgebra por tener ésta una problemática similar en cuanto a la profusión de contenidos).

Por otro lado, la práctica del tema no siempre colabora en la comprensión del mismo. En la ejemplificación del problema teórico, la cantidad de cálculos numéricos necesarios para resolver el modelo más elemental centra la atención del estudiante en lo procedimental, alejándola de lo conceptual. La representación geométrica de la solución encontrada necesita destreza en el trazado de la misma, quimérica si se usan recursos tales como lápiz, papel, regla y calculadora. Es por ello, seguramente, que todas las ordenanzas que adecuaron el diseño curricular de cada una de las carreras de ingeniería de la UTN (por ejemplo, 1027/2004 para Ingeniería Mecánica, pág. 41) explicitan para la asignatura Análisis Matemático II: “Se usarán en las prácticas paquetes de computación que permitan cálculos numéricos y simbólicos con capacidad gráfica. En el caso de EDO se instruirá al alumno en el uso de un paquete interactivo que permita la simulación y el análisis de los resultados”.

Otra dificultad (seguramente relacionada con lo anterior) radica en que algunos de los contenidos (tal como Solución fundamental: la exponencial matricial) están ausentes en la bibliografía comúnmente recomendada por las cátedras. De hecho, no lo están en los dos textos más mencionados en la bibliografía de la asignatura Análisis Matemático II dictadas en distintas Regionales de la UTN: Stewart [7] y Larson, Hosteller, Edwards [8].

Pero el obstáculo central es, sin dudas, que el tratamiento de los mismos está al finalizar el ciclo lectivo. Si hay dificultades en la comprensión del tópico, ya no habrá tiempo material para realizar adecuaciones al proceso de enseñanza aprendizaje; al tratar la unidad Campos Vectoriales, la estabilidad de un SL EDO puede ser analizada a través del comportamiento de las líneas de flujo. Los exámenes finales de los estudiantes plasman el conocimiento ritual e inerte sobre este tema. Como ejemplificación, en uno de los ejercicios de un examen final del año 2012, bajo la consigna que se muestra en la figura 1, el 54,7 % intenta y/o resuelve el SL de EDO para responder la pregunta (29 de los 53 alumnos), sólo un 13,2% usa los autovalores del sistema y las condiciones iniciales para decidir sobre la curva a individualizar, mientras que el 32,1% no hace el ejercicio. Los procedimientos cuantitativos fueron ampliamente preferidos frente a los cualitativos.

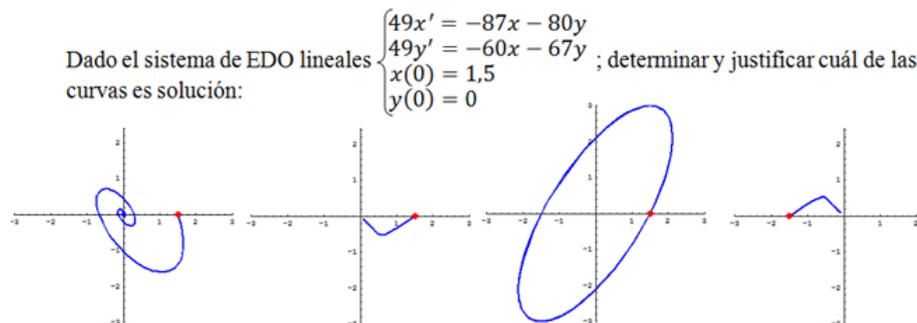


Fig. 1. Un ejercicio de examen final utilizado para analizar la comprensión de SL EDO.

2.1 Objetivo y Marco Teórico

El objetivo es diseñar una secuencia didáctica para mejorar los desempeños de comprensión de los alumnos de segundo año de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional. Los tópicos elegidos son: “Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales”, “Aplicaciones del álgebra lineal a las ecuaciones diferenciales”, “Solución fundamental: la exponencial matricial” y “Teoría cualitativa: puntos de equilibrio, estabilidad”. Basando la experiencia en el marco conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC), se incorpora el uso del applet *Sistemas Autónomos (de dos EDO lineales de primer orden)* [9], disponible en la web, como instrumento mediador en la interacción docente – alumno – objeto de conocimiento, y se pone énfasis en la comprensión y uso activo de los conocimientos compartidos.

El proyecto de investigación colaborativa EpC desarrollado por la Escuela de Graduados de Educación de Harvard establece un marco conceptual guía para llevar a la práctica este sistema de trabajo. Sus bases teóricas emergen del proyecto Zero que dirigieron, durante más de diez años, David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone. La EpC [1] [2] aborda cuatro preguntas claves: ¿qué tópicos se deben comprender?, ¿qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?, ¿cómo podemos promover la comprensión?, ¿cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Para dar respuesta a estos interrogantes la EpC está constituida por cuatro partes: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua.

Los Tópicos Generativos: la EpC concluyó que es probable que un tópico sea generativo si es central para un dominio o disciplina, es accesible e interesante para los alumnos, es relevante para el docente, es rico en conexiones con otros conceptos. El tópico elegido en esta experiencia fue “trazado de líneas de flujo de un campo vectorial”, lo cual implicó trabajar con sistemas dinámicos autónomos. Y acá es pertinente recalcar que, si bien no es un contenido explicitado en los contenidos mínimos, tiene todas las características descritas por el marco y, a la vez, la potencialidad de atravesar la mayoría de los contenidos de la asignatura en cuestión.

Las Metas de Comprensión: afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender. Mientras que los tópicos generativos delimitan la materia, las metas definen, de manera más específica, las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán mejor por medio de su indagación. Los docentes e investigadores de la EpC concluyeron que las metas de comprensión son más útiles cuando: están definidas de manera explícita, están dispuestas en una estructura compleja, son centrales para la materia. En la experiencia reportada, la meta de comprensión fue “que los alumnos comprendan cómo utilizar lo que saben para caracterizar el equilibrio de un sistema dinámico lineal”.

Los Desempeños de Comprensión: son los elementos más importantes del marco conceptual de la EpC, se insiste en que la comprensión se desarrolla y se demuestra poniendo en práctica la propia comprensión. Es común observar una progresión común de tres categorías de desempeños diseñadas para fomentar la comprensión: etapa de exploración, investigación guiada y proyecto o trabajo final de síntesis. En la *etapa de exploración* los desempeños consistentes en “explorar los elementos” reconocen su respeto por la investigación inicial, todavía no estructurada por métodos y conceptos disciplinares. Aparecen comúnmente al inicio de una unidad y sirven para atraer a los alumnos hacia un tópico generativo. Son comúnmente de final abierto y ayudan a que los alumnos vean conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas. En esta experiencia, la exploración comenzó a inicios de la cursada planteando problemas donde se deseaba encontrar trayectorias conociendo la función vectorial velocidad. El tema se planteó intuitivamente, usando la expresión (1), que determina la trayectoria $\vec{r}(t)$; para luego usar la ecuación (2), que pudiera reducirse a una EDO de variables separables, normalmente no lineal.

$$\vec{v}(t) = f(x) \vec{i} + g(y) \vec{j} . \quad (1)$$

$$\vec{v}(x, y) = f(x, y) \vec{i} + g(x, y) \vec{j} . \quad (2)$$

Las visualizaciones de la solución particular son un pilar fundamental en la etapa de exploración.

En la fase de la *investigación guiada* los desempeños involucran a los alumnos en la utilización de ideas o modalidades de investigación que el pedagogo considera centrales para la comprensión de metas identificadas. La guía que los docentes ofrecen en fases más avanzadas del desarrollo de un tema ayuda a los alumnos a aprender cómo aplicar métodos y conceptos disciplinares, a integrarlos y a poner en práctica una comprensión cada vez más amplia y compleja. En esta etapa se plantearon y resolvieron sistemas dinámicos lineales autónomos y no autónomos bidimensionales. Se usó el applet y *Mathematica* como soporte tecnológico para visualizar resultados.

En el *proyecto final de síntesis*, rasgo distintivo en el marco conceptual de la EpC, se demuestra con claridad el dominio que tienen los alumnos de las metas de comprensión establecidas. Estos desempeños invitan a los alumnos a trabajar de manera más independiente de como lo hicieron en sus desempeños preliminares y a sintetizar las comprensiones que han desarrollado a lo largo de una unidad curricular o una serie de unidades. En este estudio, el desempeño final de síntesis fue “generar una tabla que relacione el tipo de equilibrio de un sistema lineal autónomo y el

comportamiento de sus trayectorias solución con los autovalores de la matriz del sistema”. Para confeccionarla, los estudiantes se reunieron en grupos.

La Evaluación Diagnóstica Continua: valora los desempeños en relación con las metas de comprensión. En estos contextos, los estudiantes son testigos de desempeños modelo tanto por parte de expertos como de otros estudiantes. Pueden analizar y criticar estos desempeños ejemplares según criterios tendientes a comprender qué entraña un desempeño bien hecho. Los estudiantes emulan estos modelos y el aprendizaje avanza por medio de la valoración del desempeño propio y ajeno en relación con criterios claros. De esta manera, la evaluación diagnóstica refuerza a la vez que evalúa el aprendizaje. En la experiencia, la valoración diagnóstica continua tuvo su eje en la tutoría para el desarrollo de la tabla solicitada.

2.2 La Experiencia

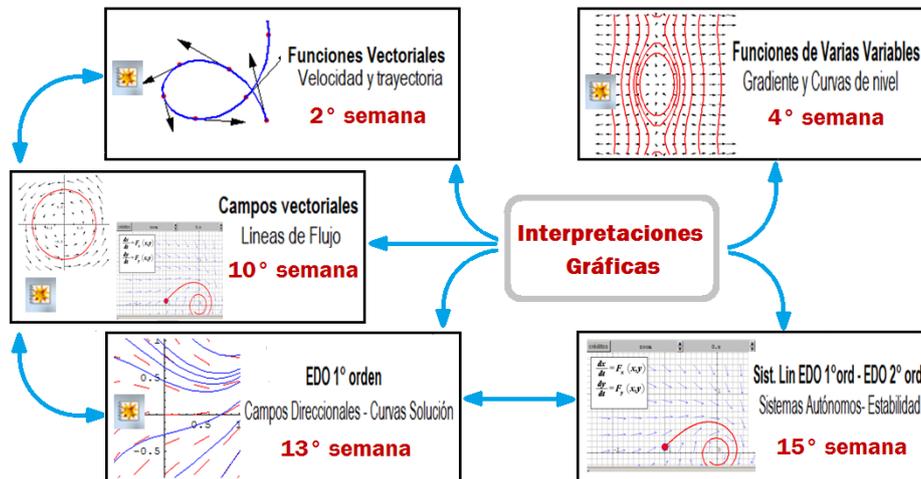


Fig. 2. Cronología de la experiencia durante la cursada del primer cuatrimestre de 2013.

La experiencia se desarrolló durante el primer cuatrimestre del año 2013 con alumnos de la carrera Ingeniería Eléctrica de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional, a los que se sumaron alumnos de las demás carreras que pudieron justificar la necesidad de un cursado cuatrimestral. El grupo objeto de análisis estuvo constituido por todos los alumnos que cursaron la asignatura Análisis Matemático II en dicho período lectivo, un total de 40. La cronología está esquematizada en la figura 2.

El contenido objeto de análisis fue *la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales*. El foco de la experiencia estuvo dado por las interpretaciones geométricas brindadas por el SAC *Mathematica* y por el applet *Sistemas Autónomos* en temas relacionados a los SL EDO (funciones vectoriales, funciones de varias variables, campos vectoriales).

El tratamiento formal de los contenidos fue desarrollado durante la última semana de

clases, la 15°, y con una metodología tradicional; por lo que hubo escasas posibilidades de una intervención pedagógica en aquellos casos que pusieron de manifiesto dificultades de comprensión. Como se dijo, hallar la solución de un sistema (autónomo o no) necesita de numerosos teoremas y de tediosos cálculos concretos. Sin embargo, el uso de interpretaciones gráficas al momento de realizar el tratamiento conceptual de su estabilidad, así como la discusión de su solución, permite mejorar la comprensión y la perdurabilidad de los contenidos, aserción que se puso a prueba y que es el eje de esta comunicación.

En la figura 2 se aprecia que, para funciones vectoriales, funciones de varias variables y EDO de 1° orden, los gráficos se trazan con software *Mathematica* (del cual la facultad posee algunas licencias que sólo alcanzan para el uso demostrativo en el aula) y, especialmente para campos vectoriales y sistemas autónomos, se utiliza el applet *Sistemas Autónomos* disponible en la web.

2.3 Los Resultados

Analizar la evolución de la comprensión no es un proceso sencillo, su tratamiento descriptivo escapa, en cuanto a su extensión, a la posibilidad de este reporte. Los resultados alentadores pueden apreciarse desde dos puntos de vista.

1–Nivel de Comprensión Desplegado en el Desempeño Final de Síntesis Planificado: De los 10 grupos de trabajo, 9 entregaron en tiempo y forma la tabla solicitada. De las 9 tablas, 7 fueron correctas (o con errores menores u omisiones no significativas); 1 contenía gráficas incompletas (no utilizaban el rango $[0, \infty)$ propuesto, sino los visualizados a través del soft utilitario); mientras que la novena no incluía la ecuación genérica para las soluciones buscadas.

2–Nivel de Comprensión Exhibido en Un Ejercicio de Parcial: En la figura 3 se muestra el ejercicio que involucra el contenido en análisis usado en el grupo de la experiencia. Puede notarse que en el mismo ya no se pone énfasis en lo gráfico, lo analítico involucra cálculos tediosos y complejos; por lo que apremia extrapolar los conocimientos resumidos en la tabla construida por los alumnos para el caso de SL EDO de dos funciones incógnita, a un caso de tres. Esto encuadra en la idea central de la EpC en que la comprensión se desarrolla y se exhibe si se puede utilizar un conocimiento en un contexto diferente.

$$\text{Dado el sistema de ecuaciones } \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -y + z \\ z'(t) = y + z \end{cases}$$

- ¿podría ser una solución particular $y(t) = e^{2t} + \sin(t) - \cos(t)$? Justifique la respuesta.
- Proponga una solución general para $x(t)$.

Fig. 3. Ejercicio de un parcial

El parcial fue realizado por 29 de los 40 alumnos; 19 de ellos pudieron relacionar la solución buscada con los valores propios del sistema, 4 resolvieron o intentaron

resolver analíticamente el problema, mientras que 6 no lo resolvieron. Esto muestra que el 65,5% desplegó verdaderos desempeños de comprensión, superando los aprendizajes mecanizados.

2.4 Conclusión y Líneas Futuras

Las dos instancias de evaluación sumatoria, el ejercicio del examen final de 2012 y el del parcial de 2013, muestran claramente los avances obtenidos. Mientras que en el grupo 2012 el 86% de los alumnos exhibe comprensión ingenua o no exhibe desempeño alguno, en el grupo 2013 ese porcentaje disminuye a menos de la mitad (34,5%). Mientras que en el primer grupo sólo el 13,2% no usa en la resolución algoritmos mecanizados (conocimiento ritual) sino que despliega altos niveles de comprensión, en el segundo ese porcentaje aumenta al 65,5%.

Encuestas de opinión realizadas a los estudiantes que participaron en esta experiencia muestran su conformidad en el uso de las tecnologías emergentes. Destacan la influencia de las visualizaciones en la comprensión de temas concretos (fundamentalmente rescatan la posibilidad de trabajar con una amplia gama de ejemplos en el período de tiempo destinado al tratamiento de los contenidos). Algunos estudiantes han planteado posibles mejoras, por lo que actualmente una auxiliar docente, alumna avanzada de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información, se encuentra abocada a reformular la aplicación utilizada para salvar dichas dificultades e incluso para extender su funcionalidad de modo que sea aplicable también a sistemas lineales no autónomos.

Referencias

1. Stone Wiske, M. Enseñar para la comprensión con Nuevas Tecnologías. Paidós, Buenos Aires (1999) 55
2. Blythe T. y colaboradores. La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Paidós, Buenos Aires (1999) 39
3. Litwin, E. comp. Tecnología Educativa. Política, historias y propuestas. Paidós, Buenos Aires (1995) 141
4. Cabero, J y Llorente, M. "Las TIC y la Educación Ambiental". Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, Vol. 4 (2005).
5. Veletsianos, G. A definition of emerging technologies for education. Athabasca: Athabasca University Press (2010)
6. Siemens, G. Conociendo el conocimiento. Nodos Ele (2010)
7. Stewart, J. "Cálculo Multivariable" 4ª edición. International Thomson Editores, México (2002)
8. Larson, Hosteller, Edwards. Cálculo y geometría analítica. Tomo 2. 3ª edición McGraw-Hill, Madrid (1991)
9. Universidad de Belgrano. Applet: "Sistemas Autónomos (de dos EDO lineales de primer orden)". <http://www.ub.edu.ar/catedras/ingenieria/AnalisisIII/ECDIF/ECDIF1/sisauto1.htm>. Buenos Aires