Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional General Pacheco

LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Título: ***Una ingeniería didáctica con software de geometría dinámica: función cuadrática y sus características principales como producto de lineales.***

Autora: **Prof. Laura E. Narvaez**

Directora: **Lic. Rosa A. Ferragina**

Licenciada en Didáctica de las Ciencias, con orientación en Didáctica de la Matemática

Año: **2015**

“Una ingeniería didáctica con software de geometría dinámica: función cuadrática y sus características principales como producto de lineales.”

...

Prof. Laura Estrella Narvaez

...

Lic. Rosa Ana Ferragina
Directora de Tesis

TRIBUNAL

... **...**

...

..

Lugar y fecha

RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación está diseñada para introducir a los alumnos en el concepto de funciones polinómicas, más específicamente, en la función polinómica de grado dos mediante el producto gráfico de funciones lineales.

La misma es de carácter cualitativo, cuya orientación metodológica se trata de Ingeniería Didáctica, mediante la cual se desarrolla una secuencia de cuatro clases, cuyos problemas están orientados a "descubrir" la nueva función *cuadrática* y a explorar y desarrollar algunas de sus características, tales como raíces, conjuntos o intervalos de positividad y negatividad, máximos y mínimos.

Esta Ingeniería Didáctica está pensada para ser desarrollada desde la *visualización* como herramienta y proceso de pensamiento matemático, la cual se presenta en la primera clase bajo el uso de papel y lápiz, y, en las tres clases siguientes, con el uso del software GeoGebra.

A continuación, detallamos cómo está organizada esta investigación:

- ✓ La Introducción, en la cual presentamos los lineamientos y algunas reseñas conceptuales.
- ✓ El Capítulo 1, donde desarrollamos la problemática, las preguntas y los objetivos que perseguimos en esta investigación.
- ✓ El Capítulo 2, en el que efectuamos una revisión teórica de trabajos e investigaciones previas, y desarrollamos nuestro Marco Teórico.

- ✓ El Capítulo 3, donde describimos la metodología empleada, la Ingeniería Didáctica.
- ✓ El Capítulo 4, en el cual presentamos la secuencia propuesta para trabajar con los alumnos y desplegamos el análisis *a priori*.
- ✓ El Capítulo 5, en que exponemos la realización didáctica, describiendo el grupo de alumnos y las circunstancias bajo las cuales se llevó adelante este trabajo, y, reflejamos el análisis *a posteriori* de lo realizado.
- ✓ El Capítulo 6, el apartado donde expresamos nuestras conclusiones y sugerencias.
- ✓ Y, finalmente, presentamos la Bibliografía en la cual nos apoyamos para desarrollar esta investigación, y a continuación, los Anexos con documentación de lo trabajado en las diferentes clases con los alumnos.

Confiamos que esta investigación resulte de interés a otros docentes que se dedican a enseñar esta ciencia tan apasionante como es la matemática, en virtud de reinventar y reflexionar sobre las prácticas llevadas a cabo en esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia que me acompañó en cada paso.

A mis compañeras de carrera, con quienes armamos un grupo sólido y con quienes nos dimos los ánimos constantemente para seguir adelante con nuestros proyectos académicos, y a quienes les guardo un profundo cariño y admiración.

A la Regional Pacheco que me (nos) recibió, y nos permitió participar de cuanto seminario/charla dictara.

A mi directora de tesis, Rosa, quien a pesar de que las circunstancias no fueron las más apropiadas, me aceptó para dirigir mi trabajo y a quien me encomendé y supe entenderme desde el primer momento, haciendo la tarea más llevadera y llena de aprendizajes. Gracias por ser una excelente guía, contenedora y una gran directora.

DEDICATORIA

A cada adolescente que ha pasado por mi vida como alumno, fuente de inspiración y aprendizaje personal para ser mejor docente cada día, y que me hacen sentir esta profesión como una especie de apostolado, como una extensión de mi maternidad.

A mi madre que me dio la vida, y a mi padre a quien ya no lo tengo físicamente. Siempre los he amado.

Y muy especialmente a las tres hermosas personas con las que convivo día a día: a mis hijos Nicolás y Giuliana que son la razón fundamental de mi vida, y a mi esposo Gabriel quien es mi gran compañero de la vida, y quien me apoya en cada paso que doy. A los tres los amo profundamente.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN ______ *8*

CAPÍTULO 1

DELIMITACIÓN Y RELEVANCIA DEL PROBLEMA ______ *12*

1.1. PROBLEMÁTICA ______ 13

1.2. PREGUNTAS QUE GUÍAN LA INVESTIGACIÓN ______ 14

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN ______ 15

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO ______ *17*

2.1. ANTECEDENTES ______ 18

2.2. MARCO TEÓRICO ______ 22

CAPÍTULO 3

ENFOQUE METODOLÓGICO ______ *31*

3.1. SOBRE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA ______ 32

CAPÍTULO 4

LINEAMIENTOS Y CARACTERÍSTICAS DE LA SECUENCIA ______ *36*

4.1. ASPECTOS PREVIOS A LA PROPUESTA DE LA SECUENCIA ______ 37

4.2. LA SECUENCIA ______ 39

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS ____ *47*

5.1. COMENTARIOS PREVIOS ____ 48

5.2. CLASE 1 – Problema 1 ____ 49

5.3. CLASE 2 – Problema 2 ____ 61

5.4. CLASE 3 – Problema 3 ____ 68

5.5. CLASE 4 – Problema 4 ____ 79

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES ____ *91*

6.1. DE LA INVESTIGACIÓN ____ 92

6.2. PROSPECTIVAS ____ 94

BIBLIOGRAFÍA ____ *96*

ANEXO I ____ *100*

ANEXO II ____ *108*

ANEXO III ____ *120*

ANEXO IV ____ *136*

INTRODUCCIÓN

En matemática, generalmente, se intenta trabajar incorporando situaciones reales que permitan al alumno comprender o entender por qué o para qué, o más bien, la utilidad de un concepto matemático.

Según Skemp (1999), a medida que se avanza en conceptos cada vez más abstractos, que no pueden aprenderse directamente del entorno cotidiano, sino a través del proceso de abstracción elaborado por los matemáticos y su ciencia, las comparaciones referidas al mundo real pierden eficacia dado que la matemática trasciende el mundo de lo real para plantearse lo posible.

Dentro del mundo de objetos matemáticos de diferentes “dimensiones y variables posibles” (Quintero, Ruíz y Terán, 2005), podemos distinguir las funciones polinómicas dado que son uno de los objetos matemáticos que trasciende el mundo de lo real y que conforman el eje del presente trabajo.

Tal como lo expresa el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires del Ciclo Superior ES4 (2010) en el Eje de Geometría y Álgebra, el abordaje de campos de problemas permite poner significados, a conceptos, términos y relaciones, que darán lugar a registros orales, gestuales y de escritura que, en la interacción didáctica, serán institucionalizados, a la vez que se activarán instrumentos semióticos, es decir, expresar ideas con simbolismo abreviado (Orton, 1998)**.** Introducir, entonces, las funciones polinómicas desde el producto gráfico de funciones lineales podría transformar el proceso de conceptualización en un proceso de reflexión que le permita al alumno lograr una interpretación significativa respecto de las diferentes características “observables” en las funciones polinómicas. Por tanto, la adquisición conceptual de este objeto matemático, depende de las representaciones semióticas que acerca de él se logren. Así mismo, en dicho documento, se reconoce la cantidad de "visualizaciones" interactivas que los alumnos podrían encontrar en Internet, y la propuesta de incluirlas en el aula, lo cual, según Nicholas Burbules (2001), quien es mencionado en dicho diseño**,** es un importante potencial educativo ya que les otorga una *relación más personal con el saber*.

A través de la visualización, se pretende dotar de sentido al concepto de funciones polinómicas, interpretando qué características, tanto comunes como diferentes, presentan las diversas funciones de este tipo.

En esta línea, se podrían mencionar algunos autores que proponen el trabajo áulico como un ambiente de "quehacer matemático" dentro de entornos computarizados y dinámicos que ofrecen a los alumnos "laboratorios" virtuales en los cuales pueden explorar, investigar, conjeturar y formular propiedades.

Según Hershkowitz (1989, p75), "la visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual". Por ello es un componente crucial en el aprendizaje de conceptos geométricos. Y, según Fischbein (1987, p101), una imagen visual "es un factor esencial para crear la sensación de auto-evidencia e inmediatez", lo cual constituye un novedoso organizador visual, relevante al objeto de aprendizaje cuya interacción con el medio computarizado constituye un modo emotivo de sostener la atención en cada estudiante, ya que es el alumno quien experimenta con el medio buscando respuestas, analizando, controlando las variables, posibles respuestas y, eventualmente, enfrentarse con alguna circunstancia que resulte contra-intuitiva, motivando la necesidad de volver a experimentar buscando nuevas respuestas.

En este sentido, sería favorable la incorporación de un software de geometría dinámica puesto que permitiría que los alumnos exploren e investiguen, mediante situaciones que ofrezcan la posibilidad de coordinar diferentes formas de representación, algunas como un medio de producción y otras como control o verificación. De este modo, aprender matemática supone desarrollar un reconocimiento de características, manipulación de la generalidad, donde la manipulación implica reconocer lo específico y lo general. Esto está específicamente avalado entre los objetivos de enseñanza que pretende el diseño curricular ya mencionado, puesto que propone la incorporación de Nuevas Tecnologías de la Información y Conectividad (NTICX), a los fines de que sean utilizadas para el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, como así también para la obtención, procesamiento y comunicación de la información generada, manifestando la necesidad de "que los alumnos trabajen con la representación gráfica de funciones Graphmatica, Derive, GeoGebra y otras disponibles en Internet", (Diseño Curricular, p24).

De este modo, se busca introducir a los alumnos dentro de la red conceptual inherente a funciones polinómicas desde la "visualización" para abordar las representaciones que involucran esta red conceptual tales como la gráfica, geométrica, aritmética y algebraica, para que logren realizar la conexión pertinente entre cualquiera de ellas y entre todas ellas.

CAPÍTULO 1
DELIMITACIÓN Y RELEVANCIA DEL PROBLEMA

1.1. PROBLEMÁTICA

El trabajo algebraico que se realiza en las aulas a través de los años de la enseñanza secundaria, se focaliza en operaciones tales como producto de expresiones algebraicas, en el cual los alumnos logran, en el mejor de los casos, un manejo casi experto a nivel operacional, permite observar que, a pesar de dicho manejo, muchas veces esta habilidad dista profundamente del sentido y significado que dichas operaciones guardan. Y, en esta línea, se puede advertir la poca o nula conexión o articulación que los alumnos tienen en relación a otras representaciones tal como la referirse a dicha operación a nivel gráfico. Por lo tanto, es interesante trabajar en función de lograr que los alumnos alcancen un nivel de interpretación en el que articulen representaciones parciales (algebraicas y gráficas) con el fin de dar sentido y significado a esos productos de expresiones algebraicas.

Además, dado que la intuición es un componente básico de la construcción matemática, y, según Cantoral (2001) el alumno no aprende los conceptos en forma aislada, sino más bien se adapta a las situaciones en las que el conocimiento tiene significado y es construido mediante la acción sobre el objeto. También Lacasta y Pascual (1998), se refieren al tema:

> “a) Muchos alumnos de diferentes niveles fracasan en la interpretación de gráficos de funciones.
>
> b) Este fracaso desempeña un papel importante en su relación con las matemáticas y en su porvenir escolar. (…), plantean que lo “interesante es conocer el funcionamiento de los

gráficos de funciones en el aprendizaje de las nociones matemáticas y el efecto que tienen en la enseñanza las ideas que existen sobre ese funcionamiento". (p12)

Cantoral-Montiel (2001) proponen un cambio de paradigma en la enseñanza, ya que el enfoque que en la enseñanza de la matemática pone el énfasis en un fuerte trabajo algebraico, el cual ellos manifiestan que no garantiza la comprensión (o entendimiento) de los objetos trabajados, aunque se utilicen gráficos como ejemplos para la interpretación. Por lo que, en este trabajo proponemos actividades a través de visualizaciones de gráficos que permitan "ver" tanto las diferencias como las regularidades y, así abordar el análisis del objeto matemático funciones polinómicas, teniendo en cuenta toda la red conceptual que lo abarca.

1.2. PREGUNTAS QUE GUÍAN LA INVESTIGACIÓN

Tal como manifiestan Cantoral y Montiel (2001), que mediante investigaciones en matemática educativa, se ha puesto en evidencia que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso de la enseñanza, y además proponen un "cambio de paradigma de enseñanza, al llevar al tratamiento escolar, del excesivo tratamiento algebraico de las funciones hacia otro en el que la visualización juega un papel más preponderante en la formación de conceptos y procesos matemáticos".

En esta dirección, es pertinente entonces, plantear los siguientes interrogantes:

- ✓ ¿Cómo es posible armar una expresión polinómica?

- ✓ ¿Qué tipo de problemas o secuencia de problemas son adecuados para desarrollar este concepto desde la visualización?
- ✓ ¿Cómo se puede conceptualizar y/o interpretar este objeto de las funciones polinómicas desde la visualización?
- ✓ ¿Qué información brinda el hecho que una función polinómica tenga raíz (raíces) simple, doble, triple, etc.? ¿Qué información aporta la multiplicidad de cada raíz?
- ✓ ¿Cómo se relacionan las raíces de una función polinómica con respecto a la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento?

En el desarrollo del presente trabajo, respondemos estas cuestiones focalizando el análisis en la formación de una función cuadrática como producto de lineales.

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Como estamos señalando en este trabajo, en la enseñanza de la matemática prevalecen las acciones dedicadas a desarrollar cálculos y en menor medida a reflexionar acerca de los conceptos implicados en dichas operaciones y, es por eso que predominan las formas escritas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, que podría conllevar a un menor proceso de apropiación, afectando así a la pérdida de significado. En tal sentido, se pretende abordar desde la presente investigación los siguientes objetivos:

- ✓ Propiciar un ambiente de actividad matemática para involucrar a los alumnos en la producción de conocimiento.
- ✓ Desarrollar competencias en el ámbito de la comprensión y explicación de significados inherentes a la generación de una función cuadrática en los alumnos. Es decir, una producción matemática cuya esencia es la manipulación de la generalidad que implica reconocer lo específico y lo general en cada tipo de función cuadrática.
- ✓ Reflexionar sobre diferencias y regularidades observables, para promover un proceso de interpretación en la producción de nuevos enunciados matemáticos respecto de las funciones cuadráticas, con el aporte de entornos de geometría dinámica.
- ✓ Incorporar el uso de un software de geometría dinámica, como GeoGebra, para explorar, trabajar, elaborar argumentos para anticipar, verificar y/o validar conclusiones y complementar lo analizado.
- ✓ Promover el armado de una función cuadrática con características específicas, a través del producto de funciones de primer grado.
- ✓ Focalizar la interrelación entre la representación gráfica de una función cuadrática y su expresión algebraica.

CAPÍTULO 2
ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES

Existen varias investigaciones en relación al aprendizaje de la matemática con la utilización de software matemático, que favorecen la visualización como medio para la construcción de nuevos conceptos.

En principio podemos hacer referencia a los autores Eduardo Lacasta Zabalza y José Ramón Pascual Bonis (1998), quienes proponen el trabajo del significado cualitativo, global de las gráficas con preferencia a otras destrezas orientadas a la elección de escalas o el trazado de curvas. Ellos señalan que son características globales cuestiones tales como máximos y mínimos, discontinuidades, crecimiento o decrecimiento en un intervalo, periodicidades y gradientes. Sostienen que de esta manera se prepara el camino para la utilización del lenguaje gráfico en otras ciencias, y intentando provocar la discusión sobre el error común de que las gráficas son meros dibujos de las situaciones.

Ellos persiguen el objetivo de que los alumnos descubran y exploren funciones. De esta manera se establece un nuevo papel para el rol del profesor: aquí en vez de ser el depositario y administrador de la información, se transforma en un facilitador del aprendizaje que plantea situaciones o problemas a los estudiantes para que los exploren, formulen hipótesis o conjeturas, y luego puedan validar resultados.

Señalan además que en los nuevos estándares curriculares se propugna el uso de la tecnología en la docencia para producir cambios en el modo de aprendizaje y enseñanza de la matemática. Lógicamente, esto exige el equipamiento necesario que debe haber en las aulas.

Lacasta (1998), distingue desde la semiología gráfica, que los gráficos son sistemas de signos que actúan de manera complementaria con los sistemas numéricos y textuales. El objeto de tratamiento es el grafo, es decir, el conjunto de pares *(x ; f(x))*; pero en el estudio de funciones aparecen numerosas informaciones relacionadas con los gráficos y no con los grafos. (p.105).

En tanto, la funcionalidad del gráfico es doble:

- ✓ Es una especie de memoria artificial: permite registrar diferentes características de una función.
- ✓ Es un instrumento de investigación: para la búsqueda de ciertos problemas.

En síntesis, es un instrumento racional que se hace eficaz cuando se emplean las propiedades de la percepción visual. Como en el gráfico cada elemento está definido de antemano, el proceso de percepción consiste en definir las relaciones que se establecen en la imagen, así el trabajo de lectura se sitúa entre los significados.

Esta distinción fundamental, le da gran sentido a “la gráfica” como forma de visualización. Por ello hay que tratar de definir las componentes presentes en las gráficas de funciones para saber cómo se sirve de ellas el alumno.

Por otra parte, Arcavi y Hadas (2003), quienes en su trabajo relatan que dichos ambientes dinámicos no sólo permiten la visualización sino también transformar construcciones en tiempo real, lo que contribuye en el estudiante el hábito de transformar para estudiar variaciones, ofreciéndole la oportunidad de aprender a experimentar. Este trabajo facilita las bases intuitivas para justificar, formular conjeturas y proposiciones matemáticas, que pueden ser sugeridas mediante preguntas guiadoras, para que luego realicen una formalización de las mismas.

Este enfoque planteado por Arcavi y Hadas (2003), sugiere además al docente la búsqueda de algún tipo de actividad, cuyo resultado sea inesperado o contra-intuitivo, lo que ellos denominan “sorpresa” (o desconcierto) como un detonador para re-analizar lo trabajado, estableciendo oportunidades para un aprendizaje significativo. Sostienen que esta instancia sorpresiva favorece la retroalimentación, la cual es potencialmente más efectiva ya que deviene de una afirmación emotiva, abriendo camino para volver a verificar, revisar la predicción, y hasta puede motivar la necesidad de una demostración. Por ello, la retroalimentación es significativa y sirve de base para la reflexión. Por tanto afirman que el ciclo “experimentación-retroalimentación-reflexión” debe suministrar las semillas de la argumentación que ayude a explicar y demostrar una declaración. De este trabajo, algunas de las conclusiones oportunas para tener en cuenta, podrían ser las siguientes:

- ✓ La existencia de entornos virtuales plantean el desafío de diseñar actividades en las que se pueda aprovechar el potencial que ofrecen para propiciar nuevas maneras de enseñanza, para estimular el aprendizaje en los estudiantes.
- ✓ La ausencia inicial de la representación algebraica no pareció impedir un razonamiento matemático genuino y profundo. La simbología se introdujo al final dándole “vida” a la expresión algebraica, lo cual permitió expresar la información encontrada, agregando comprensión al análisis.

- ✓ Las exploraciones empíricas permitieron el descubrimiento de “fenómenos” en los cuales pueden observarse patrones, siendo fuente para la comprensión y significado y dando bases para la demostrar y fomentar la exploración.
- ✓ Los gráficos y funciones fueron usados tanto como objetos que como procesos.

Por otro lado, podemos hacer mención al trabajo realizado por Quintero, Ruíz y Terán (2005), quienes ponen el énfasis en la importancia del aprendizaje conceptual, en la búsqueda de la comprensión propiamente conceptual, ya que manifiestan que “se ignora que detrás de los símbolos matemáticos subyacen conceptos asociados a lo que es necesario prestar mayor atención si lo que deseamos es un aprendizaje significativo” (p13). En consecuencia, sugieren la importancia en el desarrollo de competencias en el ámbito de la comprensión y explicación de significados en los alumnos. Así, entonces, la introducción del concepto de polinomios a partir de una función, puede no resultar inteligible al alumno. Por lo tanto, el docente debería ayudar al alumno en la elaboración de una definición a partir de ejemplos, los cuales permitan abordar nuevos conceptos a partir de conceptos de orden más bajo. Dichos conceptos de orden inferior, deben estar en la estructura cognitiva del que aprende, a modo de poder establecer las condiciones para la elaboración del concepto, logrando así, un análisis conceptual que conlleva mayor trabajo que una definición, dando lugar al trabajo con estructuras profundas (Skemp, 1999).

También tomamos en consideración la propuesta didáctica de Di Rico, Lamela, Luna y Sessa (2015), en la cual resalta que la utilización de un software matemático, al definir una función, permite vincular la pantalla gráfico funcional y la de una figura dinámica, dando lugar a comparaciones y contrastes en tiempo real. De este modo se pone de relieve a las visualizaciones dinámicas como marcos potentes para conjeturar y validar situaciones, lo cual potencia el trabajo matemático dando significado y sentido a los conceptos involucrados. En su trabajo proponen realizar cambios en el trabajo matemático en relación a las tareas propuestas, a la forma de abordarlas y que aportarían las representaciones en pantalla de los procesos de validación implicados. Así, el recurso informático permite construir un modelo dinámico, y al definir la función, el programa de GeoGebra permite vincular la pantalla del gráfico funcional y la del modelo dinámico. Interesa la comparación y contraste que posibilita el software, siendo un modelo favorable para la formulación de preguntas, conjeturar, y obtener elementos de validación.

Así, las visualizaciones dinámicas se transformaron en marcos potentes para las ideas, conjeturas y validaciones desplegadas.

2.2. MARCO TEÓRICO

En este apartado, haremos referencia a algunos autores que han desarrollado trabajos acerca de la enseñanza de polinomios, acerca de visualización como herramienta y proceso de pensamiento, y acerca de utilización de software dinámico.

Tanto en el campo de las ciencias naturales como sociales, el objetivo principal es la obtención de modelos matemáticos que permiten comprender mejor cómo ciertas magnitudes dependen de otras para poder expresarlas en formas sencillas, mediante tablas y gráficas de rápida interpretación visual, y también, mediante fórmulas que constituyen la expresión más abstracta de una función.

Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu Piquet (1990), proponen que el objetivo fundamental debería ser capacitar a los alumnos de entre 12 y 16 años para el tratamiento correcto de la información, y, en particular, aquello relacionado al concepto de función, tratando de ofrecerles a los alumnos una reflexión sobre el concepto de función (y sobre su desarrollo histórico) y por otro lado, manifiestan la necesidad de realizar un análisis de los aspectos fundamentales de la didáctica de dicho concepto que abarca desde su propia formación hasta el estudio de sus características generales.

Por lo tanto, propone unas matemáticas basadas en la actividad de los alumnos, "útiles y vivas", que sirvan para interpretar la realidad y actuar sobre ella.

Para dar una aproximación del concepto de función, es una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables, es decir, la existencia de una interdependencia entre magnitudes variables. La importancia de este concepto se debe a su enorme campo de aplicaciones.

La dificultad radica en encontrar una definición general que sea útil y operativa, ya que las más intuitivas carecen de rigor, y las más rigurosas que abarcan mayor cantidad de casos, resultan muy lejanas de los problemas concretos originales.

En tanto se trabaja sobre qué es lo que caracteriza a una función y qué maneras se representa simbólicamente, es decir, cuál es la notación matemática para ese concepto. Entonces, se puede decir que una función se puede expresar utilizando una expresión verbal, utilizando una fórmula, mediante tablas y gráficas. La tabla permite descubrir regularidades. Las gráficas es una manera de definir la función dando una visión geométrica de ella, y en este caso, la problemática que plantea es de lectura e interpretación. El problema inverso sería que, conocida la fórmula, poder construir la gráfica. En este caso, se referirían específicamente a funciones reales de variables reales ya que son las únicas que tienen gráficas de trazos continuos. En algunos casos donde la construcción de la gráfica resulta complicada, se puede recurrir a la tabla. Y de esta manera se interrelacionan las diferentes representaciones de una misma función.

Azcárate y Deulofeu (1990), toman como eje fundamental en su trabajo el lenguaje de las gráficas, ya que las gráficas en sí mismas constituyen una forma de conocimiento y de transmisión de la información básica en nuestro mundo actual, como también porque a través de este lenguaje es posible construir nuevos conceptos de una forma intuitiva y visual, que permiten elaborar una idea general del concepto de función. Así entonces, la finalidad de llegar a determinar con precisión cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que da sentido al estudio de las funciones así como al conocimiento de determinados modelos.

Dentro del esquema del concepto de función, aparecen otros términos como variable, dependencia, transformación, sucesión o isomorfismo, a partir de los cuales es posible abordar la idea de función, con lo cual se pondrían en relieve distintas características, diferentes visiones de lo que sería una función. Estos enfoques son los que Janvier (1983, p24) denomina “dominios semánticos”, los cuales tienen una gran importancia para el aprendizaje.

Respecto de las representaciones, los autores sostienen que los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar, son la gráfica y la fórmula o expresión algebraica, las mismas que permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos. La diferencia entre ambos lenguajes radica en que la gráfica permite “ver” las características globales de la función, que también pueden ser determinables a partir de la ecuación, pero, en este último caso, más difícil de interpretar, ya que su determinación a través del lenguaje algebraico presupone el conocimiento del significado de los símbolos utilizados y la interpretación a través de ellos de conceptos abstractos, que en cambio con la gráfica es más fácil intuir. La otra diferencia, es que la ecuación permite determinar valores de ambas variables con precisión mientras que a través de la gráfica da valores aproximados.

Para sintetizar, el aprendizaje de las funciones pasa por un conocimiento de cada uno de los lenguajes de representación, es decir, por adquirir la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y luego, el poder traducir de un lenguaje a otro.

En esta instancia, cabe diferenciar “lectura” e “interpretación” de la gráfica. Leer un gráfico implica obtener información del mismo, en tanto, interpretarlo consiste en la capacidad para describir la función representada de forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica.

Ya que su objetivo principal, está puesto en la interpretación de gráficas y la introducción al concepto de función (Azcárate y Deulofeu, 1990), se centran en la adquisición de una capacidad de análisis que permita obtener la máxima información correcta posible, y la necesidad de favorecer un espíritu crítico ante la información recibida.

Por otro lado, los autores destacan el trabajo de Emma Castelnuovo (1970 y 1986) quien reivindica el tratamiento dinámico de figuras y cuerpos geométricos, acercándose con ello a la idea de función. Propone, dada una figura geométrica, trata de tomar uno de sus elementos como variable, fijando el valor de otros para estudiar qué sucede con el resto de los elementos, y analizar cuáles permanecen constantes, cuáles varían, y cómo lo hacen en función a la variable inicial. Este trabajo de interrelación permite introducir el concepto de función como dependencia entre variables.

Existen características diferenciales entre los distintos modelos de función. El modelo lineal cuya característica diferencial es que la variación de la función es constante, lo cual equivale a una gráfica cuyos puntos están alineados. Cuando el crecimiento no es constante, para el resto de los modelos, la gráfica corresponde a una curva en el plano.

Así también, la función cuya gráfica es una recta, le corresponde una expresión algebraica de primer grado y recíprocamente. En cambio, si la función tiene una expresión de segundo grado, la gráfica que le corresponde es lo que se denomina parábola.

Así, el hilo conductor que utilizaron estos autores se basa en el uso del lenguaje de las gráficas para la introducción del concepto de función.

Otros autores, tales como Cantoral y Montiel (2001), proponen un cambio de paradigma en la enseñanza de funciones dando lugar a la visualización que juega un papel importante en la formación de conceptos y procesos matemáticos. Particularmente, tratan la visualización en matemática enfocada al análisis de funciones reales de variable real a través de sus gráficas, y manifiestan que la misma aporta al proceso de comprensión y entendimiento de los conceptos y procesos matemáticos relativos a las funciones. Estos autores, entienden por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. Se trata de un proceso mental bastante útil en áreas de conocimiento matemático y científico. Este enfoque sobre la visualización, se centra en la graficación como una forma particular de visualización de procedimientos y conceptos matemáticos. Si entendemos a la visualización como un proceso del pensamiento matemático, puesto que cada estrategia de graficación (construcción, interpretación o transformación) se está desarrollando un modo particular del pensamiento matemático.

Estos mismos autores (Cantoral y Montiel, 2001), manifiestan que han encontrado una fuerte correlación entre la habilidad para procesar información visual con la capacidad de analizar información analítica relevante en el campo del cálculo y el análisis matemático. Consideran que la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, y actualmente se debate sobre la vigencia del paradigma del concepto de función como objeto analítico. Los mismos han constatado en sus experiencias que en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de la actividad matemática, entonces da lugar a manejar a la función no sólo como objeto, sino que además permiten transitar entre diversos contextos tales como el algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad.

En otro trabajo, Fioriti, Sessa y otros (2015), se propusieron involucrar a los alumnos de la escuela secundaria en una "verdadera actividad de producción de conocimiento", ya que alentarlos a ensayar, producir diferentes soluciones y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos, son materia prima para discutir sobre la validez, precisión, claridad, generalidad, etc., de lo producido. Así, el conocimiento matemático se construye colectivamente. El objetivo de esta investigación era el estudio del signo de la función producto conociendo el de sus factores. La idea se basaba en "generar" funciones de grado mayor como producto de otras de menor grado y trabajar fundamentalmente a partir del gráfico de los factores. Partieron de la idea original de Regine Douady (1999, pp. 113-124) de plantear el estudio de la función como producto de otras dos, dados estos factores por su gráfico. Si bien este planteo de Douady estaba pensado para "lápiz y papel", la incorporación de las computadoras al trabajo del aula, abrió la posibilidad de numerosas modificaciones que esa incorporación podría producir, puesto que Fioriti y otros 2015, utilizaron en su trabajo el software GeoGebra para generar los gráficos de las funciones producto. La secuencia presentada en dicho trabajo fue organizada en torno al producto de funciones y han realizado un trabajo sostenido con los gráficos cartesianos, ya que fue un medio fértil para que los alumnos produzcan relaciones sobre las funciones polinómicas. Así, el trabajo con las computadoras permitió ampliar y enriquecer la producción matemática de los alumnos.

Una cuestión a tener en cuenta que en el software de geometría dinámica la conversión de registros es automática por lo que, posiblemente, se sume a la tarea del docente la necesidad de que los alumnos lean de "manera crítica" la información que provee la pantalla.

En esta línea de trabajo, Di Pantaleo y otros (2014), propusieron una experiencia áulica, cuyo objetivo principal era "descubrir" el comportamiento de las funciones polinómicas de grado 3, a través del producto de funciones conocidas, ya sea el producto de tres funciones lineales, o bien, una lineal con una cuadrática. En esta actividad, primero se trabajó con lápiz y papel, luego incorporaron GeoGebra o para verificar y complementar lo obtenido. La utilización de este software ayudó a los alumnos a "visualizar" el planteo de las actividades sugeridas, a realizar argumentaciones sobre la base de las conjeturas formuladas. Es decir que la utilización de GeoGebra resultó fundamental para explorar, elaborar argumentos, anticipar y validar conclusiones.

También podemos hacer referencia al trabajo de Benítez Pérez (2010), quien propuso explorar la representación gráfica vía la “interpretación global”, la cual permite establecer modificaciones en la expresión algebraica para identificar su correspondiente variable visual en la gráfica, lo que asociar una variable visual categórica en la expresión algebraica. La finalidad de este trabajo de investigación, fue el análisis de las estrategias que emplea el alumno cuando ha tenido la vivencia de explorar las representaciones gráfica, numérica y algebraica vía la interpretación global. Este trabajo concluyó que:

- ✓ Los alumnos exploraron cuantitativamente la identificación de las secuencias numéricas, tanto en la representación gráfica como en la numérica. Su propósito consistió en proporcionar información a los alumnos para que determinaran los valores numéricos que constituían la expresión algebraica, teniendo el antecedente de la interpretación global (tratamiento cualitativo) de las representaciones gráfica y algebraica.
- ✓ Explorar de manera puntual las representaciones gráfica y numérica es un tratamiento que contribuye a la exploración de las representaciones, siempre que se cuente con otras vías para estudiar aspectos no contemplados por la vía del punteo. Se debe fortalecer el estudio de las representaciones de manera integral, es decir, mediante la exploración conjunta de la interpretación global y puntual, ya que cada una de ellas explora aspectos relevantes de las representaciones.

Hemos querido focalizar con el análisis de estos trabajos que la visualización es un proceso que permite vincular, relacionar y transitar entre distintas representaciones el concepto de función.

En la presente investigación se hará uso del software GeoGebra dado que es un software que permite vincular dinámicamente el álgebra y la geometría desde una visión concreta y conceptual, haciendo de la experiencia algo tangible.

CAPÍTULO 3
ENFOQUE METODOLÓGICO

3.1. SOBRE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La metodología llevada a cabo en nuestra investigación será a la Ingeniería Didáctica. La noción de Ingeniería Didáctica se debe a la forma de trabajo didáctico la cual es equiparable con el trabajo del ingeniero para realizar un proyecto determinado. Se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta ser sometido a un control de tipo científico.

Esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales:

- ✓ Las relaciones entre investigación y acción en el sistema de enseñanza.
- ✓ El papel que conviene que tomen las "relaciones didácticas": puesta a prueba de las construcciones teóricas elaboradas en las investigaciones.

Según Yves Chevallard (1982, p.28), "definir el problema de la ingeniería didáctica es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, el problema de la acción y de los medios de acción, sobre el sistema de enseñanza".

La Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, tales como concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y por las formas de validación a las que está asociada, la cual es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Así la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases:

1°) Análisis preliminar.

Se basa en:

- Cuadro teórico didáctico general.
- Conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio.
- Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Análisis del campo de restricciones donde va a situar la realización didáctica efectiva. Se basa en tres cuadros de desarrollo y funcionamiento: cuadro algebraico, cuadro numérico y cuadro geométrico. Además este análisis de restricciones se realiza distinguiendo tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica.

Y, todo lo anterior, teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

2°) Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería.

El investigador toma la decisión de actuar sobre determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Las mismas son variables de comando que el investigador percibe como pertinentes en relación al problema estudiado. Las mismas se pueden distinguir en dos tipos:

- Variables macro-didácticas o globales.

- Variables micro-didácticas o locales.

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado.

El objetivo es determinar en qué, las selecciones hechas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este análisis, que comprende una parte descriptiva y una predictiva, se basa en un conjunto de hipótesis cuya validación está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y a posteriori.

3°) Experimentación.

4°) Análisis a posteriori y evaluación.

Se basa en un conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes. Y, en la confrontación de ambos análisis, a priori y a posteriori, se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Desde esta perspectiva, se propone una secuencia de problemas organizados y articulados con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje que evolucione según las reacciones de los alumnos y de las decisiones tomadas por el profesor. Así, la secuencia que se implementará es la resultante del análisis a priori y un proceso de ejecución que realiza el profesor adaptándolo a la dinámica de la clase, procurando la "construcción de significado y la capitalización o apropiación del conocimiento" (Douady, 1995, p62) de los alumnos.

Douady (1995) concibe el aprendizaje de cálculo algebraico como el equilibrio o la interacción entre la construcción del significado y la familiaridad técnica con los algoritmos. La autora, manifiesta que la construcción de significado de las nociones matemáticas en los alumnos es de gran importancia, ya que las mismas pueden estar disponibles cada vez que los alumnos las necesiten para enfrentarse a una situación novedosa. Por lo tanto, sugiere estar atento a la pertinencia y disponibilidad del conocimiento en los alumnos. Los objetos algebraicos a los que nos dedicamos en nuestra investigación son las funciones polinómicas y, para dichos objetos de estudio Douady (1995) resalta dos cuadros:

- ✓ Algebraico: el estudio se realiza sobre la factorización y desarrollo de funciones polinómicas.
- ✓ Gráfico: se aborda la representación gráfica de las funciones polinómicas y se trata de evidenciar algunas de sus propiedades.

En consecuencia, propondremos a los alumnos una secuencia didáctica para que a través del producto de funciones lineales puedan abordar el concepto de función cuadrática, ofreciéndoles la oportunidad de interactuar con el problema, dándoles los medios necesarios para ejercer un control sobre lo que hacen o dicen (que se complementará con la utilización del software) y, la posibilidad de crear nuevos objetos que tengan significado para los alumnos.

CAPÍTULO 4
LINEAMIENTOS Y CARACTERÍSTICAS DE LA SECUENCIA

4.1. ASPECTOS PREVIOS A LA PROPUESTA DE LA SECUENCIA

Para dar entidad a la propuesta de nuestra secuencia, haremos una contextualización del grupo de alumnos con el cual se ha de llevar a cabo la misma.

El grupo corresponde a un 4° año de la E.S.-C.S. del corriente año, de un colegio bilingüe de la zona del Talar de Pacheco. Explicitaremos qué temas relacionados con los que se trabajarán en la secuencia fueron abordados, con dichos alumnos, anteriormente. Este grupo, en su 3° año, ya había trabajado características generales inherentes a funciones, tales como dominio, imagen, conjuntos de ceros, positividad y negatividad, extremos relativos máximos y mínimos, conjuntos o intervalos de crecimiento, decrecimiento y constante. Para el reconocimiento de esas características, se les propuso a los alumnos trabajar sobre gráficos de trazas funcionales, sin fórmulas, no convencionales en las cuales los alumnos debían reconocerlas y explicitarlas. También se había trabajado el concepto de función lineal, no sólo a partir de tablas y gráficos, sino también, desde el reconocimiento y análisis de la fórmula explícita de su ecuación, interpretando qué información brindan sus dos parámetros (intersección con el eje de ordenadas y pendiente). Luego, podían reconocer en el gráfico, como así calcularlo algebraicamente, la raíz de la función lineal. Todas las actividades detalladas, no se realizaron utilizando software de geometría dinámica.

Este año, al momento de poner en práctica le secuencia elaborada, el mismo grupo de alumnos ya había comenzado realizando algunas operaciones con expresiones de tipo polinómicas, como una cuestión operativa.

El grupo de alumnos del 4° año, con quienes se llevará a cabo la secuencia para la presente investigación, es de poco más de 50, entre varones y mujeres, repartidos en dos grupos (secciones A y B), siendo entre 25 y 30 chicos por curso.

La institución cuenta con sólo un laboratorio de informática, con 16 máquinas. Se trata de un aula rectangular, ubicadas en forma de “U”, una al lado de la otra, de manera que en cualquier parte del aula que el docente se ubique puede ver todas las pantallas. Cada computadora tiene un espacio frontal para disponer de 2 a 3 sillas, de modo que el grupo de trabajo debe superar apenas las 30 sillas. Es decir que el laboratorio está diseñado para que las computadoras sean compartidas, dado que todos los cursos superan los 25 alumnos por clase. Así mismo, hay un escritorio para el docente, ubicado de espaldas a la pared que no forma parte de la “U” donde se ubican las máquinas de los alumnos, también con una máquina desde la cual se puede observar en la propia pantalla el trabajo de los alumnos. Por lo que, la cantidad de máquinas disponibles predispone que la secuencia sea trabajada, no individualmente, sino de a 2 alumnos, salvo caso particular que queden impar, y entonces haya algún grupo de 3alumnos. Cabe aclarar, que se ve a los alumnos muy cómodos en el uso del laboratorio de informática, ya que hacen uso del mismo desde temprana edad, aunque es cierto decir, que es la primera vez que trabajarán con este software “GeoGebra”, por tanto, no tienen conocimiento del mismo.

La secuencia que se ha diseñado consta de cuatro problemas, distribuidos en cuatro clases de 60 minutos cada una. En la misma se pretenderá introducir a los alumnos en un nuevo modelo de función partiendo de una ya conocida por ellos, y, tal como sugiere el diseño curricular, pretendemos promover el trabajo autónomo, estimulando el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis, aprovechando el software que permite trabajar a través de la visualización, para poder fomentar la lectura de gráficos, y que dicho trabajo se convierta en un proceso de conceptualización.

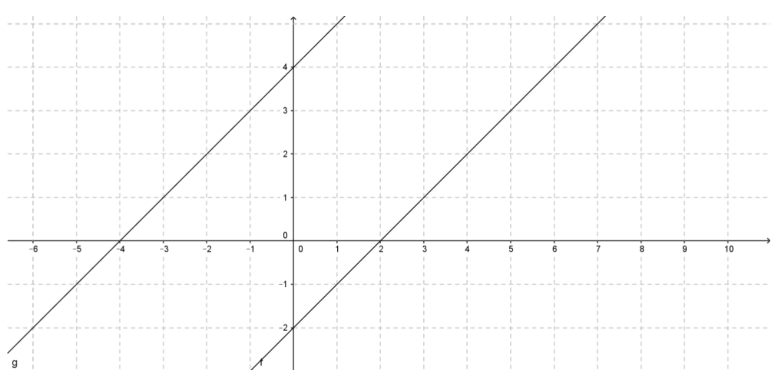
4.2. LA SECUENCIA

La secuencia que presentaremos intenta involucrar a los alumnos en un entorno gráfico que, con en el producto de funciones lineales, puedan llegar a encontrar qué tipo de gráfico devuelve el producto de las mismas y cuáles son sus características principales.

Clase N°: 1

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función *h(x) = f(x) .g(x)*.

a) Calculen:
   h(0)= ………… *h*(6)= ………… *h*(3)= ………… *h*(2)= …………
   h(-2)= ………… *h*(-8)= ………… *h*(-4)= ………… *h*(-1)= …………
b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.
c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. Realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.
d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?
e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:
   f(x)= ………………… *g(x)* = …………………
f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

<u>Clase N°</u>:2

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*, grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de Entrada.

a) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: *h(x) = f(x) * g(x)*

b) Graben lo trabajado con el nombre: “Problema 2_sus nombres”

c) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)			
g(x)			
h(x)			

d) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

e) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

Clase N°:3

Problema 3.

I. Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x) = x - 4$ y $g(x) = -x - 2$

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de Entrada.
b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$
c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"
d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
$f(x)$			
$g(x)$			
$j(x)$			

e) Propongan alguna relación entre las raíces de $j(x)$ y las raíces de $f(x)$ y $g(x)$. Justifiquen lo que pensaron.
f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.
g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.
h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función $j(x)$.

II. Para analizar:

a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.
b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de $h(x)$ respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de $j(x)$ respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.
e) Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

<u>Clase N°</u>:4

Problema 4.

I. Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x) = -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x) = -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x) = 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

- ✓ Un máximo: ____________________
- ✓ Un mínimo: ____________________
- ✓ Una raíz en cero: ____________________
- ✓ Dos raíces positivas: ____________________
- ✓ Desraíces negativas: ____________________
- ✓ Sólo una raíz: ____________________
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: ____________________

Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

II. Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.

Expuesta la secuencia, realizaremos el *a priori* de cada actividad propuesta.

Para el primer problema (**Problema 1**) se brinda a los alumnos un gráfico de dos funciones lineales, y se les pide, en el ítem a), que con el dato que brinda el gráfico encuentren los valores de la función “producto” a partir de las funciones “factor”. Los valores elegidos para esta primera aproximación, fueron en virtud de ofrecer diferentes pautas sobre los posibles resultados y su ubicación en el gráfico. Por ejemplo, $g(6)$ no se encuentra en el gráfico, por lo que cada pareja de alumnos debería una estrategia de cómo encontrar esta solución parcial para poder llegar a la de $h(x)$. Así mismo, ocurre para el caso de $x = -8$, ya que ni $f(-8)$ ni $g(-8)$ no pueden visualizarse en el gráfico ofrecido. En esta primera parte del problema, se espera que los alumnos ubiquen gráficamente los valores de cada función lineal para el mismo valor de la x, para luego multiplicarlos entre sí y obtener algunas coordenadas de la función producto. Con el punto b), se pretende que los alumnos “observando” numéricamente, cómo se dan los resultados de esa función producto y qué ubicación respecto del eje de abscisas tendrán dichos pares ordenados. En el punto c) se pretende comenzar a caracterizar el gráfico correspondiente a una nueva función que ya no es lineal. En tanto que, con el punto d), se pretende dar nombre a esa nueva representación gráfica puesto que es una curva ya conocida, aunque sea por su forma, en años anteriores u en otras materias. Se manifiesta en este problema la exploración puntual de la representación gráfica (Benítez Pérez, 2010), que luego va a encauzar la interpretación global del producto gráfico y sus resultados. Con el punto e), sólo se pretende que retomen la escritura explícita de la recta, para luego poder lograr una mejor diferenciación respecto de la función $h(x)$ cuya gráfica ya no se parece a la lineal, y hasta podrían descubrir la fórmula de la nueva función planteada.

Tal como lo expresado en el marco teórico de la presente investigación, a través de esta actividad se pretende que los alumnos generen una nueva función de mayor grado a partir del producto de otras de menos grado. Este primer problema, fue pensado para trabajar en papel y lápiz, no en el laboratorio de informática, dado que, por los horarios disponibles que ofrece dicho laboratorio, había que proponer una de las cuatro clase sin entorno virtual, y nos pareció pertinente, que fuera la primera, que es en la que los alumnos podían lograr una primera aproximación al gráfico de la parábola por sus propios medios. A partir de la segunda clase y en adelante, los problemas están planteados para trabajarlos con GeoGebra.

El **Problema 2**, retoma lo trabajado en la primera clase, pero desde el entorno que nos ofrece el software. Dado que este grupo nunca ha trabajado en el área de matemática con GeoGebra, previo a poner en marcha el segundo problema, habrá que ubicarlos en el uso y herramientas de dicho programa que serán las necesarias para el desarrollo de las actividades. Para ello, se prevé que al llegar al laboratorio de informática y abrir el programa, se los ubicará en las vistas algebraicas y gráficas, se les mostrará cómo usar la barra de Entrada correspondiente a la vista algebraica, como así las herramientas tales como el uso o no de cuadrícula, las escalas en ambos ejes, y el zoom entre otros.

Así, en los tres primeros ítems se replica lo trabajado con papel y lápiz en la clase anterior. Luego, en el punto d), se busca que, teniendo las gráficas de las tres funciones en la pantalla, puedan analizar para cada una las características pedidas: raíces e intervalos de positividad y negatividad. En cierto modo, se estaría trabajando con la "sensación de auto-evidencia e inmediatez" a la que Fishbein (1987) hace referencia. Así el gráfico es el organizador visual, que promueve emotivamente la atención por parte de los alumnos. Luego, los ítems e), f) y g) promoverían que los alumnos puedan reflexionar y elaborar conjeturas respecto de cómo se relacionan las raíces o intervalos de positividad y negatividad de las rectas propuestas respecto de la función producto, es decir, de la nueva función generada. En cuanto al ítem h), abriría la posibilidad de que los alumnos desarrollen otro tipo de observaciones no promovidas en los puntos anteriores, focalizando en las formulaciones de conjeturas y otro tipo de exploraciones.

El **Problema 3**, propuesto para la tercera clase, consta de dos partes. La primera de ellas, tiene el mismo propósito que la explicitada en la clase dos, pero con un cambio en las funciones lineales propuestas y así generar una función cuadrática con otra representación gráfica diferente. En la segunda parte del problema, se pretende inducir a los alumnos la posible razón de los cambios en las representaciones gráficas, relacionando crecimientos de las funciones lineales que la producen, reflexionando sobre diferencias y regularidades observables. Los últimos ítems de esta parte, con la propuesta de que sean los propios alumnos "los fabricantes" de ejemplos para corroborar lo que ellos mismos conjeturaron en dichos puntos previos, podría colocarse a la visualización como un importante potencial educativo (Burbules, 2001) ya que los alumnos tendrían una "relación más personal con el saber".

Finalmente, el **Problema 4** tiene el propósito que los alumnos comiencen a dar entidad y significado al recorrido realizado en los problemas anteriores y, de manera poder ir logrando algunas validaciones posibles. Este problema también está separado en dos partes. En la primera, se proponen seis funciones lineales diferentes en cuanto a sus características principales. Se les pide a los alumnos que seleccionando dos de ellas, a través del producto, obtengan una función cuadrática con determinadas características, también que decidan si hay más de una combinación posible y por qué. Creemos que el entorno GeoGebra, permite a los alumnos no sólo la visualización de lo que están realizando sino también su transformación en tiempo real, que los ayuda a los alumnos involucrarse en el hábito de transformar para estudiar variaciones, y aprender a experimentar (Arcavi y Hadas, 2003). En la segunda parte del problema, hemos planteado la discusión de la afirmación por si ninguno de los grupos tomó a la función lineal constante como una de las funciones producto. Se pretende re-analizar lo trabajado, y entonces abrir la oportunidad a un aprendizaje significativo, que permita la retroalimentación (Arcavi y Hadas, 2003).

Tal como señala Douady (1995), este análisis realizado para la implementación de esa secuencia de problemas, se debería concebir como un análisis de *control de significado*, ya que, como es una teoría que se basa en el constructivismo donde su principio fundamental es la participación del alumno en la construcción de conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, se pretende establecer un control de las relaciones entre el significado y las situaciones propuestas.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1. COMENTARIOS PREVIOS

En ambos cursos (A y B), los alumnos habían trabajado el año anterior la unidad temática correspondiente a funciones en la que se trabajaron aspectos generales de las mismas (ceros, positividad, negatividad, extremos máximos y mínimos, intervalos de positividad, negatividad, y constante), con un fuerte trabajo de la lectura de gráficos.

También esos cursos trabajaron el concepto de función lineal, muy particularmente, la fórmula explícita de la recta, donde interpretaron gráficamente la pendiente (coeficiente principal) y la ordenada al origen (término independiente), relación entre los valores de las pendientes de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas.

En el presente año, en el primer trimestre trabajaron en la unidad de números reales, la resolución de la ecuación cuadrática en sus tres formatos, dos de los cuales corresponde a la ecuación incompleta (sin fórmula resolvente), y el tercero la completa, con aplicación de la fórmula resolvente (cabe aclarar que no se hizo un análisis profundo de cómo se llega a dicha fórmula).

En el segundo trimestre, trabajaron algebraicamente con operaciones entre expresiones algebraicas enteras y su factorización. Las únicas factorizaciones “mostradas” geométricamente, fueron el desarrollo del cuadrado y cubo del binomio, diferencia de cuadrados y factor común.

Hasta la implementación de la secuencia, no se había focalizado en un tratamiento gráfico de las expresiones.

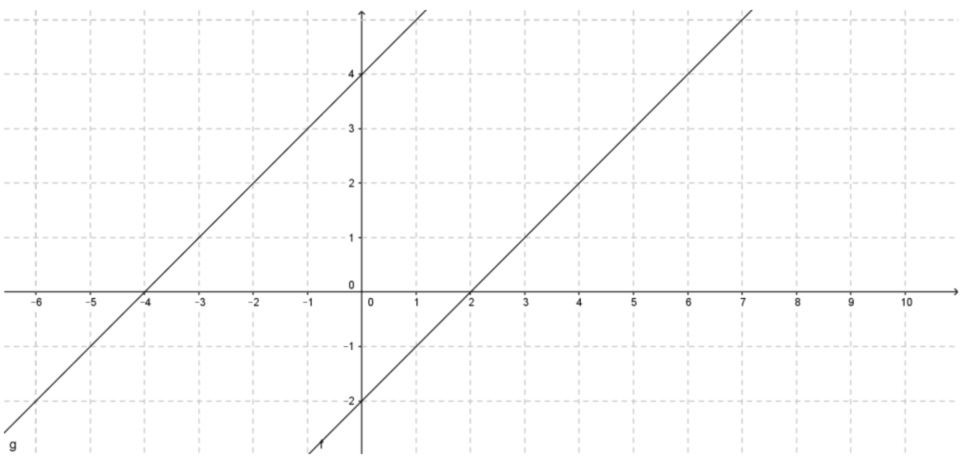
5.2. CLASE 1 – Problema 1

Recordamos a continuación la primera clase de la secuencia:

Clase N°: 1

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función $h(x) = f(x) .g(x)$.

a) Calculen:
$h(0)=$ ………… $h(6)=$ ………… $h(3)=$ ………… $h(2)=$ …………
$h(-2)=$ ………… $h(-8)=$ ………… $h(-4)=$ ………… $h(-1)=$ …………

b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.
c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. Realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.
d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?
e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:
$f(x)=$ ………………… $g(x) =$ …………………
f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

Se comenzó la implementación de la secuencia con el grupo correspondiente a 4°A. Si bien es un grupo muy trabajador, a veces les lleva más tiempo desarrollar actividades en relación con el otro grupo. El comienzo resultó lento (puede ser que uno de los motivos sea que era la primera hora de la mañana de un lunes), no recordaban lo básico sobre lectura de gráficos en ejes cartesianos. Para el segundo grupo (4°B), se decidió, antes de repartir la actividad correspondiente, dibujar una recta cualquiera en el pizarrón (sin ejes cartesianos) y marcar en la misma un punto para comenzar un diálogo sobre cómo leerlo. Si bien, comentaron que se correspondía con un par ordenado y que hacían falta los ejes con coordenadas para poder ubicarlos, no recordaban cómo en el gráfico las coordenadas. Una vez aclarada esta cuestión, enseguida resolvieron el ítem a).

Algunas de las primeras frases/comentarios fueron:

- "*h* de *x*… ¿qué es *h* de *x*?"
- "Hay que hacer lo que dice la coordenada de *g* por…"
- "Hay que saber cuánto vale *f* y *g*."
- "La coordenada de *f* para este valor de *x* por la coordenada de *g* para este mismo valor de *x*."
- "Hay que calcular *f* y *g*"

Luego, en algunos casos, surge otra cuestión a destacar: ubicar en el gráfico las coordenadas*(x ; h(x))* del ejercicio a). Puesto que aún hay alumnos de ese grupo que confunden los ejes (aun escritos en el sistema de ejes cartesianos).

Para realizar el gráfico aproximado *h(x),* encontraron dos valores de *x* cuyo "compañero" tenían el mismo valor de la función. No se animaban a dibujarlo, algunos por lo detallado en el ítem anterior; otros, porque no les daba una "recta". Aparece la exploración puntual de las representaciones gráficas y numérica de las funciones lineales, tal lo expresado por Benítez Pérez

(2010), que favorece la “interpretación global” para la exploración de nuevas representaciones gráficas.

Compartimos parte del diálogo surgido:

A: “¿Es una recta?

P: “¿A vos qué te parece?

A: “Y… No.”

P: “Bueno, fijáte qué sale del trazo.”

Luego de esa representación gráfica de *h(x)*, rápidamente asociaron la gráfica con el nombre. Hubo un caso a destacar:

A: “Parece una montaña al revés.”

Todos los que avanzaron (ya que hubo una pareja de alumnos que casi no trabajaba – luego lo intentaron) respondieron claramente que NO era una función lineal porque NO era una “recta”.

En este punto surgió como una “puesta en común” entre todos:

A1: “¿Y qué función es?”

P: “¿Cómo aparece definida *h(x)*?

A2: “¡Es *f* por *g*!”

P: “¿Y entonces?”

A3: “¡Ah! ¿Hago la distributiva?”

P: “La distributiva con qué…”

A3: “Y, con *f* y *g.”*

P: “¿Con *f* y *g?”*

A3/A4: “Con las fórmulas de *f* por *g* … ¡Las del ejercicio e)!” “*x* menos 2 por *x* más 4.”

P: “Ok, ¿Y?”

(Breve silencio)

A5: “Ya las multipliqué.”

P: “Y entonces, ¿de qué grado te quedó la fórmula?

A3/A4/A5: “¡Grado dos!”

P: “¿Y qué nombre recibían las expresiones algebraicas enteras de grado dos?

Varios alumnos: “¡Cuadrática!”

Luego se les pidió a los alumnos que entreguen sus hojas de trabajo y se realizó un recorrido oral, a modo de cierre, de lo trabajado con el Problema 1.De este recorrido, surgieron características fundamentales y diferencias entre las trazas de las funciones lineal y cuadrática, lo que fue posible desde el lenguaje de las gráficas, tal como lo proponen en su trabajo Azcárate y Deulofeu (1990), dado que a través de una lectura e interpretación de ambas trazas, se pudo realizar un análisis que posibilitó la aparición de este nuevo concepto en forma intuitiva y visual, pudiendo elaborar una primer idea de lo que es una función cuadrática.

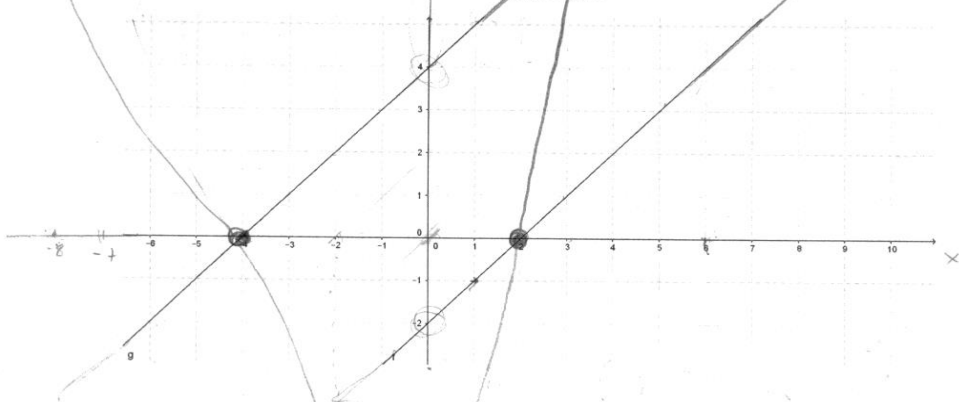
Vemos a continuación un ejemplo de lo trabajado sobre la hoja por una pareja de alumnas:

Participantes/Nombres: AGUSTINA MILLÉ Y ROSARIO BOTTO

Clase N°: 1 **Fecha:** 26/10

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

h(0) = (-2; 2)(0) . (-4, 4)(0)

a) Calculen:

$h(0)=$ (0;-8) neg $h(6)=$ (6;40) pos $h(3)=$ (3;7) pos $h(2)=$ (2;0) cero

$h(-2)=$ (-2;-8) neg $h(-8)=$ (-8;44) pos $h(-4)=$ (-4;0) cero $h(-1)=$ (-1;-9) neg

b) Decidan para qué valores de x del punto a), $h(x)$ es negativa, positiva o cero.

NEG = 0; -2, -1 POS = 6; 3; -8 CERO = -4; 2

c) Propongan un gráfico aproximado para $h(x)$. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

en el gráfico.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?

tiene forma U. Recibe el nombre de "PARÁBOLA"

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

$f(x)=$ X - 2 $g(x) =$ X + 4

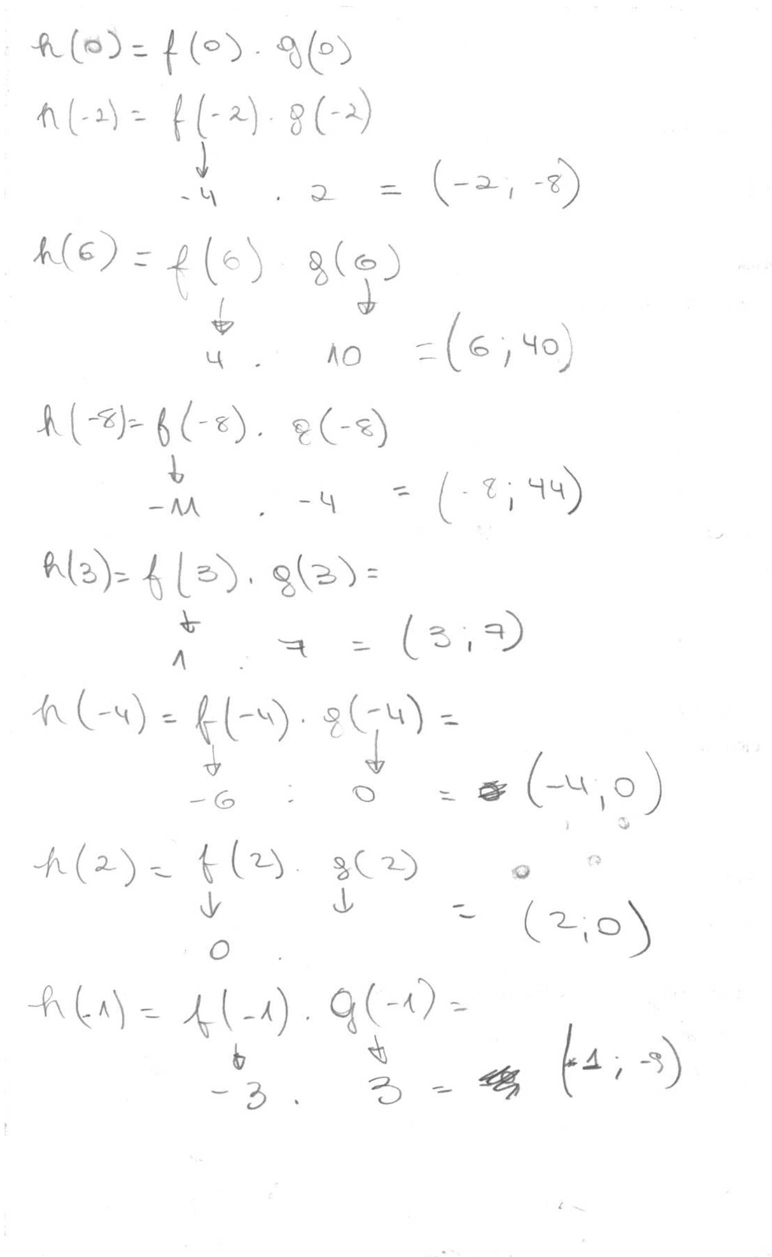
f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No, porque es una parábola. Recibiría el nombre de función CUADRÁTICA. no es una recta.

1

$(X-2) \cdot (X+4) = X^2 + 4X - 2X - 8$

$\boxed{X^2 + 2X - 8}$ → cuadrática



$h(0) = f(0) \cdot g(0)$

$h(-2) = f(-2) \cdot g(-2)$

$-4 \cdot 2 = (-2; -8)$

$h(6) = f(6) \cdot g(6)$

$4 \cdot 10 = (6; 40)$

$h(-8) = f(-8) \cdot g(-8)$

$-11 \cdot -4 = (-8; 44)$

$h(3) = f(3) \cdot g(3) =$

$1 \cdot 7 = (3; 7)$

$h(-4) = f(-4) \cdot g(-4) =$

$-6 \cdot 0 = (-4; 0)$

$h(2) = f(2) \cdot g(2)$

$0 \cdot \quad = (2; 0)$

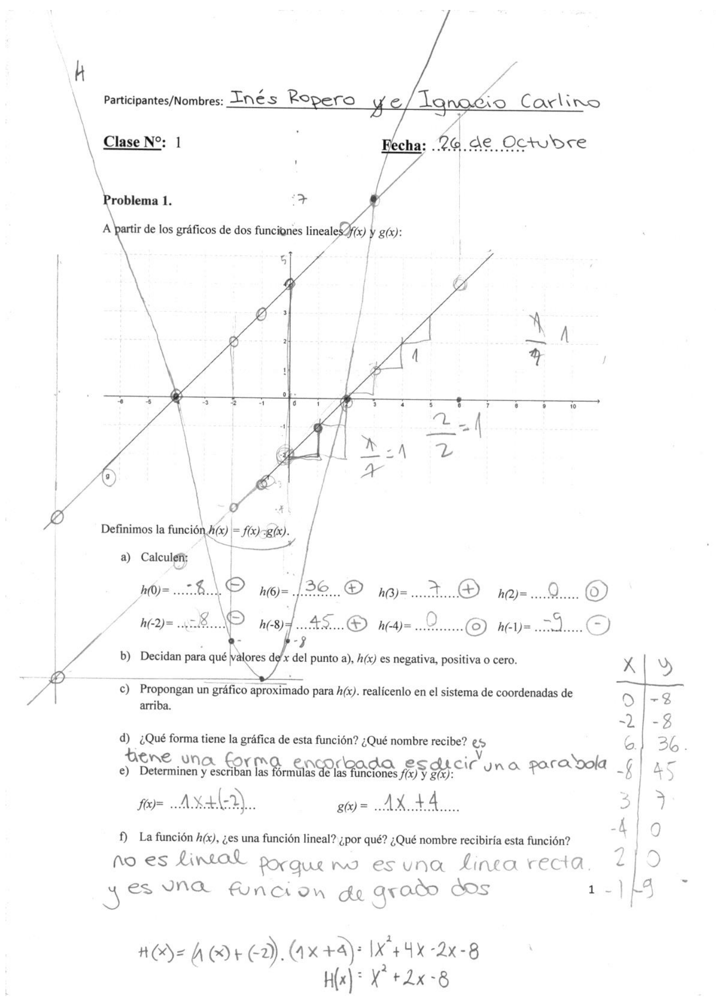
$h(-1) = f(-1) \cdot g(-1) =$

$-3 \cdot 3 = (-1; -9)$

En la hoja de trabajo de estas alumnas se observa que mostraron en forma escrita lo que la mayoría de sus compañeros realizó, lo que Benítez Pérez (2010) señala como la exploración puntual de la representación gráfica con el fin de dar respuesta al primer ejercicio planteado.

En tanto, la clase con el otro curso, 4°B, fue más ágil, ya que si bien es un grupo ruidoso, en ese clima trabajan. Lograron encontrar el gráfico de *h(x)* describiendo su formato asociando el parecido con las letras “V” y “U”. Automáticamente asociaron dicho gráfico con la palabra parábola, dado que habían trabajado el gráfico de dicha función con tablas dos años antes, en segundo año. Nuevamente aquí, trabajar con el lenguaje de las gráficas, Azcárate y Deulofeu (1990), fue fundamental, dado que la visualización de las mismas fue casi instintiva, y con ella el reconocimiento de características de la nueva función “trazada”.

Vemos un ejemplo de lo trabajado, en este caso correspondiente al 4°B:



H

Participantes/Nombres: Inés Ropero y e/ Ignacio Carlino

Clase N°: 1 **Fecha:** 26 de Octubre

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:

Definimos la función *h(x) = f(x) . g(x)*.

a) Calculen:

h(0)= -8 *h(6)*= 36 *h(3)*= 7 *h(2)*= 0

h(-2)= -8 *h(-8)*= 45 *h(-4)*= 0 *h(-1)*= -9

b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.

c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe? es tiene una forma encorbada es decir una parabola

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

f(x)= 1x+(-2) *g(x)* = 1x +4

f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

no es lineal porque no es una linea recta y es una funcion de grado dos

x	y
0	-8
-2	-8
6	36
-8	45
3	7
-4	0
2	0
-1	-9

1

$H(x) = (1(x)+(-2)).(1x+4) = 1x^2+4x-2x-8$

$H(x) = x^2+2x-8$

Como ya habían trabajado este tipo de operaciones, no tuvieron inconvenientes en llegar a la expresión algebraica de grado dos, a la que ellos ya conocían como cuadrática, lo que permitió comenzar a diferenciar y caracterizar (Janvier, 1983) las diferencias de ambos modelos lineal y cuadrático desde lo gráfico y algebraico, dando una visión más general y completa de las mismas.

No se realizó un recorrido luego de lo trabajado, porque fue surgiendo naturalmente, además de que faltaban pocos minutos para que termine el horario de la clase.

En líneas generales, tomando ambos cursos de referencia, si bien observamos que les costó el comienzo de la actividad, podríamos decir que en esta primera clase los resultados fueron satisfactorios, puesto que, como proponen Lacasta y Pascual (1998) se pudo llevar adelante el objetivo que ellos proponen en cuanto a que los alumnos exploren y descubran funciones, explorando otras conocidas por ellos y operándolas a través del producto, como el caso de la función cuadrática y su gráfica, la parábola. Tal como estos autores manifiestan, la percepción visual les permitió definir ciertas relaciones respecto de la imagen, formulando conjeturas, a partir del gráfico obtenido.

En tanto, esto ofrece a los alumnos, tal como lo proponen Cantoral y Montiel (2001), la "visualización" de los conceptos que el docente pretende introducir, pretendiendo que los alumnos puedan elaborar nuevos conceptos, entrenando la capacidad de comunicar, documentar, reflejar o representar información visual, desarrollando así un modo particular de pensamiento matemático, pudiendo analizar información analítica, en virtud de los trabajos realizados por los alumnos.

A modo de síntesis podríamos establecer los siguientes resultados.

En cuanto al ítem a), algunas parejas de alumnos decidieron prolongar las rectas propuestas, y en algunos de ellos, hasta prolongaron la cuadrícula del gráfico para poder encontrar valores de las funciones f y g que no se observan por ser el gráfico acotado. La respuesta general fue satisfactoria, salvo algunos errores (pocos) de cálculo.

En cuanto al reconocimiento de la positividad o negatividad, y ceros de función, pedidos en el ítem b), no hubo mayores inconvenientes, y los errores en algunos casos fueron por los errores de cálculo y en otros por “olvidos” del signo, siendo que la mayoría de los alumnos obtuvieron respuestas correctas a lo propuesto.

En tanto en el punto c), cuyo objetivo era que pudieran esbozar el gráfico, en la mayoría de los casos, lo lograron, obteniendo en dichos casos “parábolas” o gráficas que se le parecían bastante.

Para el caso del punto d), los resultados fueron los siguientes:

- ✓ La gran mayoría encontró la forma y nombre a la gráfica de la función.
- ✓ Pocos realizaron observaciones inherentes a las rectas propuestas, quienes manifestaron que eran paralelas.
- ✓ Los menos, solo hablaron de rectas o funciones lineales, sin llegar a la gráfica o noción de cuadrática.

Observamos algunos ejemplos:


d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe? paralelas
forma de "V"


d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe? es
tiene una forma encorbada es decir y una parabola
e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones

En general, no hubo mayores inconvenientes en la traza de la nueva función, y para quienes lograron un gráfico aproximado de lo que se estaba buscando, se produjo casi automáticamente el reconocimiento de una parábola.

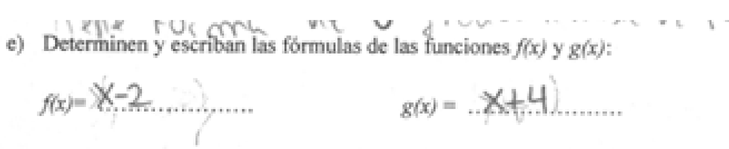
Para quienes lograron la traza, asociaron su formato visualmente de la siguiente manera:

- ✓ Muchos relacionaron el gráfico con las formas de las letras “U” y “V”.
- ✓ En algún caso surgió el término “encorvada”.
- ✓ Alguien lo asoció con una “montaña al revés”.
- ✓ Los menos, solo hablaron de rectas o funciones lineales, sin llegar a la gráfica o noción de cuadrática.

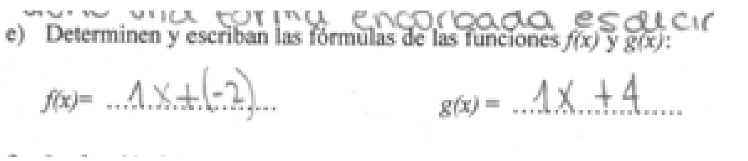
Para el caso del punto e), donde se pretendía que escribieran las fórmulas explícitas de las rectas, concepto conocido y trabajado por ellos el año anterior, no presentaron mayores inconvenientes, y el resultado fue el siguiente:

- ✓ La gran mayoría encontró las fórmulas de ambas rectas en forma correcta.
- ✓ En algún caso, pudieron definir sólo una de ellas en forma correcta.
- ✓ Algunos pocos definieron cada lineal como la división entre la función cuadrática y la otra lineal, por ejemplo: f*(x) = h(x)/g(x)*.
- ✓ Muy pocos decidieron no responder.

A modo de ejemplo:

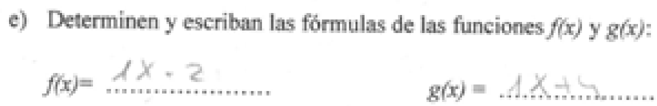

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

f(x)= X-2.................. *g(x)* = ..X+4)..........



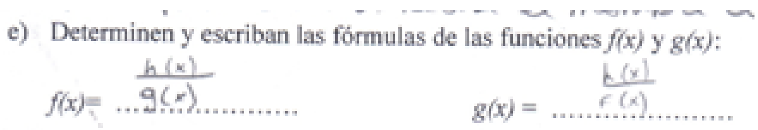
e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$f(x)=$ 1x+(-2) $g(x)=$ 1x +4



e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

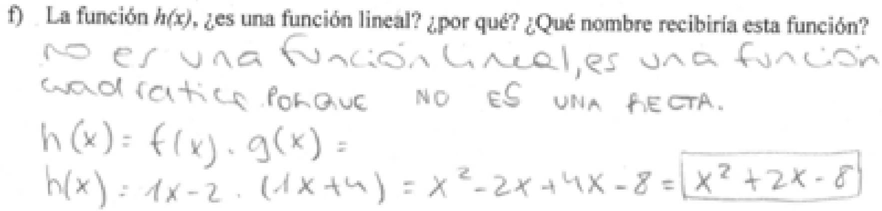
$f(x)=$ 1x - 2 $g(x)=$ 1x+4



e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$f(x)= \frac{h(x)}{g(x)}$ $g(x)= \frac{h(x)}{f(x)}$

Por último, del punto f) donde se les consulta acerca de si la función es lineal, el porqué y el nombre de esta nueva función, claramente la gran mayoría pudo reconocer que no se trataba de una función lineal dado que su gráfico no correspondía a una recta, y otros manifiestan que no se trata de una función lineal porque "tiene curva". De los que respondieron que no era una función lineal, para darle nombre a la función obtenida, podemos sacar en limpio que en algunos casos decidieron realizar la operación algebraica, y con la nueva fórmula obtenida, dieron el nombre de "cuadrática" o de "grado 2" a esa nueva expresión. Sólo hubo un caso que utilizó el nombre de la gráfica, es decir "parábola", para dar nombre a la nueva fórmula obtenida. Podemos observar además, que más de la mitad decidió buscar la fórmula de esta nueva función operando algebraicamente, para dar nombre a la misma. Mostramos a continuación:

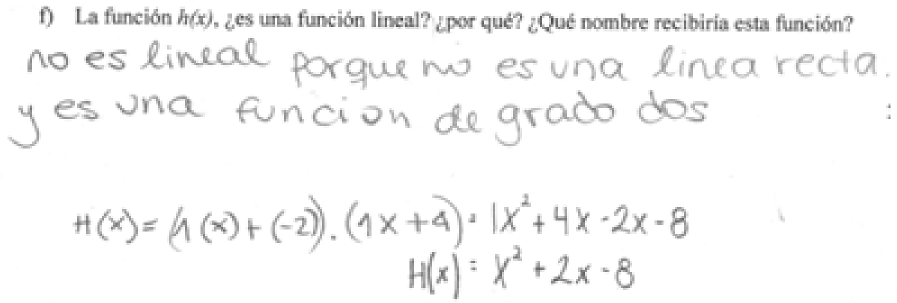


f) La función $h(x)$, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

no es una función lineal, es una función cuadratica porque no es una recta.

$h(x) = f(x) \cdot g(x) =$

$h(x) = 1x - 2 \cdot (1x + 4) = x^2 - 2x + 4x - 8 = \boxed{x^2 + 2x - 8}$

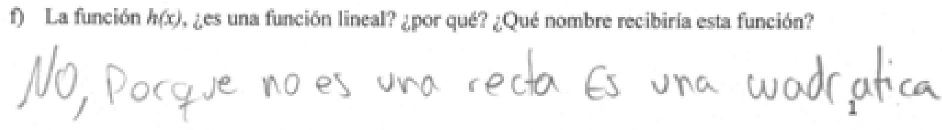


f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

no es lineal porque no es una linea recta.
y es una funcion de grado dos

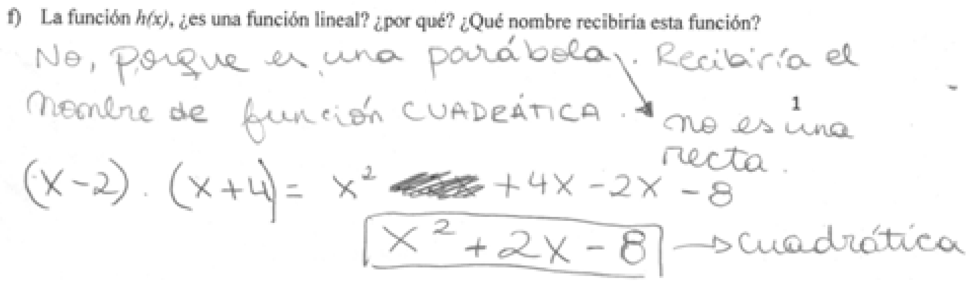
$H(x) = (1(x) + (-2)).(1x+4) = 1x^2+4x-2x-8$

$H(x) = x^2+2x-8$



f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No, Porque no es una recta Es una wadratica



f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No, porque es una parábola. Recibiría el nombre de función CUADRÁTICA. no es una recta.

$(x-2).(x+4) = x^2 + 4x - 2x - 8$

$\boxed{x^2+2x-8} \rightarrow$ cuadrática

(Se pueden observar en el Anexo I ejemplos de lo trabajado por los alumnos en esta primera clase).

De lo realizado y expuesto, podemos afirmar que se logró poner en marcha un trabajo con los alumnos en el cual, tal como promueven Fioriti, Sessa y otros (2015), se alcanzó unos de los objetivos fundamentales que es involucrar a los alumnos en una verdadera actividad de producción de conocimiento, ya que se los alentó, y estuvieron bien dispuestos, a ensayar, producir y aportar ideas, con las cuales, nos pudimos aproximar a poder discutir de algunas cuestiones como validez y precisión de las ideas elaboradas, en forma oral, respecto .También, este trabajo favorece el espíritu crítico, ya que pudieron identificar, la existencia de distintos modelos, sean el lineal que se corresponde con una fórmula de primer grado, como el cuadrático que se corresponde con la fórmula de grado dos, trabajando en pos de la adquisición de una capacidad de análisis, tal como lo enuncian Azcárate y Deulofeu (1990).

5.3. <u>CLASE 2 – Problema 2</u>

Se trabajó con ambos cursos, A y B, al día siguiente de la Clase 1.

Al llegar al laboratorio se les solicitó que se acomodaran por cada computadora las mismas parejas de trabajo de la clase anterior. No hubo inconveniente en cuanto a este aspecto organizativo, además que contábamos con la presencia del profesor/a de Informática de turno, quienes estuvieron a disposición todo el tiempo. Por este motivo, al llegar ya contábamos con las computadoras encendidas. Una vez organizadas las parejas (en algún caso, terna) de trabajo, se les solicitó que abrieran el programa GeoGebra, y ni bien estaban todos listos para comenzar, se les hizo visualizar la existencia de la "Vista Algebraica", la "Vista Gráfica", y la barra de "Entrada" que figura al pie. Además de esto, se les mostró que con el cursor sobre la Vista Gráfica y apretando el botón derecho del mouse, se abrían opciones para la Vista Gráfica, entre las cuales podían encontrar los botones "Cuadrícula" (para que sea o no visible la misma), "Zoom" (para acercar o alejar y poder realizar diferentes visualizaciones), "Eje x : Eje y" (para ajustar la escala), que eran los que podían llegar a ser de utilidad en principio.

<u>Clase N°</u>:2

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

a) Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*, grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de Entrada.

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: *h(x) = f(x) * g(x)*

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)			
g(x)			
h(x)			

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

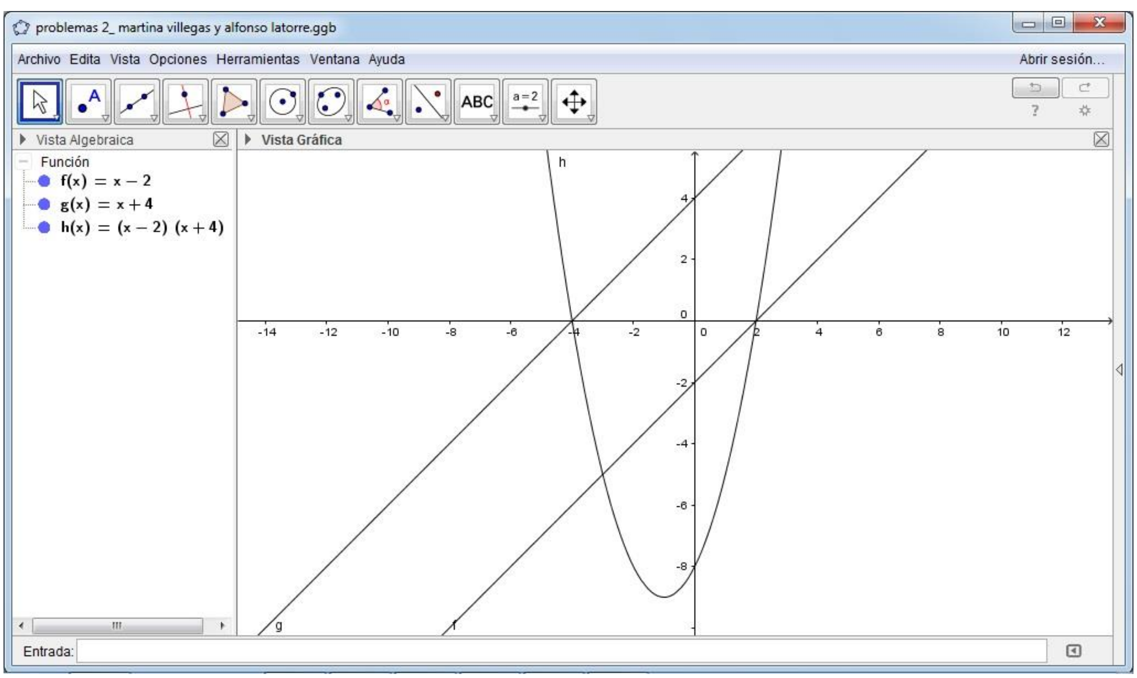
g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

Luego de esta breve introducción al uso de este software, nuevo para ellos, se les repartió por parejas de trabajo la hoja correspondiente a la segunda clase que contenía el **Problema 2**, conjuntamente con lo trabajado en la clase anterior, donde figuraban como datos las fórmulas de las funciones lineales que ellos habían encontrado a partir del gráfico. Para el caso de los alumnos que habían estado ausentes o no habían logrado resolver dicho ítem del **Problema 1**, sus propios compañeros les compartieron dicha información. Una vez ingresadas las fórmulas correspondientes a las funciones lineales trabajadas el día anterior, se les solicitó que devolvieran la hoja de trabajo de dicha primer clase.

En cuanto al desarrollo de esta segunda actividad, cabe destacar, que los primeros tres ítems propuestos en el **Problema 2**, los resolvieron con mucha rapidez y correctamente. Dada la correcta forma de usar este software, y más allá de las diferencias en los nombres de dichos archivos, todos los grupos obtuvieron el mismo gráfico.

A modo de ejemplo:



Entonces se realizó una pausa para consultarle al profesor encargado de la sala por una carpeta común a todas las computadoras en red, para que cada grupo-pareja guarde en ella el archivo correspondiente a su trabajo, y así dichos archivos estar disponibles para la observación del profesor, de los que luego hicimos copia.

Por otro lado, es importante comentar lo sorprendidos que parecieron algunos de los alumnos en virtud de que este programa utilizado les permitía graficar rápidamente, en tanto eso les daba mayor tiempo para "poder pensar" aquello que debían responder de lo propuesto en esta clase. Así, luego de esta primera etapa de trabajo, se dejó que los alumnos trabajaran con los ítems d), e), f), g) y h), en forma autónoma, observando el gráfico y completando la hoja de trabajo entregada.

Respecto del reconocimiento de raíces, intervalos de positividad y negatividad solicitados en el ítem d) para las tres funciones, las respuestas han sido altamente positivas, ya que todos los alumnos reconocieron correctamente raíces e intervalos de positividad y negatividad. Mostramos un ejemplo para generalizar la respuesta obtenida por todo el grupo:

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	$\{2\}$	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$
g(x)	$\{4\}$	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;-4)$
h(x)	$\{4;2\}$	$(-\infty;-4)$ $(2;+\infty)$	$(-4;2)$

En cuanto al punto e) donde se les pide que propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las de *f(x)* y *g(x)*, fueron varios alumnos los que lograron identificar que las raíces de *h(x)* coinciden con las raíces de *f(x)* y *g(x)*, otros pocos reconocieron que pasaban por – 4 y 2, y muy pocos elaboraron ideas incorrectas o bien no resolvieron lo pedido. De los alumnos que lograron establecer algún tipo de relación, fueron menos de la mitad quienes intentaron dar una justificación, y aún menos, quienes lograron hacerlo correctamente. Por ejemplo:

> e) La relación es que las raices de f(x) y g(x), son las de h(x) ya que es una multiplicación (Producto de h(x).

> e) YA QUE H(x) = F(x) . G(x) LAS DOS RAICES DE "H" SON LAS MISMAS RAICES QUE "F(x)" Y "G(x)" LA UNICA DIFERENCIA ES QUE LAS RAICES DE "F(x)" ESTA SEPARADA A LA DE "G(x)", EN CAMBIO EN H ESTAN JUNTAS.

En los incisos f) y g) la producción de respuestas positivas por parte de los alumnos en cuanto a relacionar los intervalos de positividad y negatividad de la función cuadrática respecto de las funciones lineales planteadas. Para el ítem f), podemos observar la elaboración de las siguientes ideas:

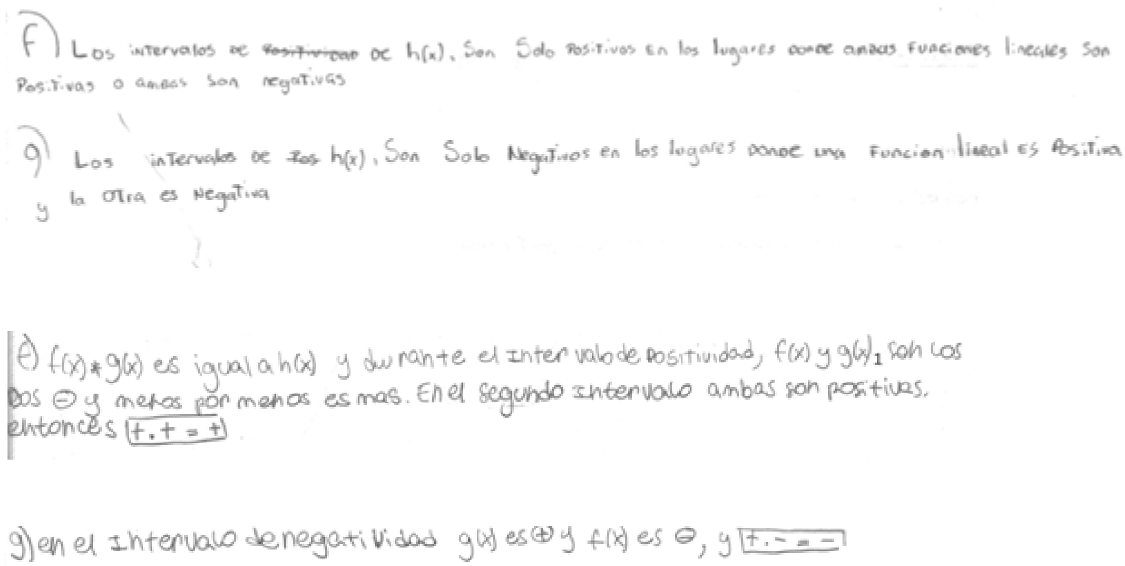
- ✓ Los intervalos de *h(x)* son positivos donde ambas funciones lineales son positivas o ambas negativas.
- ✓ Los intervalos de positividad de *h(x)* está compuesto por el negativo de *g(x)* y el positivo de *f(x).*
- ✓ Uno de los intervalos de positividad de *h(x)* coincide con la parte positiva de las rectas.
- ✓ Uno de los intervalos de positividad de *h(x)* coincide con la parte positiva de las rectas.

- ✓ Los intervalos de positividad de *h(x)* termina o empieza con las raíces de las funciones lineales.

Para el ítem g), se lograron las siguientes ideas:

- ✓ El intervalo de *h(x)* es negativo donde una función lineal es positivas y la otra negativa (menor nivel de respuesta).
- ✓ El intervalo de negatividad de *h(x)* está limitado por las raíces - 4 y 2 (la idea mayormente expresada por los alumnos).

Para ilustrar lo comentado:

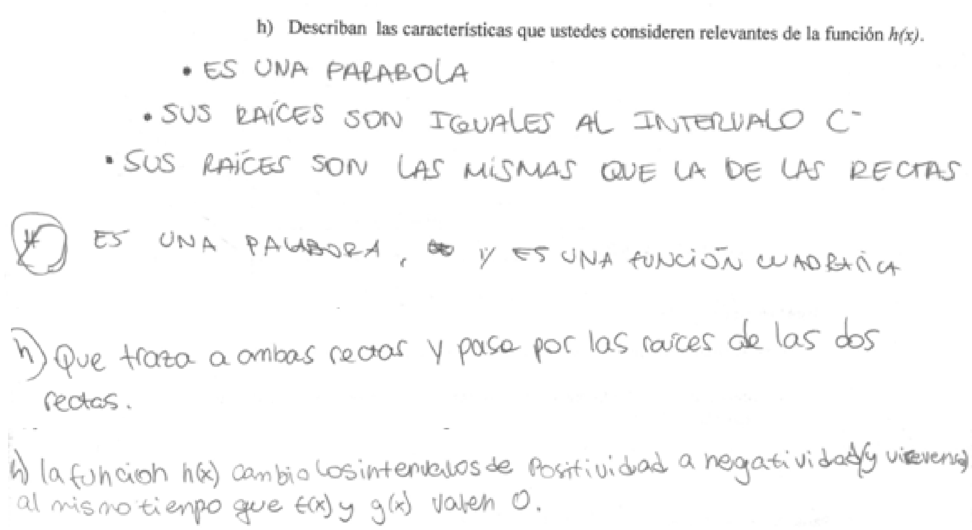


En estas tareas llevadas adelante por los alumnos, nuevamente logran, a pesar de algunos errores, explorar y formular conjeturas, las cuales tienen la posibilidad de visualizar, lo que les permite validar o no a través del trabajo con GeoGebra, y en tanto se comienza a vislumbrar que dichas conjeturas se corresponden con las características globales y generales de la función cuadrática, tal como lo proponen Azcárate y Deulofeu (2010).

Para el punto h) donde se les ofrece la libertad de dar características relevantes de la función h(x), las respuestas fueron variadas y las enunciaremos en orden de mayor a menor repetición de las mismas por parte de los alumnos:

- ✓ Raíces de *h(x)*, las mismas de *f(x)* y *g(x)*.
- ✓ Parábola/Forma de U.
- ✓ Es una función cuadrática.
- ✓ *h(x)* es divisible por *f(x)* y por *g(x)*.

Observemos:


h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

• ES UNA PARABOLA

• SUS RAÍCES SON IGUALES AL INTERVALO C⁻

• SUS RAÍCES SON LAS MISMAS QUE LA DE LAS RECTAS

h) ES UNA PALABORA, y ES UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

h) Que traza a ambas rectas y pasa por las raices de las dos rectas.

h) la funcion h(x) cambia los intervalos de positividad a negatividad (y viceversa) al mismo tiempo que f(x) y g(x) valen 0.

(Se pueden observar en el Anexo II más ejemplos de lo trabajado por los alumnos en esta segunda clase).

Tal como sostienen Lacasta y Pascual (1998), esta actividad además de perseguir objetivos respecto a que los alumnos exploren y formulen conjeturas, también los prepara en utilizar el lenguaje de las gráficas, ya que definir relaciones entre las raíces, o los intervalos de positividad y negatividad de las funciones lineales respecto de la cuadrática obtenida, implica usar el gráfico como un instrumento racional, haciendo que permite dar significado a la lectura obtenida de los mismos. De esta manera, se introducen en un trabajo cualitativo, donde ya que comienzan a aparecer las características globales.

5.4. <u>CLASE 3 – Problema 3</u>

Al igual que la clase anterior, se trabajó con ambos cursos, A y B, dos días después de la Clase 2.

Ya en el laboratorio, se les solicitó que se acomodaran por cada computadora en parejas, en este caso con la libertad de cambiar los compañeros de trabajo de las clases anteriores. Como contábamos, al igual que la clase anterior, con la presencia del profesor/a de Informática de turno, las computadoras ya estaban encendidas, por lo que los alumnos se acomodaron, abrieron el programa GeoGebra y mientras ello sucedía, la profesora les repartía la hoja de trabajo con la nueva actividad.

Al igual que la clase anterior, no han tenido inconvenientes en la correcta resolución de los primeros tres ítems propuestos en el ejercicio 1 del **Problema 3**, a cuya lista de facilidad de resolución podríamos agregar el ítem d) correspondiente al análisis de raíces e intervalos de positividad y negatividad de las funciones lineales propuestas y la cuadrática resultante, tal como sucedió con el **Problema 2**.

<u>Clase N°</u>:3

Problema 3.

I. Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x)= x - 4$ y $g(x) = -x - 2$

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de Entrada.
b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$
c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"
d) Completen:

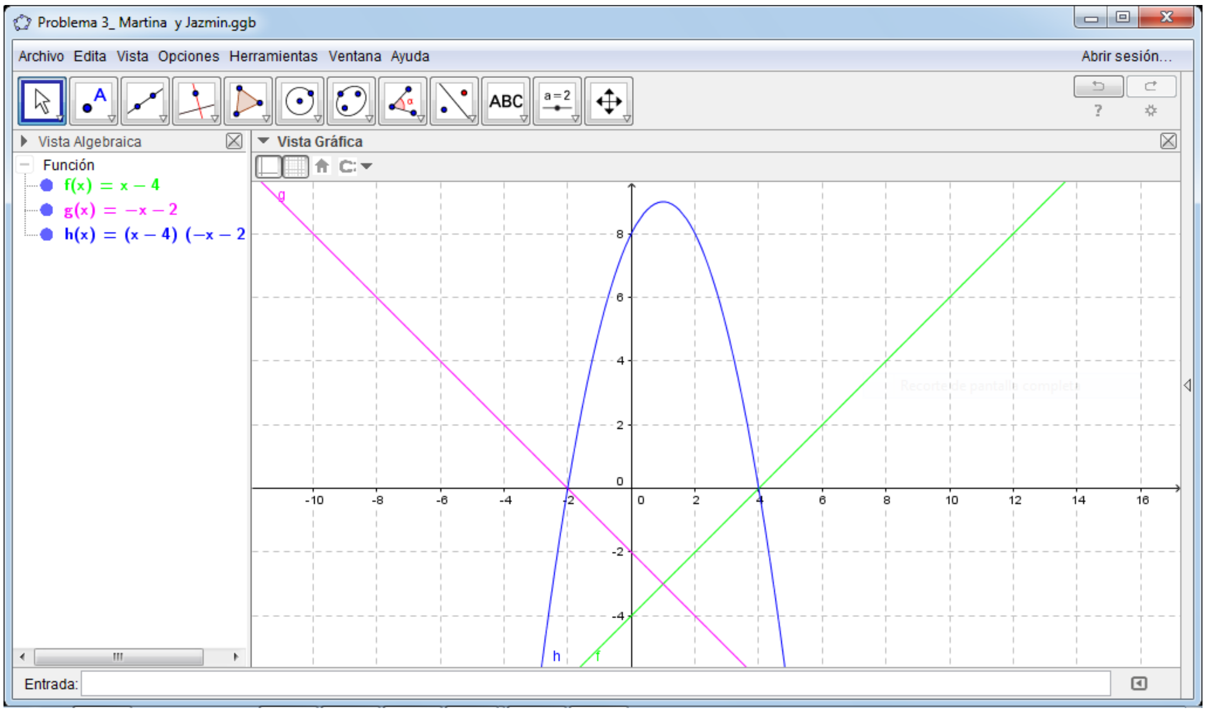
		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)			
g(x)			
j(x)			

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *j(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.
f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.
g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.
h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *j(x)*.

II. Para analizar:

a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.
b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.
e) Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

El gráfico obtenido por cada grupo, ya que lograron correctamente el mismo todos ellos, podría generalizarse a partir de uno de ellos:



Damos ahora un ejemplo de la resolución del inciso d):

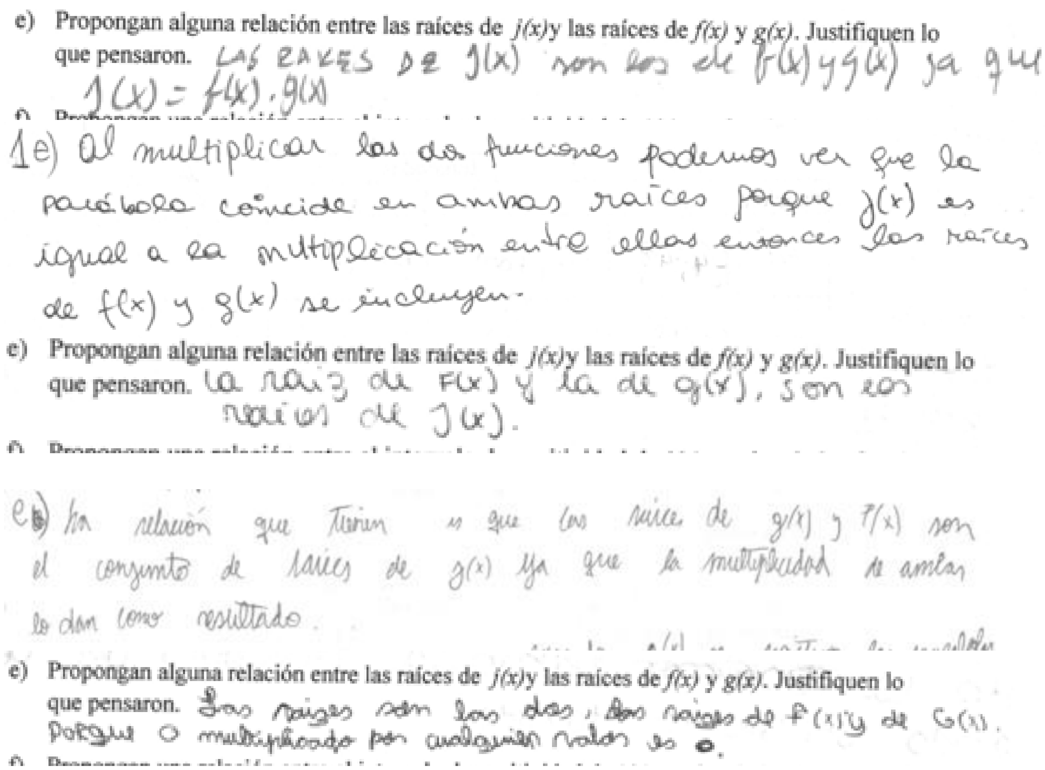
d) Completen:

Función	Raíces	Intervalos C^+	Intervalos C^-
f(x)	$\{4\}$	$(4;+\infty)$	$(-\infty;4)$
g(x)	$\{-2\}$	$(-\infty;-2)$	$(-2;+\infty)$
j(x)	$\{-2;4\}$	$(-2;4)$	$(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

Por lo tanto, nos disponemos a hacer el análisis de los ítems siguientes al inciso d) correspondientes al ejercicio 1) y, del ejercicio 2) del **Problema 3**.

Respecto del punto e), donde deben proponer alguna relación entre las raíces de *j(x)* y las de *f(x)* y *g(x)*, la gran mayoría de los alumnos logró relacionar que las raíces de las funciones lineales coincidían con las de la función *j(x)*, en tanto menos de la mitad de ellos pudo dar una justificación correcta, a pesar de que la gran mayoría intentó hacerlo.

Vemos algunos ejemplos:



e) Propongan alguna relación entre las raíces de *j(x)*y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron. LAS RAICES DE J(x) son los de f(x) y g(x) ya que J(x) = f(x).g(x)

1e) Al multiplicar las dos funciones podemos ver que la parábola coincide en ambas raices porque j(x) es igual a la multiplicación entre ellas entonces las raices de f(x) y g(x) se incluyen.

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *j(x)*y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron. la raiz de F(x) y la de g(x), son las raices de J(x).

e) La relación que tienen es que las raices de g(x) y f(x) son el conjunto de raices de j(x) ya que la multiplicidad de ambas lo dan como resultado.

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *j(x)*y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron. Las raices son las dos, las raices de f(x) y de G(x), porque 0 multiplicado por cualquier valor es 0.

De igual modo que en el **Problema 2**, correspondiente a la clase anterior, en los incisos f) y g) la producción de respuestas positivas por parte de los alumnos en cuanto a relacionar los intervalos de positividad y negatividad de la función cuadrática respecto de las funciones lineales planteadas, nuevamente la dificultad surge en la elaboración de dichas respuestas, dado que menos de la mitad en un caso, y apenas un poco más de la mitad de los alumnos en el otro caso lograron elaborar ideas como las siguientes.

Para el inciso f):

- ✓ El intervalo de positividad de *j(x)* es donde ambas funciones lineales ambas negativas (fue la frase más repetida).
- ✓ El intervalo de positividad de *j(x)* está entre las raíces de *f(x)* y *g(x)*.
- ✓ Antes del "- 2" *f(x)* es negativa y *g(x)* es positiva, y al multiplicarse, *j(x)* queda negativa.
- ✓ Cuando *f(x)* y *g(x)* tienen el mismo signo, *j(x)* es positiva, y cuando son distintos, *j(x)* es negativa.

Para el inciso g):

- ✓ Los intervalos de *h(x)* son negativos donde una función lineal es positivas y la otra negativa (la frase más repetida).
- ✓ Antes de "-2" *g(x)* es positiva y *f(x)* es negativa, y la multiplicación entre ambas es negativa.
- ✓ Las raíces determinan cuando empiezan y cuando terminan los intervalos.

Vemos algunos ejemplos de las respuestas escritas por los alumnos para ambos casos:

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. mientras j(x) es positivo, f(x) G(x) son negativas

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. En uno de los intervalos f(x) es positivo y g(x) es negativo. En el otro f(x) es negativo y g(x) positivo

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. El intervalo + de F(x), empieza en el final del I.P de J(x), y el de g(x), termina en el comienzo del I.P de J(x).

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. la multiplicacion de la g(x)(+) y la F(x)(−) dan negativo, que es donde se encuentra la parabola, y la mismo del otro lado.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *j(x)*. la parabola cruza la recta x, en el mismo punto en donde la F y la G

lo dan como resultado.

f) la relación que tienen es que cuando g(x) es positivo las parabola son negativas entonces multiplicados entre si dan numeros positivos.

g) la relación que tiene con j(x) es que cuando es negativo g(x) es negativo y f(x) es positivo y a multiplicarse el +.− da negativo.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. CUANDO F(x) Y G(x) TIENEN MISMO SIGNO ES + Y cuando distinto ES ~~NEG~~ − PORQUE ES UNA REGLA DE LA MULTIPLICIDAD QUE TAMBIEN SE APLICA A LOS EJES CARTESIANOS

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *j(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. CUANDO G(x) Y F(x) SON POSITIVAS J(x) ES POSITIVA CUANDO G(x) Y F(x) SON NEGATIVAS J(x) ES POSITIVA Y CUANDO TIENEN DISTINTO SIGNO ES ~~N~~

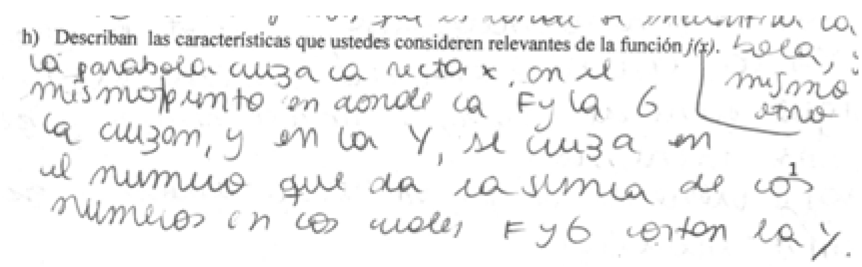
h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *j(x)*

Para el punto h) donde podrían establecer características relevantes de la función *j(x)*, más de la mitad de los alumnos lograron dar las siguientes:

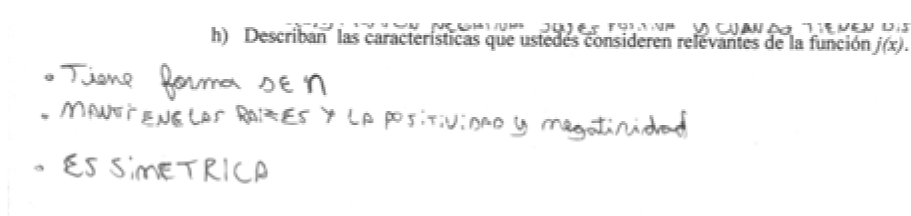
- ✓ Parábola / Forma de U / Función Cuadrática.
- ✓ Raíces de *h(X)*, las mismas de *f(x)* y *g(x).*
- ✓ Tiene máximo.
- ✓ Idea de simetría.
- ✓ Transición negatividad-positividad-negatividad.
- ✓ Tiene primero pendiente positiva y luego negativa/Crece y decrece.

- ✓ Cruza el eje *y* en el producto de *f(0)* por *g(0).*
- ✓ No es lineal.

Observemos las producciones de los alumnos:


h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *j(x)*.
la parabola cruza la recta x, en el mismo punto en donde la F y la G la cruzan, y en la Y, se cruza en el numero que da la suma de los numeros en los cuales F y G cortan la Y.


h) Las ~~relación~~ características son que es una parabola invertida


h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *j(x)*.
- Tiene forma de ∩
- MANTIENE LAS RAIZES Y LA POSITIVIDAD y negatividad
- ES SIMETRICA

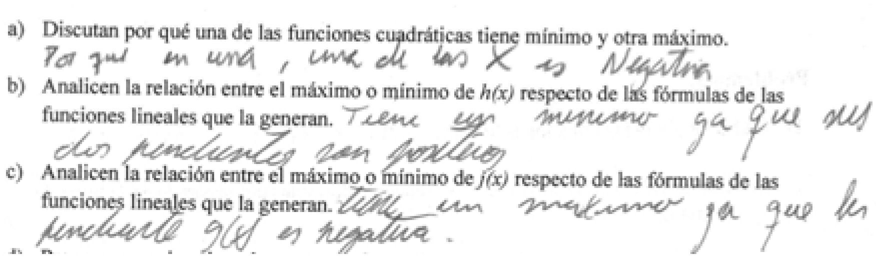
El trabajo en esta actividad con dos funciones lineales de signos opuestos abrió en los alumnos el camino para la reflexión y la retroalimentación de las que hablan Arcavi y Hadas (2003), ya que si bien se trataba también de una parábola como en la clase anterior, aquí las características se manifestaban parecidas pero con algunas modificaciones, en tanto fueron los alumnos quienes pudieron comprender y explicarlo conceptualmente (Quintero, Ruíz y Terán, 2005).

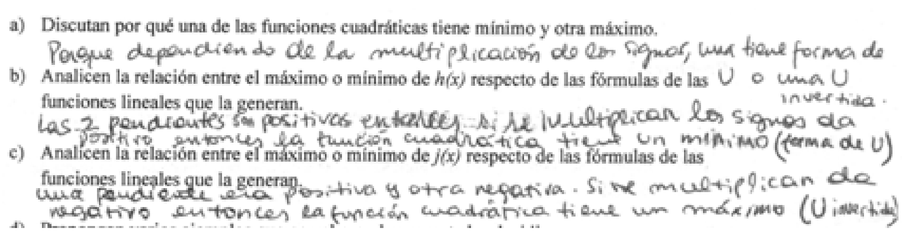
Ahora, realizaremos el análisis del ejercicio 2), correspondiente a la misma clase. **Problema 3**. Este ejercicio estaba preparado para que los alumnos elaboraran conjeturas acerca de lo producido, también proponía a los alumnos la elaboración de ejemplos que corroboraran sus conjeturas, utilizando GeoGebra como medio de control de sus propios ejemplos. Veremos, entonces, los resultados de cada inciso, en cuanto al análisis logrado por los alumnos.

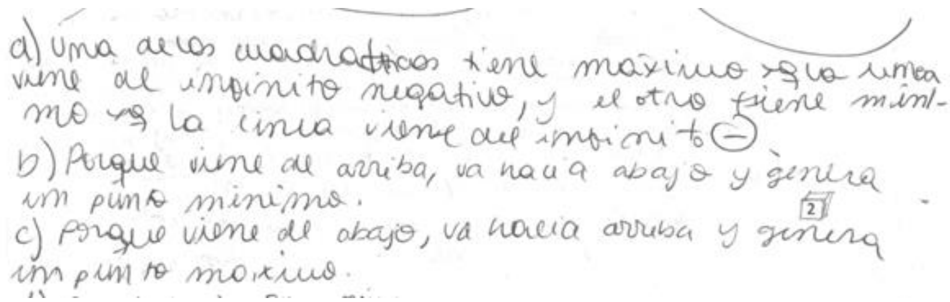
Las respuestas respecto al porqué las funciones cuadráticas tenían mínimo o máximo, si bien la mayoría intentó dar una respuesta, apenas la tercera parte de los alumnos pudo dar algunas explicaciones posibles, entre las que podemos enunciar las siguientes:

- ✓ *h(x)* es el producto de dos lineales de pendiente positiva, y *j(x)* lo es de una de pendiente positiva y la otra negativa.
- ✓ *h(x)* tiene el término x^2 positivo, y *j(x)* negativo.
- ✓ *j(x)* está invertida y *h(x)* no.

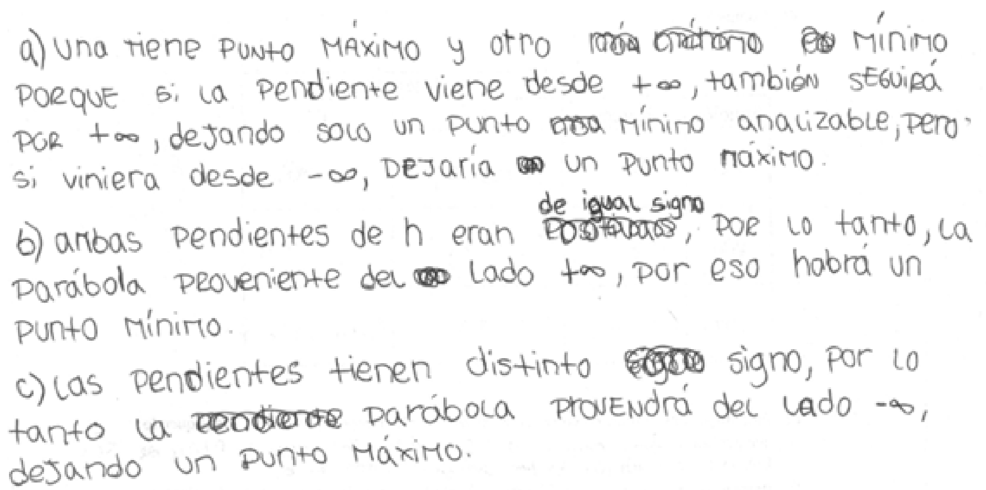
En cuanto a la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas lineales, solamente la tercera parte de los alumnos logró expresar que *h(x)* es el producto de dos lineales de pendiente positiva (mismo signo) y entonces tiene mínimo, y en el caso de *j(x)*, la cuarta parte de los alumnos sostuvo que *j(x)* es el producto de una función lineal de pendiente positiva y la otra de pendiente negativa (distinto signo), y que por ello tiene máximo. Observamos los ejemplos:


a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.
Por que en una, una de las X es Negativa
b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan. Tiene un minimo ya que las dos pendientes son positivas
c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan. Tiene un maximo ya que la pendiente g(x) es negativa.


a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.
Porque dependiendo de la multiplicación de los signos, una tiene forma de U o una U invertida.
b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
Las 2 pendientes son positivas entonces si se multiplican los signos da positivo entonces la función cuadrática tiene un mínimo (forma de U)
c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.
Una pendiente era positiva y otra negativa. Si se multiplican da negativo entonces la función cuadrática tiene un máximo (U invertida)



a) Una de los cuadráticos tiene máximo xq la línea viene de infinito negativo, y el otro tiene mínimo xq la línea viene del infinito (−)
b) Porque viene de arriba, va hacia abajo y genera un punto mínimo.
c) Porque viene de abajo, va hacia arriba y genera un punto máximo.



a) Una tiene PUNTO MÁXIMO y otro MÍNIMO PORQUE si la Pendiente viene desde +∞, también seguirá POR +∞, dejando solo un Punto mínimo analizable, pero si viniera desde −∞, DEJARÍA un Punto máximo.
b) ambas Pendientes de h eran de igual signo ~~POSITIVAS~~, POR lo tanto, la Parábola PROVENIENTE del lado +∞, por eso habrá un Punto mínimo.
c) Las Pendientes tienen distinto signo, POR lo tanto la Parábola PROVENDRÁ del lado −∞, dejando un Punto MÁXIMO.

En el ítem d), en el cual se le pide a los alumnos que propongan ejemplos para corroborar las conjeturas elaboradas, sólo cuatro parejas de alumnos (de las veintitrés que participaron de la clase), apenas la sexta parte de ellos, lograron proponer ejemplos que verificaban lo establecido.

Resumimos a continuación los ejemplos planteados sobre papel por los alumnos, y un caso de los verificados en GeoGebra:

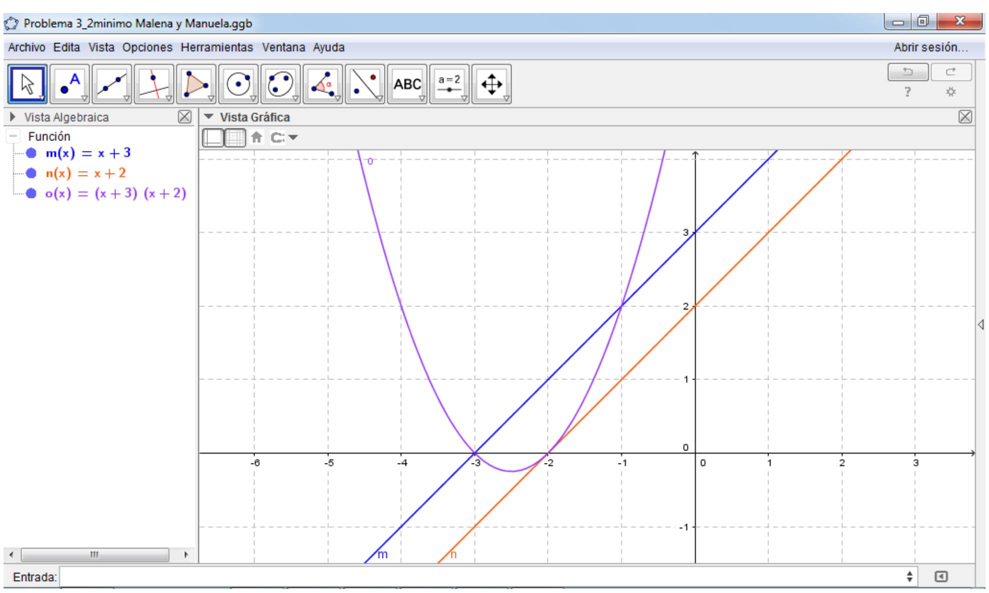
- ✓ Fórmulas de funciones lineales de cuyo producto se obtiene una función cuadrática que tiene mínimo:
    - ➢ $a(x) = x - 5$; $b(x) = x + 2$ → $c(x) = a(x) * b(x)$
    - ➢ $(x + 2) * (x - 3)$
    - ➢ $(x + 2) * (x + 5)$
    - ➢ $m(x) = x + 3$; $n(x) = x + 2$ → $o(x) = m(x) * n(x)$

✓ Fórmulas de funciones lineales de cuyo producto se obtiene una función cuadrática que tiene máximo:

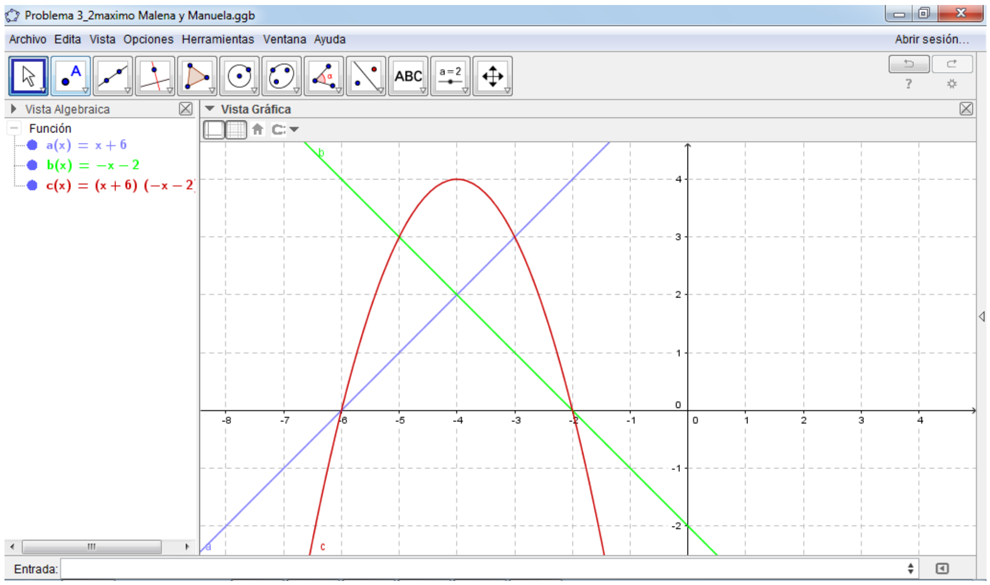
- $d(x) = -x - 6$; $e(x) = x - 7 \rightarrow n(x) = d(x) * e(x)$
- $(x + 2) * (-x - 3)$
- $(x + 2) * (-x - 5)$
- $a(x) = x + 6$; $b(x) = -x - 2 \rightarrow c(x) = a(x) * b(x)$

Mostraremos aquí un sólo caso de lo trabajado sobre papel y en GeoGebra de un ejemplo de funciones lineales de cuyo producto se obtiene una función cuadrática que tiene mínimo planteado por dos alumnas:

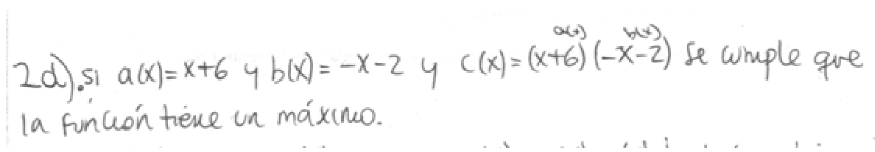
• Si $m(x)=x+3$ y $n(x)=x+2$ y $o(x)=m(x).n(x)$ ~~también~~ tiene un mínimo.



Y, a continuación un ejemplo de funciones lineales de cuyo producto se obtiene una función cuadrática que tiene máximo:



Vemos sobre papel:



(Se pueden observar en el Anexo III más ejemplos de lo trabajado por los alumnos en esta tercer clase sobre papel y en GeoGebra).

Aquí ponemos en relevancia el software GeoGebra, puesto que fue una herramienta importante de trabajo al ofrecer dinámicamente la visualización como marco potente para poder conjeturar y validar respecto de las cualidades de las funciones factores (en nuestro caso, las lineales) para poder describir la existencia de máximo o mínimo en la función producto (la cuadrática), a través de la comparación y contraste de lo trabajado por los alumnos en esta clase y en las anteriores, tal como lo afirman Di Rico, Lamela, Luna y Sessa (2015).

De esta manera, explorando la representación gráfica, los alumnos advirtieron que hacer una modificación en la expresión algebraica, en este caso en el signo de la pendiente de alguna de las rectas, tiene consecuencias gráficas, observando que dicho cambio algebraico se relaciona con el cambio en la variable visual correspondiente (Benítez Pérez, 2010). Además, esta actividad, se afianza la idea del estudio de la función producto conocidos los factores, logrando generar en estos casos (al igual que en la Clase 2) una función de mayor grado, la cuadrática, a partir de otras de grado menor, las lineales, tal como lo han propuesto Fioriti, Sessa y otros (2015) basados en el producto gráfico propuesto por Douady (1999).De esta manera, la construcción de nuevos conceptos en forma intuitiva y visual, se realiza a través del lenguaje de las gráficas según Azcárate y Deulofeu (1990).

5.5. CLASE 4 – Problema 4

Dada la imposibilidad de utilizar el laboratorio el día lunes que era la clase que seguía a la llevada a cabo el día jueves anterior, se pasó esta cuarta clase para el día martes.

Ese martes, contábamos con la mitad de los alumnos ya que las mujeres de ambas divisiones estaban afectadas a una jornada de convivencia/retiro espiritual.

Por tal motivo y sabiendo que ese día sólo podíamos disponer de una hora en el laboratorio de informática, se decidió armar la clase agrupando a todos los varones de ambos cursos A y B, por lo que la recolección de evidencia respecto de esta cuarta clase se reduce, siendo un total de doce parejas de trabajo.

Clase N°:4

Problema 4.

I. Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x)= -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x)= -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x)= 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

- ✓ Un máximo: ____________________
- ✓ Un mínimo: ____________________
- ✓ Una raíz en cero: ____________________
- ✓ Dos raíces positivas: ____________________
- ✓ Dos raíces negativas: ____________________
- ✓ Sólo una raíz: ____________________
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: ____________________

Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

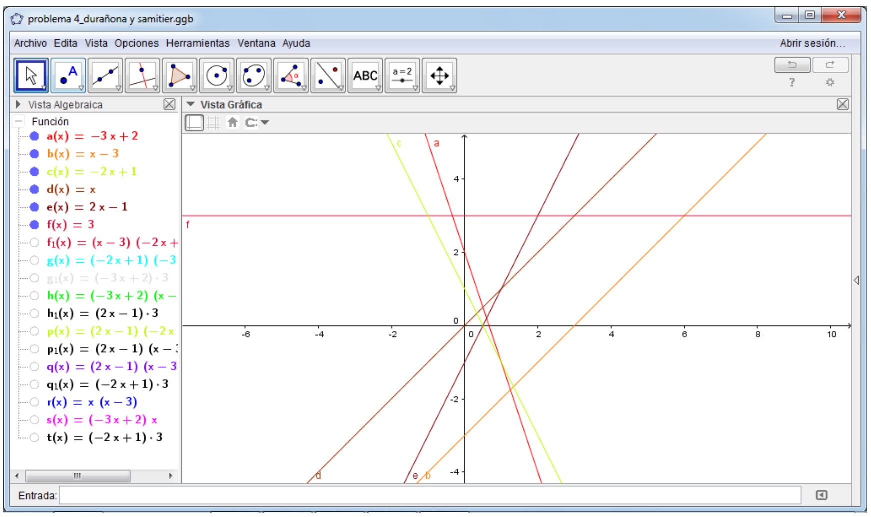
II. Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

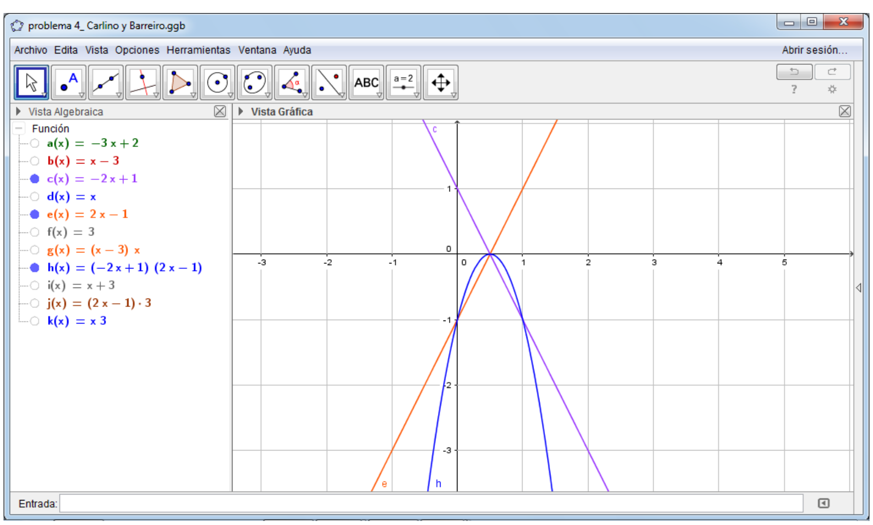
Expliquen lo que acordaron.

Como en las clases anteriores, la llegada a la sala de informática, la organización de parejas, y el comenzar a trabajar con el GeoGebra, se realizó del mismo modo. Cabe destacar que los alumnos estaban más familiarizados con el uso de este software, tal es así, que se animaron a "jugar" cambiándole el color a las funciones lineales que iban ingresando para la resolución de la actividad, como así también, "descubrieron" el "botoncito azul" de cada función que les permitía activar o desactivar la visualización del trazo de cualquiera de estas funciones en la vista gráfica. Se notó, por este uso de colores y de poder "dibujar" o "desaparecer" funciones de la vista gráfica, cierta fascinación.

Mostramos ahora cómo quedó, por ejemplo, el ingreso de las funciones lineales:

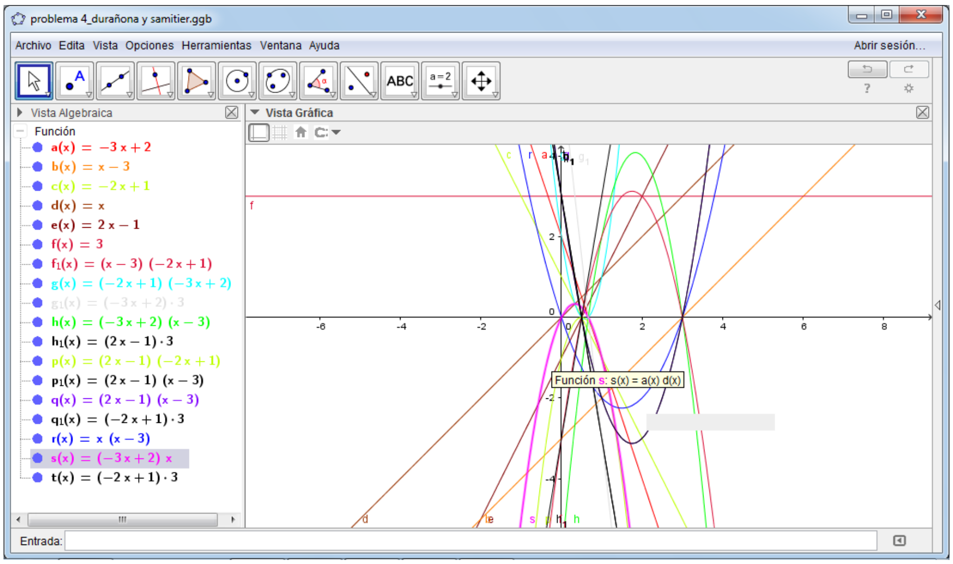


A modo de ejemplo, mostramos la opción elegida por esta misma pareja de alumnos en la búsqueda del producto de dos lineales que generaran una cuadrática con máximo:



Del mismo modo, se generaron en GeoGebra los ejemplos necesarios para responder por productos de funciones que generen funciones cuadráticas con otras características.

Vemos la vista gráfica con la presencia de todas las funciones dadas por el ejercicio y las planteadas por estos dos alumnos:



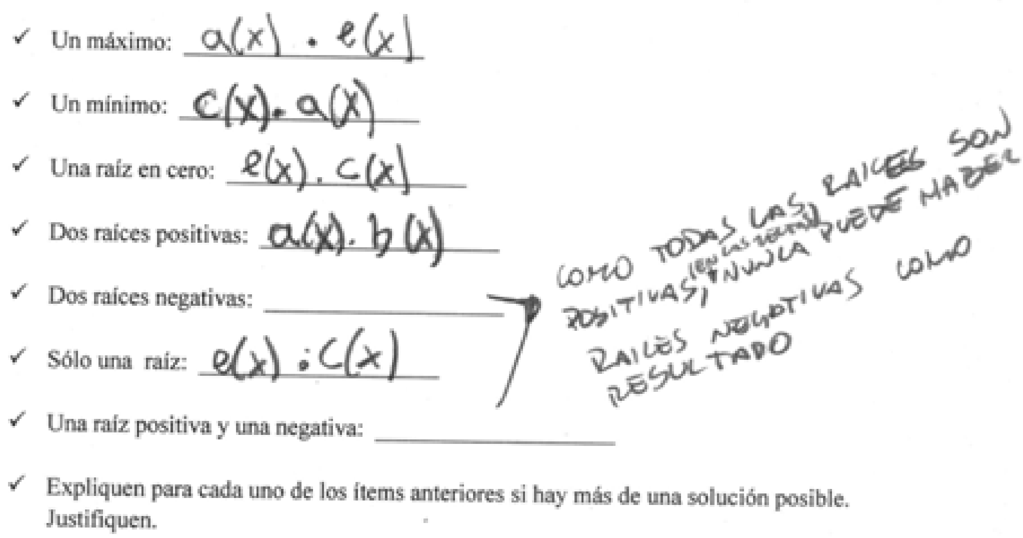
(Luego más ejemplos en el Anexo IV).

La mayoría de los alumnos pudieron dar respuestas satisfactorias sobre los ejercicios planteados: el producto de parejas de funciones lineales que dieron respuesta positiva al producto con cada atributo pedido para la cuadrática encontrados por los alumnos fueron los siguientes:

- ✓ Un máximo: *a(x)*b(x)*; *c(x)*e(x)*; *a(x)*e(x)*.
- ✓ Un mínimo: *a(x)*c(x)*; *b(x)*e(x)*; *d(x)*e(x)*; *b(x)*d(x)*.
- ✓ Una raíz en cero: *c(x)*d(x)*; *d(x)*e(x)*; *b(x)*d(x)*, cualquier función, excepto la *f(x)*, combinada con la función *d(x)*.

- ✓ Dos raíces positivas: a*(x)*b(x)*; *c(x)*e(x)*; *b(x)*c(x)*; *b(x)*e(x)*; *a(x)*c(x)*; (es correcta cualquier combinación posible con las primeras cinco funciones dadas, sin participación de la función *f(x)*).
- ✓ Dos raíces negativas: todos comentaron la imposibilidad de lograr una cuadrática de estas características con las lineales dadas ya que ninguna de ellas tiene raíz negativa.
- ✓ Sólo una raíz: *c(x)*e(x)*.
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: al igual que en uno de los ítems anteriores, se vieron imposibilitados de lograr una cuadrática con esta característica ya que ninguna de las lineales tiene raíz negativa.

Observemos un ejemplo sobre papel:


✓ Un máximo: a(x) · e(x)

✓ Un mínimo: c(x)· a(x)

✓ Una raíz en cero: e(x) . c(x)

✓ Dos raíces positivas: a(x). b(x)

✓ Dos raíces negativas: ________

✓ Sólo una raíz: e(x) · c(x)

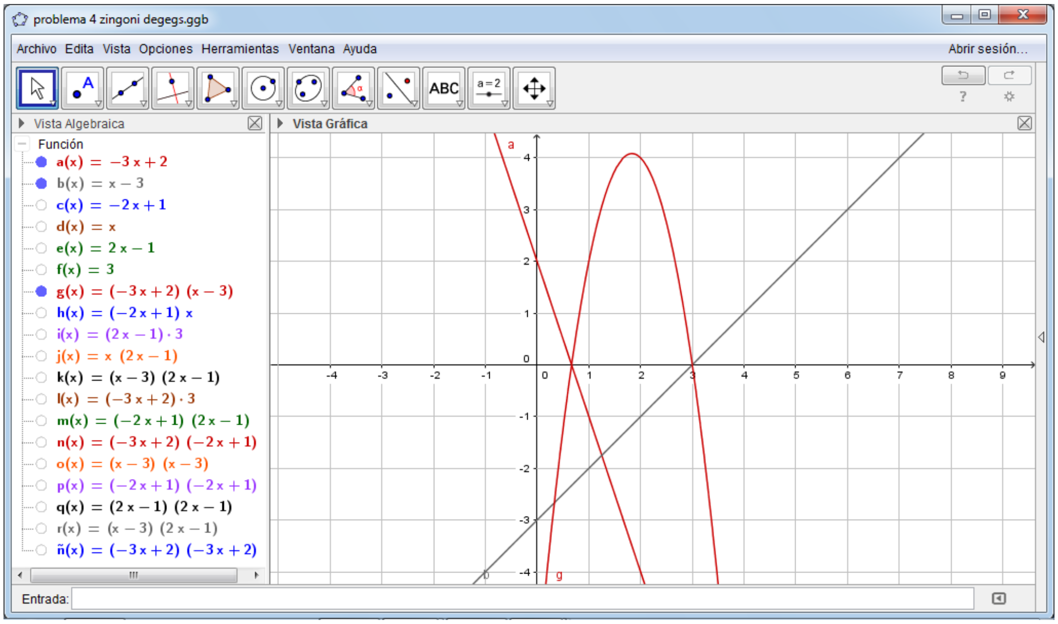
✓ Una raíz positiva y una negativa: ________

✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

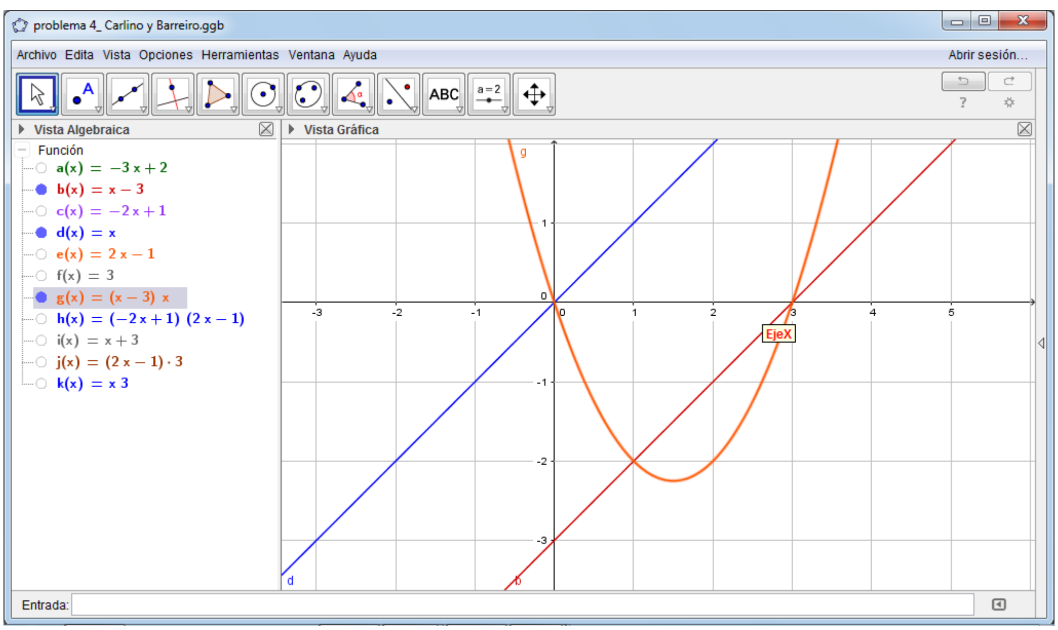
COMO TODAS LAS RAICES SON POSITIVAS, NUNCA PUEDE HABER COMO RAICES NEGATIVAS RESULTADO

Vemos en GeoGebra ejemplos de:

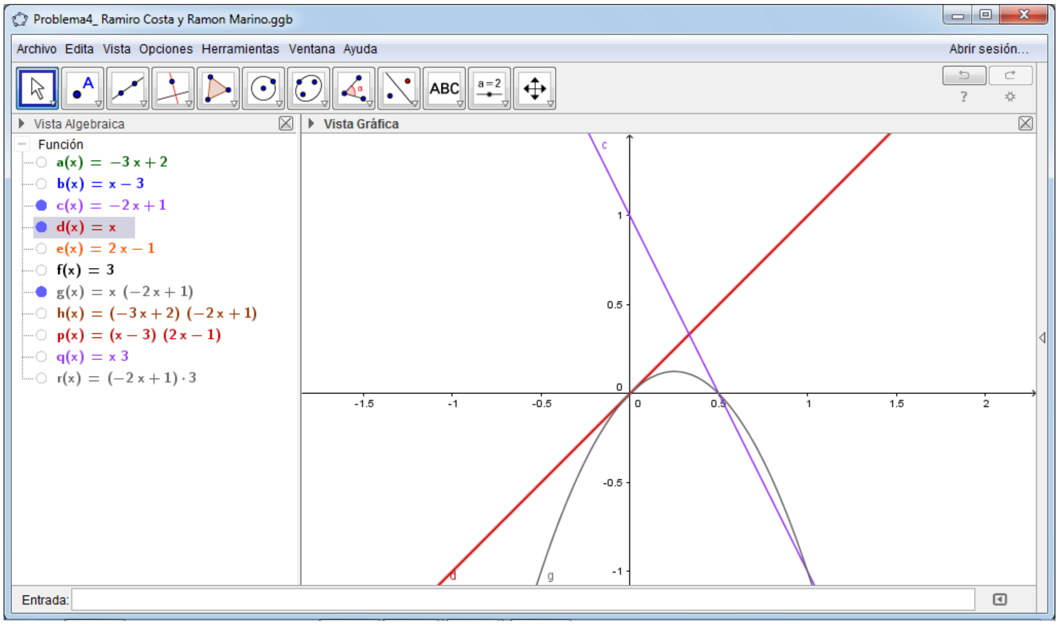
- ✓ Un máximo.



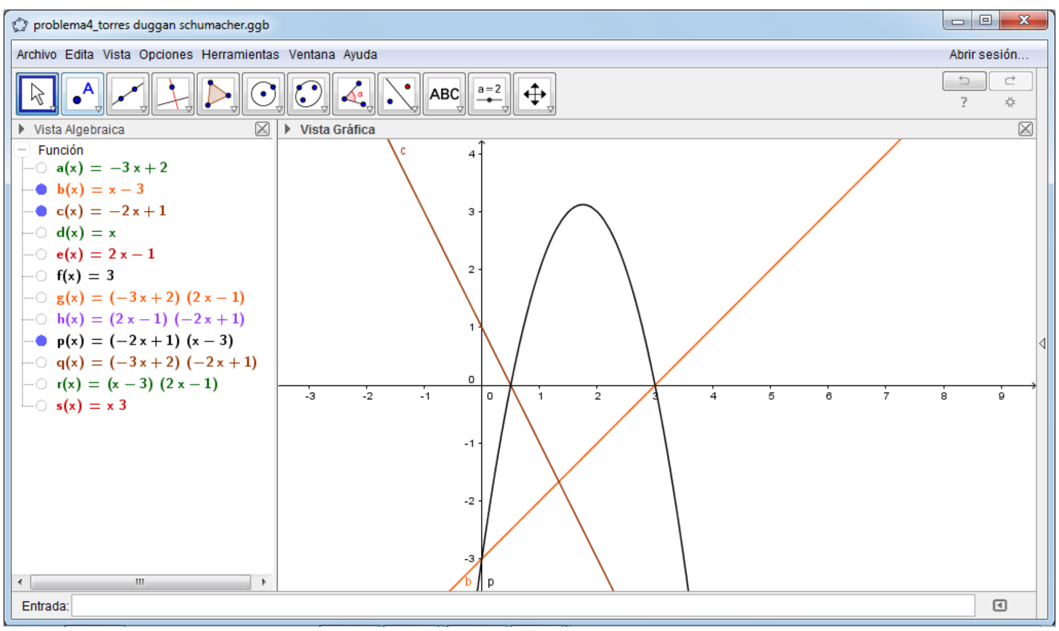
- ✓ Un mínimo.



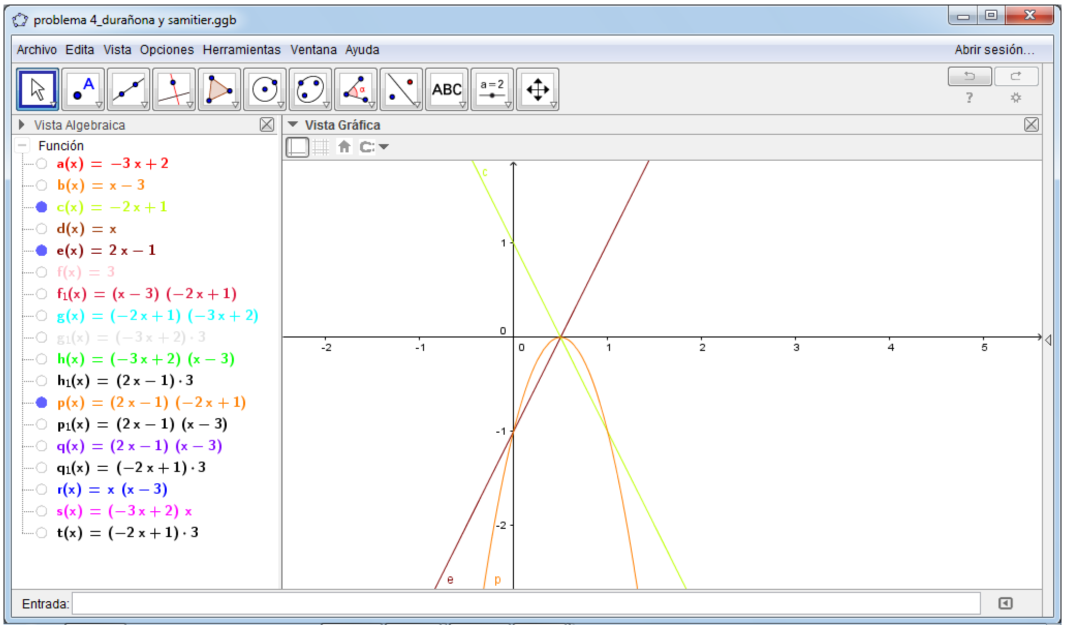
✓ Una raíz en cero.



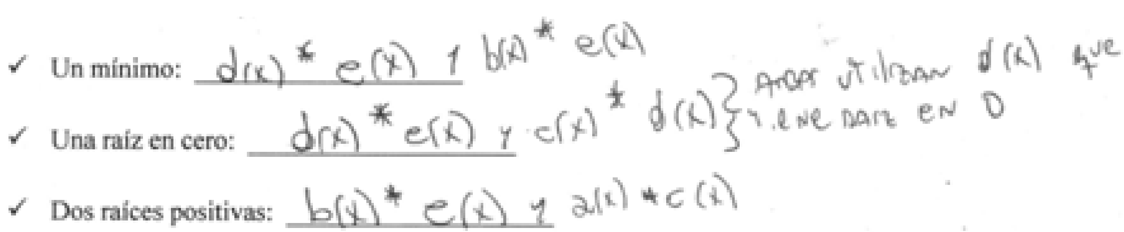
✓ Dos raíces positivas.



✓ Sólo una raíz.



Respecto que los alumnos expliquen si para cada caso había más de una solución posible, sólo dos parejas respondieron, una de ellas agregando otras posibilidades en los ítems correspondientes, mientras que la otra pareja sólo se animó a decir que en algunos casos había más de una solución pero no para todos. Por ejemplo:

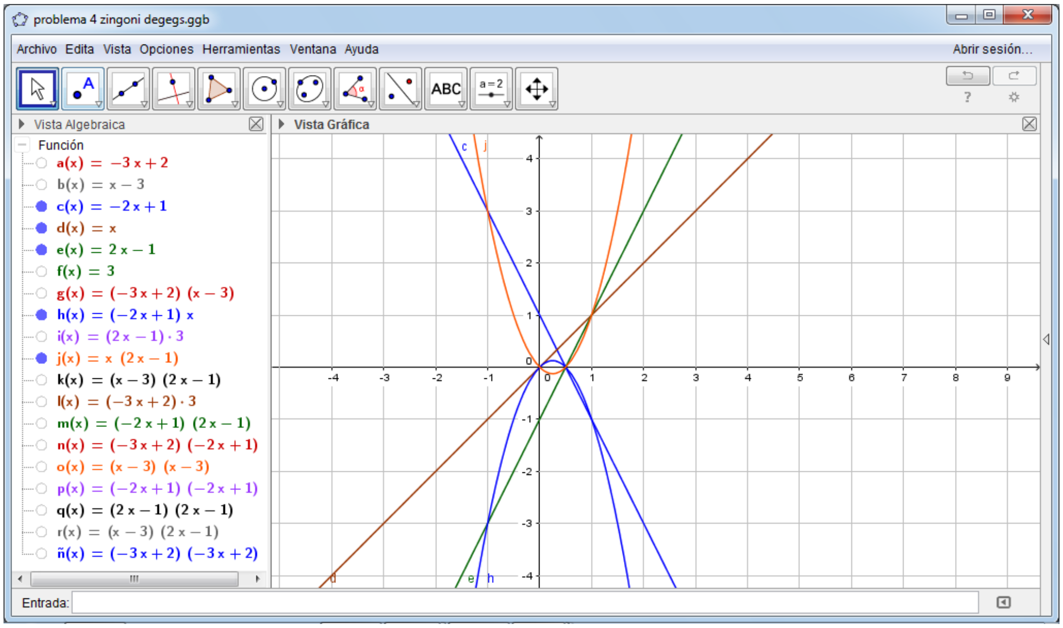


✓ Un mínimo: d(x) * e(x) y b(x) * e(x)

✓ Una raíz en cero: d(x) * e(x) y c(x) * d(x) } Ahora utilizan d(x) que tiene raíz en 0

✓ Dos raíces positivas: b(x) * e(x) y a(x) * c(x)

Comprobado en GeoGebra, por ejemplo para “una raíz en cero”:



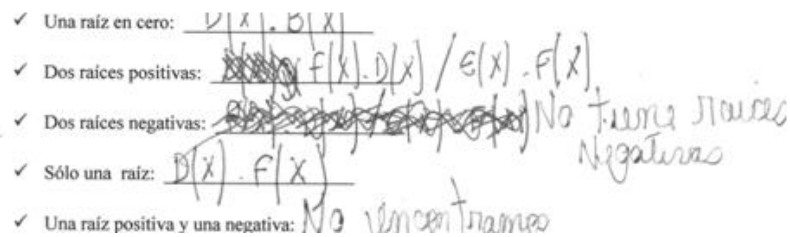
En esta cuarta clase ya se ve afianzado el uso de la tecnología puesto al servicio de la visualización de gráficos como instrumento de investigación (Lacasta y Pascual, 1998), para darle entidad y significado al trabajo realizado en las tres clases anteriores, pudiendo los alumnos validar sus conjeturas con GeoGebra para dar respuesta a este ejercicio que pedía combinaciones de lineales bajo la operación producto que dieran por resultado cuadráticas, en cada caso con atributos diferentes.

Así se puede observar que los alumnos fueron adquiriendo la capacidad para el tratamiento correcto de la información que da el lenguaje de las gráficas y como forma de conocimiento (Azcárate y Deulofeu, 1990), tal como se demuestra cuando se les solicita el producto de dos lineales cuyo producto tenga alguna o ambas raíces negativas, a lo que responden muy convencidos y concretamente la imposibilidad de lograrlo con las lineales dadas ya que ninguna tiene raíz negativa y por lo tanto tampoco el producto, es decir, la cuadrática. De esta manera, se hizo efectiva la retroalimentación (Arcavi y Hadas, 2003), ya que la reflexión dio paso a un aprendizaje significativo.

Por otra parte, en este problema en particular, podemos comentar algunos de los errores suscitados en las respuestas incorrectas:

- ✓ Un mínimo: propone "*a(x)*b(x)*", cuyo producto dice en el ítem anterior da una cuadrática con "máximo".
- ✓ Una raíz en cero: para responder este ítem era suficiente asociar cualquier función lineal con la función *d(x)*, excepto la función *f(x)*, ya que *f(x)* se trata de una función constante, que si bien es lineal, su producto con otra lineal no genera una cuadrática. Sólo la mitad de los alumnos correctamente no la usaron, mientras que la mitad, de la mitad que lo hizo incorrectamente, usó esta función *f(x)*; la otra mitad de respuestas incorrectas, se debe a una combinación errónea que no advierte, que la raíz en cero la daba la función *d(x)*.
- ✓ Dos raíces positivas: el error se basó en el uso de la función *f(x)*.
- ✓ Sólo una raíz: nuevamente, el mayor error cometido fue el uso de la función *f(x)* (función constante), y el no percatarse que cualquier función multiplicada por sí misma, o la combinación entre las funciones *c(x)* y *e(x)*, eran las únicas alternativas.

Observemos el caso:


✓ Una raíz en cero: D(x) . B(x)

✓ Dos raíces positivas: ~~D(x)~~ F(x) . D(x) / E(x) . F(x)

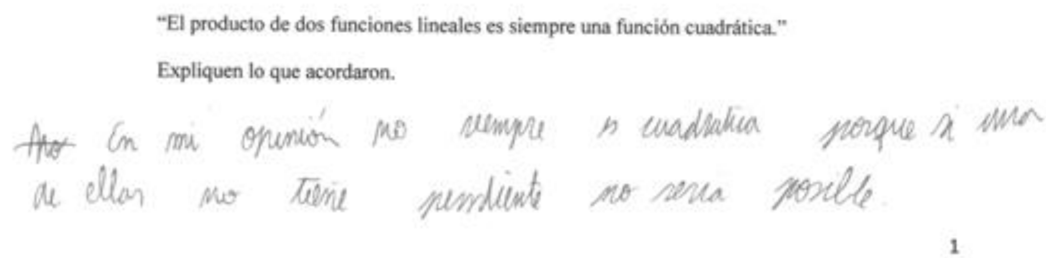
✓ Dos raíces negativas: No tiene raices Negatiras

✓ Sólo una raíz: D(x) . F(x)

✓ Una raíz positiva y una negativa: No vencontramos

Pudimos apreciar en este caso, cuando revisamos el archivo GeoGebra elaborado por esta pareja de alumnos, no estaban comprobados los casos.

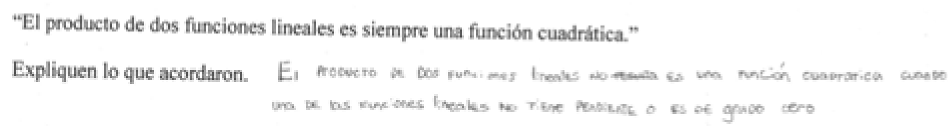
En el ejercicio 2) del **Problema 4**, se proponía la idea de que cualquier producto de lineales da siempre una cuadrática, para que los alumnos evaluaran el valor de verdad de esta afirmación. La mayoría de los alumnos respondieron que esa afirmación era "falsa", lo justificaron explicando que cuando una de las lineales era la función que "no tiene pendiente", el producto da una función lineal en vez de una cuadrática. Como podemos ver:


"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

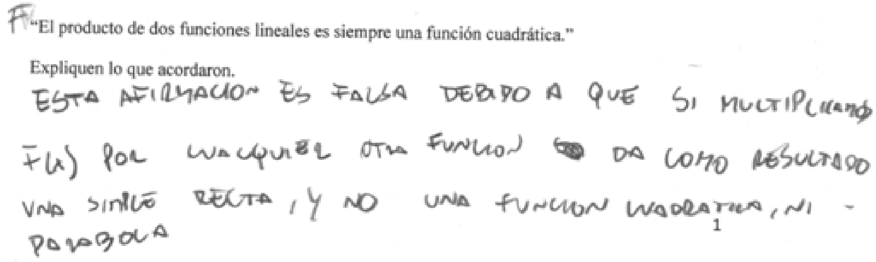
Expliquen lo que acordaron.

~~Ano~~ En mi opinión no siempre es cuadratica porque si una de ellas no tiene pendiente no seria posible.

1


"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron. El producto de dos funciones lineales no ~~[illegible]~~ es una función cuadratica cuando una de las funciones lineales no tiene pendiente o es de grado sero

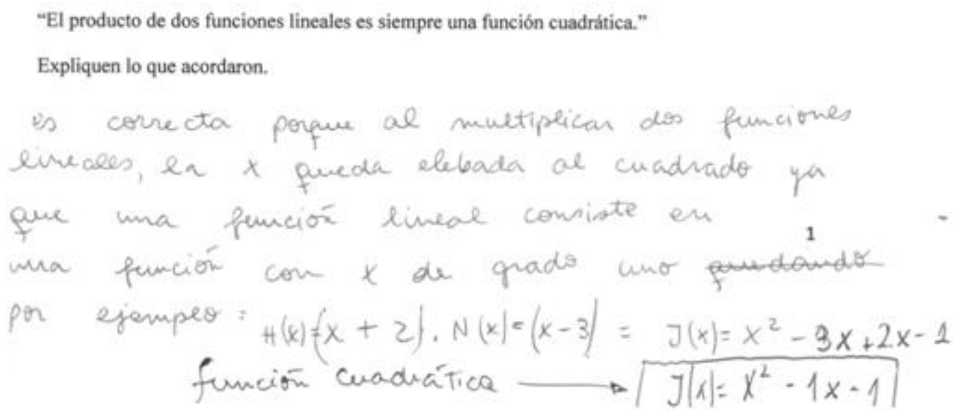


"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.

ESTA AFIRMACION ES FALSA DEBIDO A QUE SI MULTIPLICAMOS F(x) POR CUALQUIER OTRA FUNCION DA COMO RESULTADO UNA SIMPLE RECTA, Y NO UNA FUNCION CUADRATICA, NI PARABOLA

Quienes afirmaron que era "verdadera", no advirtieron lo que ocurría cuando uno de los factores era esa función constante.



"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.

es correcta porque al multiplicar dos funciones lineales, la x queda elevada al cuadrado ya que una función lineal consiste en una función con x de grado uno ~~quedando~~ por ejemplo: $H(x)=(x+2) \cdot N(x)=(x-3) = J(x)= x^2 - 3x + 2x - 1$

función cuadrática $\longrightarrow \boxed{J(x)= x^2 - 1x - 1}$

(Se pueden observar en el Anexo IV ejemplos de lo trabajado por los alumnos en la cuarta clase sobre papel y en GeoGebra).

Todo lo trabajado hasta antes de este ejercicio, fue materia prima para poder reflexionar llegados a este punto, donde la discusión dentro de las parejas de trabajo dio lugar a poder validar y establecer la generalidad, alentados por los ensayos llevados adelante y las producciones (Fioriti, Sessa y otros, 2015), observando la información de cada recta (capacidad de analizar información analítica – Cantoral y Montiel, 2001) para poder asegurar que si se trataba de una lineal constante, el producto con otra lineal no sería una cuadrática.

CAPÍTULO 6
CONCLUSIONES

6.1. <u>DE LA INVESTIGACIÓN</u>

En virtud del recorrido realizado con esta secuencia, podemos concluir que la visualización como herramienta y proceso de pensamiento, primero a mano con lápiz y papel, y luego con un trabajo sostenido a través del uso de del software GeoGebra, estos alumnos arribaron a la idea de función cuadrática, partiendo del producto gráfico de funciones de primer grado, que luego lograron asociar al producto algebraico.

Reconocieron la existencia de dos modelos de funciones diferentes ya que lograron diferenciar la fórmula de algebraica de grado uno asociada a la traza de la recta, conocida por ellos además con el nombre de función lineal, de la fórmula algebraica que obtuvieron de grado dos cuyo gráfico descubrieron en la primer clase y de cuyo nombre, parábola, ya tenían cierto conocimiento.

El uso del lenguaje de las gráficas (Azcárate y Deulofeu, 1990) fue fundamental ya que la percepción visual les permitió abordar la construcción del concepto de función cuadrática.

Lograron desarrollar competencias en el ámbito de la comprensión y explicación de significados, observando cuestiones generales o específicas, reconociendo que las raíces de las funciones lineales operantes en el producto que genera la cuadrática, son también raíces de la cuadrática, notando además, que son las que limitan los intervalos de positividad y negatividad, y hasta en algunos casos se atrevieron a enunciar que los intervalos de positividad de la cuadrática se daban donde ambas funciones lineales tenían el mismo signo, es decir, ambas positivas o ambas negativas, y que cuando dichos signos eran diferentes, una positiva y la otra negativa, se manifestaba el /los intervalo/s de negatividad de la cuadrática.

La última clase de la secuencia, ofició a modo de “validación”, dado que los alumnos, luego de ingresar las funciones lineales al GeoGebra, armaron parejas de lineales como producto, pero con cierto criterio ya adquirido, lo que les permitió resolver esta actividad. Es aquí donde se puede observar que ese trabajo de reflexionar sobre las diferencias y regularidades observables en las clases 2 y 3, promovió la producción de esas ideas enunciadas respecto de las raíces, intervalos de positividad y negatividad, y de los máximos y los mínimos, que se vieron aplicadas en esta última actividad.

Para cerrar este apartado, queremos también hacer referencia a uno de los objetivos propuestos en nuestra investigación, referido a propiciar un ambiente de actividad matemática: creemos que los alumnos han aprovechado y han trabajado descontracturadamente, y con mayor interés y un alto nivel de participación. Tal es el caso de un alumno en particular, que nos llamó la atención, ya que en la primer clase parecía absolutamente desinteresado, y en las clases siguientes, todo lo contrario. Se adaptó rápidamente al trabajo con GeoGebra, llamaba a la docente para plantear dudas, y en general, además de lograr mejores producciones en las siguientes clases, se mostró muy interesado en el trabajo que él mismo podía “descubrir”.

Si bien este es un caso particular, ya que casi la totalidad de los alumnos trabajaron mostrando un gran interés por este modo “nuevo” para ellos de trabajo, nos da una idea del trabajo logrado con los alumnos en general, más allá de los aciertos o errores que pudieran enunciar, ya que la clase se trataba de “ensayar” ideas nuevas.

Se preocuparon y se ocuparon de hacerlo, lograron hacer actividad matemática ya que ensayaron posibles producciones, las cuales pusieron a prueba, y corrigieron o validaron a través de ejemplos que ellos propusieron, y también, mostraron en sus dudas y en su necesidad de resolverlas el "espíritu crítico".

Hecha esta investigación, sabemos que queda abierta la posibilidad de extenderla al estudio de funciones polinómicas de mayor grado que dos, ya que la metodología del producto gráfico de funciones ya es conocido por ellos, y abre las puertas para nuevos productos que generen funciones polinómicas de grado tres, cuatro, etc., y de las cuales, a partir del razonamiento de lo que sucede gráficamente, comprendan fehacientemente el "funcionamiento" de las mismas.

6.2. PROSPECTIVAS

Luego de realizar esta investigación, la reflexión fue natural.

A corto y mediano plazo, desde el punto de vista áulico, el reto sería trabajar más frecuentemente con entornos virtuales, y hacer que la visualización tome mayor protagonismo en la enseñanza de *funciones* ya que este es un tema central de la educación matemática de nivel secundario.

A nivel institucional, el desafío, a mediano y largo plazo, se plantea en proponer una transformación progresiva de programas y planificaciones, no en contenidos, sino en cuanto al modo de abordar, particularmente el eje de *funciones*, planteando y llevando adelante propuestas áulicas del estilo de lo trabajado en esta investigación desde el inicio del nivel secundario hasta su último año, poniendo el énfasis en un objetivo central tan genuino como que los alumnos puedan producir sus propios conocimientos utilizando herramientas virtuales.

De este modo, manifestamos el deseo de que la matemática se transforme para los alumnos en un ícono de fortaleza dentro de su formación académica.

Prof. Laura E. Narvaez.-

Diciembre de 2015

BIBLIOGRAFÍA

ARCAVI, HADAS (2003). “El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque”. Documento de Trabajo del Grupo EM&NT. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

ARTIGUE, DOUADY, y MORENO, (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

AZCÁRATE GIMENEZ, DEULOFEU PIQUET (1990). *Funciones y gráficas*. Editorial Síntesis, Madrid, 1990.

BENITEZ PÉREZ (2010). “Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3.” Educación Matemática. Grupo Santillana. México.

BRACCHI (2010). “Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior ES4: Matemática”, coordinado por Claudia Bracchi. Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2010.

BURBULES (2001). *Educación: riesgos y promesas de las nuevas tecnologías de información*. España, 2001, citado en Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior ES4: Matemática.

CANTORAL, MONTIEL (2001).*Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

CASTELNUOVO, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. Trillas, México, 1970, citado por Azcárate y Deulofeu, 1990.

CHEVALLARD, Y. (1982). La trasposición didáctica. Grenoble: La Penseé Sauvage, citado por Artigue (1995).

DI RICO, LAMELA, LUNA, SESSA, y otros (2014). "Matemática. Función Cuadrática, parábola y ecuaciones de 2do grado." Aportes para la Enseñanza. Nivel Secundario. Ministerio de Educación. Ciudad de Buenos Aires.

DI RICO, LAMELA, LUNA, SESSA (2015). "Figuras dinámicas y funciones: representaciones vinculadas en la pantalla de GeoGebra." CIAEM 3-7 Mayo 2015. México.

DI PANTALEO, PLATERO, PAGLIACCIO (2014). "Descubriendo, analizando y reconstruyendo funciones polinómicas". IMA. Escuela Cristiana de Vida, Agosto 2014.

DOUADY, R. (1999). "Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)", en Schwank, Inge (ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* vol. 1, Osnabrück, Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, 1999, pp. 113-124, citado por Fioriti, Sessa y otros (2015).

FIORITI, SESSA, y otros (2015). "Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas: incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula". Herramientas. Serie Matemática. Editorial UNIPE: Editorial Universitaria, Octubre 2015.

FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Education Approach. Reidel, citado por Arcavi y Hadas, 2003.

HERSHKOWITZ, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the international Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 70-95).Cambridge University Press, citado por Arcavi y Hadas, 2003.

JANVIER, C. (1983). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. LEA. Publ. Londres, 1987, citado por Azcárate y Deulofeu, 1990.

LACASTA, PASCUAL (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Educación Matemática Secundaria. Editorial Síntesis.

ORTON, A. (1998). Didáctica de las matemáticas (3ª edición). Madrid: Morata, citado por Quintero, Ruíz y Terán, 2005.

QUINTERO, RUIZ, TERÁN (2005). "Las interpretaciones del símbolo "X" en los polinomios". Documento de Trabajo. Universidad de Los Andes, NURR Trujillo, Mayo 2005.

SKEMP, R. (1999). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. (3ª edición). Madrid: Morata, citado por Quintero, Ruíz y Terán, 2005.

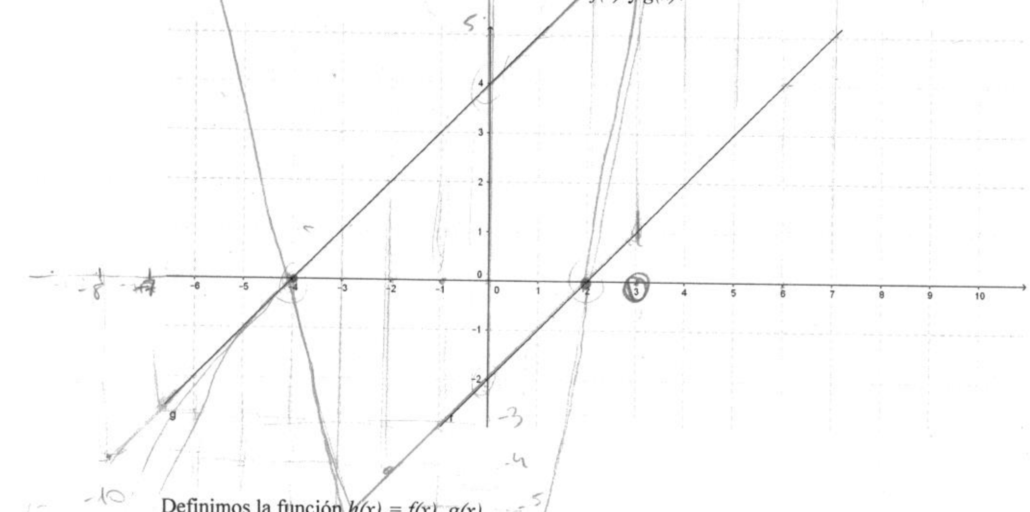
ANEXO I

Participantes/Nombres: JAZMIN DE ANCHORENA Y TOMAS GACHE PIRAN

Clase N°: 1 **Fecha:** ....

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función *h(x) = f(x) .g(x)*.

a) Calculen:

h(0)= -2.4=-8 *h*(6)= 4.10=40 *h*(3)= 1.7=7 *h*(2)= 0.6=0

h(-2)= -4.2=-8 *h*(-8)= -10.(-4)=40 *h*(-4)= -6.0=0 *h*(-1)= -3.3=-9

b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.

h(0)=negativa h(3)=positiva h(2)=cero
h(-2) h(-8) h(6) h(-8) h(-4)

c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe? parabola
forma de "U"

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

f(x)= 1X-2 *g(x)* = 1X+4

f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No es una función lineal, es una función cuadratica porque no es una recta.

$h(x)=f(x).g(x)=$

$h(x)=1x-2.(1x+4)=x^2-2x+4x-8=\boxed{x^2+2x-8}$

1

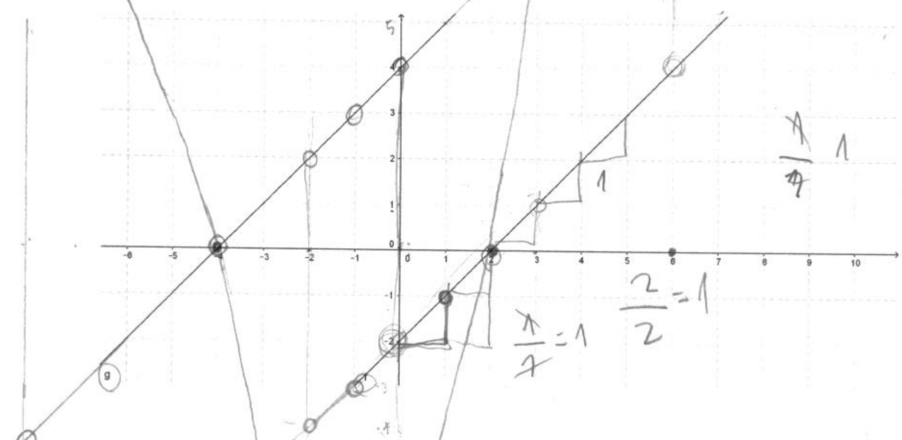
H

Participantes/Nombres: Inés Ropero y e Ignacio Carlino

Clase N°: 1 **Fecha:** 26 de Octubre

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función *h(x)* = *f(x)*.*g(x)*.

a) Calculen:

h(0)= -8 (−) *h(6)*= 36 (+) *h(3)*= 7 (+) *h(2)*= 0 (0)

h(-2)= -8 (−) *h(-8)*= 45 (+) *h(-4)*= 0 (0) *h(-1)*= -9 (−)

b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.

c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe? es

tiene una forma encorbada es decir una parabola

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

f(x)= 1x+(-2) *g(x)* = 1x + 4

f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

no es lineal porque no es una linea recta.
y es una funcion de grado dos

1

x	y
0	-8
-2	-8
6	36
-8	45
3	7
-4	0
2	0
-1	-9

$H(x) = (1(x) + (-2)) \cdot (1x + 4) = 1x^2 + 4x - 2x - 8$

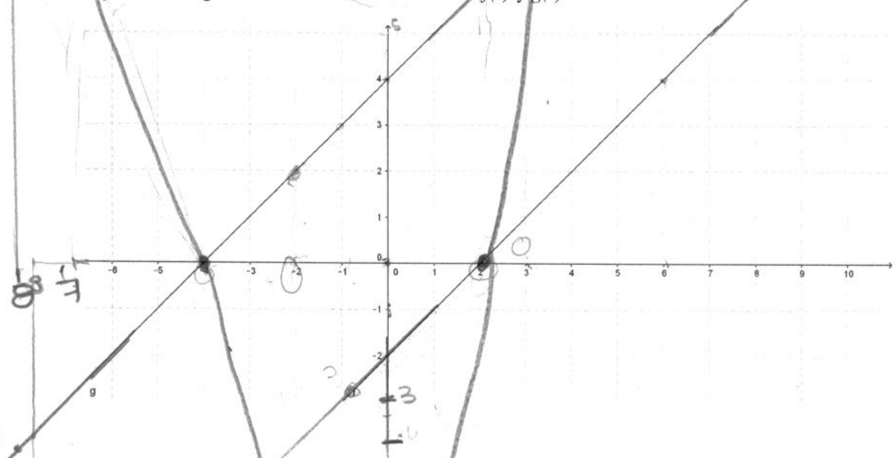
$H(x) = x^2 + 2x - 8$

Participantes/Nombres: Tomás Bianchi Di Carcano - Martina Lamarca

Clase N°: 1 **Fecha:** 26/10.......

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales f(x) y g(x):



Definimos la función $h(x) = f(x) .g(x)$.

a) Calculen:

$h(0)$= -8 ...... $h(6)$= 40 ...... $h(3)$= 8 ...... $h(2)$= 0 ......

$h(-2)$= -8 ...... $h(-8)$= 40 ...... $h(-4)$= 0 ...... $h(-1)$= -9 ......

b) Decidan para qué valores de x del punto a), $h(x)$ es negativa, positiva o cero.

c) Propongan un gráfico aproximado para $h(x)$. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?

Tiene forma de U y recibe nombre de parabola

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$f(x)$= X-2 ...... $g(x)$ = X+4 ......

f) La función $h(x)$, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

NO, Porque no es una recta Es una wadratica.

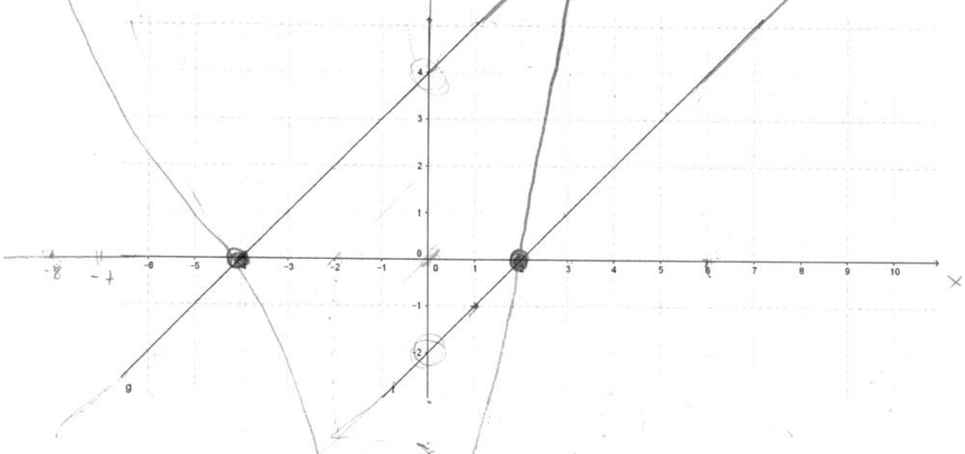
1

Participantes/Nombres: AGUSTINA MILLÉ Y ROSARIO BOTTO

Clase N°: 1 **Fecha:** 26/10

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)*:



Definimos la función *h(x) = f(x) .g(x)*. h(0) = (-2, 2)(0) . (-4, 4)(0)

a) Calculen:

h(0)= (0 ; -8) neg *h(6)=* (6 ; 40) pos *h(3)=* (3 ; 7) pos *h(2)=* (2 ; 0) cero

h(-2)= (-2 ; -8) neg *h(-8)=* (-8 ; 44) pos *h(-4)=* (-4 ; 0) cero *h(-1)=* (-1 ; -9) neg

b) Decidan para qué valores de *x* del punto a), *h(x)* es negativa, positiva o cero.

NEG = 0 ; -2 , -1 POS = 6 ; 3 ; -8 CERO = -4 ; 2

c) Propongan un gráfico aproximado para *h(x)*. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba. en el gráfico

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?

tiene forma U. Recibe el nombre de "PARÁBOLA"

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

f(x)= X - 2 *g(x) =* X + 4

f) La función *h(x)*, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No, porque es una parábola. Recibiría el nombre de función CUADRÁTICA. no es una recta.

1

$(X-2) . (X+4) = X^2 \cancel{} + 4X - 2X - 8$

$\boxed{X^2 + 2X - 8}$ → cuadrática

$h(0) = f(0) \cdot g(0)$

$h(-2) = f(-2) \cdot g(-2)$

$-4 \cdot 2 = (-2; -8)$

$h(6) = f(6) \cdot g(6)$

$4 \cdot 10 = (6; 40)$

$h(-8) = f(-8) \cdot g(-8)$

$-11 \cdot -4 = (-8; 44)$

$h(3) = f(3) \cdot g(3) =$

$1 \cdot 7 = (3; 7)$

$h(-4) = f(-4) \cdot g(-4) =$

$-6 \cdot 0 = (-4; 0)$

$h(2) = f(2) \cdot g(2)$

$0 \cdot \quad = (2; 0)$

$h(-1) = f(-1) \cdot g(-1) =$

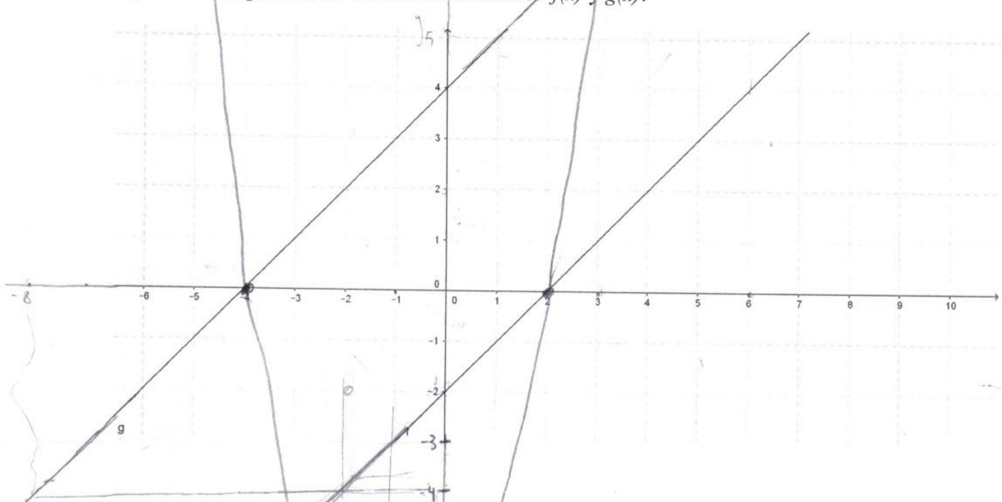
$-3 \cdot 3 = (-1; -9)$

Participantes/Nombres: Juana Cano y Bautista Duraiona

Clase N°: 1 **Fecha:** 26/10

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$:



Definimos la función $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

a) Calculen:

$h(0)$= 2.(-4) = -8 $h(6)$= f(6).g(6) = 4 . 9 = 36 $h(3)$= f(3).g(3) = 1 . 7 = 7 $h(2)$= f(2).g(2) = 0 . 6 = 0

$h(-2)$= f(-2).g(-2) = -4 . 2 = -8 $h(-8)$= f(-8).g(-8) = -8 . -4 = 36 $h(-4)$= f(-4).g(-4) = -6 . 0 = 0 $h(-1)$= f(-1).g(-1) = -3 . 3 = -9

b) Decidan para qué valores de x del punto a), $h(x)$ es negativa, positiva o cero.

negativo = h(0), h(-2), h(-1) positivo = h(6), h(-8), h(3) cero = h(-4), h(2).

c) Propongan un gráfico aproximado para $h(x)$. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?

tiene forma de U. Recibe el nombre de parabola

e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$f(x)$= $\frac{h(x)}{g(x)}$ $g(x)$ = $\frac{h(x)}{f(x)}$

f) La función $h(x)$, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

No porque no es una recta. función cuadrática.

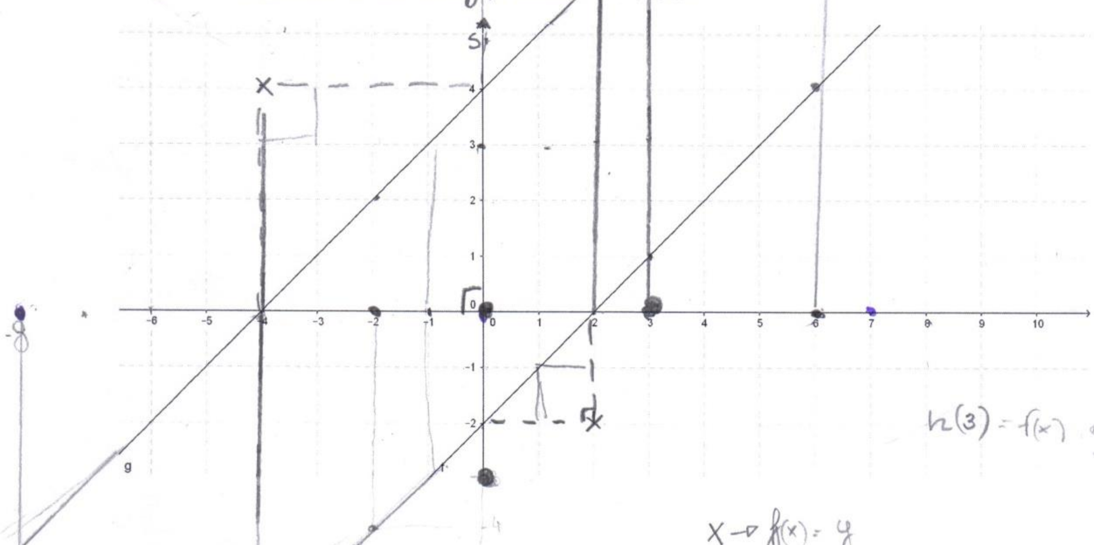
1

Participantes/Nombres: Mateo San Pedro / Juan Manuel Vittare

Clase N°: 1 **Fecha:** 26/10/15

Problema 1.

A partir de los gráficos de dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$:



h(3) = f(x) . g(x)

x → f(x) = y
(x ; y)

Definimos la función $h(x) = f(x) .g(x)$:

a) Calculen:

$h(0)$= -8 $h(6)$= 4 . 10 = 40 $h(3)$= 1 . 7 = 7 $h(2)$= 0 . 6 = 0

$h(-2)$= -4 . 2 = -8 $h(-8)$= -13 . -5 = 65 $h(-4)$= 7 . 0 = 0 $h(-1)$= -3 . 3 = -9

b) Decidan para qué valores de x del punto a), $h(x)$ es negativa, positiva o cero.

pos = h(6), h(-8), h(3), h(-1) neg = h(0), h(-2), 0 = h(-4), h(2)

c) Propongan un gráfico aproximado para $h(x)$. realícenlo en el sistema de coordenadas de arriba.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica de esta función? ¿Qué nombre recibe?

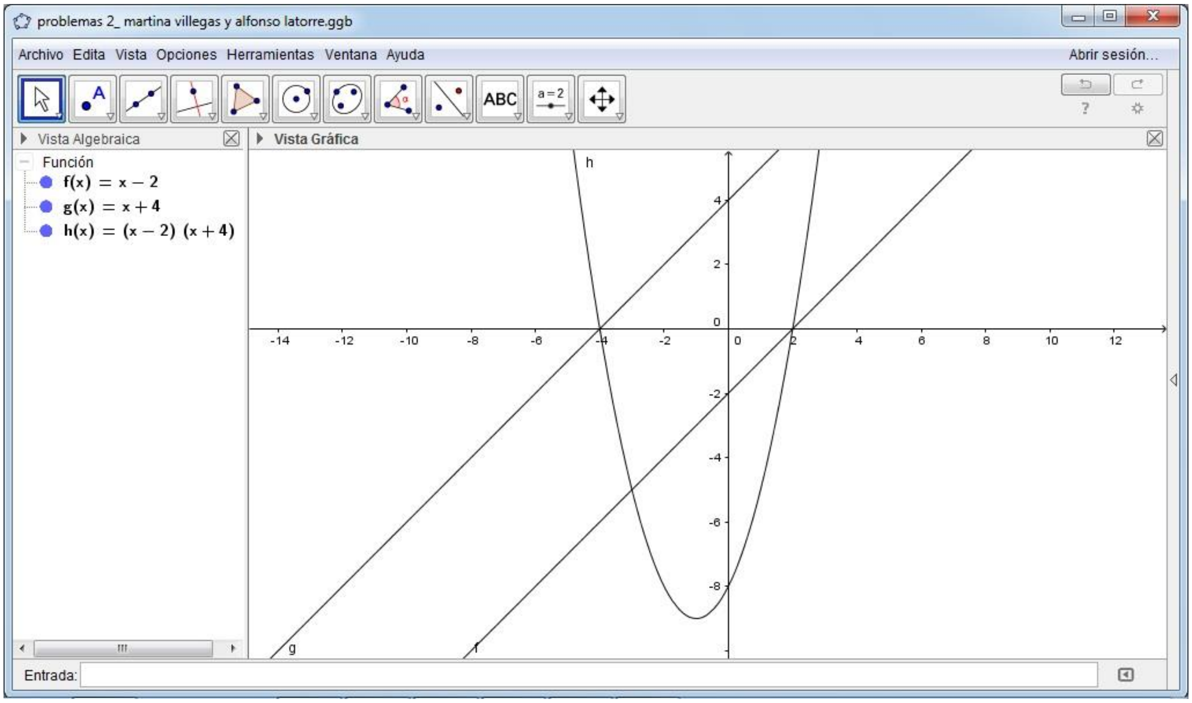
De montañita al reves, parabola

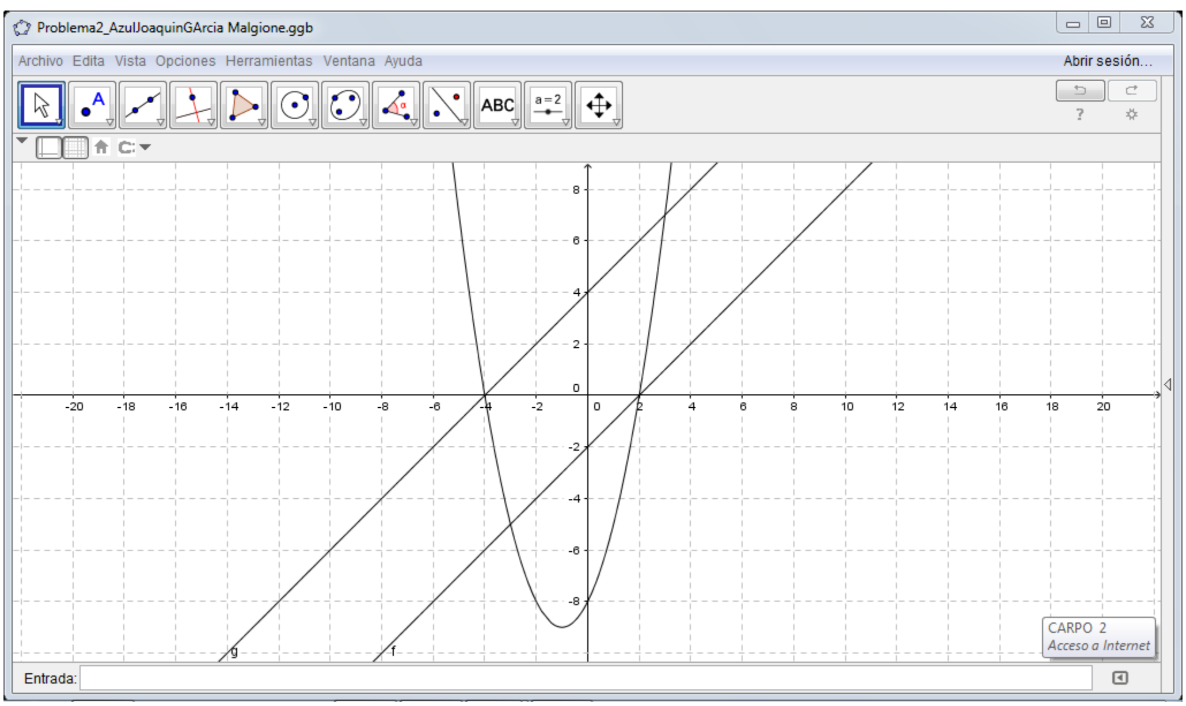
e) Determinen y escriban las fórmulas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$f(x)$= g(x) : h $g(x)$ = f(x) : h(x)

f) La función $h(x)$, ¿es una función lineal? ¿por qué? ¿Qué nombre recibiría esta función?

ANEXO II


problemas 2_ martina villegas y alfonso latorre.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Función
f(x) = x − 2
g(x) = x + 4
h(x) = (x − 2) (x + 4)
Vista Gráfica
h
g
f
Entrada:


Problema2_AzulJoaquinGArcia Malgione.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
g
f
CARPO 2
Acceso a Internet
Entrada:

Participantes/Nombres: RAMÓN MARINO, RAMIRO COSTA

Clase N°: 2 **Fecha:** ....

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: $h(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	2	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$
g(x)	−4	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;-4)$
h(x)	−4 ; 2	$(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$	$(-4;2)$

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

e)

f) Los intervalos de ~~Positividad~~ de $h(x)$, Son Solo Positivos En los lugares donde ambas Funciones lineales Son Positivas o ambas son negativas

g) Los intervalos de ~~Pos~~ $h(x)$, Son Solo Negativos en los lugares donde una Funcion lineal es Positiva y la otra es Negativa

Participantes/Nombres: JOAQUIN BACH Y TOMAS GACHE PIRAN

Clase N°: 2 **Fecha:** 27/10

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: *h(x) = f(x) * g(x)*

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	2	(2 ; +∞)	(-∞ ; 2)
g(x)	-4	(-4 ; +∞)	(-∞ ; -4)
h(x)	(-4 ; 2)	(-∞ ; -4) ∪ (2 ; +∞)	(-4 ; 2)

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

- ES UNA PARABOLA
- SUS RAÍCES SON IGUALES AL INTERVALO C^-
- SUS RAÍCES SON LAS MISMAS QUE LA DE LAS RECTAS

1

E) LA RELACION ES QUE LAS RAÍCES SON IGUALES. ESTO SE DEBE A QUE LA PARABOLA H(X) ES IGUAL A LA MULTIPLICACIÓN DE LAS RECTAS F(X) Y G(X), ENTONCES TENDRÁN LAS MISMAS RAÍCES.

F) LA RELACIÓN ES QUE LOS 3 INTERVALOS DE POSITIVIDAD TERMINAN EN $+\infty$

g) LA DOS RECTAS SE CRUZAN CON LA PARABOLA EN PUNTOS O COORDENADAS NEGATIVAS.

Participantes/Nombres: AZUL DE GAMBOA Y PEDRO GHISONI

Clase N°: 2 **Fecha:** 27/10

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: *h(x) = f(x) * g(x)*

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	2	(2 +∞)	(-∞ ; 2)
g(x)	-4	(-4 + ∞)	(-∞ ; -4)
h(x)	(-4 ; 2)	(+∞; 4) ∪ (2 ; +∞)	(-4 ; -8) ∪ (-8 ; 2)

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

1

(e) YA QUE H(x) = F(x) . G(x) LAS DOS RAICES DE "H" SON LAS MISMAS RAICES QUE "F(x)" Y "G(x)" LA UNICA DIFERENCIA ES QUE LAS RAICES DE "F(x)" ESTA SEPARADA A LA DE "G(x)", EN CAMBIO EN H ESTAN JUNTAS.

(F) EL INTERVALO DE "H(X)" COMIENZA EN EL MISMO LUGAR QUE TERMINA LOS INTERVALOS DE "F(X)", "G(X)" TERMINA EN EL MISMO PUNTO QUE TERMINA "H"

(G) EL INTERVALO DE "H(X)" TERMINA EN EL MISMO LUGAR QUE COMIENZA LOS INTERVALOS DE "F(X)" Y "G(X)" COMIENZA EN EL MISMO PUNTO QUE COMIENZA "H"

(H) ES UNA PARABOLA, Y ES UNA FUNCIÓN CUADRATICA

Participantes/Nombres: CAMILA CANO, PILAR LASSALLE y MILAGROS STUD

Clase N°: 2 **Fecha:** 27/10

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: $h(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	$\{2\}$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 2)$
g(x)	$\{-4\}$	$(+\infty; -4)$	$(-\infty; -4)$
h(x)	$\{-4; 2\}$	$(+\infty; -4)(2; +\infty)$	$(-4; 2)$

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron.

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

1

e) La relación es que las raíces de $f(x)$ y $g(x)$, son las de $h(x)$ ya que es una multiplicación (Producto de $h(x)$.

f) Al juntar los intervalos de positividad de $f(x)$ y $g(x)$, dan como resultado los C^+ de $h(x)$.

g) Los intervalos de negatividad de $f(x)$ y $g(x)$, se repiten en $h(x)$ porque la parábola pasa por las dos funciones lineales

h) Que traza a ambas rectas y pasa por las raíces de las dos rectas.

Participantes/Nombres: FLORA CAMPERO y santos veneune

Clase N°: 2 **Fecha:** 27/10

Problema 2.

Para trabajar con GeoGebra.

Con las fórmulas obtenidas en el Problema 1de las funciones *f(x)* y *g(x)*:

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan en la barra de entrada la función producto: $h(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 2_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
f(x)	$\{2\}$	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$
g(x)	$\{4\}$	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;-4)$
h(x)	$\{4;2\}$	$(-\infty;-4)$ $(2;+\infty)$	$(-4;2)$

e) Propongan alguna relación entre las raíces de *h(x)* y las raíces de *f(x)* y *g(x)*. Justifiquen lo que pensaron. ~~h(x) corta a las funciones, tambien los corta justo en sus raíces.~~

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de *h(x)* con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.
~~el intervalo de pos neg comienza y termina con las raíces~~

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función *h(x)*.

e) las raíces de h(x) son las mismas raíces de f(x) y g(x).

f) f(x) * g(x) es igual a h(x) y durante el intervalo de positividad, f(x) y g(x)₁ son los dos ⊖ y menos por menos es mas. En el segundo intervalo ambas son positivas, entonces $\boxed{+ . + = +}$

g) en el Intervalo de negatividad $g(x)$ es $\oplus$ y $f(x)$ es $\ominus$, y $\boxed{+ \cdot - = -}$

h) la funcion $h(x)$ cambio los intervalos de Positividad a negatividad y viceversa al mismo tiempo que $f(x)$ y $g(x)$ valen 0.

ANEXO III

Participantes/Nombres: PICCARDO Y LLAUCH

Clase N°:3 **Fecha:** 29/10

Problema 3.

1) Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x) = x - 4$ y $g(x) = -x - 2$

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
$f(x)$	4	$(4;\infty)$	$(-\infty;4)$
$g(x)$	-2	$(-\infty;-2)$	$(-2;\infty)$
$j(x)$	-2;4	$(-2;4)$	$(-\infty;-2)\cup(\infty;4)$

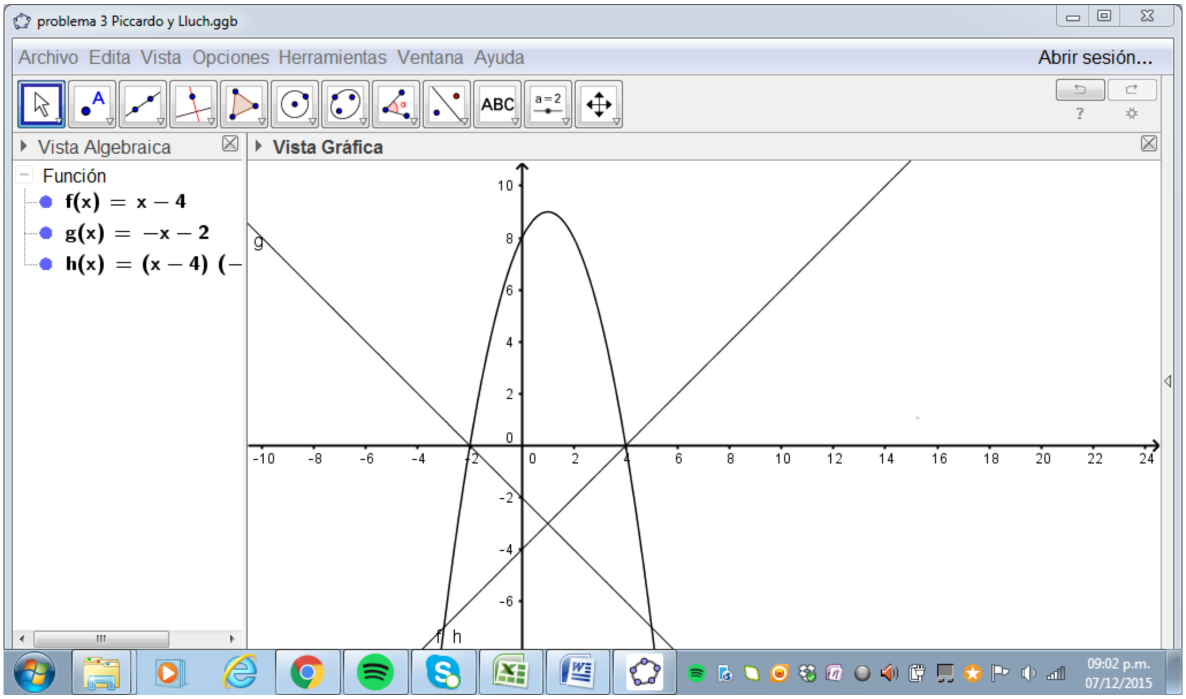
e) Propongan alguna relación entre las raíces de $j(x)$ y las raíces de $f(x)$ y $g(x)$. Justifiquen lo que pensaron. LAS RAICES DE $j(x)$ son las de $f(x)$ y $g(x)$ ya que $j(x) = f(x) \cdot g(x)$

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. mientras $j(x)$ es positivo, $f(x)$ $G(x)$ son negativas

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. En uno de los intervalos $f(x)$ ~~es~~ positivo y $g(x)$ es negativo. En el otro $f(x)$ es negativo y $g(x)$ positivo

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función $j(x)$.
Es una parabola mirrix cuyas raices son -2 y 4

1



Participantes/Nombres: PICCARDO Y LLUCH

2) Para analizar:

a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.
Por que en una, una de las X es Negativa

b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan. Tiene un mínimo ya que sus dos pendientes son positivas

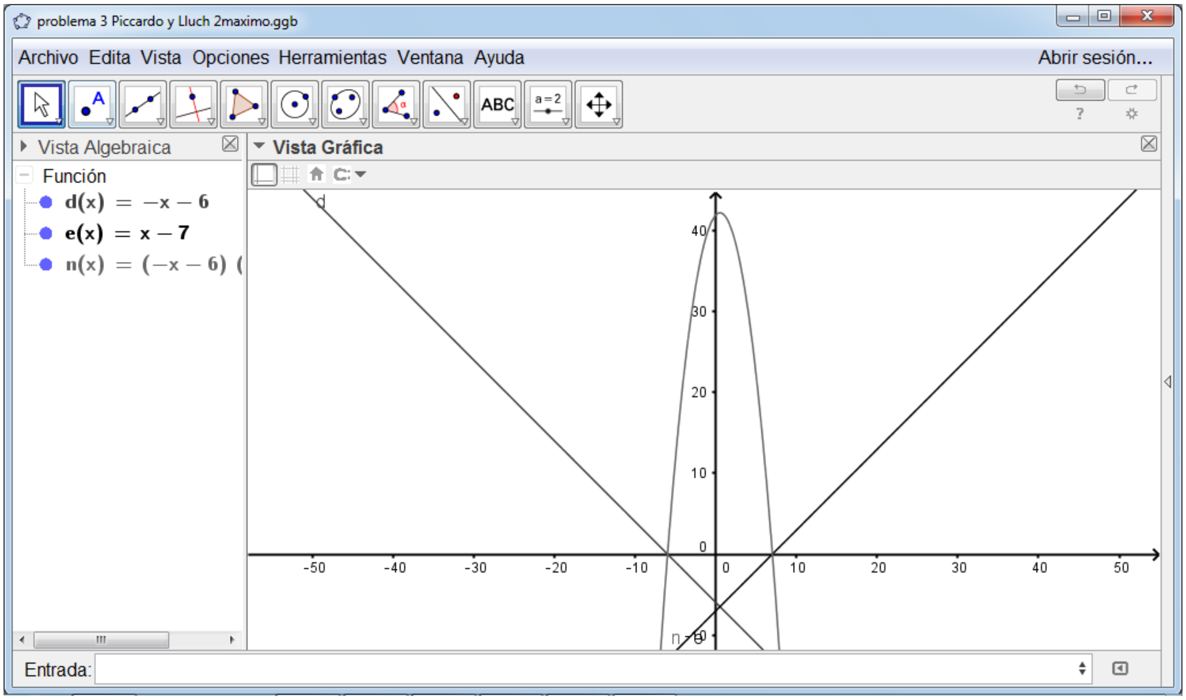
c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *f(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan. tiene un máximo ya que la pendiente g(x) es negativa.

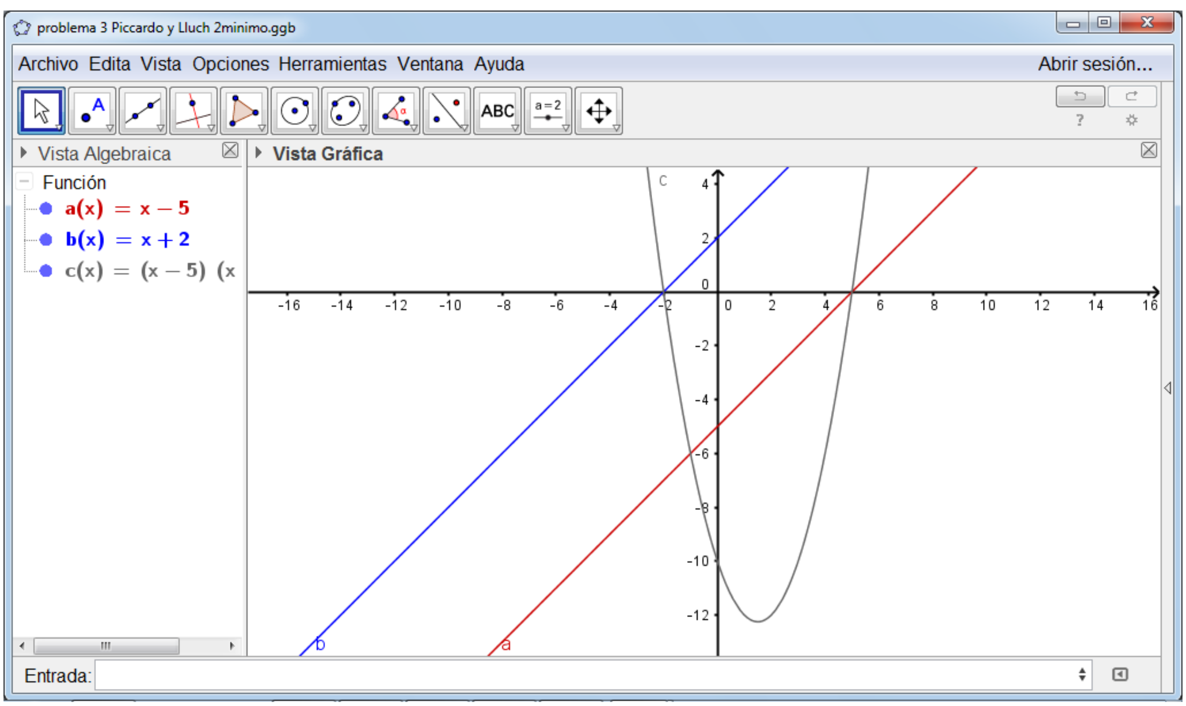
d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.
$a(x) = x-3$ $b(x) = x+2$ $c(x) = a(x) \cdot b(x)$ $d(x) = -x-6$ $E(x) = x-7$ $N(x) = d(x) \cdot E(x)$

e) Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

MINIMO

MAXIMO


problema 3 Piccardo y Lluch 2maximo.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
d(x) = −x − 6
e(x) = x − 7
n(x) = (−x − 6) (
Entrada:


problema 3 Piccardo y Lluch 2minimo.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = x − 5
b(x) = x + 2
c(x) = (x − 5) (x
Entrada:

Participantes/Nombres: Malena Girardone y Manuela Cano

Clase N°:3 **Fecha:** 29/10

Problema 3.

1) Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x)= x-4$ y $g(x) = -x-2$

√ a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

√ b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$

√ c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
$f(x)$	$\{4\}$	$(4;+\infty)$	$(-\infty;4)$
$g(x)$	$\{-2\}$	$(-\infty;-2)$	$(-2;+\infty)$
$j(x)$	$\{-2;4\}$	$(-2;4)$	$(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

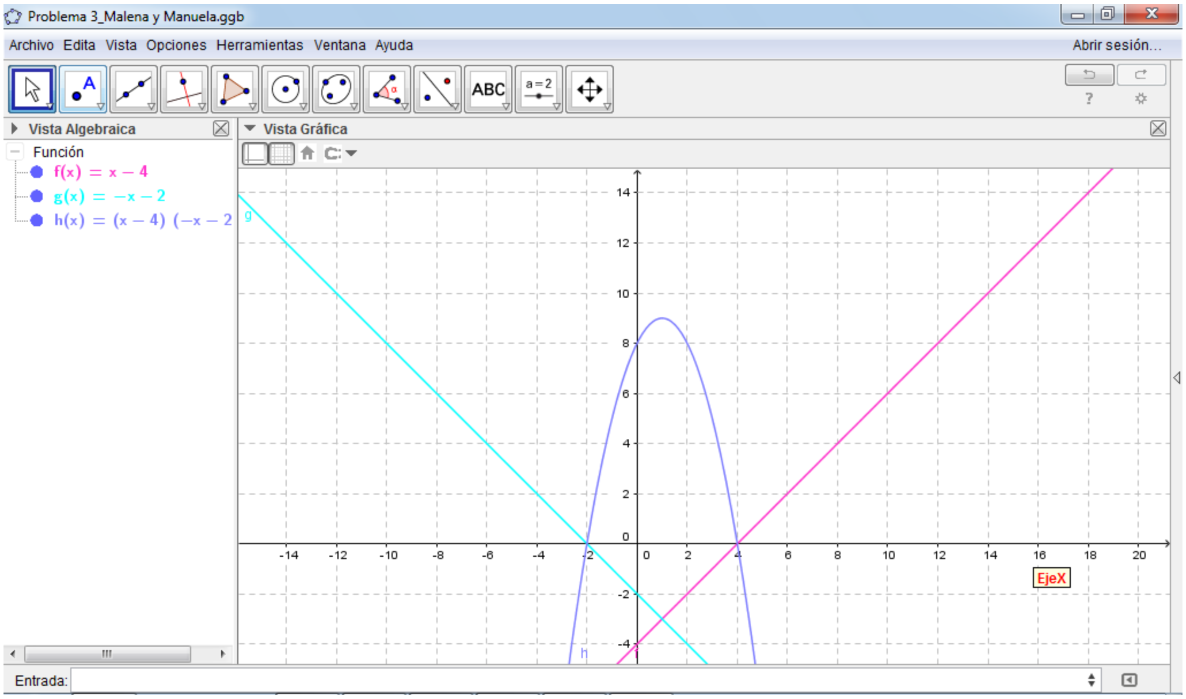
e) Propongan alguna relación entre las raíces de $j(x)$ y las raíces de $f(x)$ y $g(x)$. Justifiquen lo que pensaron. →

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función $j(x)$.

1


Problema 3_Malena y Manuela.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
f(x) = x − 4
g(x) = −x − 2
h(x) = (x − 4) (−x − 2
EjeX
Entrada:

Participantes/Nombres: Malena Gilardone y Manuela Caro

2) Para analizar:

a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.

Porque dependiendo de la multiplicación de los signos, una tiene forma de U o una U invertida.

b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

Las 2 pendientes son positivas ~~entonces~~ si se multiplican los signos da positivo entonces la función cuadrática tiene un mínimo (forma de U)

c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

una pendiente era positiva y otra negativa. Si se multiplican da negativo entonces la función cuadrática tiene un máximo (U invertida)

d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.

e) Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

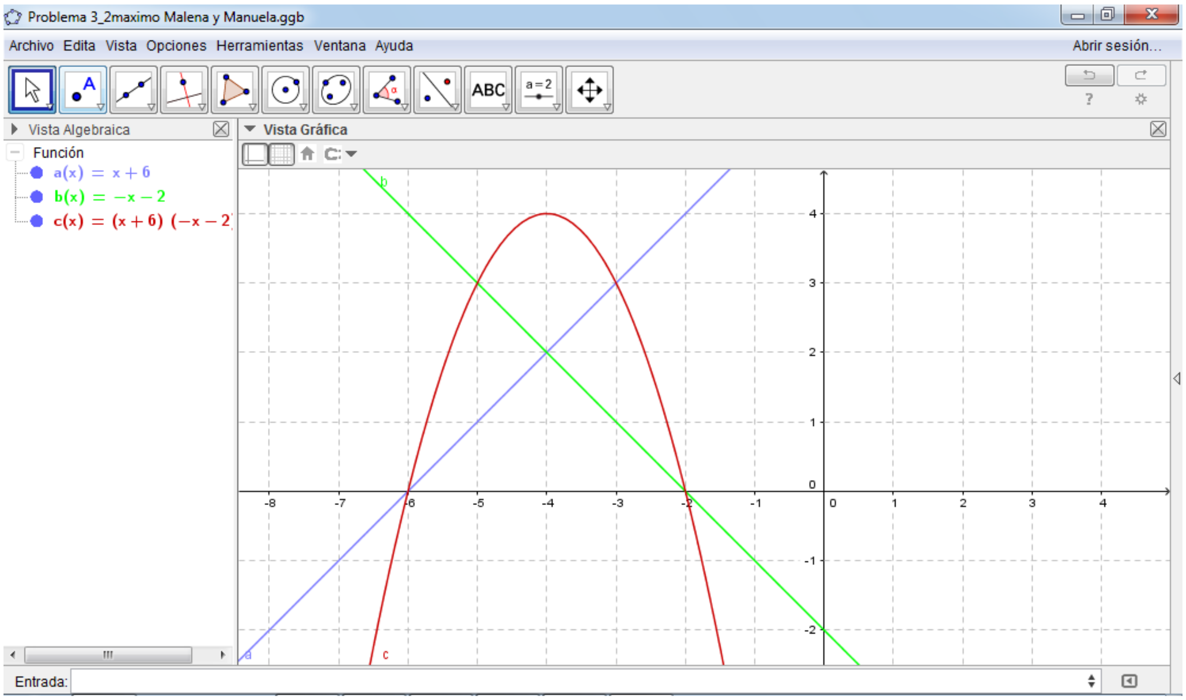
1e) Al multiplicar las dos funciones podemos ver que la parábola coincide en ambas raíces porque j(x) es igual a la multiplicación entre ellas entonces las raíces de f(x) y g(x) se incluyen.

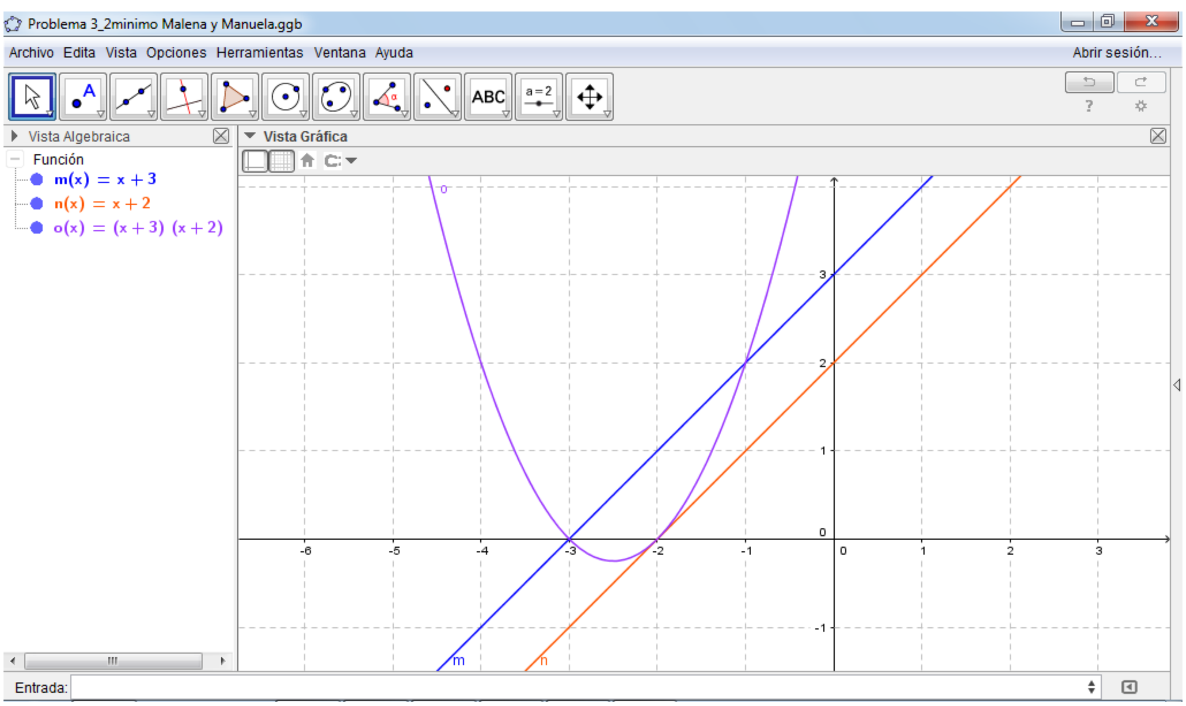
f)g) si se multiplican ~~las pendientes~~ los signos de los intervalos de positividad y negatividad entre f(x) y g(x), podemos observar que a partir de las ~~las~~ raíces de estas dos funciones, la parábola sube o baja.

i) f(x) es una función cuadrática que empieza con una pendiente positiva y después es negativa. Tiene dos raíces ~~que~~ (el eje x se corta dos veces).

2d) • Si $a(x)=x+6$ y $b(x)=-x-2$ y $c(x)=\overset{a(x)}{(x+6)}\overset{b(x)}{(-x-2)}$ se cumple que la función tiene un máximo.

• Si $m(x)=x+3$ y $n(x)=x+2$ y $o(x)=m(x).n(x)$ ~~también~~ tiene un mínimo.


Problema 3_2maximo Malena y Manuela.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = x + 6
b(x) = −x − 2
c(x) = (x + 6) (−x − 2
Entrada:


Problema 3_2minimo Malena y Manuela.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
m(x) = x + 3
n(x) = x + 2
o(x) = (x + 3) (x + 2)
Entrada:

Participantes/Nombres: Valentina Gadol y Marcos Torres Duggan

Clase N°:3 **Fecha:** 29/10

Problema 3.

1) Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x)= x - 4$ y $g(x) = -x - 2$

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
$f(x)$	4	{4; +∞}	{-∞; 4}
$g(x)$	-2	{-∞; -2}	{-2; +∞}
$j(x)$	{-2; 4}	{-2; 4}	{-∞; -2} ∪ {4; +∞}

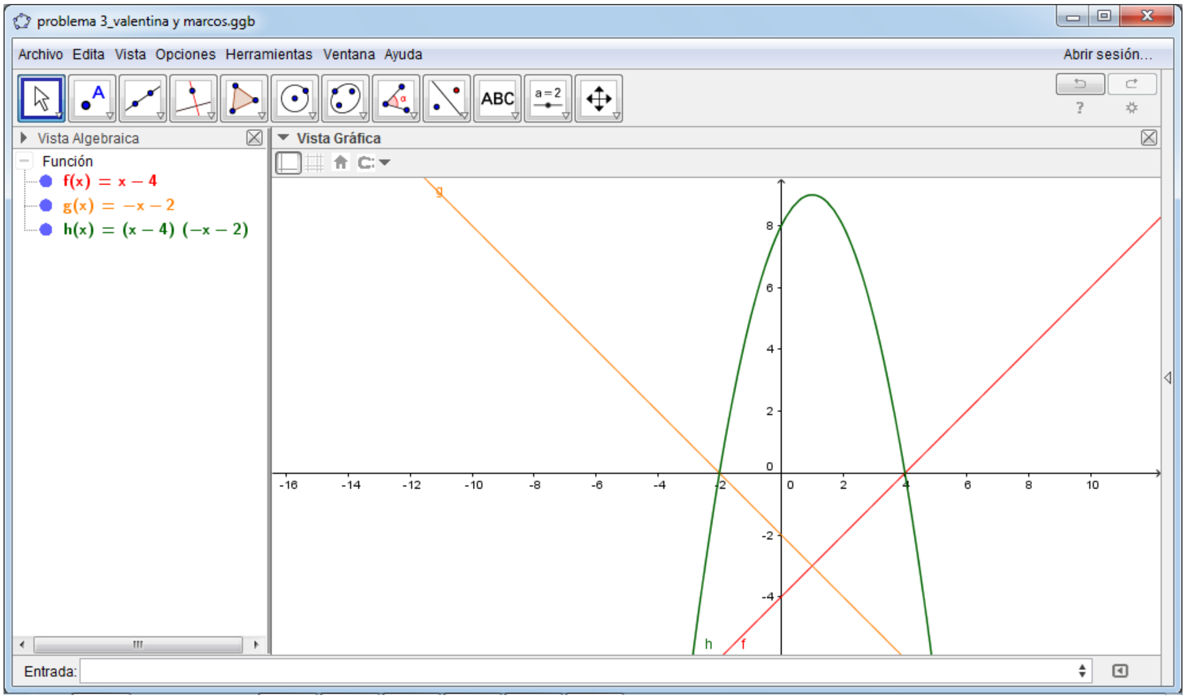
e) Propongan alguna relación entre las raíces de $j(x)$ y las raíces de $f(x)$ y $g(x)$. Justifiquen lo que pensaron. La raíz de F(x) y la de g(x), son las raíces de J(x).

f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. El intervalo + de F(x), empieza en el final del I.P de J(x), y el de g(x), termina en el comienzo del I.P de J(x).

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. La multiplicación de la g(x)(+) y la F(x)(−) dan negativo, que es donde se encuentra la parabola, y lo mismo del otro lado.

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función $j(x)$. La parabola cruza la recta x, en el mismo punto en donde la F y la G la cruzan, y en la Y, se cruza en el numero que da la suma de los numeros en los cuales F y G cortan la Y.

1


problema 3_valentina y marcos.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Función
f(x) = x − 4
g(x) = −x − 2
h(x) = (x − 4) (−x − 2)
Vista Gráfica
Entrada:

Participantes/Nombres: Valentina Gaddi y Marcos T.D.

2) Para analizar:

a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.

b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *h(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.

~~e)~~ Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

e) La relación que tienen es que las raíces de g(x) y f(x) son el conjunto de raíces de j(x) ya que la multiplicidad de ambas lo dan como resultado.

f) La relación que tienen es que cuando g(x) es positivo las parábolas son negativas entonces multiplicados entre sí dan números positivos.

g) La relación que tiene con j(x) es que cuando es negativo g(x) es negativo y f(x) es positivo y a multiplicarse el +.- da negativo.

h) Las ~~relación~~ características son que es una parábola invertida con forma de pirámide.

a) Una de las cuadráticas tiene máximo xq la línea viene del infinito negativo, y el otro tiene mínimo xq la línea viene del infinito (−)

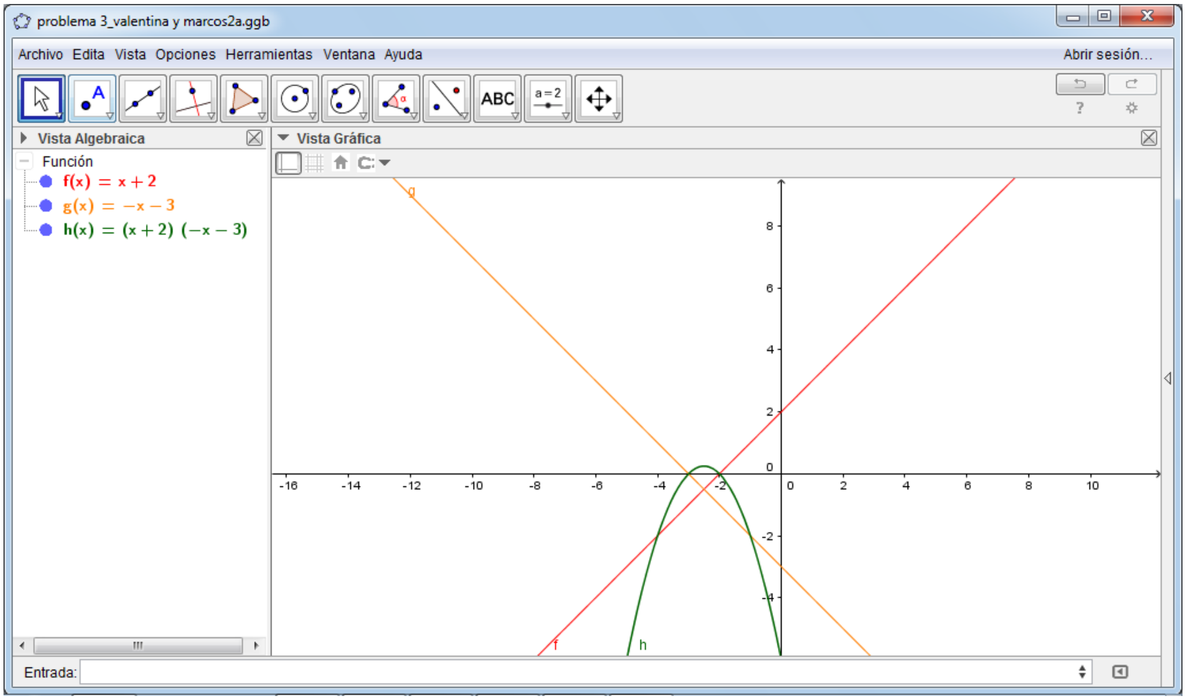
b) Porque viene de arriba, va hacia abajo y genera un punto mínimo.

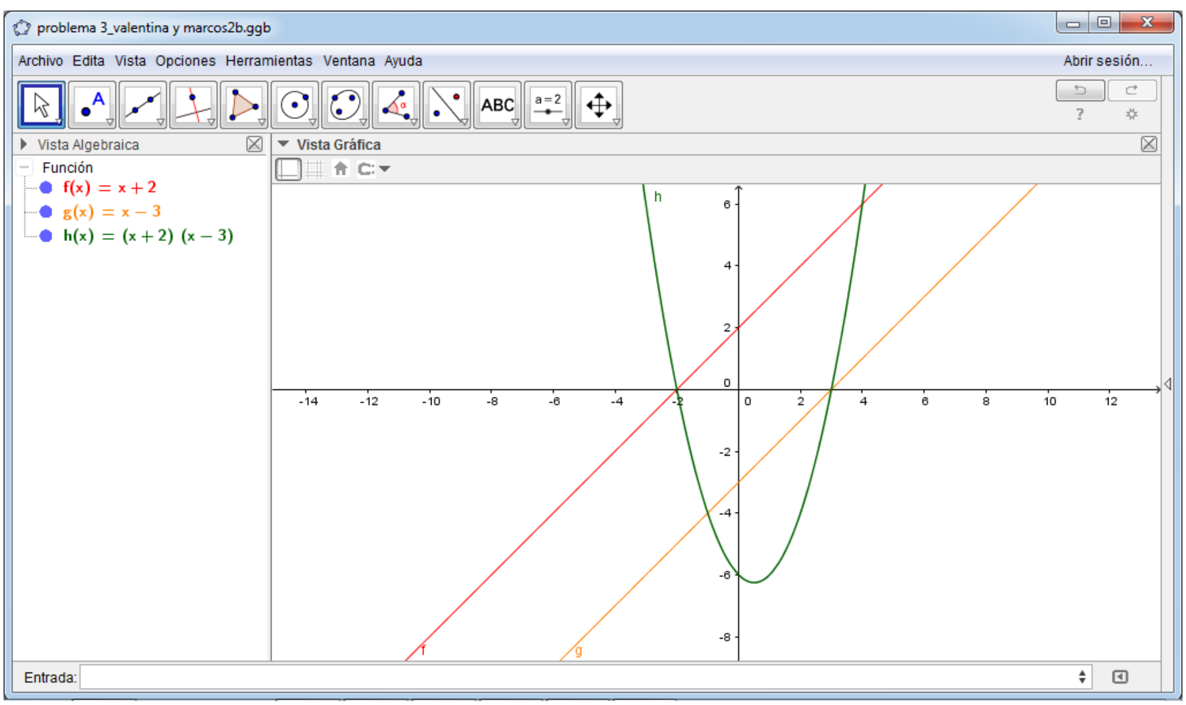
c) Porque viene de abajo, va hacia arriba y genera un punto máximo.

d) $(x+2).(-x-3) =$ PUNTO MÁXIMO

$(x+2).(x-3) =$ PUNTO MÍNIMO

2


problema 3_valentina y marcos2a.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Función
f(x) = x + 2
g(x) = −x − 3
h(x) = (x + 2) (−x − 3)
Vista Gráfica
Entrada:


problema 3_valentina y marcos2b.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Función
f(x) = x + 2
g(x) = x − 3
h(x) = (x + 2) (x − 3)
Vista Gráfica
Entrada:

Participantes/Nombres: CALANDRIA SCHUMACHER

Clase N°:3 **Fecha:** ....29\10.....

Problema 3.

1) Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x) = x - 4$ y $g(x) = -x - 2$

a) Grafíquenlas con el software, ingresando las fórmulas por separado en la barra de "Entrada".

b) Introduzcan la función producto: $j(x) = f(x) * g(x)$

c) Graben lo trabajado con el nombre: "Problema 3_sus nombres"

d) Completen:

		Intervalos	
Función	Raíces	C^+	C^-
$f(x)$	4	$(-\infty; 4)$	$(4; \infty)$
$g(x)$	-2	$(\infty; -2)$	$(-2; -\infty)$
$j(x)$	$(-2; 4)$	$(-2; 4)$	$(-\infty; -2)(4; \infty)$

e) Propongan alguna relación entre las raíces de $j(x)$ y las raíces de $f(x)$ y $g(x)$. Justifiquen lo que pensaron. Las raices son las dos, las raices de F(x) y de G(x). PORQUE 0 multiplicado por cualquier valor es 0.

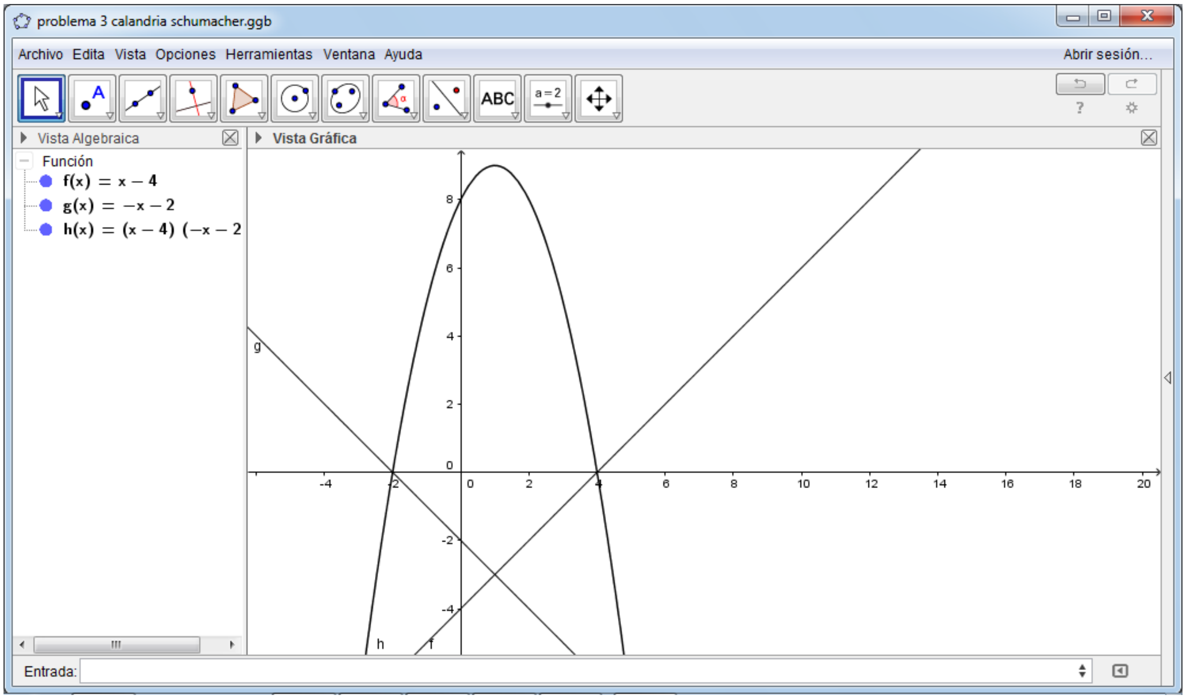
f) Propongan una relación entre el intervalo de positividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. CUANDO F(x) y G(x) TIENEN MISMO SIGNO ES + y cuando distinto ES ~~Neg~~ - PORQUE es UNA REGLA DE LA MULTIPLICIDAD que tambien se aplica a los ejes cartecianos

g) Propongan una relación entre el intervalo de negatividad de $j(x)$ con los de las funciones lineales. Justifiquen lo que pensaron. CUANDO G(x) y F(x) SON POSITIVAS J(x) ES POSITIVA CUANDO G(x) y F(x) SON NEGATIVAS J(x) ES POSITIVA y CUANDO TIENEN DISTINTO SIGNO ES NEGATIVA

h) Describan las características que ustedes consideren relevantes de la función $j(x)$.

- Tiene forma DE ∩
- MANTIENE LAS RAIZES Y LA POSITIVIDAD y negatividad
- ES SIMETRICA

1


problema 3 calandria schumacher.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
f(x) = x − 4
g(x) = −x − 2
h(x) = (x − 4) (−x − 2
g
h
f
Entrada:

Participantes/Nombres: Ramiro Calandria - Schumacher

2) Para analizar:

   a) Discutan por qué una de las funciones cuadráticas tiene mínimo y otra máximo.

   b) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de h(x) respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

   c) Analicen la relación entre el máximo o mínimo de *j(x)* respecto de las fórmulas de las funciones lineales que la generan.

   d) Propongan varios ejemplos que corroboren lo que ustedes decidieron.

   e) Comprueben sus ejemplos del punto d) con GeoGebra.

a) Una tiene punto máximo y otro ~~máximo~~ mínimo porque si la pendiente viene desde $+\infty$, también seguirá por $+\infty$, dejando solo un punto ~~máx~~ mínimo analizable, pero si viniera desde $-\infty$, dejaría un punto máximo.

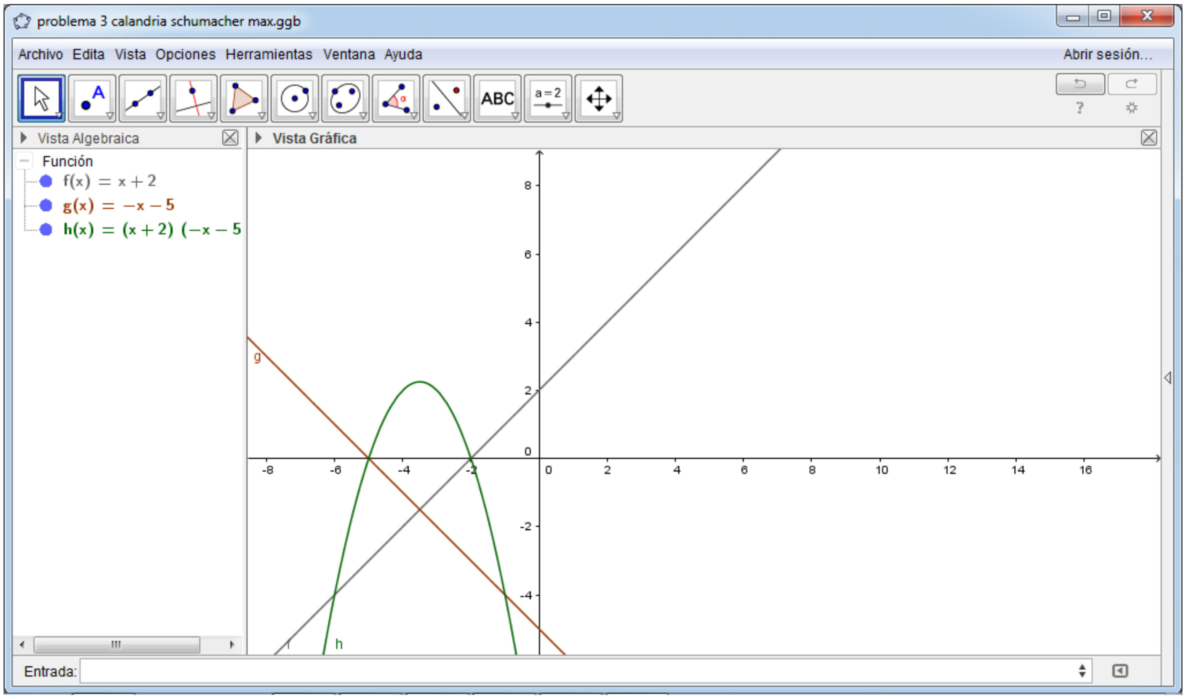
b) ambas pendientes de h eran ~~positivas~~ de igual signo, por lo tanto, la parábola proveniente del lado $+\infty$, por eso habrá un punto mínimo.

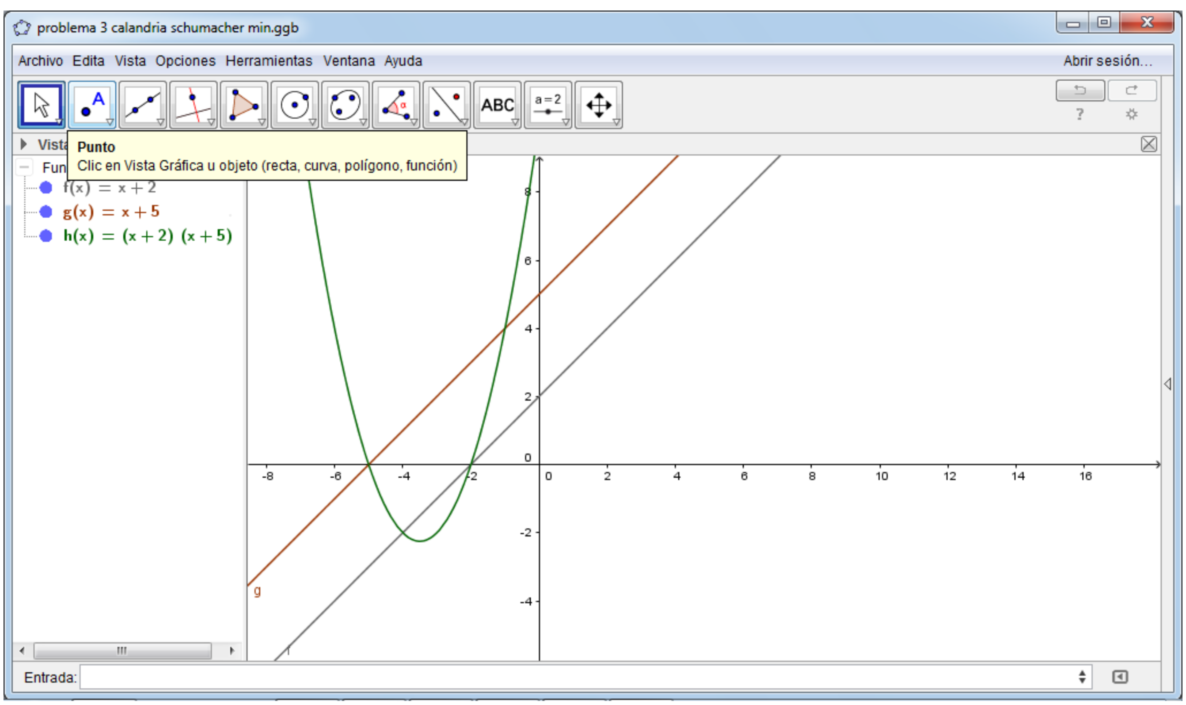
c) Las pendientes tienen distinto signo, por lo tanto la ~~pendiente~~ parábola provendrá del lado $-\infty$, dejando un punto máximo.

d) * $(x+2)(-x-5)$ = punto máximo

* $(x+2)(x+5)$ = punto mínimo

2


problema 3 calandria schumacher max.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
f(x) = x + 2
g(x) = −x − 5
h(x) = (x + 2) (−x − 5
g
h
f
Entrada:


problema 3 calandria schumacher min.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Punto
Clic en Vista Gráfica u objeto (recta, curva, polígono, función)
f(x) = x + 2
g(x) = x + 5
h(x) = (x + 2) (x + 5)
g
f
Entrada:

ANEXO IV

Participantes/Nombres: Ramón Marino y Ramiro Costa

Clase N°:4 **Fecha**: 3/10/15

Problema 4.

1) Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x) = -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x) = -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x) = 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

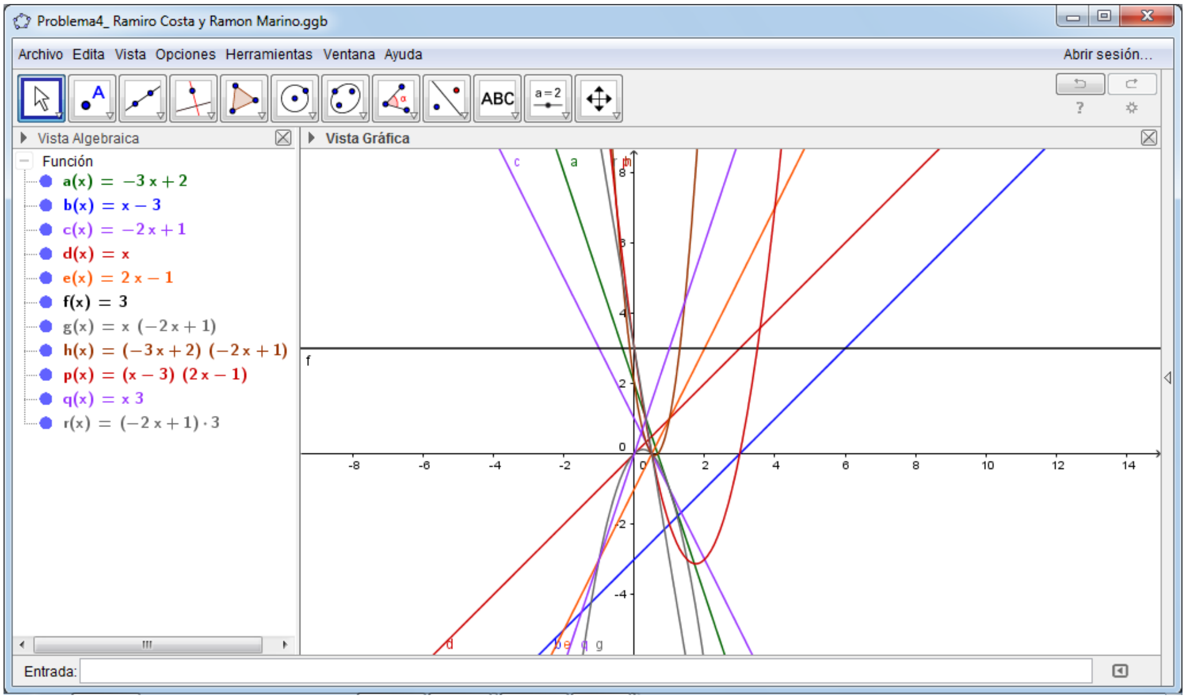
- ✓ Un máximo: b(x) a(x) = Hay mas de una solucion, cualquier multiplicación en la cual haya una ~~factor~~ funcion positiva y otra negativa
- ✓ Un mínimo: d(x) . ~~f~~e(x) = " Dos funciones positivas o dos negativas
- ✓ Una raíz en cero: d(x) . c(x) = " Haya una funcion que no tenga termino independiente (ordenada al origen)
- ✓ Dos raíces positivas: b(x) . e(x)
- ✓ Dos raíces negativas: ~~S = Ø~~ Ninguna de estas funciones tiene raices negativas por lo cual no puede haber una funcion cuadratica con ~~factores~~ raices negativas
- ✓ Sólo una raíz: a(x) . c(x)
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: "
- ✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

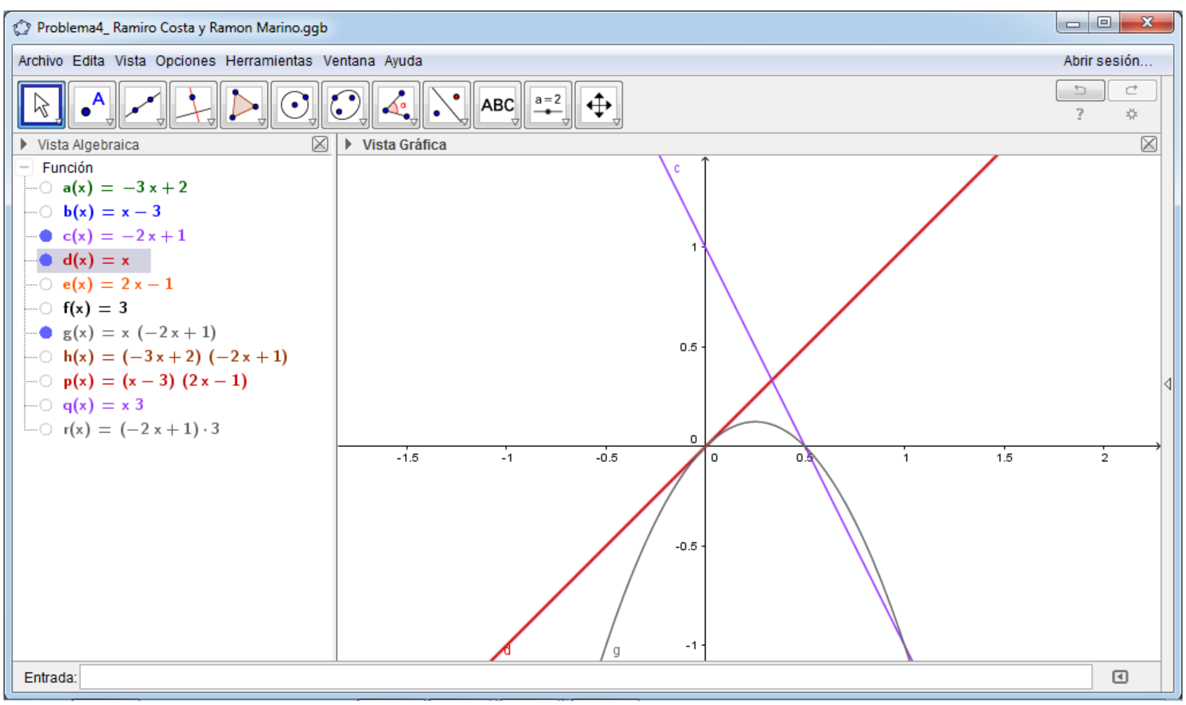
2) Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron. El producto de dos funciones lineales no ~~resulta~~ es una función cuadratica cuando una de las funciones lineales no tiene pendiente o es de grado cero

1


Problema4_ Ramiro Costa y Ramon Marino.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = x (−2 x + 1)
h(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
p(x) = (x − 3) (2 x − 1)
q(x) = x 3
r(x) = (−2 x + 1) · 3
Entrada:


Problema4_ Ramiro Costa y Ramon Marino.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = x (−2 x + 1)
h(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
p(x) = (x − 3) (2 x − 1)
q(x) = x 3
r(x) = (−2 x + 1) · 3
Entrada:

Participantes/Nombres: JUAN SAMITIER / BAUTISTA DULAÑONA

Clase N°:4 **Fecha**: ...3/11...

Problema 4.

1) Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x) = -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x) = -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x) = 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

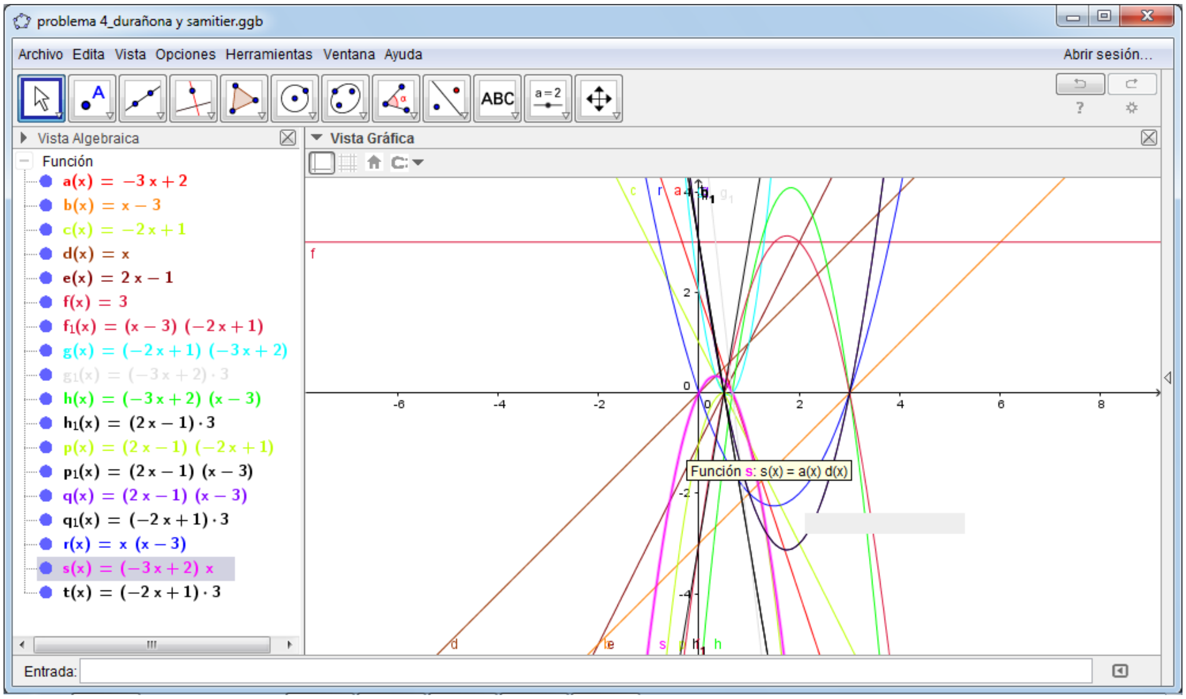
- ✓ Un máximo: $a(x) \cdot e(x)$
- ✓ Un mínimo: $c(x) \cdot a(x)$
- ✓ Una raíz en cero: $e(x) \cdot c(x)$
- ✓ Dos raíces positivas: $a(x) \cdot b(x)$
- ✓ Dos raíces negativas: ____________ COMO TODAS LAS RAICES SON POSITIVAS (EN LAS VUELTAS) NUNCA PUEDE HABER COMO RAICES NEGATIVAS RESULTADO
- ✓ Sólo una raíz: $e(x) : c(x)$
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: ____________
- ✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

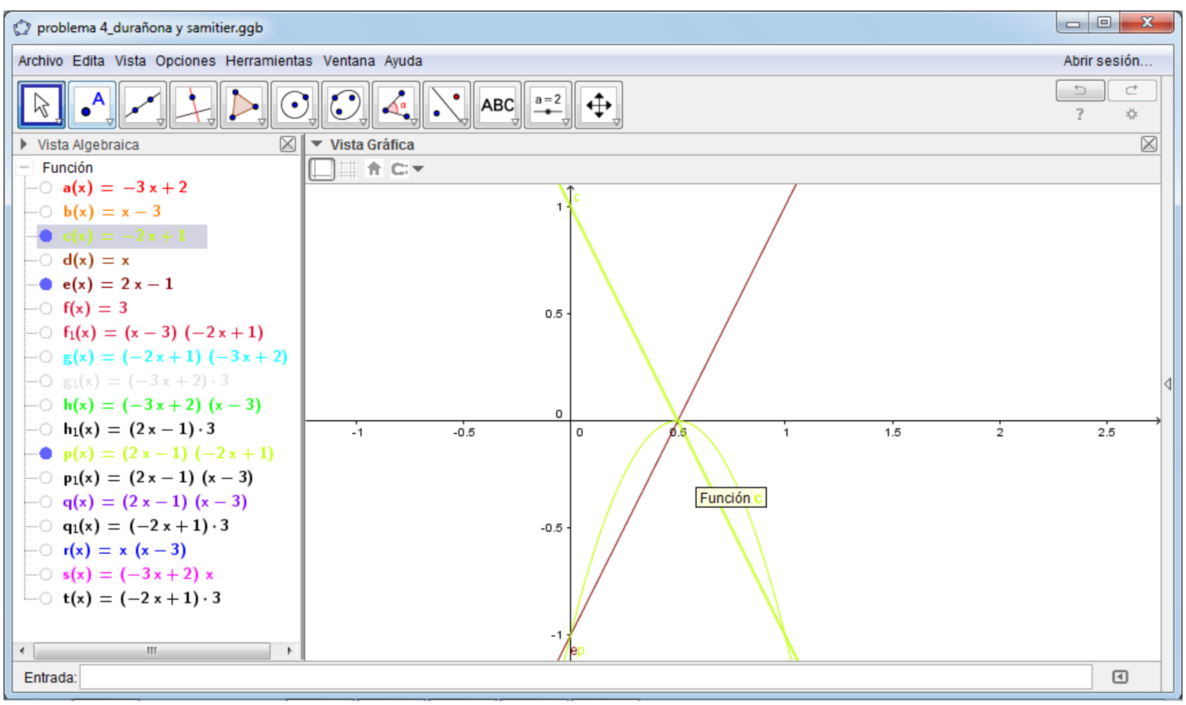
2) Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

FA "El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.
ESTA AFIRMACION ES FALSA DEBIDO A QUE SI MULTIPLICAMOS F(x) POR CUALQUIER OTRA FUNCION DA COMO RESULTADO UNA SIMPLE RECTA, Y NO UNA FUNCION CUADRATICA, NI PARABOLA

1


problema 4_durañona y samitier.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
f1(x) = (x − 3) (−2 x + 1)
g(x) = (−2 x + 1) (−3 x + 2)
g1(x) = (−3 x + 2) · 3
h(x) = (−3 x + 2) (x − 3)
h1(x) = (2 x − 1) · 3
p(x) = (2 x − 1) (−2 x + 1)
p1(x) = (2 x − 1) (x − 3)
q(x) = (2 x − 1) (x − 3)
q1(x) = (−2 x + 1) · 3
r(x) = x (x − 3)
s(x) = (−3 x + 2) x
t(x) = (−2 x + 1) · 3
Función s: s(x) = a(x) d(x)
Entrada:


problema 4_durañona y samitier.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
f1(x) = (x − 3) (−2 x + 1)
g(x) = (−2 x + 1) (−3 x + 2)
g1(x) = (−3 x + 2) · 3
h(x) = (−3 x + 2) (x − 3)
h1(x) = (2 x − 1) · 3
p(x) = (2 x − 1) (−2 x + 1)
p1(x) = (2 x − 1) (x − 3)
q(x) = (2 x − 1) (x − 3)
q1(x) = (−2 x + 1) · 3
r(x) = x (x − 3)
s(x) = (−3 x + 2) x
t(x) = (−2 x + 1) · 3
Función c
Entrada:

Participantes/Nombres: Schumacher - Torres Duggan

Clase N°:4 **Fecha:** 3/11/15

Problema 4.

1) Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x) = -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x) = -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x) = 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

- ✓ Un máximo: a(x) . b(x)
- ✓ Un mínimo: a(x) . c(x)
- ✓ Una raíz en cero: a(x) . e(x)
- ✓ Dos raíces positivas: b(x) . c(x)
- ✓ Dos raíces negativas: Ninguna de estas funciones
- ✓ Sólo una raíz: ~~d(x) . f(x)~~
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: No hay
- ✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

~~Solo es posible esto por que la multiplicación de las funciones antes es la unica que produce~~

Si hay mas de una solución, no para todos.

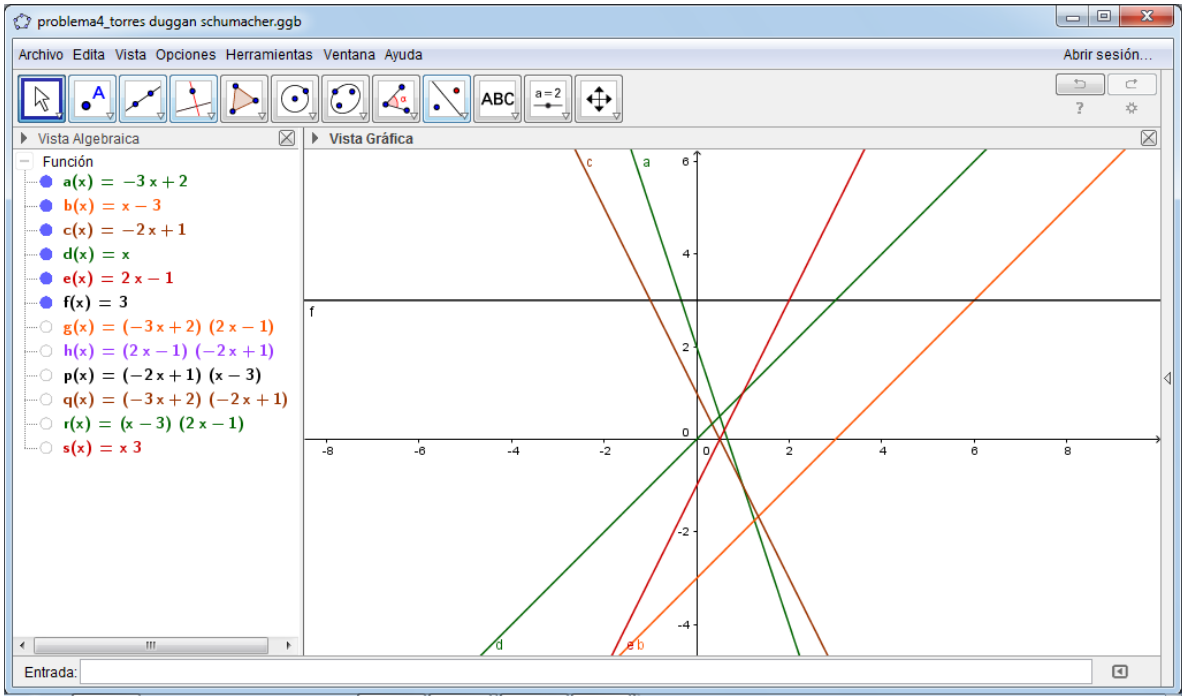
2) Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

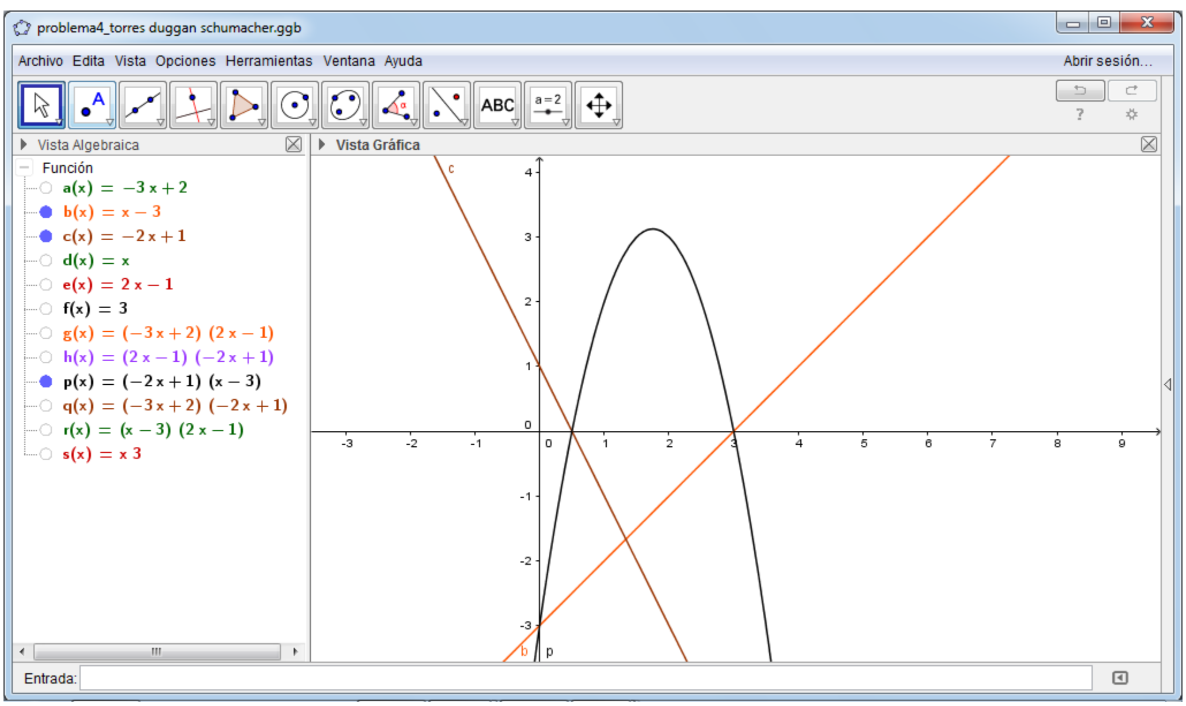
"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.

~~No~~ En mi opinión no siempre es cuadratica porque si una de ellas no tiene pendiente no seria posible.

1


problema4_torres duggan schumacher.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (−3 x + 2) (2 x − 1)
h(x) = (2 x − 1) (−2 x + 1)
p(x) = (−2 x + 1) (x − 3)
q(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
r(x) = (x − 3) (2 x − 1)
s(x) = x 3
Entrada:


problema4_torres duggan schumacher.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (−3 x + 2) (2 x − 1)
h(x) = (2 x − 1) (−2 x + 1)
p(x) = (−2 x + 1) (x − 3)
q(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
r(x) = (x − 3) (2 x − 1)
s(x) = x 3
Entrada:

Participantes/Nombres: ZINGONI Y Borges

Clase N°:4 **Fecha**: ...3/11.........

Problema 4.

1) Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x)= -3x + 2$	$b(x) = x - 3$	$c(x)= -2x + 1$
$d(x) = x$	$e(x) = 2x - 1$	$f(x)= 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

- ✓ Un máximo: 4,1 (a(x)* b(x))
- ✓ Un mínimo: d(x) * e(x) y b(x) * e(x)
- ✓ Una raíz en cero: d(x) * e(x) y c(x) * d(x) Ambas utilizan d(x) que tiene raiz en 0
- ✓ Dos raíces positivas: b(x) * e(x) y a(x) * c(x)
- ✓ Dos raíces negativas: NINGUNA Ninguna recta tiene raizes negativa
- ✓ Sólo una raíz: c(x) * e(x)
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: No hay
- ✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

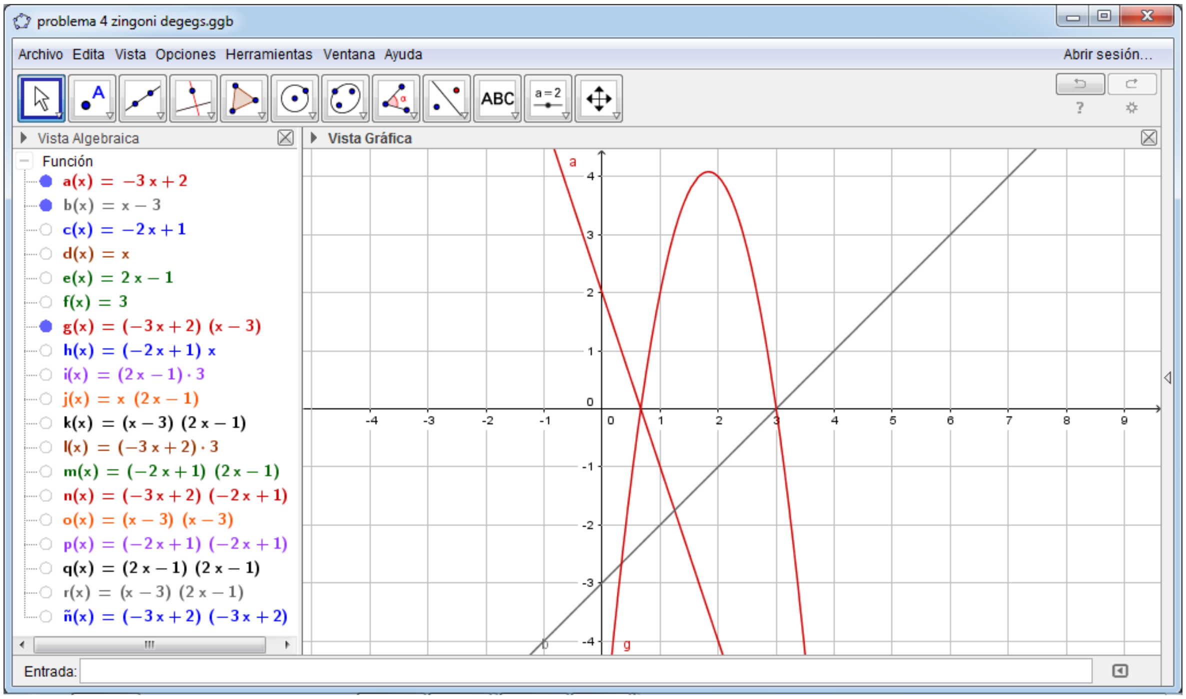
2) Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

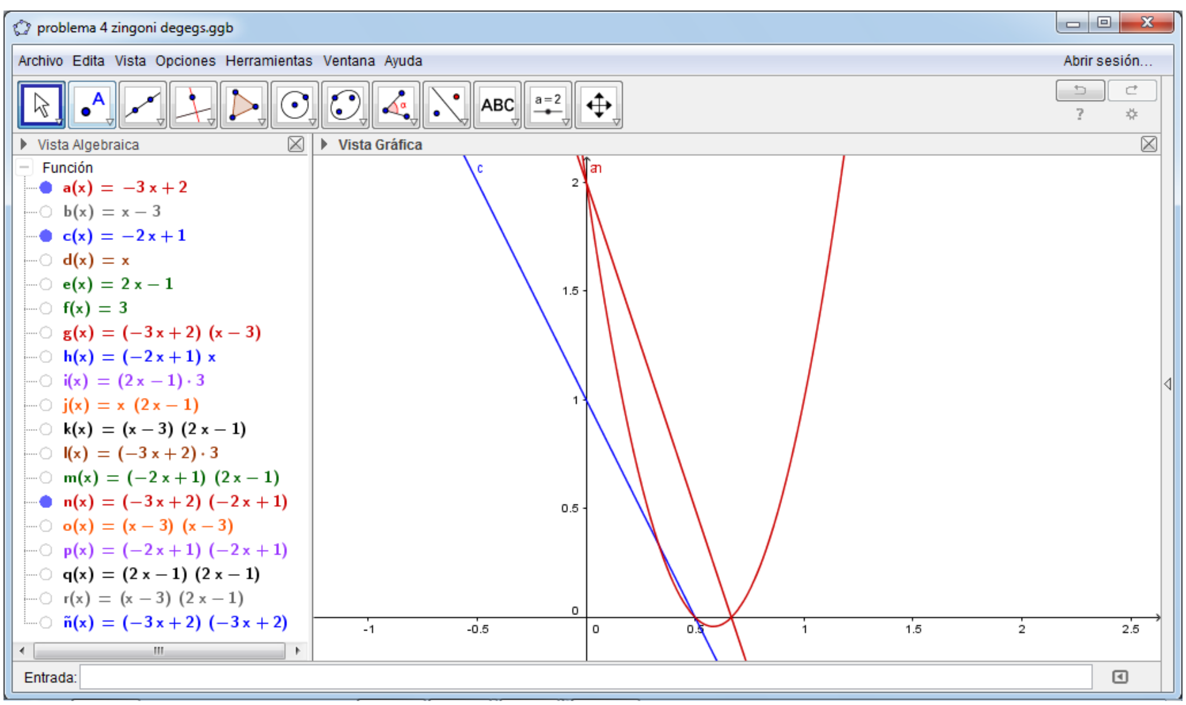
Expliquen lo que acordaron.

No porque hay funciones lineales que no contienen X o Y y por tanto generan una funcion lineal

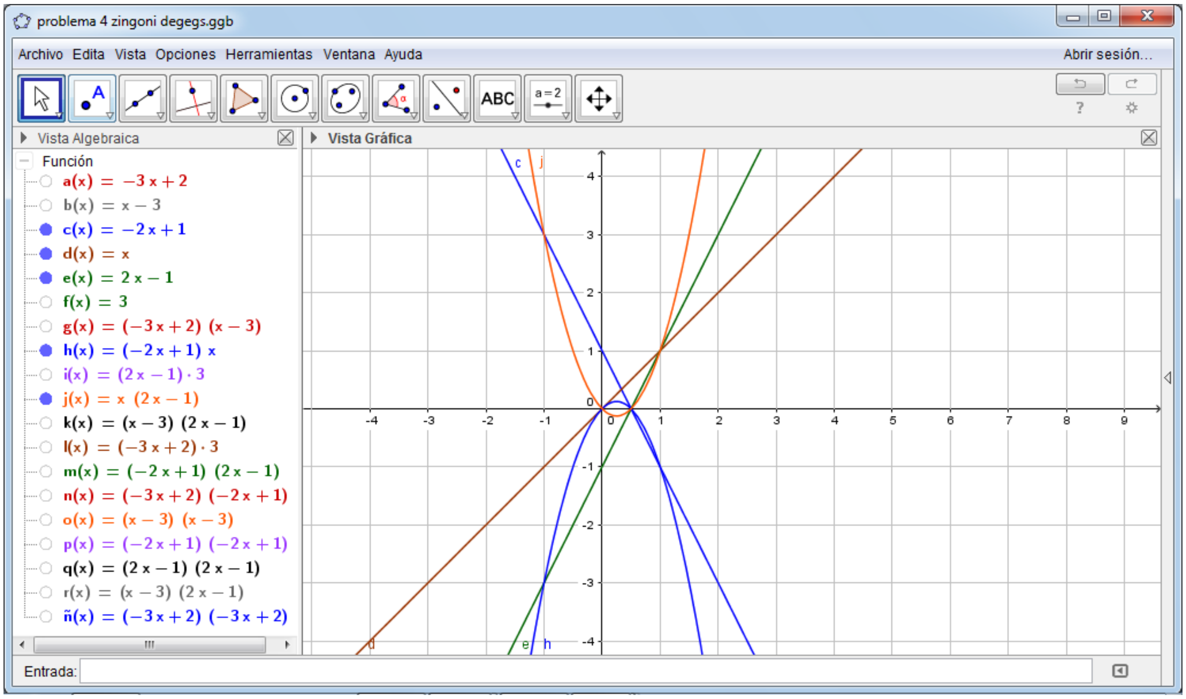
1



problema 4 zingoni degegs.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (−3 x + 2) (x − 3)
h(x) = (−2 x + 1) x
i(x) = (2 x − 1) · 3
j(x) = x (2 x − 1)
k(x) = (x − 3) (2 x − 1)
l(x) = (−3 x + 2) · 3
m(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
n(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
o(x) = (x − 3) (x − 3)
p(x) = (−2 x + 1) (−2 x + 1)
q(x) = (2 x − 1) (2 x − 1)
r(x) = (x − 3) (2 x − 1)
ñ(x) = (−3 x + 2) (−3 x + 2)
Entrada:



problema 4 zingoni degegs.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (−3 x + 2) (x − 3)
h(x) = (−2 x + 1) x
i(x) = (2 x − 1) · 3
j(x) = x (2 x − 1)
k(x) = (x − 3) (2 x − 1)
l(x) = (−3 x + 2) · 3
m(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
n(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
o(x) = (x − 3) (x − 3)
p(x) = (−2 x + 1) (−2 x + 1)
q(x) = (2 x − 1) (2 x − 1)
r(x) = (x − 3) (2 x − 1)
ñ(x) = (−3 x + 2) (−3 x + 2)
Entrada:


problema 4 zingoni degegs.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (−3 x + 2) (x − 3)
h(x) = (−2 x + 1) x
i(x) = (2 x − 1) · 3
j(x) = x (2 x − 1)
k(x) = (x − 3) (2 x − 1)
l(x) = (−3 x + 2) · 3
m(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
n(x) = (−3 x + 2) (−2 x + 1)
o(x) = (x − 3) (x − 3)
p(x) = (−2 x + 1) (−2 x + 1)
q(x) = (2 x − 1) (2 x − 1)
r(x) = (x − 3) (2 x − 1)
ñ(x) = (−3 x + 2) (−3 x + 2)
Entrada:

Participantes/Nombres: CARLINO - BARREIRO

Clase N°:4 **Fecha:** 03/11

Problema 4.

1) Dadas las siguiente funciones lineales:

$a(x)= -3x + 2$ $b(x) = x - 3$ $c(x)= -2x + 1$

$d(x) = x$ $e(x) = 2x - 1$ $f(x)= 3$

Para cada ítem a continuación, elijan dos de las funciones lineales propuestas cuyo producto genere una función cuadrática que tenga:

- ✓ Un máximo: C(x) . E(x)
- ✓ Un mínimo: B(x) . D(x)
- ✓ Una raíz en cero: D(x) . B(x)
- ✓ Dos raíces positivas: F(x) . D(x) / E(x) . F(x)
- ✓ Dos raíces negativas: No tiene raices Negativas
- ✓ Sólo una raíz: D(x) . F(x)
- ✓ Una raíz positiva y una negativa: No encontramos
- ✓ Expliquen para cada uno de los ítems anteriores si hay más de una solución posible. Justifiquen.

2) Decidan si la siguiente afirmación es correcta:

"El producto de dos funciones lineales es siempre una función cuadrática."

Expliquen lo que acordaron.

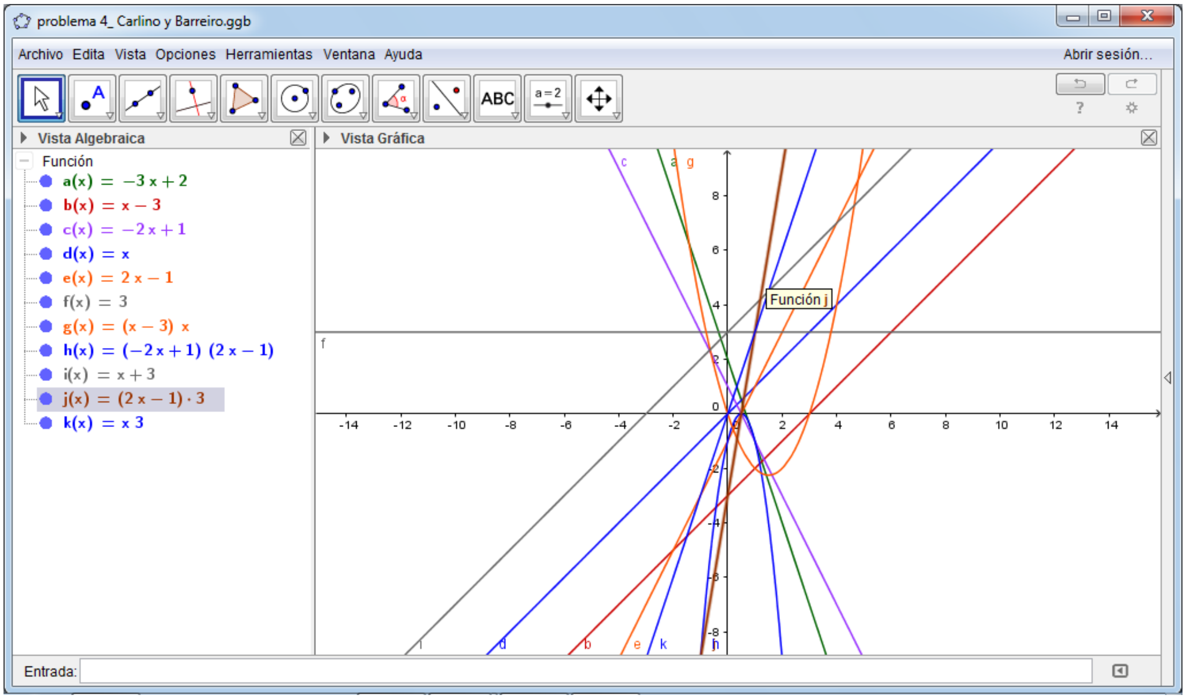
es correcta porque al multiplicar dos funciones lineales, la x queda elebada al cuadrado ya que una función lineal consiste en

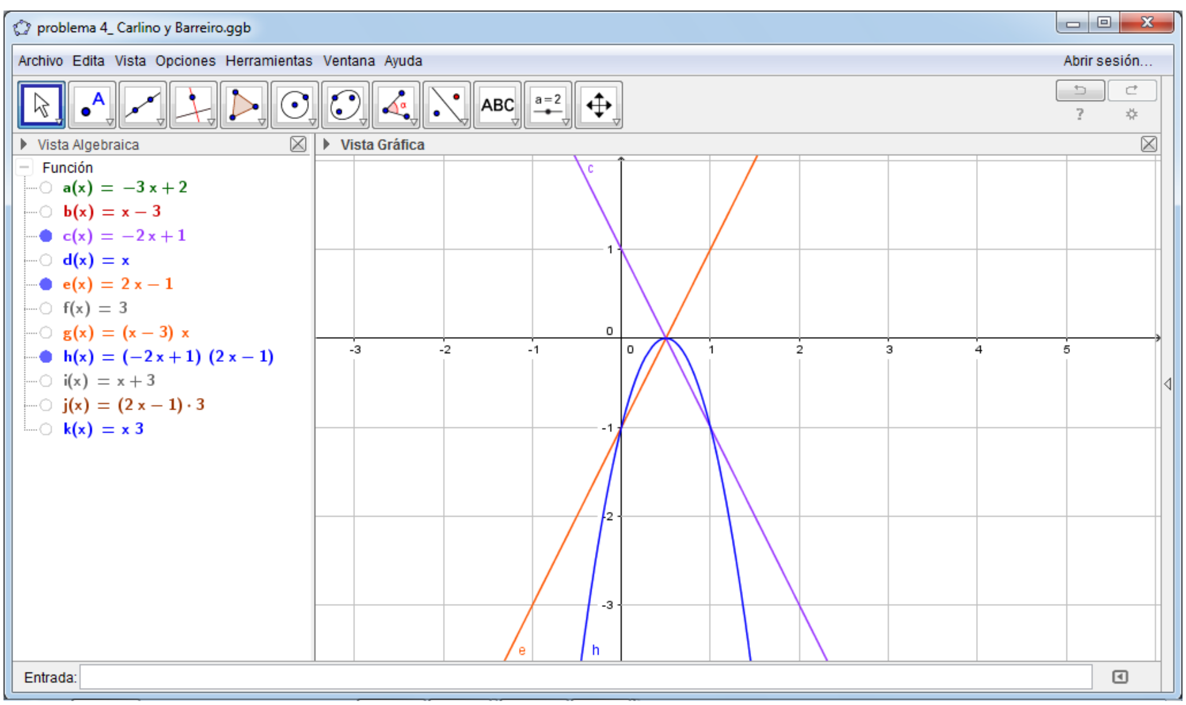
1

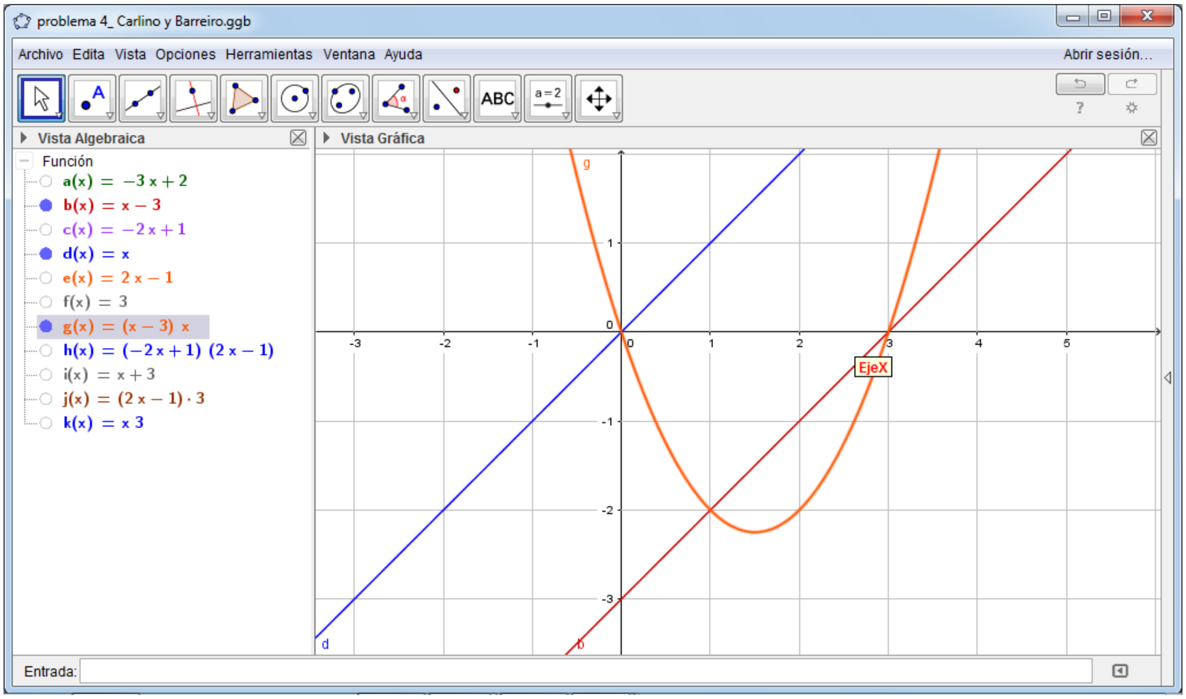
una función con x de grado uno ~~quedando~~

por ejemplo: $H(x)=(x+2) \cdot N(x)=(x-3) = J(x)= x^2 - 3x + 2x - 1$

función cuadrática $\longrightarrow$ $\boxed{J(x)= x^2 - 1x - 1}$


problema 4_ Carlino y Barreiro.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (x − 3) x
h(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
i(x) = x + 3
j(x) = (2 x − 1) · 3
k(x) = x 3
Función j
Entrada:


problema 4_ Carlino y Barreiro.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
a=2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (x − 3) x
h(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
i(x) = x + 3
j(x) = (2 x − 1) · 3
k(x) = x 3
Entrada:


problema 4_ Carlino y Barreiro.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Función
a(x) = −3 x + 2
b(x) = x − 3
c(x) = −2 x + 1
d(x) = x
e(x) = 2 x − 1
f(x) = 3
g(x) = (x − 3) x
h(x) = (−2 x + 1) (2 x − 1)
i(x) = x + 3
j(x) = (2 x − 1) · 3
k(x) = x 3
EjeX
Entrada: