LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DE LA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL REGIONAL PACHECO

"El número de Oro y Proporcionalidad Áurea en la Escuela Secundaria utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Un estudio de caso"

Tesina para obtención del título de:
Licenciada en Enseñanza de la Matemática

Autora: Dechima Dendorfer Sabrina Beatriz

Directora: Mg. Fioriti Gema
Co- Directora: Lic. Ferragina Rosa

19/03/2016

PLANTEAMIENTO Y RESUMEN

LA VIGENCIA DEL PROGRAMA CONECTAR IGUALDAD POSIBILITÓ QUE NUESTRAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS INCORPORARAN RECURSOS VINCULADOS CON LA TECNOLOGÍA DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN (TIC).

TENIENDO EN CUENTA LO ANTES MENCIONADO, LA INVESTIGACIÓN SE DESARROLLA UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA, DEBIDO A QUE PRESENTA UN GRAN POTENCIAL MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO; ADEMÁS SE ENCUENTRA INCLUIDO EN LA TOTALIDAD DE LAS NETBOOKS ENTREGADAS POR EL PROGRAMA.

LA INVESTIGACIÓN GIRO EN TORNO AL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD ÁUREA EN UN PRIMER AÑO DE LA ESCUELA SECUNDARIA. CORRESPONDE A UN ENFOQUE CUALITATIVO, DEBIDO A QUE LOS RESULTADOS QUE SE OBTENDRÁN NO PODRÁN SER RELACIONADOS CON VALORES NUMÉRICOS DE MANERA DIRECTA. DURANTE SU IMPLEMENTACIÓN SE INTENTÓ OBSERVAR LA TOTALIDAD DE LOS HECHOS SIN REDUCIRLOS A SUS PARTES INTEGRANTES Y SE DESARROLLARON PREGUNTAS ANTES, DURANTE Y DESPUÉS DEL PROCESO. POSEE UN TOTAL DE CUATRO ETAPAS: ANÁLISIS PRELIMINAR, ANÁLISIS A PRIORI, EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI Y EVALUACIÓN; CORRESPONDIENTES A LAS FASES DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA.

DENTRO DE LAS CONCLUSIONES OBTENIDAS RESALTAMOS: DEBIDO A LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS NETBOOKS, LOS ALUMNOS RECIBIERON CON MUCHO ENTUSIASMO LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PLANIFICADAS. SIENDO ELLOS

MISMOS QUIÉNES SE INVOLUCRARON EN SU PROPIO PROCESO TENIENDO COMO META LA EXPOSICIÓN DE REFLEXIONES. LOGRANDO MEJORAR SIGNIFICATIVAMENTE SUS RESULTADOS ACADÉMICOS.

COMO RECOMENDACIÓN DESTACAMOS: LA NECESIDAD QUE EN LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS SE CONFORMEN EQUIPOS DE TRABAJO CAPACES DE PLANIFICAR, PRODUCIR Y EVALUAR MATERIALES RELACIONADOS CON EL USO DE TIC PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, ACORDE A LOS DISEÑOS CURRICULARES VIGENTES, TENIENDO PRESENTE EL CONTEXTO Y NECESIDADES DE NUESTROS ALUMNOS Y PROFESORES.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento primeramente a mis alumnos, Directora y compañeros de la Escuela de Educación Secundaria N° 6. En especial a Gladis Sala y Vanina Cabrera, por su contribución al desarrollo de esta investigación y por su inestimable apoyo constante.

A mi directora Mg. Gema Fioriti y co-directora Lic. Rosa Ferragina, por guiarme y transmitirme su experiencia. Su apoyo incondicional ha sido determinante en los momentos difíciles, contagiándome su optimismo para afrontar los retos que la vida nos propone día a día.

A mi mis hijos Milena y Nicolás quienes comprendían la importancia que poseía este trabajo para mí. A mis padres quienes me enseñaron a amar esta profesión; pero en especial a mi marido y compañero Anibal, ya que tenerlo a mi lado me ha ayudado a no desanimarme.

En definitiva, con estas humildes líneas deseo agradecer a todas las personas que de una u otra forma han contribuido para que este trabajo sea realizado.

ÍNDICE

C A P Í T U L O 1

E L P R O B L E M A

INTRODUCCIÓN

Podemos señalar que existe un número extraordinario, el cual convive con la humanidad desde tiempos inmemorables porque está presente en la naturaleza rigiendo patrones de crecimiento de órganos y organismos biológicos, caracolas, las nervaduras de las hojas y árboles como helechos, araucarias, cactus, girasoles; en la distribución de los pétalos de las hojas, el grosor de las ramas, y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño.

Se puede hallar en estructuras tan antiguas como la pirámide de Keops, o el Partenón, pero al mismo tiempo en el Edificio Naciones Unidas (situado en la ciudad de New York que funciona como sede del organismo desde su fundación en 1950). En cosas tan comunes como tarjetas de crédito o cuadros, como la Mona Lisa, el Hombre de Vitrubio, el nacimiento de Venus, pero al mismo tiempo se encuentra en los anillos de Saturno o en la distribución de las galaxias.

El número al que hacemos referencia es el llamado número de oro (representado habitualmente con la letra griega ϕ), también conocido como: sección áurea, proporción áurea o razón áurea; posee muchas propiedades importantes, pero tal vez la más significativa es que fue descubierto en la antigüedad como una relación o proporción entre elementos.

Por lo antes expuesto y teniendo en cuenta la importancia que poseen en la educación superior, consideramos necesario que los alumnos que se encuentran cursando la escuela secundaria hayan tenido una primera aproximación a ellos.

1.1 Situación Inicial

En el año 2010, el Poder Ejecutivo de la República Argentina, lanzó el programa denominado: “Conectar Igualdad”. En el artículo 1° correspondiente al Decreto 459/2010 en el cual se pone en manifiesto la creación del mismo, podemos leer que su objetivo es otorgar una computadora a los alumnos y docentes de las escuelas públicas, especiales e institutos de formación docente del país. Al mismo tiempo se propone capacitarlos en el uso de esta herramienta, buscando la paulatina incorporación de su uso en el desarrollo de las clases.

Esta situación generó nuevos espacios de aprendizaje más allá del aula, flexibilizando los tiempos y el diálogo entre pares o alumnos – docente. Se borraron los límites físicos generados por las paredes del establecimiento educativo y el toque de timbre.

En síntesis: cambió significativamente la forma de trabajo, aprendizaje y comunicación, tanto individual como grupal. Tan profundo es el cambio que la tradicional formas de definir el aprendizaje: “Proceso mediante el cual el aprendiz entra en contacto y absorbe (como si fuera una esponja) conocimiento o destrezas, de alguna fuente autorizada” (Cope y Kalantzis, 2009, pág. 2) ya no es suficiente. Esto se debe a que actualmente las teorías más avanzadas sostienen que los aprendices “construyen” el conocimiento de manera activa a partir de sus experiencias con el mundo que lo rodea dando origen a un nuevo paradigma educativo, llamado: “aprendizaje ubicuo” definido como el que se produce en todo lugar y momento; en consecuencia, se produciría aprendizaje a partir del entorno. Cope y Kalantzis (2009).

Otro concepto relacionado es la llamada tecnología ubicua, la cual se identifica como la integración de la informática al entorno del ser humano, a tal punto que éste realizará las tareas casi sin percibirlo.

Analicemos un ejemplo concreto: para construir la mina de un lápiz se utiliza un mineral llamado grafito, la tecnología ubicua puede servir de medio para que se pueda aprender mineralogía a partir de un lápiz.

Podemos señalar que "El extraordinario desarrollo de los dispositivos digitales en los últimos tiempos hacen que el aprendizaje ubicuo no sea ya tan solo una posibilidad práctica sino un imperativo social" (Cope y Kalantzis, 2009, pág. 3)

Todo esto, claro está, es visto desde el avance de la tecnología. Pero dentro del campo de la didáctica de la Matemática podemos señalar que en la Argentina, se están abandonando las actividades que dejan al alumno fuera de la posibilidad de: investigar, elegir las herramientas que desee utilizar, buscar cómo validar los resultados obtenidos, reconocer las dificultades que presenta una situación y poder superarlas. Pero entonces: ¿Cómo debería ser abordada la matemática en el transcurso de la actual secundaria?

En una entrevista (2004) realizada a Adrián Paenza (doctor en Ciencias Matemáticas, profesor de Matemática y conductor de TV) plantea:

> ...La escuela, como tal, debe ser repensada y actualizada a las condiciones del siglo XXI. Creo que deberíamos empezar por reformular qué queremos enseñar, por qué, qué problemas intentamos resolver y cuáles son las curiosidades de los chicos que vamos a ayudar a disipar... El día en que comprendamos que la verdadera tarea de un docente es generar preguntas y saber descubrir las curiosidades que tiene un chico, entonces habremos dado un salto cualitativo muy importante para vencer la barrera docente-alumno (en matemática al menos)...

En consecuencia como docentes deberíamos cuestionarnos: ¿en qué consiste "hacer matemática"? Segal y Giuliani (2011) llegaron a una conclusión:

> Pensamos que "hacer matemática" es más que resolver problemas. También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para resolverlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia (Segal y Giuliani, 2011, pág. 7)

Lo antes mencionado nos deja entrever que los docentes, tiene la necesidad de contemplar los intereses del entorno en el que se desarrollan laboralmente y en consecuencia, conocer los cambios e influencia originadas en sus alumnos por el uso de tecnología, sin olvidarnos que vivimos inmersos en la sociedad de la información y comunicación, caracterizada fundamentalmente por los acelerados cambios en los aspectos culturales y educativos, siendo necesario que los alumnos aprendan a aprender utilizando sus propias herramientas y recursos.

Ya finalizando este apartado, señalamos que los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria (en adelante E.S.O.) manejan las tecnologías de información y comunicación (en adelante TIC) habitualmente en sus momentos de ocio, siendo necesario incluirlas en las instituciones educativas, de manera que sean asistentes[1] al momento de aprender nuevos conceptos o destrezas que ellas originan.

[1] Dentro del Modelo 1 a 1 (una computadora por alumno) las herramientas son aquellas que se utilizan para realizar actividades primarias por ejemplo: un martillo permite clavar un clavo; los asistentes por su parte poseen varios propósitos: escribir, leer, estudiar, aprender, investigar, resolver problemas, publicar producciones, conectar ideas, etc.

1.2 Descripción y formulación del Problema

¿Cómo actúan los alumnos de 1º año "C" pertenecientes a la Escuela de Educación Secundaria N° 6 de la localidad de Belén de Escobar frente a la secuencia didáctica planteada y cómo se apropian del contenido abordado en ella: "Proporcionalidad áurea y número de oro"; utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra?

1.3 Justificación de la investigación

Se eligió el campo de la geometría para realizar la secuencia dado que este favorece el desarrollo de conjeturas, permite la modelización y la argumentación.

> La Geometría es la ciencia que nos facilita las herramientas básicas de representación del mundo que nos rodea, a la vez que nos proporciona un lenguaje que nos permite hacer las primeras descripciones de ese mundo en el que estamos inmersos.
>
> (Vílchez González, 2004, pág. 6).

Pero, a pesar de su importancia, "a menudo, los aprendizajes de Geometría se han basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas" (Abrate, Delgado y Pochulu, s.f, pág.1681). Podemos señalar además, que el trabajo geométrico ha ido paulatinamente perdiendo su espacio y sentido dentro de las aulas de las escuelas secundarias y aun en los centros de formación profesional por diversos motivos, a modo de ejemplo mencionamos (Itzcovich, 2011):

— La dificultad (por parte de los docentes) de hallar situaciones o problemas que representen verdaderos desafíos para sus alumnos

— Los contenidos que se especifican en los diseños curriculares predominan el vocabulario y definiciones, siendo pocas veces claro el sentido que adquieren los conocimientos geométricos en ellos

— El reconocimiento que poseen otras ramas de la matemática cómo aritmética o álgebra

Lo antes expuesto

> Priva a los alumnos de la posibilidad de conocer otro modo de pensar, se le quita la oportunidad de vivir la experiencia de involucrarse con otras formas de razonamiento, que son específicas de este dominio
>
> (Itzcovich, 2011, pág. 10)

El presente trabajo reconoce que la geometría es parte importante de la cultura del hombre, siendo sumamente difícil hallar contextos donde ella no surja de forma directa o indirecta, además es la encargada de generar habilidades básicas clasificadas en cinco áreas: visuales, verbales, de dibujo, lógica y de aplicación. Hoffer (1981, citado en Bressan, Bogisic y Grego, 2006). Al mismo tiempo, la utilización del software GeoGebra, permite una nueva mirada sobre los temas que serán abordados, debido a que favorece el desarrollo del trabajo matemático, aportando al mismo tiempo una rápida posibilidad de visualizar la unicidad, multiplicidad o nulidad de soluciones. A qué nos referimos en cada uno de estos casos:

- La unicidad de respuesta: existe una y solo una solución posible que satisface las condiciones planteadas en el problema.
- La multiplicidad de respuesta: existe más de una solución posible que satisface las condiciones planteadas en el problema, siendo todas y cada una de ellas válidas.
- La nulidad de respuesta: no existe ninguna solución posible que satisfaga las condiciones planteadas en el problema.

Como describen Ammann y González (2012) respecto a este tema, la utilización de un software nos abre las puertas a nuevas acciones, “el alumno no sólo es observador sino podrá explorar y conjeturar en un tiempo considerable menor a aquel utilizando en las construcciones en lápiz y papel” (pág. 20); además debemos aclarar que la utilización de un software de geometría dinámico[2] permite modificar los gráficos a través de movimientos de sus componentes, pero las propiedades geométricas que presenta permanecen invariantes.

El número de oro y la proporcionalidad áurea son temas que presentan una gran trascendencia en la historia de la humanidad y además, dada la gran variedad de lugares donde pueden ser hallados pueden ser aprovechados para “acercar las matemáticas a la sociedad” (uno de los grandes objetivos que se planteó el Año Mundial de las Matemáticas del año 2000), siendo precisamente ella la principal herramienta con la que han contado los seres humanos para entender el mundo que los rodea.

[2] Permiten básicamente el trabajo con regla y compás, haciendo construcciones geométricas a partir de relaciones y propiedades de diversos elementos. En las figuras realizadas podemos hallar elementos fijos o móviles según la construcción; permaneciendo invariantes sólo las relaciones que se incluyeron explícitamente.

Sorprende que un tema que posee tanta vigencia y presente tantos aspectos importantes, no sea abordado en la escuela secundaria. La secuencia planteada puede ser considerada una propuesta que permite a nuestros alumnos acercarse a un concepto sumamente antiguo, pero al mismo tiempo, tan vigente hoy en las dimensiones que poseen nuestros propios cuerpos humanos.

A lo largo de las actividades se han incluido diferentes tareas: construcciones, análisis de datos, producción y verificación de conjeturas, exploración, deducciones, producción de propiedades, entre otras, propiciando el intercambio de miradas y opiniones sobre cada una de ellas. Esto se debe a que consideramos que el trabajo de los docentes no se centra en presentar a los alumnos nombres, particularidades y propiedades que caracterizan los contenidos, sino que serán los propios alumnos quienes las descubran luego de atravesar la totalidad de las consignas propuestas.

1.4 Propósitos del trabajo de investigación

1.4.1 Propósitos referidos a las prácticas propias del trabajo de los alumnos

— Analicen, comparen, y debatan sobre distintas soluciones de un problema y elijan la mejor, fundamentado la elección

— Logren acuerdos con pares

— Justifiquen producciones mediante razonamientos deductivos

— Elaboren conjeturas como premisa para la construcción de razonamientos válidos

Propósitos referidos a los saberes matemáticos

- Experimenten, tanto individual como grupalmente, en el análisis de problemas mediante una modelización matemática
- Reconozcan situaciones en las cuales sea adecuado la aplicación de la proporcionalidad

1.5 Objetivos del trabajo de investigación

1.5.1 Objetivos Generales

- Elaborar una propuesta didáctica basada en el uso de plantillas desarrolladas con el software de geometría dinámica GeoGebra para analizar cómo actúan los alumnos frente a ella y como se apropian de propiedades y características relevantes en relación a los contenidos: “Proporcionalidad áurea y número de oro” los alumnos de 1º año “C” de la Escuela de Educación Secundaria N° 6 de la localidad de Belén de Escobar.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Producir una secuencia didáctica sobre la enseñanza de la proporcionalidad áurea, que permita que los alumnos visualicen tanto su importancia histórica como actual.
- Analizar cómo actúan los alumnos frente a la secuencia didáctica planteada y como se apropian del contenido abordado en ella.

1.6 Alcance

El siguiente trabajo se propone desarrollar una secuencia de actividades para la enseñanza de la Proporcionalidad Áurea, en secundaria básica, utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra.

La secuencia se implementó durante los meses de Noviembre y Diciembre del año 2014, siendo aplicada en el 1° “C” de la Escuela de Educación Secundaria N° 6 del partido de Belén de Escobar.

Acordamos con Segal y Giulliani (2011), sobre considerar al aprendizaje como un proceso activo, que además “supone un recorrido no lineal, que requiere de constantes “idas y vueltas”, de la aceptación de conocimientos provisorios, y forma parte de un proyecto de enseñanza que ofrece a los alumnos la experiencia de producir y reinventar conocimiento matemático” (Segal & Giuliani, 2011, pág. 121). Finalizando que, “La actividad matemática no es mirar y descubrir: es crear, producir, fabricar” (Itzcovich, Ressia de Moreno, Novembre y Bererril, 2007, pág. 23)

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Investigaciones y propuestas de enseñanza sobre el número de oro

A continuación se citan diversas investigaciones y artículos relacionados con los contenidos abordados en la secuencia didáctica:

Muñoz y Morales (2005) en la revista Innovaciones Educativas presentan un artículo titulado: “El número Áureo en el siglo XXI. ¿Cómo representar a Fi (ϕ) con la ayuda de $Voyage^{TM}$ 200?.
Las autoras destacan la utilización de la tecnología (en este caso una calculadora digital) para ayudar a visualizar desde un aspecto geométrico la división de un segmento en proporción áurea y a partir de él una representación que se logra dar al número de oro. Acentúan la importancia de trabajar desde diversos marcos (geométrico, analítico, gráfico, numérico) porque al momento de resolver un problema esto genera que los alumnos le otorguen mayor significado a lo aprendido.
El artículo describe cómo, durante la resolución de los problemas planteados, utilizando una metodología activa, donde el uso de tecnología resulta un medio motivador, se generaron debates, permitiendo que los alumnos otorguen mayor significación al concepto estudiado, pudiendo avanzar a su ritmo, logrando comprender el concepto de manera más profunda.

El Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2007) plantea en su cuaderno de “Apoyo al último año de secundaria para la articulación con el Nivel Superior” una serie de actividades, dentro de las cuales se hace referencia específicamente a la Razón Áurea (Capítulo 2: Construir con distintas proporciones) se observan las características comunes que presentan la arquitectura, escultura y pintura, se analizan las dimensiones que conforman las construcciones, las proporciones que poseen y al mismo tiempo se realiza un desarrollo histórico del concepto.

Luego, en el capítulo 3: Dibujar guardando proporciones (del material antes citado) se explica cómo se generan las espirales (la de dos centros y la de Durero) y su aplicación directa en la construcción de los espaldares de las reinas y bastoneras de las comparsas.

Se hace referencia este trabajo porque pone en evidencia la importancia que presenta el contenido en los estudios superiores y al mismo tiempo, la necesidad de acercarlo a nuestros alumnos mediante objetos relacionados con la vida cotidiana.

Condesse y Minnaard (2007) en su investigación: "La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro", acercan a los alumnos de distintos niveles de enseñanza un concepto tan antiguo que se encuentra presente en las construcciones romanas, pero al mismo tiempo tan actual que los más recientes trabajos relacionados con la teoría del Caos están vinculados con él. A pesar que se centra en el Número de Oro también son mencionados y caracterizados los demás números metálicos: Plata, Bronce y Níquel.

La investigación, además, propone un acercamiento desde los más variados caminos: conceptos algebraicos y geométricos, cálculo combinatorio y análisis de funciones.

Federico, Díaz y Arias (2008). Publican: "Enseñanza Interdisciplinaria: Geometría y Arte. El ejemplo de la Vesica Piscis" el cual es una extensión del Proyecto de Investigación: "Teoría de la proporción y su enseñanza: morfogeneradores geométricos en el diseño" realizado por la Facultad de Humanidad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de la Plata.

Los autores plantean la necesidad de generar proyectos interdisciplinarios que incluyan Geometría y Arte. Generando que los conocimientos teóricos y prácticos sean integrados en ambas disciplinas. Desde el aspecto didáctico, plantean la necesidad de resolver problemas apropiándose del modo de hacer y de esa manera otorgar sentido al conocimiento matemático, y no la mera secuencia de pasos.

A modo de conclusión los autores plantean:

> Es absolutamente necesaria una vuelta al espíritu geométrico en la educación matemática. . .Debido principalmente a su papel formativo… La Geometría desarrolla las capacidades de razonamiento abstracto, de enfrentarse y resolver problemas del mundo artístico, de modelizar situaciones, etc."
>
> (Federico, Díaz y Arias, 2008, pág. 9)

García López (2011) en su tesis doctoral titulada: "Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula", centró su investigación en explorar si es satisfactoria la incorporación del software Geogebra al desarrollo de la clase. Trata de comprender cuáles son las ventajas que los estudiantes y docentes pueden obtener tanto a nivel actitudinal como cognitivo.

La conclusión a la que arriba la autora es que los estudiantes manifestaron actitudes muy positivas hacia el uso del software; considera que provocó un mayor gusto, motivación y confianza hacia la capacidad que ellos poseían en resolver problemas relacionados con matemática.

2.2. Análisis Epistemológico. Historicidad del contenido matemático.

La proporción es una relación matemática que vincula las partes entre si y las partes con el todo. Es un concepto sumamente remoto, su aplicación puede ser comprobada en obras de diversa época, por ejemplo: egipcias, griegas, góticas, renacentistas, o en manifestaciones artísticas modernas tales como el cubismo.

Tiene un fundamento matemático. Euclides (325 aC. - 265 aC.) establece en el Libro V de su obra "Elementos" el concepto de proporción geométrica, cuya definición más difundida es precisamente la sexta del mencionado libro:

> "Llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón"

La aceptación que presenta es rotunda, pero a pesar de ello, es necesario aclarar que existe una definición mucho más comprensible que la anteriormente citada, cuyo autor es Aristóteles:

> La proporción es, pues, la igualdad de las relaciones entre términos en número de cuatro por lo menos… Los matemáticos la denominan proporción geométrica, porque en esta proporción la relación entre los totales es como la relación entre cada uno de los términos.
>
> (Aristóteles, 2010, pág. 133)

En los libros modernos se sigue utilizando la notación y clasificación implementada por Aristóteles. Así a : b :: c : d es una proporción.

Existen diversos procedimientos geométricos que permiten dividir un segmento cumpliendo las condiciones citadas; pero a partir de todos ellos, solamente encontraremos un valor numérico correspondiente a la razón $\frac{a}{b}$.

Para realizar el análisis, partiremos de la igualdad: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

Se dividen por **b** los dos términos del segundo miembro de la igualdad

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{b}}{\frac{a}{b}}$ aplicando la propiedad cancelativa obtenemos $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}}$

Planteando que $\frac{a}{b} = x$ obtenemos una nueva igualdad (equivalente a la primera) $x = \frac{x+1}{x}$

Para resolverla ecuación debemos recordar que el producto de los medios es igual al producto de los extremos $x \,.\, x = x + 1$ aplicando propiedad distributiva y despejando obtenemos $x^2 - x - 1 = 0$ la cual es una ecuación de segundo grado la cual posee dos resultados

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ es decir

Una raíz negativa $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ Este valor corresponde a caso en el cual C posee una posición exterior al segmento AB; es por ese motivo que el mismo será descartado.

Una raíz positiva $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887498948482045868343656. . .

El resultado de esta proporción, da origen al que posteriormente se llamará número de oro. El símbolo que se le asignó a principios del siglo XX es la letra griega phi ϕ, la cual fue propuesta por el matemático norteamericano Mark Barr debido a que vinculó al número con Fidias (constructor del Partenón de Atenas, él cual es uno de los ejemplos más claros de la aplicación de la geometría en la arquitectura de la antigua Grecia) ya que ésta es la prime letra de su nombre escrito en griego (*Φειδίας*). Es sorprendente saber que estas cifras han fascinado a muchas más mentes brillantes a lo largo de toda la historia que los mismos π y e; es por ellos que ha recibido a lo largo de los siglos diferentes denominaciones: número de oro, proporción trascendente, número divino, divina proporción.

En este breve recorrido mencionamos las palabras de Platón:

> No es posible unir bien dos elementos aislados sin un tercer, ya que es necesario un vínculo en el medio que los una. El vínculo más bello es aquel que puede lograr que él mismo y los elementos por él vinculados alcancen el mayor grado de unidad. La proporción es la que por naturaleza realiza esto del modo más perfecto. (Platón, Diálogos, 2004, pág. 49)

Él, no ha sido el único que fue cautivado por la belleza y propiedades de las proporciones, Lucas Pacioli sentenciaba “Quién de Vitruvio se aparta, cava en el agua y cimienta en la arena y muy pronto malogra el arte” (Pacioli, La Divina Proporción , 1991, pág. 25) recomendando a los arquitectos de su época que estudien y analicen las obras de Vitrubio dada la belleza y armonía que presentaban. Sus aportes en relación a los temas que estamos desarrollando, son variados, destacándose la división del espacio dentro de un dibujo, conocido como: sección áurea.

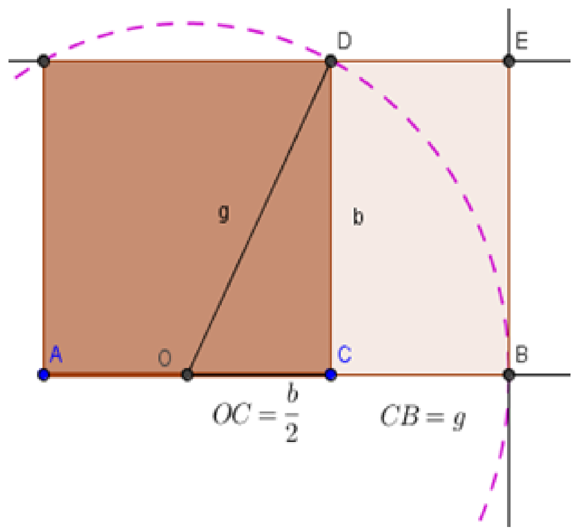
Para construirlo biseca un cuadro y usando la diagonal de una de sus mitades como radio para ampliar las dimensiones del cuadrado hasta convertirlo en "rectángulo áureo", en la construcción se basa en una proporción dada entre los lados más largos y los más cortos de un rectángulo.

Analicemos la validez del procedimiento

$$g = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} = b\,\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AB = \frac{b}{2} + g$$

$$AB = \frac{b}{2} + b\,\frac{\sqrt{5}}{2} = b\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



En consecuencia:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

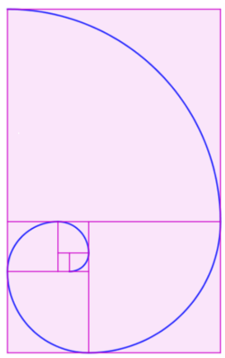
Queda demostrado por este desarrollo que construimos un rectángulo es áureo

Es interesante resaltar que si mencionamos el rectángulo áureo, debemos incluir en la explicación a la llamada “Espiral de Durero”, la cual se obtiene a partir de una sucesión de rectángulos y triángulos áureos.

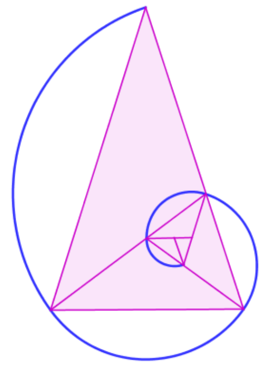
Su autor es quien le da nombre: Alberto Durero (1471 – 1528), el cual la publica en 1525 (tres años antes de su muerte) en su obra: “Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas”. Pretende enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar diferentes figuras geométricas.

Espiral de Durero a partir de

Rectángulos Áureos



Triángulos Áureos



Esta curva sumamente esbelta y elegante, además de ser una curiosidad matemática está presente en nuestro entorno: galaxias, huracanes, en el crecimiento de algunas flores o plantas.

Luca Paccioli Di Borgo (1445 – 1508), termina de escribir "La divina Proporción" el catorce de Diciembre de 1498. A partir de él, el autor resalta la importancia de la matemática para todas las ciencias, y al mismo tiempo plantea que la teoría de las proporciones rige todo el universo, ya que sin este concepto muchas otras cosas simplemente no existirían (música, pintura, escultura, arquitectura, etc.). Sostiene principalmente que "el saber tuvo su origen en la vista" (Paccioli, 2013, pág. 62) y que ella es precisamente la puerta por la cual se comprende la belleza.

En los capítulos del V al XXIII considera la división de un segmento en lo que actualmente llamamos sección áurea, Pacioli la llama: Divina Proporción, esto se debe a sus propiedades:

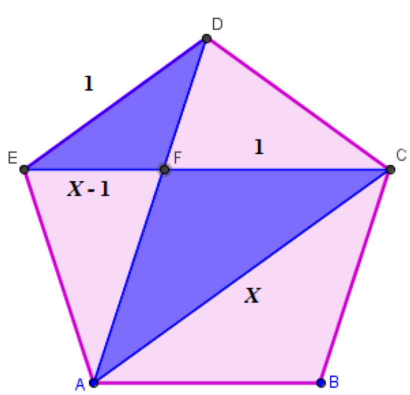
“…por muchas correspondencias que encuentro en nuestra proporción y que en nuestro discurso entendemos que corresponden, por semejanza, a Dios mismo” (Pacioli, 2013, pág. 69), enumera además solo las primeras trece propiedades “en honor del cuerpo de doce y de su santísimo jefe, Nuestro Redentor Jesucristo (Pacioli, 2013, pág. 84), todo lo antes mencionado cobra sentido al recordar que era un fraile perteneciente a la congregación franciscana.

Además de mencionar las características y propiedades referidas a la proporción áurea, analiza cuidadosamente su presencia en el pentágono regular; la cual puede ser hallada a partir de calcular el cociente entre la diagonal y el lado de la figura antes mencionada.

Analicemos lo expresado en el párrafo anterior

Partiremos de un pentágono regular cuyas medidas serán una unidad para la longitud de sus lados y X la correspondiente a la diagonal.

Los triángulos marcados en color azul son isósceles homotéticos, en consecuencia podemos escribir la siguiente proporción



$$\frac{ED}{AC} = \frac{EF}{FC}$$

Reemplazando las respectivas medidas obtenemos

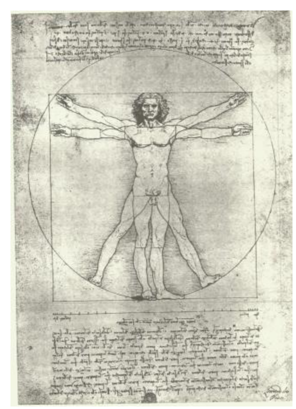
$$\frac{1}{X} = \frac{X-1}{1}$$

Luego de realizar las operaciones y despejes necesarios obtenemos $x^2 - x - 1 = 0$ en conclusión $x = \phi$

Quedando verificada de esta manera que la relación presente en el cociente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es precisamente la proporcionalidad áurea.

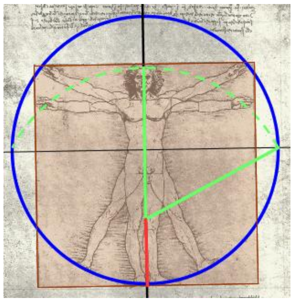
Continuando con el libro, Pacioli analiza las medidas y proporciones que debe poseer el cuerpo humano, dando origen al llamado Hombre de Vitruvio (bautizado de esta manera en honor al arquitecto de apellido homónimo). El dibujo que se encuentra en el libro original fue plasmado por Leonardo Da Vinci. (Pacioli, La Divina Proporción, 2013, pág. 154)

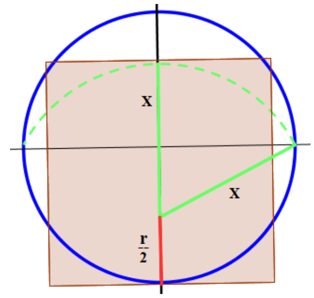
Fue realizado en tinta en el año 1492. Está acompañado de notas anatómicas, las cuales indican las proporciones correctas que debería presentar una figura humana correcta y totalmente desarrollada (los niños y adolescentes presentan otras proporciones entre sus miembros).



Como puede observarse presenta un cuerpo masculino desnudo en dos posiciones sobreimpresas (brazos y piernas) inscripta en un cuadrado (centrado en los genitales) y un círculo (centrado en el ombligo). Precisamente el cociente entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la proporción áurea.

Con ayuda del software GeoGebra verificaremos lo antes mencionado, para ello consideramos que el lado del cuadrado es de una unidad.





$$x^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{5}{4} r^2$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5}}{2}\, r}$$

$$1 = \frac{\sqrt{5}}{2} r + \frac{r}{2}$$

$$1 = \frac{\sqrt{5}\, r + r}{2}$$

$$1 = r\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

Queda demostrado que el cociente entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es precisamente el número de oro.

Finalizando el análisis del libro podemos mencionar que todo lo expresado a lo largo de sus páginas puede resumirse en la siguiente frase

> La PROPORCIÓN MATEMATICA, principio universal y objetivo de belleza, debe convertirse en punto de referencia obligado para todo el arte (Pacioli, La Divina Proporción , 1991, pág. 25)

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), pintor, escultor, arquitecto, ingeniero, inventor, escritor. Por su parta, la llama por primera vez "Proporción Áurea" (nombre adoptado luego universalmente). En su "Tratado de Pintura" afirma:

> *Nuestra alma está hecha de armonía y la armonía no se engendra, sino que surge espontáneamente de la proporción de los objetos que la hacen visible. La gracia de las proporciones está encerrada en normas armónicas. Hace falta usar estas reglas, para corregir los errores de las primeras líneas de la composición. El pintor inventa la forma y la materia de las cosas que va a representar, luego mide, organiza y proporciona.*
>
> (De Vinci, 1827)

Luego de tantos estudios y publicaciones la tan estudiada y admirada proporción cae en el olvido durante un largo período. Hasta que es redescubierta en 1850 por Adolf Zeising (1810 -1876) psicólogo alemán interesado en la matemática. Realizó numerosas mediciones en diversos cuerpos humanos tanto masculinos como femeninos sanos y totalmente desarrollados retomando la idea de las proporciones que planteo en su momento Da Vinci, buscando en ellos una ley estadística que rigiera sus dimensiones. Encontró que la razón media correspondiente al cociente entre la altura total del cuerpo y la distancia desde el suelo hasta el ombligo es precisamente 1,625 (para el cuerpo masculino) y 1,6 (para el cuerpo femenino); pero no se detuvo solo en eso, ya que realiza el mismo procedimiento en niños desde el momento en que nacen hasta tener la edad de 21 años. (Ghyka, 1953). Da Vinci también estudió diversas expresiones artísticas como templos y esculturas griegas, extendiendo el análisis a la botánica y zoología, identificando la presencia de la proporción áurea en el esqueleto y forma de los animales (incluyendo insectos), disposición de las ramas y crecimiento de las hojas.

Se puede afirmar luego de analizar sus estudios que la proporcionalidad aurea actúa como una Ley Universal, la cual rige la belleza de los objetos y animales que nos rodean.

Finalmente, para su enseñanza, es un contenido que puede ser abordado desde diversos marcos (algebraico, geométrico y aritmético) y, ofrece una gama de posibilidades al generar una articulación del currículo escolar con la vida. Esto es posible afirmarlo a la vista de lo que los diseños curriculares vigentes desarrollados por el Ministerio de Educación de la Nación para todos los años de la E.S.O. y su relevancia en estudios superiores.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 Teoría de las Situaciones Didácticas

El proceso de construcción de conocimientos matemáticos necesita tomar posiciones. Sin duda, producir conocimientos es un acto complejo, siendo la teoría de didáctica la encargada de brindar herramientas que enriquezcan la perspectiva de la enseñanza.

Es necesario destacar que: “Una teoría es un recorte, un modelo que intencionalmente selecciona algunos de los aspectos del proceso que se quiere estudiar” (Alagia, Bressan y Sadovsky, 2006, pág. 16). Debemos tener presente que nos ofrece herramientas que nos permiten reflexionar sobre nuestro trabajo diario, profundizando nuestra comprensión sobre los hechos que se dan a lo largo de la clase; no provee reglas, normas ni prescripciones estipuladas con anterioridad.

Actualmente, la Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau, es una de las corrientes más relevantes relacionadas con la Didáctica de la Matemática. Se centra en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar “. . . la clase es concebida como una comunidad matemática de producción de conocimientos en la que el docente es a la vez miembro de dicha comunidad y representante del saber erudito” (Alagia, Bressan y Sadovsky, 2006, pág. 18)

Fue desarrollada en Francia, siendo actualmente una de las líneas con mayor difusión en el ámbito educativo.

Este modelo parte de dos interacciones básicas a partir de las cuales se genera el proceso de producción de conocimiento:

- La interacción que se genera entre el alumno y la problemática que ofrece resistencia y retroalimentación
- La interacción docente - alumno en relación al ítem antes mencionado

Al comienzo del apartado indicábamos que es necesario tomar posiciones frente al proceso de construcción de conocimientos matemáticos, nosotros a lo largo de este trabajo adoptaremos la postura de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Debido a que ella describe las interacciones que se producen en una clase como un entramado de producción de conocimientos matemático. En este punto, acordamos con Patricia Sadovsky (2006) cuando afirma no es ideológicamente neutra y, además

> Toma posición frente de la necesidad de formar jóvenes con autonomía intelectual y con capacidad crítica. Al ubicar del lado de la escuela la responsabilidad de lograr que los alumnos se posicionen como sujetos teóricos, como sujetos productores, dejando sentado que todos los alumnos tienen derecho a construir y ejercer el poder que otorga el conocimiento.
> (Sadovsky, 2006, pág. 65).

3.2 Metodología y Tipo de Investigación

La Metodología que se implementará en el desarrollo de la investigación es una Ingeniería Didáctica, que fue desarrollada por Michèle Artigue a principio de los años 80 buscando respuesta básicamente a dos cuestiones:

- Cómo atender a la complejidad de la clase
- Estudiar la relación entre la investigación y la acción sobre el sistema de enseñanza

Artigue (1995) manifiesta sobre esta metodología que

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico.
>
> (Artigue, 1995, pág. 33)

Y su importancia se debe a que

> La ingeniería didáctica logró que el investigador se sumergiera en el seno de la complejidad del sistema que estudiaba.
>
> (Artigue, 1995, pág. 49)

Por su parte Régine Douday (1995), otra referente en el tema sostiene que:

> La elaboración de un problema es un paso de la ingeniería didáctica. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase, concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor – ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos.
>
> (…) es a la vez un **producto**, resultante de un análisis a priori y un **proceso** en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase
>
> (…) designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase” (pág. 61- 62).

Las Ingenierías Didácticas que se utilizan como instrumento de investigación se caracterizan en su mayoría por

> … la búsqueda de situaciones específicas de los conocimientos matemáticos que constituyan situaciones fundamentales (en el sentido de la Teoría de las Situaciones) y la organización del trabajo docente en lo referido a la devolución y a la institucionalización, apuntando al sentido del trabajo matemático y a la relación entre los conocimientos construidos en un contexto...
> (Carnelli y Marino, 2012, pág. 41)

En el párrafo anterior, queda en evidencia la estrecha vinculación existente entre la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica, debido a que precisamente esta última, surge como metodología específica tanto para la enseñanza como para la investigación didáctica. En propias palabras de Artigue (1995)

> La teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.
> (Artigue, 1995, pág. 44)

Teniendo en cuenta los antes expresado, la investigación, será de tipo cualitativa, debido a que las conclusiones que se obtendrán no podrán ser relacionados con valores numéricos de manera directa, muy por el contrario, los datos recolectados serán interpretados de manera dinámica ya que el objetivo es entender las variables que intervienen en el proceso en lugar de medirlas o acotarlas a un mero valor numérico. Esto cobra sentido al tener en cuenta que el objetivo general propuesto para el presente trabajo es: analizar cómo actúan los alumnos frente a la secuencia de actividades planteadas y como se apropian de propiedades y características relevantes en relación a los contenidos: “Proporcionalidad áurea y número de oro”.

Todo el trabajo de construcción, análisis y conjetura (análisis a priori) se basa en principios didácticos y es precisamente durante la implementación de la secuencia que se intentará observar la totalidad de los hechos sin reducirlos a sus partes integrantes, realizando un estudio de caso. Para esto, se desarrollarán preguntas antes, durante y después del proceso. Cabe destacar que las actividades seleccionadas, están organizadas entorno a problemas donde

> El sujeto entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos.
> (Sadovsky, 2005, pág. 18)

En todo momento se buscará que los estudiantes puedan apropiarse del conocimiento con la ayuda del docente, quién en ese momento será un guía. Por este motivo, la secuencia didáctica

> Concede un lugar importante a los procesos de contextualización, cambios de contexto, reformulación de problemas, descontextualización y también a la personalización, difusión de procedimientos o conocimientos personales y despersonalización.
> (Artigue, 1995, 93)

Todos los aspectos antes mencionados, permitirán que los alumnos se apropien de los contenidos abordados, pero cabe destacar que posterior a la implementación, el docente deberá institucionalizarlos.

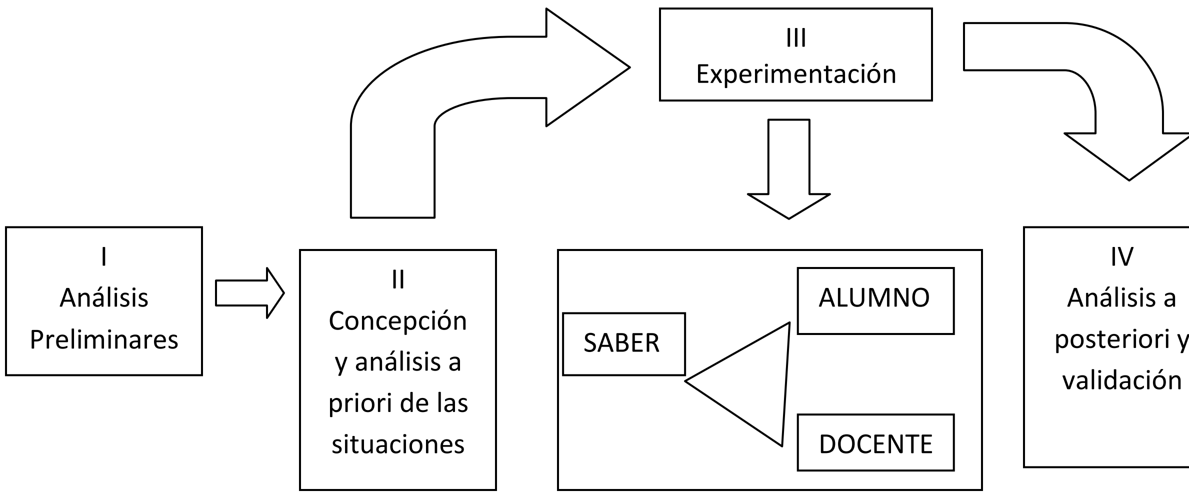
Destacamos que la validación de la ingeniería didáctica es interna “basada en la confrontación del análisis a priori y a posteriori” (Artigue, 1995, pág. 37). En consecuencia se compararán los resultados esperados con los obtenidos, posterior a ello se analiza si fue posible alcanzar o no los objetivos propuestos.

Para recabar información se utilizarán distintos medios:

- Fotocopias con las respuestas obtenidas por parte de los alumnos
- Respuestas brindadas en la puesta en común
- Dificultades y errores que se presenten
- Confección de las diapositivas correspondientes a la actividad final

3.3 Fases de la Ingeniería Didáctica

Posee cuatro fases totalmente diferenciables entre sí; ellas pueden ser resumidas en el siguiente esquema:



(Carnelli y Marino, 2012, pág. 41)

Como puede observarse en el gráfico, se basa en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, siendo el rasgo esencial que distingue esta metodología de investigación del resto. Su validación surge de la comparación entre el análisis a priori y a posteriori es interna, debido a que considera que las externas a la clase son insuficientes para atrapar la complejidad del sistema estudiado.

Como mencionábamos al principio de este apartado, cuenta con cuatro fases fuertemente marcadas y a continuación, se indican las características más importantes que presenta cada una.

3.3.1 Fase 1: Análisis preliminar

Se caracteriza por poseer un determinado número de análisis previos regidos por los objetivos que posee la investigación a realizar y por el marco teórico a utilizar.

Los más frecuentes son:

- Análisis epistemológico de los contenidos contemplados. Provee la historicidad del concepto matemático que se desea enseñar, permitiendo comprender los patrones que permitieron su evolución.
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes y de las dificultades u obstáculos que determinan su evolución.
- Análisis del campo de restricciones donde se van a efectuar la realización didáctica.

3.3.2 Fase 2: Concepción y análisis a priori de las situaciones

Se incluyen la elección y actuación sobre las variables de comandos que el investigador considera pertinentes.

Artigue considera dos tipos de variables de comando:

— Variables macro-didácticas o globales (organización global)

— Variables micro-didácticas o locales (organización de una actividad)

El análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en una situación a-didáctica que se ha diseñado y que posteriormente se propone a los alumnos. Artigue argumenta que esto se debe principalmente a que es necesario:

- Describir las selecciones a nivel local (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que se desprenden de ellas
- Analizar que está en juego en cuanto a la acción, selección, decisión, control y validación para el alumno cuando se enfrente con la situación
- Prever los comportamientos posibles

Destacamos que este análisis se basa en hipótesis, ya que se busca determinar en qué condiciones las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los alumnos y su significado.

Por lo antes expuesto, concluimos que el alumno se convierte en el actor principal de este análisis, teniendo un doble papel (descriptivo y predicativo); mientras que el profesor solo lo hace en un nivel descriptivo, excepto durante la situación de devolución e institucionalización.

Todas las actividades planteadas, serán desarrolladas utilizando como herramienta informática el software GeoGebra, ya que éste permite una forma de analizar los problemas desde diversos aspectos íntegramente relacionados: simbólico, algebraico y geométrico.

Debemos señalar que estudiar figuras planas es uno de los objetivos centrales de la geometría tanto en la Educación Primaria como la Secundaria. A medida que los alumnos avanzan en sus años de escolaridad, sus formas de analizar las situaciones que le son planteadas evolucionan, incluidas las concepciones que poseen de los objetos geométricos y sus propiedades, pero este proceso no precisamente resulta de manera espontánea, ya que para que esto suceda es necesario resolver diferentes tipos de problemas como son las construcciones (tanto en entornos virtuales como en lápiz y papel) que tienen un valor prioritario.

Como describen Ammann y González respecto a este tema, la utilización de un software nos abre las puertas a nuevas acciones, "el alumno no sólo es observador sino podrá explorar y conjeturar en un tiempo considerable menor a aquel utilizado en las construcciones en lápiz y papel" (Ammann y González, 2012, pág. 20)

Lo antes expuesto fue tenido en cuenta al momento de confeccionar la secuencia de actividades; ya que cada una permitirá a los alumnos reflexionar, experimentar y al mismo tiempo conjeturar posibles respuestas.

Metodología del trabajo en el aula: Cada alumno contará con su propia computadora y hoja de consignas. A pesar de ello, se ubicarán en grupos de cuatro integrantes. Se los alentará para que entre todos busquen la respuesta que consideren más adecuada, fomentando en todo tiempo el intercambio de ideas a través del diálogo entre los integrantes del propio grupo, recordando que los conocimientos son un bien común que solamente pueden construir trabajando juntos. Se aspira a un trabajo colaborativo:

> . . . actividad sostenida por un grupo de personas que realizan diferentes tareas con un objetivo común que depende de la acción de todas ellas. Cada uno es responsable por el grupo y el objetivo se logra a partir de la interacción grupal […] y da como resultado el desarrollo de habilidades mixtas, tanto de aprendizaje como de desarrollo personal y social.
>
> (Sagol, 2011, pág. 26).

Tiempo: Cada clase tendrá una duración aproximada de dos a tres horas, desarrollando un total de cuatro, incluida la actividad final de cierre.

Comunicación de las producciones: Los alumnos utilizarán tres modalidades diferentes:

- Puesta en común: Cada grupo expone las conclusiones obtenidas a través del trabajo grupal. Durante la exposición, los demás pueden realizar observaciones, preguntas o cuestionamientos.

  Como consigna general se plantea: No repetir conclusiones ya esbozadas por los grupos anteriores.
- Síntesis: El docente dirige una discusión tendiente a recoger la información obtenida a partir de las conclusiones planteadas por todos los grupos.
- Conclusiones parciales: El docente ejerce el rol de coordinador, promoviendo la participación de todos, creando un clima de discusión e intercambio de ideas y opiniones; cuidándose de no expedirse acerca de la corrección de los resultados expuestos.

Estructura de la secuencia de enseñanza: Las consignas entregadas serás las correspondientes a la clase en curso. El fin de esto, es evitar que la lectura de una consigna posterior induzca la resolución de una anterior. Todos los grupos estarán trabajando al mismo tiempo las mismas consignas, se tratará que todos los grupos hayan realizado las actividades previstas para que estén presentes todas las producciones realizadas al momento posterior de la puesta en común.

Rol del docente: Las consultas particulares serán devueltas al grupo para su discusión posterior. No intervendrá en las discusiones dando o validando resultados, sino que actuará propiciando el debate interno.

Propósitos para el trabajo de los alumnos a lo largo de la implementación de la secuencia

Referidos a las propias prácticas

- Analicen, comparen, y debatan sobre distintas soluciones de un problema y elijan la mejor, fundamentado la elección
- Logren acuerdos con pares
- Justifiquen producciones mediante razonamientos deductivos
- Elaboren conjeturas como premisa para la construcción de razonamientos válidos

Referidos a los saberes matemáticos

- Experimenten, tanto individual como grupalmente, en el análisis de problemas mediante una modelización matemática
- Reconozcan situaciones en las cuales sea adecuado la aplicación de la proporcionalidad

(Las variables micro didácticas relacionadas con la organización de cada una de las actividades propuestas podrá hallarse en el próximo capítulo. Cuando realicemos el análisis a priori respectivo).

3.3.3 Fase 3: Experimentación

Es el momento en que se implementa en el aula las secuencias diseñadas.

Comienza en el preciso momento en que el investigador (docente u observador) toma contacto con la población que será objeto de la investigación y supone:

- La explicitación a los alumnos de los objetivos y condiciones en las cuales se llevara a cabo la investigación
- El establecimiento del contrato didáctico
- La aplicación de los instrumentos de investigación
- El registro de las observaciones realizadas durante la implementación de la secuencia

3.3.4 Fase 4: Análisis a posterior y validación

Se basa en el análisis del conjunto de datos obtenidos a lo largo de la implementación de la secuencia (observaciones, producciones realizadas por los alumnos); estos datos, se complementan con los obtenidos a partir de metodologías externas (cuestionarios, entrevistas, filmaciones, etc.). La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamentan a partir de la confrontación de los análisis a-priori y a-posteriori, desplegándose en este punto toda la dimensión el carácter interno de validación propio de la metodología.

(El análisis a posteriori se desarrolla en el capítulo 5).

3.4 Población y contexto

La secuencia didáctica se implementó en una Escuela de Educación Secundaria de la localidad de Belén de Escobar (Provincia de Buenos Aires).

El curso seleccionado cuenta con un total de 35 alumnos que poseen una edad entre 12-14 años respectivamente. Fue seleccionado ya que consideramos que poseen las habilidades y curiosidades necesarias para llevar a cabo la secuencia de actividades seleccionadas, cada uno de ellos cuenta con una computadora del programa “Conectar Igualdad”.

Es importante destacar que los alumnos tienen un manejo previo del software GeoGebra. En clases anteriores se realizaron: construcciones, mediciones y reproducción de figuras según propiedades, teniendo en cuenta las posibles herramientas que serían utilizadas en la implementación de esta secuencia y, de este modo, minimizar las dificultades relacionadas con el uso del software que pudieran surgir.

3. 5 Instrumentos y técnicas para la recolección de datos

La secuencia posee una totalidad de nueve actividades, divididas en cuatro encuentros de una duración de dos a tres horas cada una aproximadamente.

Se implementará en una modalidad taller, en el propio salón de clases. Las mesas y sillas se encontrarán ubicadas en grupos, los propios alumnos podrán elegir con quien desean conformarlo.

Siguiendo con el modelo 1 a 1, cada alumno contará con su respectiva computadora, con los programas GeoGebra y Screen Recorder pero esto no impedirá que las respuestas que obtengan se comparen, debatan y discutan.

El programa GeoGebra es el software seleccionado para realizar casi la totalidad de las plantillas confeccionadas para el desarrollo de las secuencias debido a las herramientas que posee y la facilidad de su uso.

Por su parte el Screen Recorder permite grabar las pantallas y audio de los alumnos en el mismo momento en que ellos resuelven las actividades, lo que permitirá escuchar sus comentarios, dificultades y errores para su posterior análisis.

Además de recuperar los archivos que los alumnos creen utilizando los medios antes mencionados, se filmará la totalidad de la clase y se tomaran fotos.

Al momento de la resolución de las consignas todos los integrantes deberán escribir su respuesta en la fotocopia entregada para tal fin. La misma cuenta con las consignas correspondientes a las actividades del día en curso, esto se consideró para que la lectura de una consigna posterior no influyera en la respuesta que se estaba buscando.

Los instrumentos que se utilizarán son:

- Computadora (una por alumno)
- Programas GeoGebra y Screen Recorder (incluidos en las computadoras)
- Fotocopia (con las consignas que debe desarrollar)
- Filmadora
- Cámara fotográfica
- Cinta métrica
- Proyector
- Plantillas creadas en GeoGebra con las actividades propuestas
- Piso tecnológico del establecimiento educativo

3. 6 Técnica para el análisis de datos

Los datos recolectados serán interpretados de manera dinámica ya que el objetivo es entender las variables que intervienen en el proceso en lugar de medirlas o acotarlas a un mero valor numérico. Esto cobra sentido al tener en cuenta que el objetivo general propuesto para el presente trabajo es: analizar cómo actúan los alumnos frente a la secuencia de actividades planteadas y como se apropian de propiedades y características relevantes en relación a los contenidos abordados en ella.

El docente - investigador realizará una observación directa del trabajo desarrollado por los alumnos. Se intentará observar la totalidad de los hechos sin reducirlos a sus partes integrantes. Para esto, se desarrollarán preguntas antes, durante y después del proceso.

El investigador será el encargado de describir la globalidad de las situaciones que surjan. Al mismo tiempo se encontrará atento para subsanar las dificultades técnicas o conceptuales que surjan.

CAPÍTULO 4

SECUENCIA DE ACTIVIDADES
Y ANÁLISIS A PRIORI

4.1 Secuencia Completa

Esta secuencia seleccionada cuenta con una totalidad de nueve actividades que se desarrollarán dentro de la modalidad de taller, en el propio salón de los alumnos.

Cada clase tendrá una duración aproximada de tres horas cada una, siendo en total cuatro.

Los alumnos se encuentran sentados en forma grupal (de a cuatro integrantes) y siguiendo con el Modelo 1 a 1, cada uno de ellos posee su propia computadora.

Al momento de la resolución de las consignas todos los integrantes deberán escribir su respuesta en la fotocopia entregada para tal fin. La misma cuenta con las consignas correspondientes a las actividades del día en curso, esto se consideró para que la lectura de una consigna posterior no influyera en la respuesta que se estaba buscando.

Los grupos estarán trabajando al mismo tiempo las mismas consignas, se tratará que todos los grupos hayan realizado las actividades previstas para que estén presentes todas las producciones realizadas al momento posterior de la puesta en común.

CLASE N° 1

Actividad N° 1 Abre el archivo “Imágenes”[3]

a) ¿Puedes identificar algún objeto? Selecciona una foto e insértala en una hoja de trabajo.
b) Toma las dimensiones del objeto
c) Realiza la división entre dichas medidas (toma la medida mayor como dividendo)
d) ¿Cuál es el valor aproximado que has obtenido?
e) ¿Entre qué valores podrías decir que se encuentran todos los cocientes hallados?

Actividad N° 2[4]

a) Realicen las siguientes mediciones en todos los integrantes:
   - Altura de cada integrante. (h)
   - Distancia entre los pies y el ombligo. (n)
   - Distancia entre la cima del cráneo y el ombligo. (m)
b) Con los datos anteriores completen la tabla que se presenta a continuación
c) Analicen los valores obtenidos.

Nombre	H	N	m	h/n	h/m
1°					
2°					
3°					
4°					

Actividad N° 3[5] Previamente has tomado fotos en tu casa, de camino a la escuela, en el kiosco, etcétera

a) Selecciona una foto e insértala en una hoja de trabajo.
b) Toma las dimensiones que posee ese objeto insertado.
c) Realiza la división entre dichas medidas (toma la medida mayor como dividendo)
d) ¿Cuál es el valor aproximado que has obtenido?
e) ¿Entre qué valores podrías decir que se encuentran todos los cocientes hallados?
f) ¿Puedes hallar alguna coincidencia con los valores obtenidos en la actividad N° 1?

---

[3] El archivo imágenes, posee fotos de objetos de la vida cotidiana: foto 1 “Caja de cigarrillos”, foto 2 “Caja de ajedrez”, foto 3 “Logo del National Geographic”, foto 4 “Cajita de mentitas” y foto 5 “Cajita de tic tac”

[4] Para resolver esta consigna los alumnos contarán con cintra métrica y calculadora

[5] Esta consigna fue trabajada con anterioridad a la implementación de la secuencia.
Los alumnos debían tomar fotos con sus celulares, cámaras digitales o netbooks a diferentes objetos que posean forma rectangular. La única condición que se agregó, a la de su forma, es que el objeto debía estar completo en la imagen.
Primeramente se recorrieron los pasillos, biblioteca, patio y kiosco de la escuela en busca de objetos que cumplan la condición. Posterior a dicha clase recorrieron el barrio tomando fotos a: carteles, ventanas, cajas, puertas, y demás objetos que cumplan con las condiciones indicadas anteriormente.

CLASE N° 2

Actividad N° 4 Abre el archivo llamado "SEGMENTO" [6]

a) Mueve el punto amarillo que divide al segmento en dos partes.
Observa las distancias de dicho punto a los extremos del segmento.
Compara la razón entre la longitud total del segmento y la de su parte mayor.
Compara la razón entre la longitud total y la de su parte menor.

b) ¿Puedes conseguir que ambas razones sean iguales? ¿Cuánto vale en ese caso aproximadamente?

c) Haz clic sobre la casilla "Rectángulo 1" y "Rectángulo 2" y nuevamente desliza el punto amarillo. Describe lo que puedes observar.
(Es necesario aclarar que ambos rectángulos son iguales, pero se encuentran ubicados de manera diferente)

Actividad N° 5 Abre el archivo "TARJETA DE CRÉDITO"[7]

a) Ubica las imágenes en la posición del ejercicio anterior.
Coloca la recta sobre la diagonal de la imagen horizontal, ¿Es un rectángulo áureo?

b) Oculta las tarjetas de crédito y activa las imágenes de los DNI

c) Realiza nuevamente la actividad

d) ¿Puedes llegar a alguna conclusión?

Actividad N° 6 Abre el archivo "NACIMIENTO DE VENUS" [8]

Analiza si el cuerpo de la Venus presenta proporcionalidad áurea

[6] Al ingresar al archivo, se observan las dimensiones que posee el segmento y los cocientes correspondientes para verificar que se encuentra dividido en proporcionalidad áurea.

[7] En el archivo "Tarjeta de crédito" los alumnos visualizaran dos imágenes de una tarjeta de crédito junto a una recta, y dos imágenes de DNI junto a una recta.
El objetivo de la actividad es comprobar que dichos objetos poseen las dimensiones de un rectángulo áureo.

[8] Nacimiento de Venus. Al abrir el archivo, los alumnos, encontrarán una pequeña descripción del cuadro: "El Nacimiento de Venus" creado por Sandro Botticelli entre los años 1483 – 1484 y junto a ella un fragmento del cuadro.

CLASE N° 3

Actividad N° 7 Abre el archivo llamado "PENTÁGONO" [9]

a) Acciona el botón **Pentagrama o Pentalfa.** ¿Cuántas diagonales posee el pentágono? ¿Qué figura describen? ¿Qué polígono determinan las intersecciones de las diagonales entre sí?

b) Realiza el cociente entre la longitud de la diagonal y el lado del pentágono. ¿Cuál es el valor que hallaste?

c) ¿Qué sucede con el resultado anterior si modificas la longitud del lado del pentágono? ¿Puedes llegar a alguna conclusión?

d) Como habrás podido deducir en los ejercicios anteriores, el valor que has hallado está estrechamente ligado con el pentágono regular. Activa la casilla correspondiente a los 3 rectángulos áureos.¿ Puedes describir brevemente que ocurrió?

Actividad N° 8

Busca información e imágenes sobre los temas: Proporcionalidad áurea y número de oro.

Con el material recolectado, crea alguna diapositiva (tres como mínimo). Guárdalas en tu computadora, ya que serán utilizadas la próxima clase.

CLASE N° 4

Actividad N° 9

Proyección del power point confeccionado con las diapositivas realizadas por los alumnos, del documental "El número áureo"[10] y de la película: "Donald en el país de las matemágicas"[11]

[9] Al abrir el archivo "Pentágono", los alumnos visualizarán un pentágono y el cociente entre la diagonal y su lado. El objetivo de esta actividad es que los alumnos comprendan que la proporción presentada es invariante.

[10] "El numero áureo" es un documental de la serie Más por Menos de la Radiotelevisión española, se proyectará del minuto 14:05 hasta el 15:24

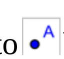
[11] "Donald en el país de las matemágicas" es una película de los estudios Disney, se proyectará del minuto 7:25 hasta el 12:50

4.2 Análisis a priori

Todas las actividades propuestas se planificaron teniendo en cuenta el contexto en el cual están inmersos los alumnos, teniendo como fin desarrollar el pensamiento reflexivo, crítico e innovador para que de esta manera el contenido adquiera significado para los alumnos. Destacamos que la **contextualización** afirma que el alumno está inserto en un ambiente social y cultural construido más localmente por compañeros, profesores, padre, familia y amigos, es decir, por la comunidad en la que vive. Esto supone que los alumnos extraen los elementos sociales y culturales como fuentes de ideas y de información, así como una variedad de tipos de ideas que podrían ser resueltos.

Actividad n° 1 “Imágenes”

Al momento de abrir el archivo “Imágenes”, todos los comandos del software se encuentran habilitados. Para desarrollar esta actividad en particular, los alumnos utilizarán la herramienta “Insertar Imagen”. Ella permite visualizar una imagen en la vista del GeoGebra, para luego manipular sus dimensiones o posición. Solo es necesario hacer “click” en algún sector de la pantalla y luego seleccionar el archivo.

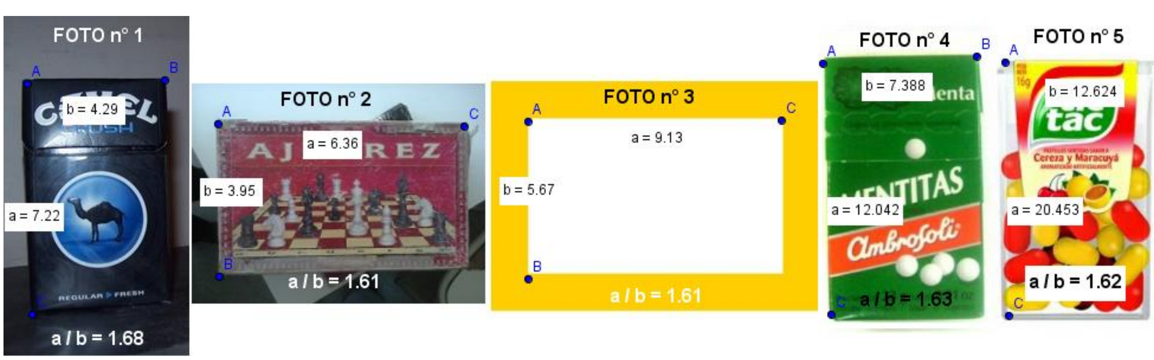
Al poseer la imagen en la vista gráfica, pueden construir un punto en cada vértice de la imagen insertada en la hoja (utilizando la herramienta Nuevo Punto ). Luego obtener el segmento que determinan y posteriormente solicitar su medida, utilizando la herramienta distancia o longitud.

Es oportuno aclarar que si la posición de un punto varía, la distancia entre ellos es actualizada automáticamente y en consecuencia el cociente de ellas. Esta variación brinda una posibilidad a los alumnos que deseen deslizar los puntos buscando una mayor exactitud, pudiendo además recurrir a la herramienta “zoom.” Si bien el software permite un redondeo de hasta 15 cifras decimales, consideramos que tal cantidad no es necesaria para la actividad que desarrollarán los alumnos. Además coincidimos con Luis Santaló, cuando plantea que se debe fomentar el cálculo aproximado debido a que

> Los problemas que la matemática puede resolver de manera exacta son pocos. En general hay que contentarse con una cierta aproximación. . .
>
> (Santaló, 1966, citado en Segal y Giuliani, 2011)

Por lo antes expuesto, se acordó con anterioridad que solamente tomaríamos dos cifras decimales significativas.

Las cinco imágenes que se presentan a continuación son las que se encuentran en el archivo y se colocaron las correspondientes dimensiones que se estima sean halladas por los alumnos.



A partir del desarrollo de esta primera actividad, se busca realizar una exploración, ya que la propia imagen puede funcionar como un objeto de indagación en sí misma. Primeramente se espera sean identificadas, y luego que puedan estimar un intervalo en el cual esté contenido esa razón entre dos medidas que luego llamaremos número de oro. Puede advertirse que todas están relacionadas con la vida diaria de nuestros alumnos y que esto no es un dato menor, ya que como pudo observarse en el análisis epistemológico, están presentes en muchos de los objetos que nos rodean.

El hecho de que cada vértice no esté señalado en las fotos, potencia la necesidad de indagación enriqueciendo el trabajo. Los instrumentos que ofrece el programa, funcionan como una potente herramienta de búsqueda y visualización para la elaboración de preguntas, algunas de las cuales pueden ser:

- ¿Qué sucede si muevo uno de los puntos marcados?
- ¿Cómo varía el cociente al cambiar la medida de los segmentos?
- ¿De qué depende el cociente obtenido?
- ¿Cambiará el valor obtenido al aplicar zoom?

Estimamos no tener mayor dificultad en esta actividad, destacamos que brinda una buena oportunidad para discutir los distintos valores hallados, las aproximaciones que brinda el propio software o debatir qué sucedería si se desplaza alguno de los puntos.

<u>Actividad N° 2</u>

En esta oportunidad se utilizará una cinta métrica y calculadora por grupo.

Los alumnos deberán tomar las medidas solicitadas y realizar las divisiones correspondientes.

Esta actividad se encuentra inspirada en el trabajo publicado por Luca Pacioli en la "Divina Proporción". En él analiza las medidas y proporciones que debe poseer el cuerpo humano, dando origen al llamado Hombre de Vitruvio (bautizado de esta manera en honor al arquitecto de apellido homónimo) (Pacioli, 2013, pág.154)

Este dibujo confeccionado por Leonardo Da Vinci se encuentra acompañado de notas anatómicas, las cuales fueron retomadas en 1850 por Adolf Zeising (1810 -1876), quién realizó numerosas mediciones en cuerpos totalmente desarrollados (masculinos y femeninos) buscando en ellos una ley estadística que rigiera sus dimensiones.

Encontrando que: La razón media correspondiente al cociente entre la altura total del cuerpo y la distancia desde el suelo hasta el ombligo es precisamente 1,625 (para el cuerpo masculino) y 1,6 (para el cuerpo femenino). (Ghyka, 1953)

Se espera que los alumnos logren reproducir en una escala menor el trabajo realizado por Zeising y hallen valores semejantes a los antes mencionados.

Actividad N° 3

Esta consigna fue trabajada con anterioridad a la implementación de la secuencia.

Los alumnos debían tomar fotos con sus celulares, cámaras digitales o netbooks a diferentes objetos que posean forma rectangular. La única condición que se agregó, a la de su forma, es que el objeto debía estar completo en la imagen.

Primeramente se recorrieron los pasillos, biblioteca, patio y kiosco de la escuela en busca de objetos que cumplan la condición. Posterior a dicha clase recorrieron el barrio tomando fotos a: carteles, ventanas, cajas, puertas, y demás objetos que cumplan con las condiciones indicadas anteriormente.

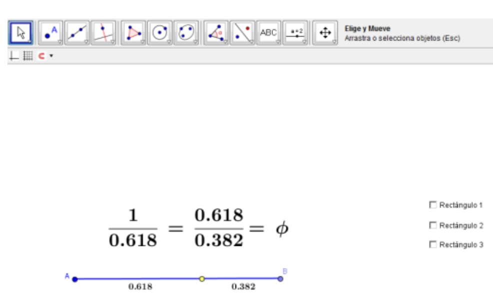
Con las fotos obtenidas, se realizará una actividad similar a la N° 1, pero en este momento son ellos quienes eligen y capturan las imágenes que posteriormente serán analizadas.

Durante la puesta en común, los grupos enunciarán las conclusiones a las que han arribado. El docente permanecerá atento a las dificultades que surjan, las que se espera estén vinculadas con la toma de medidas.

En esta etapa es importante recordar que el aprendizaje no consiste en ejecutar órdenes ni en copiar soluciones de problemas (imitación o reproducción); muy por el contrario, puede comenzar por la invención de soluciones cualquiera sea el recurso utilizado (Brousseau, 2007), es por esto que se espera que al resolver las actividades, los alumnos, desplieguen estrategias más adecuadas. Sin olvidar que es necesario realizar varias acciones para formular una conjetura, justificarla y finalmente poder obtener conclusiones adecuadas, ya que una estrategia se adopta rechazando intuitivamente o racionalmente una anterior. Recordando que "el alumno sólo puede aprender produciendo, haciendo funcionar y evolucionar los (sus) conocimientos" (Brousseau, 2007, pág. 87)

<u>Actividad N° 4</u> "Segmento"

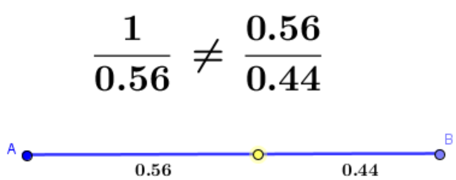
Al ingresar al archivo, los alumnos visualizan la siguiente imagen:

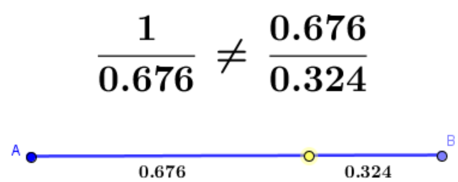


Se observan las dimensiones que posee el segmento y los cocientes correspondientes para verificar que se encuentra dividido en proporcionalidad áurea.

Al deslizar el punto amarillo, las medidas y cocientes varían.

A continuación dos imágenes que permiten identificar lo que anteriormente se indica:

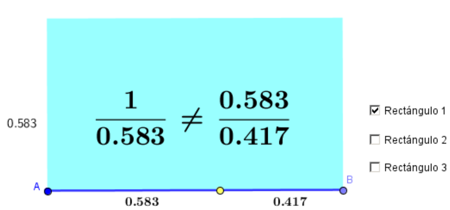




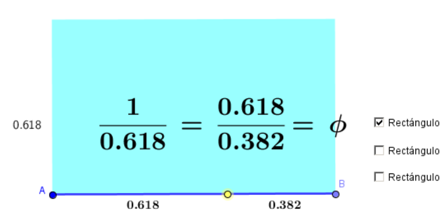
En el punto b, se solicita que hallen el valor aproximado de la proporcionalidad áurea. La respuesta esperada es 1, 618, la misma no surge directamente en las pantallas, pero se espera que puedan identificarla.

En el punto c, activarán la casilla correspondiente al rectángulo 1. A partir de su visualización y el desplazamiento del punto amarillo, se espera que logren identificar como varían las dimensiones del rectángulo hasta lograr construir un rectángulo áureo.

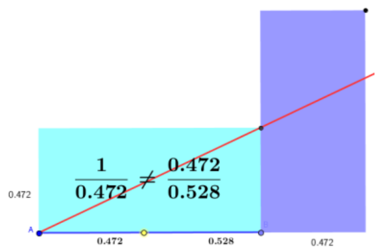
No es un Rectángulo Áureo

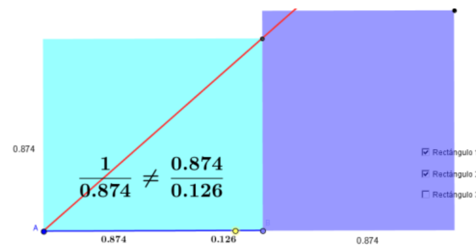


Es un Rectángulo Áureo

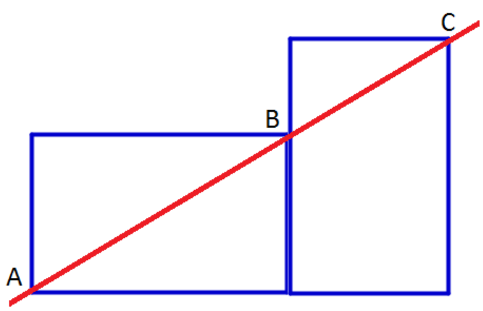


Al activar el segundo rectángulo, puede observarse que cuando uno varía el otro también lo hace

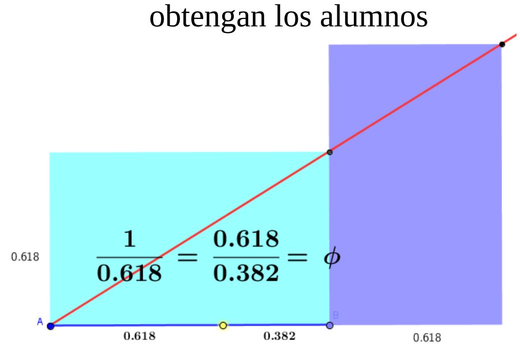




A partir de esta actividad se busca una aproximación directa con el contenido desde una actividad netamente matemática. Se alude al rectángulo áureo y una de sus propiedades que los caracteriza de manera especial (cuando se colocan dos rectángulos áureos que poseen las mismas dimensiones como indica la figura, la recta AB pasa por el vértice C)



Construcción que se espera obtengan los alumnos



Es importante que los alumnos lleguen a esta conclusión debido a que la necesitarán para resolver la actividad que se plantea a continuación.

<u>Actividad N° 5</u> "Tarjeta de Crédito"

Al momento de abrir el archivo, se visualiza la siguiente construcción:

Pueden desplazar las imágenes y la recta. Para ello, deben realizar un click izquierdo sobre ellas y sin soltarlo desplazarlas hasta ubicarlas en el lugar deseado.

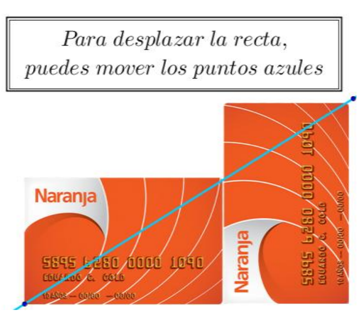
Para cambiar la inclinación de la recta, es necesario deslizar los puntos azules que pertenecen a ella.

Esta actividad se centra en

> Un trabajo exploratorio de ensayos y errores, de ajustes, de intentos de explicar lo que está ocurriendo, de tratar de ver si se arma o no el dibujo. Pero, finalmente, la comprensión y la explicación de la resolución demandan el uso de una propiedad.
>
> (Itzcovich, 2011, pág. 24)

A partir de la misma, se busca que los alumnos realicen una analogía entre la conclusión hallada anteriormente y las preguntas realizadas en esta nueva actividad.

Se espera que logren colocar las imágenes en la siguiente posición:



A rasgos generales, podemos mencionar que en ambas actividades (4 y 5) en particular se busca la anticipación de una solución por parte de los alumnos, es decir argumentos deductivos:

> Conociendo algunas propiedades, se busca obtener respuestas a preguntas sobre las figuras, como así también poder argumentar sobre las respuestas obtenidas. (Itzcovich, 2011, pág. 14)

Alguna de las anticipaciones que se busca que surjan son:

- Cuáles son aproximadamente las dimensiones de los rectángulos áureos
- Las tarjetas de crédito son rectángulos áureos
- Los DNI son rectángulos áureos

En la puesta en común, el docente favorecerá las descripciones de las estrategias y dará lugar a pequeños debates sobre las respuestas o “tácticas” empleadas; todos tendrán libertad de expresarse tengan la respuesta correcta o no, de manera de generar un equilibrio y un debate real. En este momento nos centraremos en escuchar y respetar, ya sea cuando el docente se dirija a los alumnos o cuando ellos lo hagan entre sí. El objetivo es atender y comprender lo que se está diciendo en ese momento; teniendo presente que el contenido de las interacciones que se estará dando es esencialmente matemático.

Recordemos que:

> El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero. . ., sostener su opinión o presentar una demostración” (Brousseau, 2007, pág. 23)

Es a través de esta comunicación que a los alumnos se le

> …ofrece la oportunidad de confrontar ideas, indagar las coherencias y controlar resultados. (Artigue, 1995, pág. 77)

Actividad N° 6 “Nacimiento de Venus”

Al abrir el archivo, los alumnos, encontrarán una pequeña descripción del cuadro: “El Nacimiento de Venus” creado por Sandro Botticelli entre los años 1483 – 1484 y junto a ella un fragmento del cuadro.

En el margen inferior derecho de la imagen se visualiza un botón de la herramienta ocultar/mostrar; la cual se utilizará para que los alumnos comprueben si el cociente hallado corresponde a la proporcionalidad áurea.

Recordamos que una actividad similar fue realizada durante el desarrollo de la clase anterior.

Los alumnos, realizaron la división correspondiente entre las medidas de su altura y la distancia que hay entre la cima de su cabeza hasta el ombligo.

Con esta secuencia se busca que los alumnos anticipen nuevamente una respuesta.

Luego de hacerlo, son ellos mismos quienes examinan y confrontan los valores hallados.

Se focaliza en

> Promover en los estudiantes, una actitud de control sobre su propia producción es, desde nuestro punto de vista, una función esencial del trabajo docente porque es un modo de colaborar con la construcción de una posición de autonomía intelectual.
>
> (Segal y Giuliani, 2011, pág.20)

Debido a que es el propio alumno

> Quien se ubica en posición de interpretar los resultados de sus acciones buscando analizar si las decisiones tomadas se encaminan a su finalidad (la resolución del problema)
>
> (Sadovsky, 2011, pág. 24)

Al comenzar la clase se reverán los contenidos trabajados hasta este momento. Artigue denomina esta acción como *situaciones de recuerdo*.

> Se denomina con este término al momento en el comienzo de una sección donde el profesor pide a los estudiantes *acordarse* de los puntos esenciales de las secciones anteriores sobre un tema determinado que todavía no está en curso.
>
> (Artigue, 1995, pág. 94)

Por su parte Marie-Jeanne Perrine Glorian (1993) llama a este tipo de acción como “de evocación”, a través de ellas se busca reflexionar sobre acciones pasadas.

Al no realizar la actividad nuevamente, los alumnos comienzan a dejar de lado los detalles para centrarse en las cuestiones más importantes. Comienza en este punto el proceso de descontextualización.

Para llevarlo a cabo se repetirán algunas de las preguntas ya abordadas, al mismo tiempo se formularán nuevas, se recordará parte de la información que había sido obtenida, pero no se aporta nada nuevo.

Es una institucionalización, ya que hay que identificar cuáles de las propiedades y valores que se encontraron son los que se van a conservar y cuales rechazar. Recordando que los hechos principales y las acciones pasadas son evocadas, formuladas y reconstruidas.

Los alumnos y el docente deberán generar una situación de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de información entre pares. Para que ocurra, deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

Luego, atravesarán una etapa de validación ya que una parte importante de la actividad consiste en analizar la veracidad de las respuestas halladas. En esta instancia, los alumnos explicarán los procesos que han realizado y las conclusiones a las que han arribado, se realizarán anotaciones en el pizarrón, se confrontarán las declaraciones buscando probar la falsedad de las declaraciones realizadas.

Todas las preguntas planteadas en esta etapa están organizadas de modo tal que el alumno pueda responderlas con sus propios recursos y las organice para modificar sus conocimientos o convicciones.

Anteriormente se mencionaba la importancia de la contextualización de las actividades a desarrollar, siendo restringidas las conclusiones a la realidad particular que en ellas eran planteadas; por el contrario, en esta etapa los alumnos comienzan a compartir el conocimiento construido, con otras personas, en ese momento empieza a avanzar el grado de profundización del conocimiento elaborado y con esto el proceso de descontextualización.

En esta etapa se busca que el conocimiento se transforme en saber a partir de la interacción con los pares.

> Este trabajo de conversión de conocimientos en saberes se controla desde la Teoría de las Situaciones Didácticas a través de procesos colectivos de debates gestionados por el docente, pero suponen siempre reconstrucciones personales de cada uno de los alumnos.
>
> (Leymoyne, 1997, citado en Sadovsky, 2006, pág. 35)

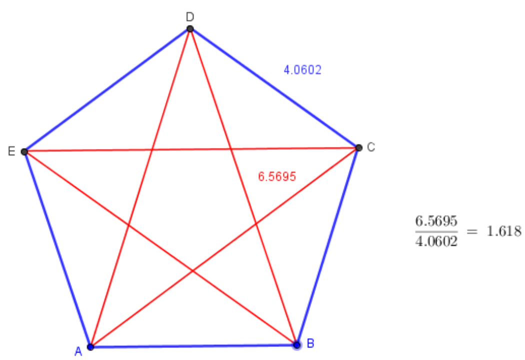
<u>Actividad N° 7</u> "El Pentágono"

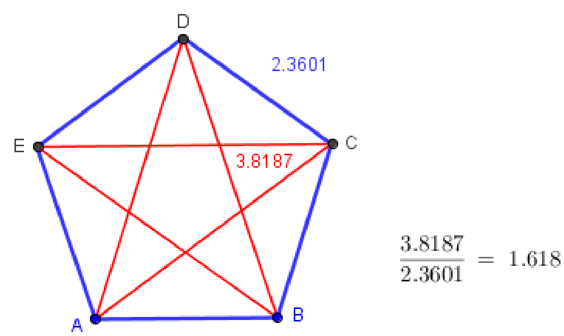
Se trabajará la proporcionalidad áurea desde otra figura, pretendiendo de esta manera que los alumnos comprendan que la misma está en estrecha relación con diversos objetos y no necesariamente solo con los segmentos o rectángulos.

El punto b de la consigna tiene por objetivo traer a memoria conocimientos previos: A qué elemento de los polígonos se denomina diagonal, qué significa que las diagonales se intersecan o nombre que recibe el polígono de cinco lados.

Al realizar el cociente entre la longitud que posee la diagonal y el lado, los alumnos obtienen nuevamente el valor del número de oro. Deben realizar un cociente; pero en esta oportunidad, pueden modificar la ubicación inicial de los puntos A o B. Por estar trabajando con un software de geometría dinámica, la longitud de los lados y diagonales variarán y se actualizarán instantáneamente, pero por su parte el cociente permanece invariante. Siendo esta la característica la que se desea que los alumnos obtengan.

Las figuras que obtienen los alumnos al variar la distancia entre el punto A y B son las siguientes





(La validez de la construcción se analizó en el tratamiento histórico del contenido matemático).

La importancia de esta actividad radica en discutir las propiedades de la construcción, específicamente aquellas que son conservadas a partir de su desplazamiento. La función que permitirá realizar esto con el software es la herramienta de Arrastre.

Ángela Restrepo (2008) señala lo siguiente respecto a ella.

> El trabajo en geometría dinámica introduce entonces un nuevo objeto para que los alumnos manipulen, una representación en la cual las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos, y las construcciones pueden ser validadas como aquellas que conservan las propiedades pedidas a través de desplazamientos.
>
> (Ángela Restrepo, 2008, citado en Andrea Novembre, 2015, pág. 36)

Este desplazamiento o arrastre es el elemento esencial de la Geometría Dinámica, esto nos permitirá pasar de una Geometría Estática donde las figuras poseen dimensiones particulares, a una Geometría Dinámica que las construcciones conservan las propiedades geométricas a través del movimiento.

Además, al desarrollar la actividad

> El alumno obtiene retroacciones sobre su trabajo a través del arrastre de su dibujo por medio de una manipulación directa. Y, en el caso de que su construcción no resista el arrastre (se deforme), el alumno es llevado a buscar otras estrategias.
>
> (Andrea Novembre, 2015, pág. 38)

<u>Actividad N° 8</u>

Los alumnos contarán con una semana de plazo para recolectar información e imágenes para la construcción de un power point donde se hará referencia a los aspectos más relevantes de la proporcionalidad áurea y el número de oro, sus orígenes, donde está presente y características principales. Todo esto, se realizará a partir de lo que ellos consideren más relevante en relación al tema. Es por este motivo que deberán investigar e interiorizarse. Cómo reconocemos que está actividad será compleja, no estarán solos, la profesora de informática los guiará en esta etapa.

Las acciones que deberán realizar los alumnos para recolectar y seleccionar la información son diversas, Maglione y Varlotta (2011) destacan las siguientes:

- Búsqueda, evaluación y clasificación de la información
- Almacenamiento de resultados parciales
- Comparación y análisis de la información obtenida

Los alumnos deberán confeccionar al menos tres diapositivas, en el transcurso de la clase todas se observarán, se seleccionarán las que se consideren más adecuadas y de esta manera se realizará la presentación final.

En todo momento, serán los propios alumnos quienes confeccionen y seleccionen las diapositivas que en definitiva serán expuestas. Es un trabajo netamente colaborativo

Actividad N° 9 Actividad de Cierre

Se realizará la proyección del power point realizado durante el desarrollo de la clase anterior y posterior a él y a modo de cierre se realizará un debate final. Se les dará nuevamente la palabra a los alumnos buscando que ellos expresen sus experiencias en primera persona y sus dudas.

No se reducirá a una presentación del saber desvinculado de todo el trabajo anterior; ya que durante esta etapa se obtendrán conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se recapitulará, sistematizará, ordenará, vinculará todo aquello que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica. En definitiva, se buscará poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.

Citaremos las propias palabras de Guy Brousseau (Brousseau, 2007, pág. 119), que nos recuerdan cual es el objetivo que debería tener la escuela para nuestros alumnos específicamente para la matemática.

> *…“Lo que se aprende en la escuela no es únicamente aquello que cada niño necesitará personalmente en el futuro para sobrevivir (esto nadie puede saberlo). En primer lugar, existe la cultura que cada sociedad considera como el mínimo necesario para cada uno de sus miembros adultos, y también existe el servicio civil que los niños deben cumplir superando los desafíos de aprendizaje. Estos son los elementos que permitirán a la sociedad encontrar los diferentes tipos de especialistas que necesite. Un alumno no aprende matemáticas sólo por sus necesidades, sino también para ofrecer a la sociedad una oportunidad de encontrar, en un momento dado, tanto a los matemáticos como a los modestos usuarios de las matemáticas que necesitará”…*

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

5.1 Aspectos generales en la recolección de datos

Debido a que los alumnos intervinientes son menores, se solicitó a los adultos responsables que firmaran una autorización para el uso de la imagen de sus hijos.

Se desea aclarar que ellos se sentían intimidados por las cámaras, motivo por el cual tomamos la decisión que la filmadora permaneciera enfocando al mismo lugar durante el transcurso de las clases y en pocas oportunidades realizar un plano general.

Las autorizaciones y las producciones obtenidas por los alumnos pueden ser consultadas en los anexos correspondientes.

Al ingresar al aula los alumnos se encuentran nerviosos.

Respecto a la disposición de los bancos, se aclaró que podían sentarse con quien ellos desearan. El objetivo fue disminuir su ansiedad y al mismo tiempo aumentar la comunicación entre ellos.

> Todos los alumnos sacan provecho de las discusiones participando de ellas, cada uno según sus posibilidades.
>
> (Berté, 2005, pág. 232)

En las siguientes imágenes puede observarse la disposición de las mesas y algunos alumnos.



Destacamos, además, que la posibilidad de utilizar la computadora en clase como herramienta de trabajo les generó una motivación particular.

Consideramos que existe una marcada diferencia entre trabajar con lápiz y papel, calculadora, regla y compás o herramientas informáticas.

> Los medios de registro, almacenamiento y trasmisión estáticos (papel, lápiz, pizarrón) sólo permiten una imagen con todos los elementos acumulados, o ver el producto final de una serie de transformaciones.
>
> (Bressan, Bogisic, Crego, 2006, pág. 43)

Por su parte, las herramientas informáticas amplían las posibilidades de trabajo. Pero, al mismo tiempo, es necesario tener presente que:

> Una herramienta técnica no resolverá nunca problemas de fondo, como el invento de la imprenta no resolvió los problemas de aprendizaje de la lectura. (Berté, 2005, pág. 95)

Esto se evidencia claramente en las palabras de Freudenthal (1983, citado en Bressan, Bogisic, Crego, 2006, pág. 46)

> No es el material el que trasmite el conocimiento. Es una ayuda para resolver el problema práctico en un cierto contexto. La comprensión y el *insight* están apoyados en el problema o situación...

Es por lo antes expuesto que sostenemos que la riqueza de las actividades seleccionadas se encuentra en que permitirán: generar exploraciones, identificar regularidades, conjeturar y validar propiedades, por parte de los alumnos; debido a que no se puede pensar que para tener éxito en la enseñanza es suficiente poner a los alumnos a trabajar en grupos enfrentados a cualquier ejercicio. Al mismo tiempo, afirmamos, que es necesario suprimir el formalismo vacío de comprensión que se genera al enseñar reglas que se repiten sin ningún tipo de sentido.

Sin duda

> La tentación de renunciar al conocimiento y de caer en un aprendizaje de técnicas más o menos memorizadas es atractivo para el maestro. Empero, esta opción aleja a los estudiantes de aquello que podría tener significado para ellos.
> (Douday, 1995, pág. 67)

Sostenemos que los alumnos aprenden matemática haciendo matemática, por ende será necesario favorecer y promover el surgimiento de estrategias de resolución a las actividades que se propongan.

En consecuencia:

> La tarea docente deberá entonces enmarcarse en esta dirección, promoviendo en los alumnos la búsqueda de propiedades que permitan decidir la validez o invalidez de lo que se ha conjeturado.
> (Itzcovich, 2005, pág. 29)

5.2 Presentación y análisis de resultados

<u>CLASE N° 1</u>

En esta instancia, se propone un conjunto de situaciones tendientes a producir un primer acercamiento al contenido, en ellas se utilizarán diferentes estrategias y recursos de cálculo.

Partimos de la siguiente idea:

> Las mediciones son objetos de estudio que pueblan la enseñanza elemental desde tiempos remotos; y nada hace suponer que, en un futuro próximo, estos objetos dejarán de estar ligados a la matemática que se concibe para la escolaridad obligatoria.
>
> (Itzcovich, 2007, pág. 9)

Al mismo tiempo:

> Es importante tratar en el aula el problema de medida. Los alumnos poseen algunas ideas relacionadas con la medida que conocen porque las usan en la vida diaria. Es interesante, entonces, tomar dichos conocimientos y ampliar su comprensión.
>
> (Urquiza, 2006, pág. 141)

Actividad N° 1 "Imágenes"

Ante esta actividad, se hace presente la primera dificultad: no interpretan la consigna. Frente a esto, recordamos que:

> La lectura es un medio básico para adquirir información en nuestra sociedad y en particular en el ámbito escolar. Los sujetos que tienen dificultades para comprender lo que leen. . . encuentran limitadas sus oportunidades educativas, laborales y de competencia social. . .
> (Atienza, Sanandrés, Sáinz y De Sárraga Gómez, 2014, pág. 43)

Es por lo expuesto, que consideramos necesario realizar una lectura general explicando los aspectos que no hayan sido comprendidos.

Posterior a ella, los alumnos, manifiestan: "es fácil", "nos mareamos por tantas letras"

Esto es tenido en cuenta para las posteriores actividades y previo a las mismas se realizará una lectura general de cada una realizando las aclaraciones que se consideren necesarias.

En relación a la resolución de las consignas, podemos señalar que todos lograron identificar al menos un elemento que se encuentra en el archivo "Imágenes"; foto 1: "Caja de cigarrillos", foto 2: "Caja de ajedrez", foto 3: "Logo del National Geographic", foto 4: "Cajita de mentitas" y foto 5: "Cajita de tic tac"

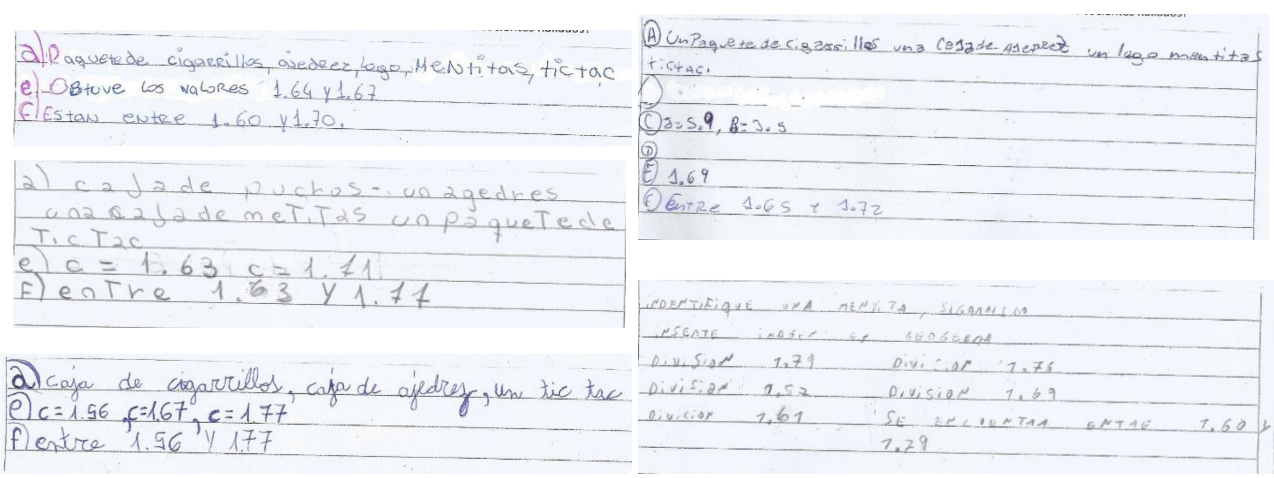
Respecto a los siguientes ítems podemos indicar que la mayoría los resuelve como fue anticipado. Logrando realizar el cociente entre las longitudes de los segmentos y a partir de dichos valores estimar un intervalo donde los mismos estén incluidos.

Podemos asentir que la consigna cumplió con su objetivo, debido a que los alumnos comenzaron a involucrarse en un trabajo de búsqueda de relaciones, al mismo tiempo confirmamos que:

> La computadora se puede integrar al trabajo en el aula enriqueciendo la actividad de los alumnos.
>
> (Segal y Giulliani, 2011, pág. 58)

Se evidencia que las netbooks fueron asistentes al momento de resolver lo solicitado. Permitieron: investigar, organizar la información, resolver, presentar los resultados, conectarse y trabajar colaborativamente. En la actividad en particular, pudimos comprobar que la posibilidad de elegir la cantidad de cifras decimales permitió a los alumnos comenzar a pensar que los valores obtenidos no pertenecen a un conjunto numérico al que están habituados a trabajar.

A modo de ejemplo se presentan algunas imágenes con las respuestas brindadas:



Destacamos, que los números en principio nos permiten contar y recordar una cantidad de objetos, sin necesidad de tener que transportarlos.

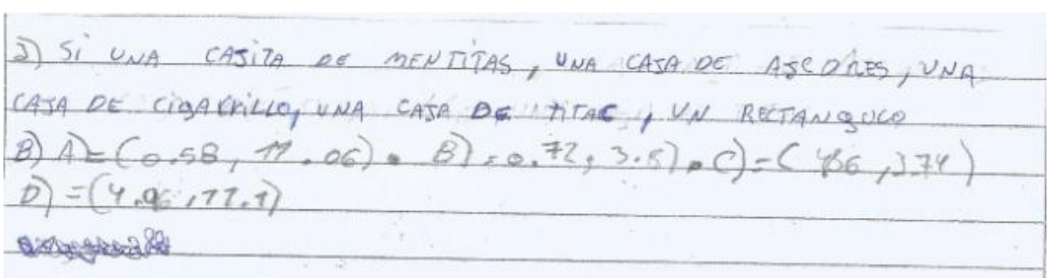
> … han regido la actividad humana desde sus orígenes y son su instrumento mental más fundamental e impresionante.
>
> (Corbalán, 2010, pág. 18)

Pero, la actividad desarrollada, deja en evidencia que la proporción áurea se expresa mediante un número irracional y como mencionó Luca Pacioli

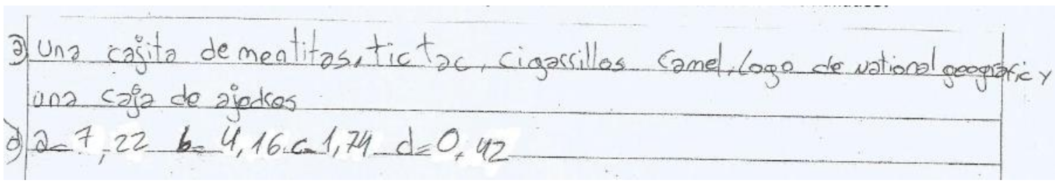
> … nuestra proporción no puede jamás determinarse con número inteligible ni expresarse con cantidad racional alguna sino que siempre es oculta y secreta, y los matemáticos la llaman irracional.
>
> (Luca Pacioli, 2013, pág. 69)

Esto generó diversas dificultades que a continuación se mencionan y, que posteriormente fueron analizadas en la puesta en común correspondiente a la actividad.

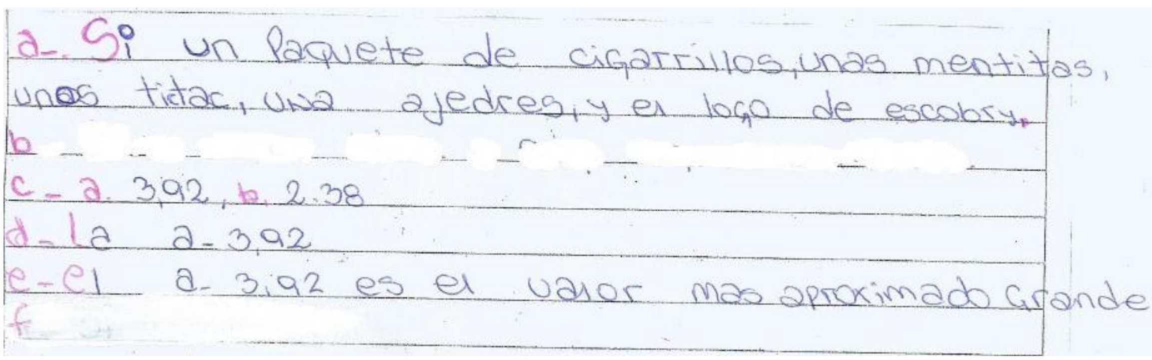
1- Se consideró como pares ordenados a las medidas de los segmentos que forman los lados de la figura, motivo por el cual no pudo concluir el resto de la consigna



2- Se consideró las medidas de los segmentos como valores aislados y no se realiza el cociente.


a) Una cajita de mentitas, tictac, cigarrillos Camel, logo de national geografic y una caja de ajedros
d) a=7,22 b=4,16 c=1,74 d=0,42

3- A pesar de la lectura general, se interpreta mal la consigna


a. Si un Paquete de cigarrillos, unas mentitas, unos tictac, una ajedres, y el logo de escobry.
b
c. a. 3,92, b. 2.38
d. la a. 3,92
e. el a. 3,92 es el valor mas aproximado Grande
f

Podría decirse que la actividad misma lleva a un obstáculo[12] didáctico. Como indica Annie Berté en su libro Matemática Dinámica:

> A partir del momento en que se amplía el concepto de número, el alumno debe modificar o por lo menos ampliar su representación de número y está representación puede ser un obstáculo.
>
> (Berté, 2005, pág. 40)

[12] La palabra “Obstáculo” fue introducida por Gastón Bachelard en la expresión “Obstáculo Epistemológico”, pero hizo notar que la palabra no era demasiado adecuada, pero que la elegía a falta de una mejor. (Berté, 2005, pág. 102)

En el momento que los alumnos debían comparar los valores obtenidos a partir de realizar el cociente de las longitudes de los lados, se presentó la dificultad justamente al confrontarlos, debido a que no comprendían "cuál es más grande" y de esta manera fue dificultoso que lograran estimar un intervalo que los contenga.

Frente a estas dificultades detectadas, se hizo necesario generar una discusión especial en el aula, centrándonos específicamente en los tres aspectos antes mencionados. Se dio lugar a la formulación de distintos puntos de vista, a continuación se mencionan los más importantes.

Algunas de las preguntas realizadas a los alumnos que presentaron esas dificultades en la resolución, han sido:

- ¿Qué representa (0.72 , 3.8)?
- ¿De qué manera podemos obtenerlo utilizando GeoGebra?
- ¿Qué representa esta clase de números?
- ¿Les resultan conocidos? ¿Dónde los vieron?

A partir de ellas buscamos

> Lograr que los alumnos asuman la responsabilidad matemática de sus resultados supone romper con las prácticas usuales y requiere que el docente genere condiciones en la que los alumnos puedan hablar libremente.
>
> (Díaz, 2009, pág. 31)

Los alumnos decían:

- ¿Y eso qué es? ¿Cómo se lee?
- ¿Quién escribió eso?

Hasta que un alumno plantea ¿Puedo ver la pantalla?, frente a esto, conectamos una computadora al proyector y observando la imagen dice: “No tiene las medidas de los segmentos”. Esa simple frase sirvió de ayuda para que los alumnos lograran comprender cuál había sido el error.

En este momento corroboramos las palabras de Annie Berté (2005, pág. 264)

> Los alumnos aportan información, toman iniciativas que pueden ser mínimas en apariencia, pero que valorizan el trabajo final.

Esta frase fue suficiente para aquellos alumnos que habían considerado como pares ordenados a los segmentos de los lados puedan reconocer el error que habían cometido; lo mismo ocurrió con aquellos que no realizaron el cociente y en relación a los que no interpretaron la consigna manifestaron: “Tenemos que estar más atentos a lo que se pide”

Luego, se debatió que el resultado obtenido se vincula directamente con la posición que poseen los puntos, debido a que las longitudes que presentan los segmentos generados a partir de unirlos consecutivamente dependen directamente de ésta. Algunas de las preguntas realizadas para generar el debate fueron:

- ¿Qué sucede si movemos uno de los puntos marcados?
- ¿Cambiará el valor obtenido al aplicar zoom?
- ¿Cómo varía el cociente al cambiar la medida de los segmentos?

- ¿De qué depende la relación entre los lados?
- ¿Qué modificaciones pueden hacerse a las imágenes para que el valor obtenido no varíe?
- ¿Cuáles fueron los valores qué obtuvieron?
- ¿Entre qué valores podríamos decir que se encuentran?

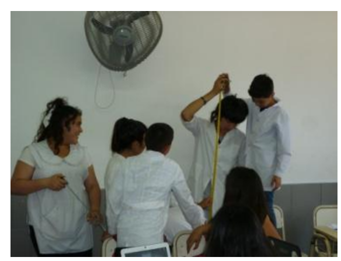
Actividad N° 2

Para esta actividad, nos centramos en la siguiente idea:

> La matemática es una actividad humana a la que todos pueden acceder.
>
> (Sadovsky, 2011, pág. 11)

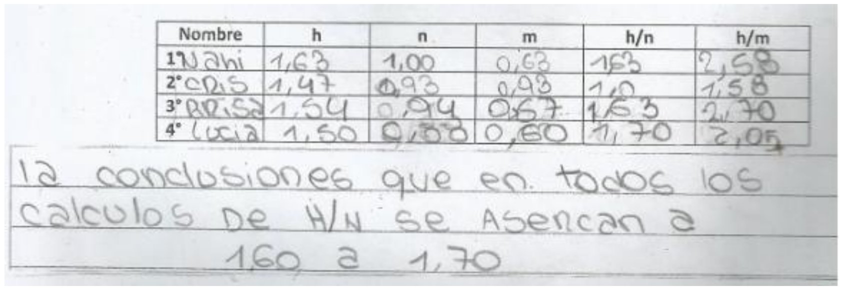
Todos participaron con una producción autónoma del conocimiento. Organizaron el trabajo sin dificultad. Cada uno de los integrantes del grupo tenía una actividad determinada. Algunos fueron los encargados de tomar las medidas. Otros estaban atentos para tomar nota de los valores obtenidos o realizaban las cuentas requeridas.






Se puede observar el trabajo colaborativo en plena acción. Casi la totalidad de alumnos desarrolla la actividad sin dificultad, logrando en la mayoría de los casos esbozar una conclusión

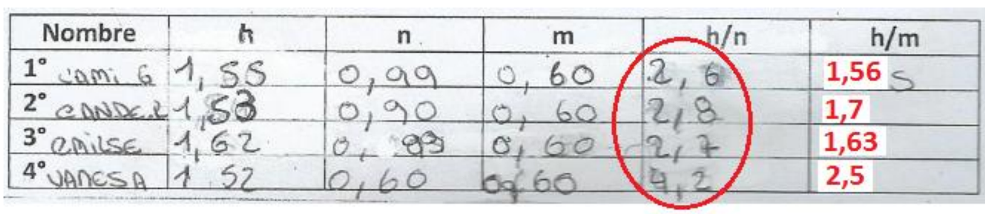
A modo de ejemplo:



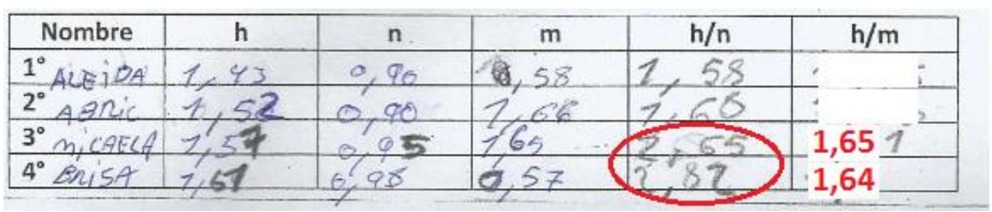
Nombre	h	n	m	h/n	h/m
1° Nahi	1,63	1,00	0,63	163	2,58
2° cris	1,47	0,93	0,93	1,0	1,58
3° Brisa	1,54	0,94	0,67	1,63	2,70
4° Lucia	1,50	0,88	0,60	1,70	2,05

la conclusiones que en todos los calculos De H/N se Asercan a 160 a 1,70

La única dificultad detectada está relacionada con las operaciones, si bien podían utilizar calculadora, los cocientes fueron mal realizados.



Nombre	h	n	m	h/n	h/m
1° cami G	1,55	0,99	0,60	2,6	1,56 s
2° CANDE.L	1,53	0,90	0,60	2,8	1,7
3° emilse	1,62	0,93	0,60	2,7	1,63
4° VANESA	1 52	0,60	0,60	4,2	2,5



Nombre	h	n	m	h/n	h/m
1° ALEIDA	1,43	0,90	0,58	1,58	
2° ABRIL	1,52	0,90	1,66	1,66	
3° micaela	1,57	0,95	1,65	2,65	1,65 1
4° BRISA	1,61	0,98	0,57	2,82	1,64

Podemos afirmar que a pesar de no ser cuerpos totalmente desarrollados, el estudio realizado por Adolf Zeising (1810 -1876), quién realizó numerosas mediciones en adultos (masculinos y femeninos) buscando en ellos una ley estadística que rigiera sus dimensiones pudo ser reproducido con éxito.

Los alumnos encontraron que: La razón correspondiente al cociente entre la altura total del cuerpo y la distancia desde el suelo hasta el ombligo es aproximadamente 1,6 (para el cuerpo femenino). (Ghyka, 1953)

Nombre	h	n	m	h/n	h/m
1° Lucia	1,50	1,00	0,50	1,50	0,30
2° Camila	1,52	0,95	1,[illegible]	1,60	2,66
3° Agus	1,57	0,95	62	1,65	2,55
4° Irina	1,55	1,00	0,55	1,55	2,81

Y aproximadamente 1,625 para el cuerpo masculino. (Ghyka, 1953)

Nombre	h	n	m	h/n	h/m
1° Gaspar	1,61	1,08	73	1,6	2,5
2° Rodri	1,60	90	60	1,6	2,5
3° Anteo	1,50	90	60	1,6	2,5
4° Nico	1,53	93	60	1,6	2,5

Los siguientesado h/n nos dieron parecidos a los de la Actividad nº1

La actividad fue atractiva para los alumnos, estaban involucrados buscando una posible relación entre los valores hallados. A partir de la resolución de la actividad y posterior puesta en común pudimos verificar las palabras de Itzcovich:

> Es esperable que los alumnos, a partir de explorar con algunas construcciones y revisar la ya realizadas, puedan comenzar a establecer condiciones generales. (Itzcovich, 2005, pág. 30)

Comenzaron a preguntarse qué representaba ese número aproximado a 1,6 que está presente en las dos actividades resueltas, con lo cual podemos afirmar que su objetivo fue cumplido.

<u>Actividad N° 3</u>

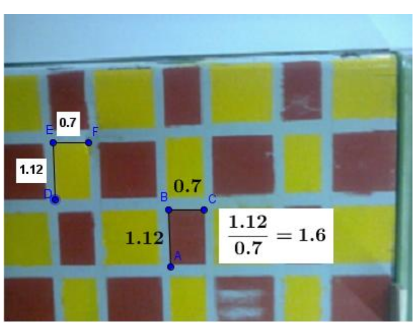
Para desarrollar esta actividad, los alumnos tomaron imágenes de objetos rectangulares. Ellas fueron capturadas en distintos espacios: la propia escuela, sus casas, la veredera, el kiosco, etc. Utilizando diferentes dispositivos: cámaras digitales, celulares o las propias computadoras.

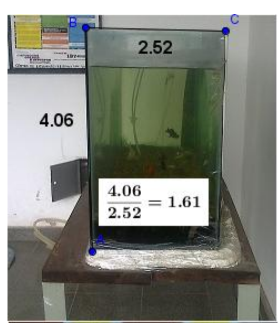
Se realizó de esta manera, debido a que consideramos importante vincular las actividades matemáticas con la vida cotidiana de nuestros alumnos. Al mismo tiempo coincidimos con las palabras de José Villella

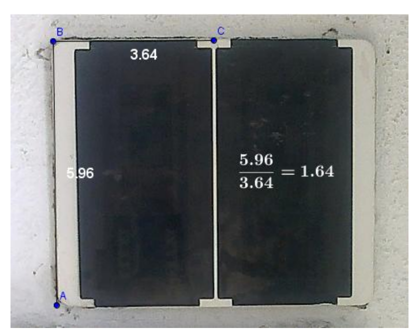
> Si la Matemática cotidiana no entra en el aula, la escolar no saldrá de ella como herramienta para resolver los problemas.
>
> (Villella, 2008, pág. 15)

Sin los dispositivos digitales antes mencionados no hubiera sido posible desarrollar la actividad, debido a que las imágenes nos permiten tener una referencia de las dimensiones que poseen los objetos sin la necesidad de que ellos estén presentes.

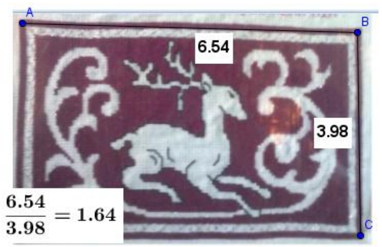
Algunas fueron capturadas en la propia escuela. En ellas puede observarse además, los respectivos cocientes hallados por los alumnos

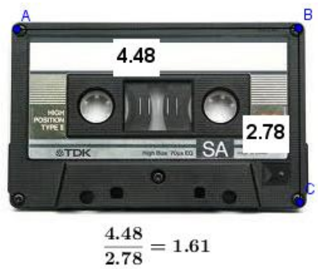




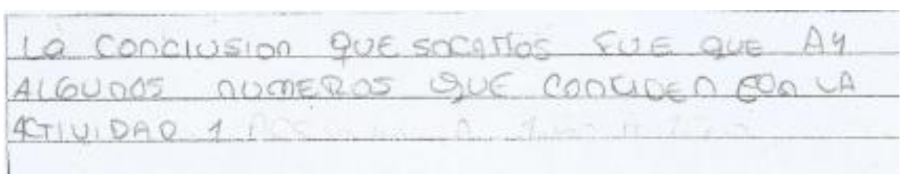


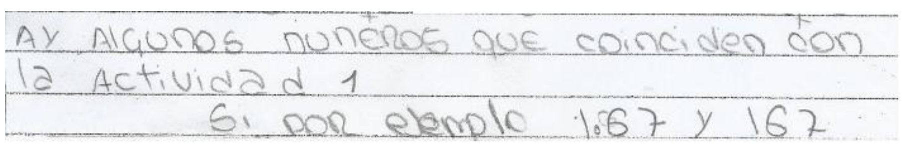
Las siguientes fueron capturadas en las casas de los alumnos. En ellas puede observarse además, los respectivos cocientes hallados.





A partir de ellas, obtuvieron las siguientes conclusiones


LA CONCLUSION QUE SACAMOS FUE QUE AY ALGUNOS NUMEROS QUE CONCIDEN CON LA ACTIVIDAD 1.


AY ALGUNOS NUMEROS QUE coinciden con la Actividad 1
Si por ejemplo 1.67 y 167

CLASE N° 2

Las actividades de esta clase pueden centrarse en la siguiente idea:

> El saber no es trasmisible como un objeto, es el alumno mismo el que lo construye, especialmente en el caso de interacciones con los otros alumnos y el docente.
>
> (Berté, 2005, pág. 17)

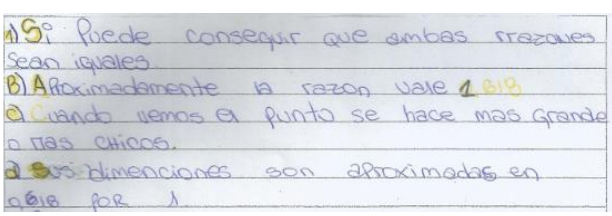
Actividad N° 4 “Segmento”

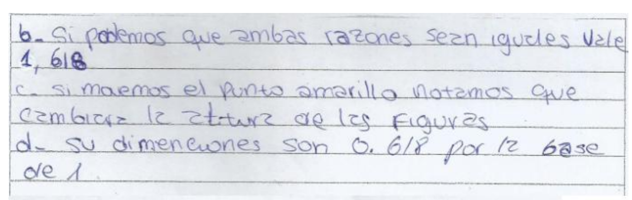
Recordemos que a partir de estas consignas se busca una aproximación directa con el contenido desde una actividad netamente matemática; además se menciona por primera vez el concepto por su nombre propio.

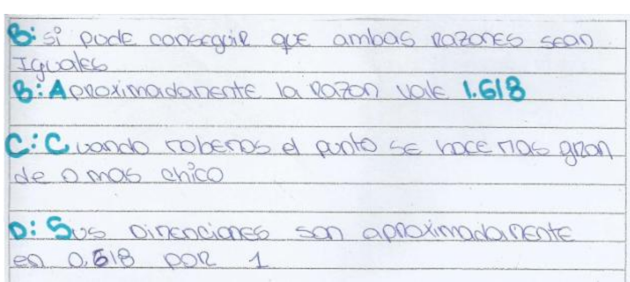
La consigna se presenta subdividida en tres preguntas, las cuales los alumnos han resuelto de las más variadas formas. A nivel general podemos indicar que el desarrollo de la misma se encontró dentro de los parámetros esperados.

Sin el applet desarrollado para esta actividad, las conclusiones a las que arriban los alumnos no hubieran sido las mismas. Debido a que sería muy dificultoso confeccionar la cantidad suficiente de rectángulos para que puedan obtenerla.

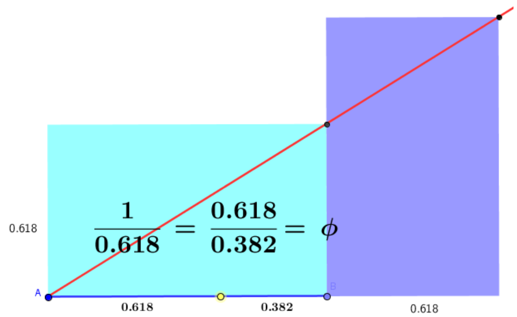
Con respecto a los puntos a- b. Los alumnos hallaron el valor aproximado de la proporción áurea, logran identificar cuando un rectángulo es áureo y las dimensiones que éste posee sin mayores dificultades. Algunas de las respuestas han sido:

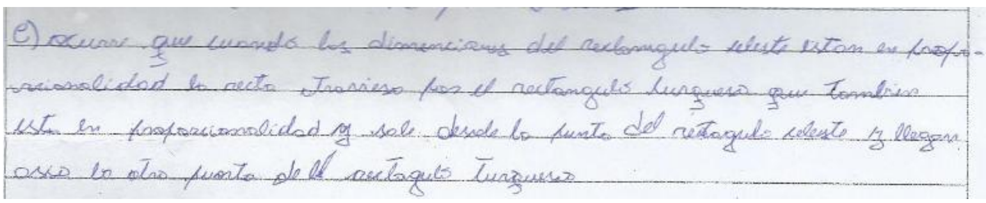

A) Si Puede conseguir que ambas rrazones Sean iguales.
B) AProximadamente la razon vale 1.618
C) Cuando uemos el punto se hace mas Grande o mas chicos.
d) Sus dimenciones son aProximadas en 0.618 poR 1

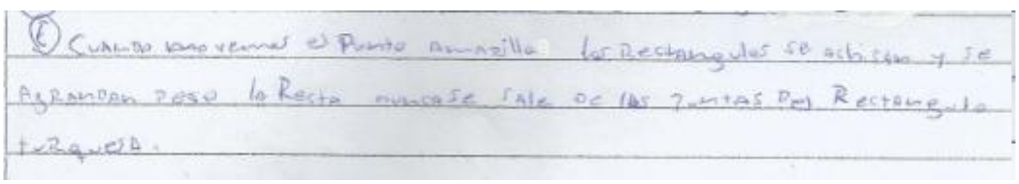

b- Si podemos que ambas razones sean igueles Vale 1,618
c- si movemos el punto amarillo notamos que cambia la altura de las figuras
d- su dimenciones son 0.618 por la base de 1

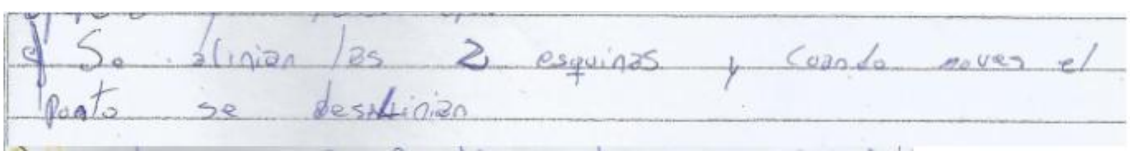

B: si pude consegir que ambas razones sean Iguales
B: Aproximadamente la razon vale 1.618
C: Cuando movemos el punto se hace mas gran de o mas chico
D: Sus dimenciones son aproximadamente en 0.618 por 1

La dificultad se presenta en el punto c, momento que deben explicar que sucede con la recta cuándo las dimensiones de los rectángulos se encuentran en proporcionalidad áurea. Esta dificultad estaba relacionada con la falta de vocabulario, que generó algunas explicaciones incomprensibles:




c) ocurre que cuando las dimenciones del rectangulo celeste estan en propor-cionalidad la recta traviesa por el rectangulo turquesa que tambien esta en proporcionalidad y sale desde la punta del retangulo celeste y llegan asta la otra punta de el rectangulo turquesa


c) Cuando lo movemos el Punto amarillo los Rectangulos se achican y se agrandan pero la Recta nunca se sale de las 2 puntas del Rectangulo turquesa.


c) Se alinian las 2 esquinas y cuando moves el punto se desalinian

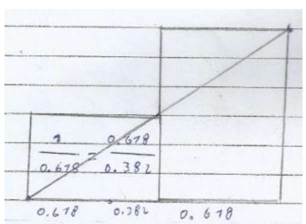
Esto generó la necesidad de buscar una nueva estrategia puesto que consideraban que el lenguaje escrito no era suficiente. Brousseau sostiene:

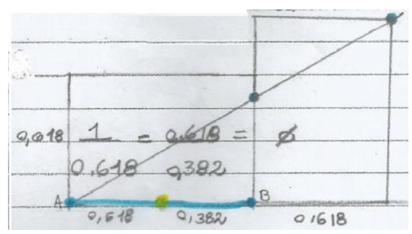
> Que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas.
>
> (Brousseau, 1986, citado en Sadovsky, 2005, pág. 18)

Precisamente la dificultad de expresar lo que ellos observaban en sus computadoras permitió a los alumnos un avance en el proceso de razonar los que sucedía y al mismo tiempo expresar las conclusiones a las que arribaron. Recordemos que:

> Usar un dominio de la matemática para resolver un problema inicialmente planteado en otro constituye un mecanismo típico del propio trabajo de dicha disciplina.
>
> (Itzcovich, 2005, pág. 85)

Por este motivo consideraron reproducir por medio de un dibujo lo que observaban en sus computadoras.





Efectivamente “pasaron” del lenguaje coloquial al gráfico. Sin duda esto se evidencia, porque a pesar de no poder expresar lo que visualizaban utilizando “palabras”, comprendieron la propiedad. En este punto nos encontramos frente a un concepto estrechamente vinculado con la Teoría de las Situaciones Didácticas:

> Modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno independientemente de la mediación docente.
>
> (Sadovsky, 2005, pág. 19)

Destacamos en este punto que elaborar una respuesta, independientemente de la forma utilizada, favorece la reflexión sobre lo realizado. Porque:

> … escribir la respuesta a los problemas posibilita el análisis posterior y la evocación de las estrategias utilizadas.
>
> (Escobar, Sancha, 2006, pág. 65)

Esas estrategias se hicieron evidentes en la puesta en común. Pues, los alumnos explicaron como a partir de manipular el punto móvil presente en el applet, pudieron elaborar una conclusión.

Finalizamos el análisis destacando que la actividad cumplió su objetivo, la apropiación de la propiedad que poseen los rectángulos áureos. Esto se corrobora al momento de tener que aplicarla, en una situación diferente, como se presenta en la siguiente consigna.

Actividad N° 5 “Tarjeta de Crédito”

Los alumnos debían manipular las imágenes que se encontraban en el archivo “Tarjeta de crédito” e indicar si las mismas eran rectángulos áureos.

Podemos afirmar que todos llegaron a la conclusión correcta, siendo posible expresarla o comunicarla de diferentes maneras.

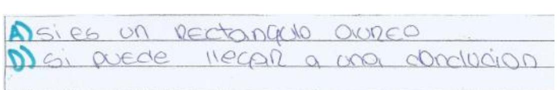
Entendemos como comunicación a la habilidad que poseen los alumnos para leer, interpretar y comunicar (con sentido), en forma oral y/o escrita las conclusiones a las que logra arribar utilizando para ello un vocabulario y símbolos correspondientes al lenguaje matemático adecuados.

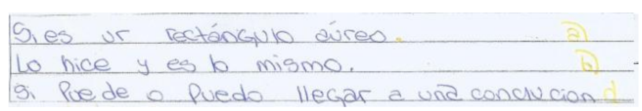
Recordando que:

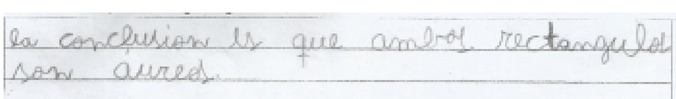
> Uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática habrá de ser la capacitación de los niños para expresar verbal y simbólicamente sus ideas. Una capacitación que supone la aptitud para hablar y oír hablar de matemática, lo mismo que para leer y escribir acerca de ella.
>
> (Dickson y otros, 1991, citado en: Bressan, Bogisic, Crego, 2006, pág. 59)

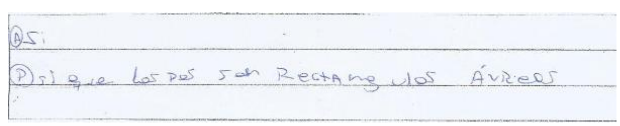
Las teorías actuales recalcan el valor del lenguaje en el desarrollo cognitivo de los seres humanos y en consecuencia de su educación. Siendo en el ámbito geométrico donde el uso de este se acentúa. Esto se fundamenta en la abundancia de vocabulario específico debido a la precisión requerida para enunciar, describir propiedades que poseen las figuras; pero al mismo tiempo la necesidad de leer material y escribir conclusiones como se presenta en esta actividad puntualmente.

Algunas conclusiones a las que arribaron son:


A) si es un rectangulo aureo
b) si puede llegar a una conclucion


Si es un rectángulo áureo. a)
Lo hice y es lo mismo. b)
Si puede o puedo llegar a una conclucion d)


la conclusion es que ambos rectangulos son aureos.


a) Si
b) si que los dos son Rectangulos Aureos

Se deja en evidencia, en este punto, la necesidad que los alumnos encuentren la forma más apropiada para comunicar sus conclusiones:

> La formulación debe ser lo más clara y precisa posible. Aquí se desarrolla la argumentación sobre el problema, los alumnos confrontan, comparan, justifican la validez, dan pruebas y ejemplos, señalan errores. Es importante que en este momento la intervención docente sea para favorecer el debate. . .
>
> (Escobar y Sancha, 2006, pág. 63)

Y en ese debate generado, será necesario que el docente interprete el vocabulario utilizado por los alumnos, pero al mismo tiempo tienda a mejorarlo y reorganizarlo, proveyéndole mejores herramientas para expresar sus pensamientos.

> Las intervenciones del docente son fundamentales. . . para organizar la participación de los alumnos, para que los chicos puedan volver sobre sus acciones y producciones, describirlas, justificarlas, comparar los distintos desarrollos… Explicar y discutir con argumentos sobre la validez de lo realizado favorece el avance hacia la conceptualización.
>
> (Wolman y Quaranta, 2009, pág. 10)

Motivo por el cual durante el desarrollo de la puesta en común se buscó que los alumnos utilizaran un vocabulario adecuado al momento de expresar sus conclusiones. Debido a que:

> Poner en común es hacer público. Los alumnos deben aprender las reglas de comunicación colectiva y formular su propio pensamiento para hacerlo accesible a otro, es decir, explicarlo y justificarlo. Al mismo tiempo, debe aprender a tener en cuenta el pensamiento del otro, contestar un argumento o solicitar una explicación.
>
> (Díaz, 2006, pág. 27)

Algunos ejemplos surgidos referidos a esto son:

- “Uno acostado y otro parado” por forman un ángulo de 90° o son perpendiculares
- “Son como en la actividad anterior” por ser rectángulos áureos poseen la misma propiedad

<u>Actividad N° 6</u> “Nacimiento de Venus”

> Los sentidos se deleitan con las cosas que tienen las proporciones correctas.
> (Santo Tomás de Aquino, citado en Corbalán, 2010, pág. 9)

Las palabras cobran mayor sentido si tenemos en cuenta que en las estructuras pictóricas todas las partes están relacionadas y justamente la concordancia de las partes entre sí con el todo se llama proporción. Esta idea fue modificándose a lo largo de la historia, pero es desde el Renacimiento que la Proporción Áurea comienza su apogeo

> A partir de ese bello momento histórico, se trasmitió por generaciones constituyendo uno de los pilares de la creación artística de todos los tiempos.
> (Garrido, 2013, pág.39)

Durante el desarrollo de la actividad N° 2, los alumnos realizaron la división correspondiente entre las medidas de su altura y la distancia que hay entre la cima de su cabeza hasta el ombligo. Logrando obtener una regularidad cercana a 1,6; posteriormente observaron que ese valor se lo asocia a la Proporcionalidad Áurea. Destacamos que en esa oportunidad debieron enfrentar diversos errores; los cuales posterior a la puesta en común fueron subsanados, en consecuencia podemos destacar que el trabajo docente:

> Consiste en habilitar la duda y la búsqueda, para que entre todos puedan reconstruir el sentido de lo que se estudia. Por lo tanto, en este camino vale equivocarse y, a partir del error, hay posibilidades de aprender.
>
> (Fernández y Conrado, 2006, pág. 36)

Destacamos que sin la herramienta insertar imagen que posee GeoGebra realizar la actividad sería muy complejo. Debido a que sería dificultoso tomar una imagen del cuadro y a partir de ella tomar las dimensiones requeridas.

Finalmente, al analizar la presencia de la Proporcionalidad Áurea en el cuadro: "Nacimiento de Venus", los alumnos llegan a las siguientes conclusiones, todas ellas expresadas de diferentes maneras.

A) Si, el cuerpo de venus es ~~[illegible]~~ Aureo

1, 6

si el cuerpo presenta proporcionalidad áurea

PRECENTA PORPOCIONALIDAD AUREA. = 1,618

CLASE N° 3

Actividad N° 7 "Pentágono"

En esta instancia y teniendo en cuenta todas las actividades que se han desarrollado, las que fueron aumentando su dificultad paulatinamente, consideramos que los alumnos pueden comenzar a establecer condiciones generales. En ésta en particular, estamos buscando que puedan transformar la exploración en palabras.

Es una actividad que involucra distintos conocimientos en simultáneo: construcciones, exploración, búsqueda de regularidades, elaboración de conjeturas y por último pero no menos importante un fuerte trabajo con argumentos deductivos.

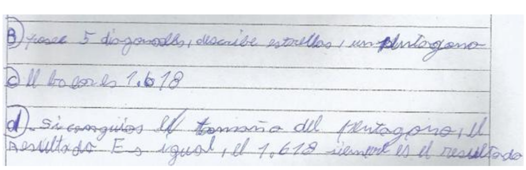
Es precisamente por la necesidad que tiene de generar estos argumentos para validar su respuesta, que podemos señalar como una actividad centrada en la búsqueda de generalización de la propiedad y principalmente en relación al appet correspondiente podemos señalar que:

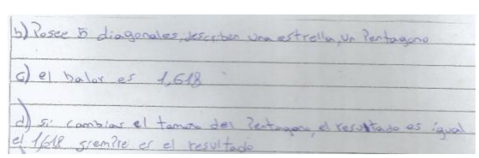
> No alcanza con “mirarlo” para que sus propiedades puedan ser reconocidas
>
> (Itzcovich, 2007, pág. 197)

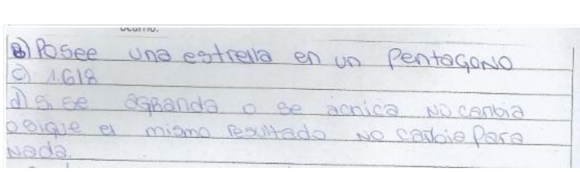
Todos los alumnos resolvieron al menos los primeros puntos, logrando identificar que el pentágono posee cinco diagonales las cuales describen una estrella, que el cociente entre la longitud del lado y su diagonal permanece invariante al modificarla.

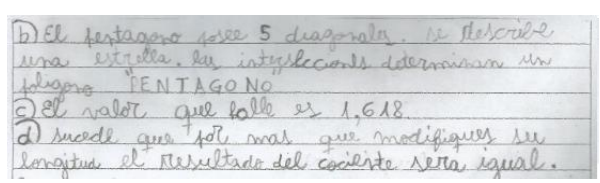
La misma conclusión utilizando una construcción realizada con lápiz en papel sería muy difícil de arribar, debido a que en ella solo podemos observar la construcción concluida y si deseamos modificar las dimensiones que en ella se presentan debemos comenzar de cero nuevamente; en definitiva el uso del applet en este caso es imprescindible.

Las siguientes imágenes evidencian las conclusiones a las que arriban los alumnos:


B) posee 5 diagonales, describe estrellas, un pentagono
c) el cociente es 1,618
d) Si cambias el tamaño del pentagono, el resultado Es igual, el 1,618 siempre es el resultado


b) Posee 5 diagonales, describen una estrella, un Pentagono
c) el valor es 1,618
d) si cambias el tamaño del Pentagono, el resultado es igual el 1,618 siempre es el resultado

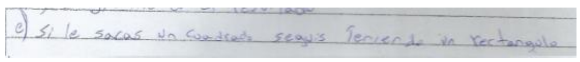

B) Posee una estrella en un Pentagono
c) 1,618
d) Si se agranda o se achica no cambia o sigue el mismo resultado no cambia para nada.

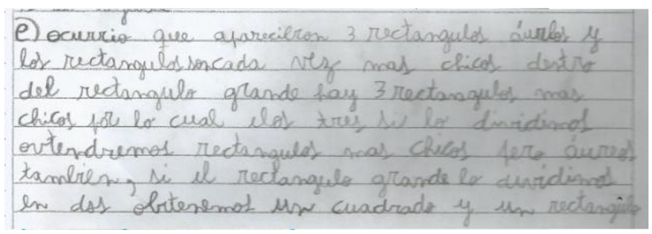

b) El pentagono posee 5 diagonales. se describe una estrella. las intersecciones determinan un poligono "PENTAGONO"
c) El valor que hallé es 1,618.
d) sucede que por mas que modifiques su longitud el resultado del cociente sera igual.

La lectura de las respuestas generó la posibilidad de realizar las siguientes preguntas entre otras:

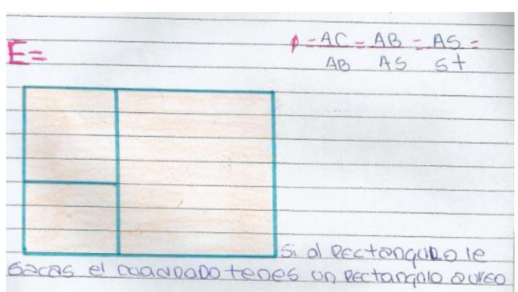
- ¿Cuántos rectángulos áureos podemos construir?
- ¿La proporción áurea está relacionada con otras figuras y no solo rectángulos?
- ¿Dónde pudimos identificar a la proporción áurea?

Continuando con el análisis, destacamos que algunos alumnos concluyeron la totalidad de la actividad, describiendo que sucede al momento de activar las casillas de los tres rectángulos áureos





Nuevamente, los que no podían expresar mediante palabras lo que estaban visualizando utilizaron una representación.



> La matemática toda se apoya fuertemente en lo intuitivo y lo visual. Aún los matemáticos profesionales poseen una tendencia manifiesta a aclarar sus "ideas matemáticas más abstractas de una forma intuitiva y gráfica"
>
> (Guzmán, 1993, citado en Bressan, Bogisic y Crego, 2006, pág. 19)

En este caso podemos señalar que

> Hay un trabajo vinculado a la modelización: la elección de un modo de representación que favorezca el abordaje del problema. (Itzcovich, 2007, pág. 27)

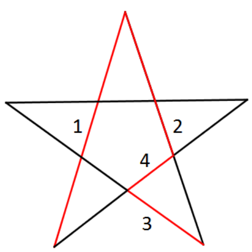
Es decir que cada uno logró reconstruir una propiedad relacionada estrechamente con la proporcionalidad áurea y al mismo tiempo, desarrollar la confianza en sus propias habilidades para resolver problemas. Destacamos que:

> El trabajo individual habilita al accionar de cada alumno con la situación planteada. El trabajo en grupos permite que se confronten maneras de abordar el problema, ya sea por los conocimientos que tenga cada alumno, como por las diferentes miradas.
>
> (Díaz, 2009, pág. 25)

Proyección de las películas

“El numero áureo” es un documental de la serie Más por Menos de la Radiotelevisión española, se proyecto del minuto 14:05 hasta el 15:24.

Los alumnos pudieron ver a través de él, la vinculación existente entre las formas de las flores y los pentágonos, al mismo tiempo se explica la presencia del número de oro en la pentalfa. En ella podemos señalar cuatro segmentos bien identificados, a través de los cuales la presencia del número de oro se hace evidente al realizar el cociente entre ellos, como se presenta a continuación.



Los cocientes entre las longitudes que dan origen al número de oro son:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4} = \varphi$

“Donald en el país de las matemágicas” es una película de los estudios Disney, se proyectó del minuto 7:25 hasta el 12:50.

Donald realiza un recorrido por un mundo mágico, en él puede observarse diversos contenidos matemáticos explicados de manera muy amena, la sección que hemos elegido comienza con el número de oro y su relación con la pentalfa, a partir de ella se hace mención al rectángulo de oro y cómo es posible construirlo a partir de los segmentos que la componen. Posteriormente, a partir de ellos explica cómo es posible construir la espiral áurea.

Destaca la importancia que le otorgaba el pueblo Griego, dado que consideraban que era un canon de belleza. Motivo por el que se encuentra en el Partenón y también en su escultura; pero también en Catedral de Notre Dame, cuadros como la Mona Lisa, la sede de las Naciones Unidas de New York o en nuestros propios cuerpos. Ya finalizando desarrolla como la naturaleza utiliza la forma pentagonal en flores y animales, destacando la petunia, jazmín estrella, la estrella de mar, la flor de seda.

Luego de la proyección de ambas, los alumnos mencionan que muchos de los aspectos que señalan fueron trabajados en el desarrollo de las diferentes actividades.

Finalizamos la clase del día, recordando que deben confeccionar las diapositivas que formarán parte del trabajo final.

Actividad N° 8 “Confección del PowerPoint”

Con la ayuda de la profesora de informática confeccionamos las diapositivas que se utilizarán en la actividad de cierre.

Cabe destacar en este punto la importancia que cada alumno cuente con su respectiva netbook. Debido a que cada uno podía continuar la actividad en sus respectivos domicilios, al mismo tiempo dar su propia impronta a cada una de las diapositivas confeccionadas.

Las que fueron seleccionadas, serán analizadas detenidamente a continuación.

CLASE N° 4

Están orgullosos del trabajo realizado, les permitió conocerse de una manera diferente, las relaciones entre alumnos-profesor y al mismo tiempo entre pares fue enriquecida. Les entusiasmó la idea de mostrar su trabajo, no sólo a su profesor, sino también a sus compañeros y el resto de la comunidad educativa.

Coincidimos con las palabras de José Villella cuando plantea que aspira formar a

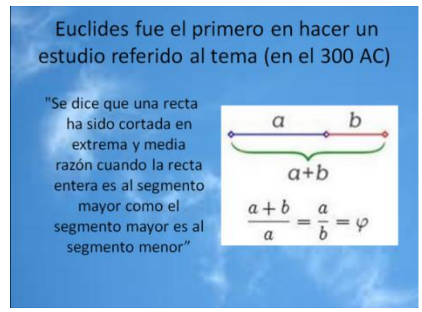
> un alumno que no se conforme con la respuesta del docente sino que intente bucear otras alternativas en la bibliografía a la que puede acceder, que formule conjeturas, que pueda validar o refutar, que pueda comunicar sus conclusiones y aceptar críticas de sus compañeros o comparar sus producciones con la de los otros, para modificarlas o ampliar las conclusiones a las que había llegado.
> (Villela, 2008, pág. 19)

Actividad N° 9 Actividad de Cierre[13]

A continuación se presenta el Power Point confeccionado con las diapositivas creadas por los alumnos con la ayuda de la profesora de informática y la señora bibliotecaria de la institución. El mismo posee un total de veintitrés diapositivas, ellas abarcan desde las actividades desarrolladas en el transcurso de la secuencia hasta obras de arte, animales o fotos que se encuentran en proporcionalidad áurea.

[13] La profesora de informática, solicito las diapositivas con anterioridad. Esto permitió agilizar la confección del power point que se presenta y analiza a continuación.

Comenzamos presentando a la letra Griega que identifica al número de oro, al mismo tiempo se realiza una pequeña explicación de la elección de ella para representarlo. Los alumnos se sorprendieron al saber que una letra lo representa.

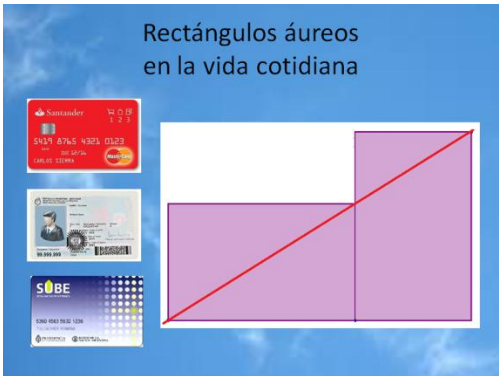


Posteriormente, se presenta la proporcionalidad áurea a partir de su definición. Los alumnos en este momento recordaron la actividad N° 4 "Segmento", fue inevitable que realicen la analogía y digan "Con razón nos daba así"

Por su parte, las diapositivas cuatro y cinco tienen un vínculo visible con las actividades N° 3 y N° 4 de la secuencia desarrollada, debido a que los alumnos para su confección utilizaron las mismas imágenes que en dichas consignas.

Fue una nueva oportunidad de reflexión, confrontaron los valores que habían obtenido realizando los siguientes comentarios:

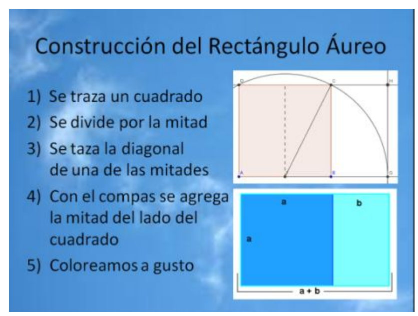
"Me dio parecido no igual" "¿Está bien igual?" "¿Esos valores tenía que dar?" "¿Esas son las respuestas correctas'"



En la diapositiva N° 6 recordamos la propiedad fundamental de los rectángulos áureos hallada en la actividad N° 4 “Segmento”, la que posteriormente se aplica en la N° 5 “Tarjeta de Crédito”. La curiosidad es que presenta la imagen de una tarjeta sube.

Cuando se le preguntó al alumno que realiza la diapositiva: ¿La tarjeta sube es un rectángulo áureo? El manifiesta que sí, los demás contestan “No puede ser”, él indica “Alguien tiene una sube?, yo tengo la mía”, las coloca de la misma manera que se presenta en la imagen y dice “Miren”, el resto de los alumnos sólo dicen: “Tenías razón”

Seguidamente se explica cómo construir un rectángulo áureo partiendo de un cuadrado. Si bien no se realizó durante la secuencia, fue interesante hacerlo durante la exposición y corroborar lo que en la diapositiva se explica.

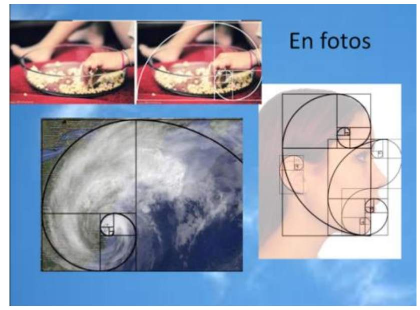


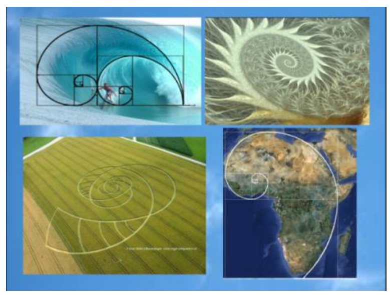
Está actividad permitió que los alumnos vivencien cómo construir la espiral logarítmica y al mismo tiempo comprobaron que: extrayendo un cuadrado de un rectángulo áureo, obtenemos otro semejante.

Además, de lo antes expuesto, los alumnos vincularon la presencia del número oro con los rectángulos áureos y estos con la espiral logarítmica. Concluyendo: “Entonces, si está la espiral son rectángulos áureos”

A partir de esta frase cobraron mucho más sentido las diapositivas se presentan a continuación.

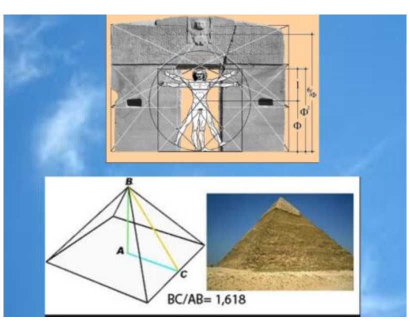
En ellas puede observarse la presencia de la espiral logarítmica en objetos cotidianos como el pétalo de las flores, caracolas, tormentas o fotos halladas en Internet





Posteriormente analizamos su presencia en diferentes construcciones arquitectónicas

Si bien el Partenón griego no podía "faltar" en la presentación dado que es el emblema del Número de Oro, nos resultó interesante y enriquecedor que los alumnos hayan tenido presente otras culturas decidiendo incluirlas en las diapositivas.

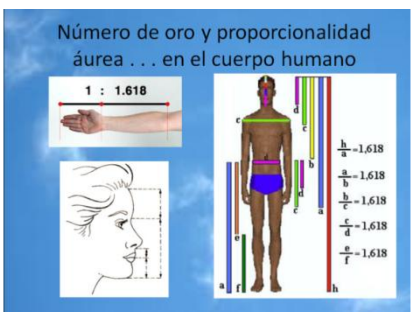


La construcción superior es la "Puerta del Sol" (Inti Punku), pertenece a las ruinas arqueológicas de Tiahuanaco (Bolivia). En la imagen puede visualizarse como la imagen de la puerta posee una estrecha vinculación con el hombre de Vitrubio de Leonardo Da Vinci.

En la imagen inferior puede observarse la imagen de la pirámide de Keops, una de las siete maravillas del mundo y la única que aún perdura. Se ubica a las afueras del Cairo (Egipto). La importancia que presenta es precisamente que el número de oro aparece hasta tres veces en relaciones numéricas entre distintos elementos de la pirámide:

- La razón entre la altura de una cara y la mitad del lado de la base.
- El cociente entre el área total y el área lateral de la pirámide.
- El cociente entre el área lateral y el área de la base.

La siguiente diapositiva presenta la proporcionalidad áurea en el cuerpo



Ella presenta una estrecha vinculación con la Actividad N° 2 de la secuencia desarrollada, donde los alumnos comprobaron con mayor o menor precisión que sus cuerpos se encuentran en proporcionalidad áurea.

Fue inevitable que los alumnos pidieran una regla y comenzarán a medirse según el gráfico indica. Comprobando nuevamente lo antes mencionado.

Luego de observar y analizar su presencia en cuerpos completos, hacemos lo propio con los rostros de Angelina Jolie, Brad Pitt y Sonic.

Algunos continuaban cometiendo errores con las medidas o les dificultaba realizar el cociente dado que las dimensiones eran pequeñas (por ejemplo la proporción entre las falanges), motivo que nos permite explicar que existe un instrumento que logra corroborar si un objeto se encuentra en proporcionalidad áurea sin necesidad de tomar medidas o realizar cuentas.

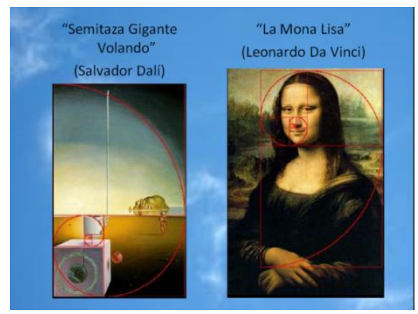
Explicamos cómo se utiliza y que es posible construirlo simplemente utilizando unas varillas y ganchos mariposa.

A partir de la explicación del funcionamiento del compás áureo es posible que los alumnos comprendan la siguiente diapositiva. En ella, se observa la presencia de la proporcionalidad áurea y la espiral en algunos animales.

Durante el desarrollo de la Actividad N° 1 de la secuencia los alumnos concluyeron que el logo del National Geographic se encuentra en proporcionalidad áurea, motivo que generó las siguientes preguntas ¿Qué otros logos conocen? ¿Existirán otros logos que también se encuentren en proporcionalidad áurea? La respuesta a ellas se encontraba en la siguiente diapositiva.

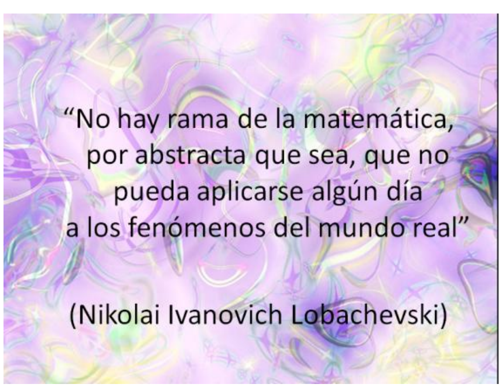
Para ir concluyendo este análisis retomamos la idea de la Actividad N° 6: Analizar su presencia en pinturas.

Primeramente la pintura “Nacimiento de Venus”, ella fue abordada durante la secuencia, pero en la diapositiva se encuentra mucho más detallado. Pudiendo observar el análisis de la totalidad del cuadro.



Posteriormente se presentaron otros cuadros (el único que los alumnos conocían era el de la “La Gioconda”, pero no recordaban su nombre a pesar de haberlo visto en la película de Donald)

Hasta aquí ya realizamos una revisión de casi la totalidad de las actividades desarrolladas por los alumnos durante la implementación de la secuencia y al mismo tiempo analizamos la presencia del número de oro y la proporcionalidad áurea en: objetos cotidianos, nuestros cuerpos, imágenes que identifican diferentes empresas (logos), en construcciones arquitectónicas (nuevas, antiguas y de diferentes culturas), en pinturas, animales y plantas.



Motivo por el cual decidimos concluir la presentación con la siguiente frase

Consideramos que ella sintetiza todo lo que deseamos transmitir a través de la secuencia de actividades y la propia presentación antes analizada.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

La tarea del docente actual de matemática, se centra en la necesidad de que los alumnos

> . . . aprendan Matemática haciéndola, lo cual requiere que el alumno sea un productor de conocimiento y no, un aplicador de técnicas. Para ello, tiene que hacerse responsable de la validez de sus respuestas, comunicar sus modos de resolución, discutir, defender sus posiciones, considerar las resoluciones de sus pares, establecer acuerdos, etc.
>
> (Novembre, 2015, pág. 12)

Reconocemos que la matemática es una ciencia de naturaleza abstracta y con un lenguaje propio complejo que resulta dificultosa de comprender para muchas personas. Pero al mismo tiempo, sostenemos que se puede intentar superar los conflictos que su aprendizaje genera si se la logra relacionar con la realidad, partiendo de situaciones concretas que permitan a los alumnos: observar las situaciones que en ella se generan, experimentar, buscar invariantes, crear conjeturas, demostrar, extraer conclusiones y porque no equivocarse. Aspiramos a lograr:

> . . . una matemática cargada de asombro, de búsqueda, de espíritu investigador, sin temor a errores y apasionada por recorrer los zigzagueantes caminos que caracterizan la investigación… Un alumno que no se conforme con la respuesta del docente sino que intente bucear otras alternativas en la bibliografía que puede acceder, que formule conjeturas, que pueda validar o refutar. . .
>
> (Villella, 2008, pág. 19)

La implementación de la secuencia buscó en los alumnos

> … dejar de ser meros receptores de razonamientos producidos por otros y comenzar a ser protagonistas de sus propias deducciones.
>
> (Itzcovich, 2005, pág. 20)

Fueron los alumnos quienes se involucraron en su propio proceso teniendo como meta la exposición de reflexiones. En el desarrollo de las puestas en común se apeló constantemente a relacionar los conocimientos que disponen, las actividades desarrolladas, los ensayos, errores, aciertos, aportes y discusiones realizadas por ellos mismos. Este proceso cargó de sentido la tarea desarrollada hasta el momento, pues favorece al mismo tiempo la autonomía y el control de cada una de sus producciones, permitiéndoles revelar la importancia de la anticipación y reforzar su vínculo con la matemática.

Teniendo en cuenta que

> El cerebro del alumno no es una página en blanco sobre la cual se imprime automáticamente lo que el profesor dice. El alumno posee conocimientos y los nuevos deben construirse a partir de los que ya poseía.
>
> (Berté, 2005, pág. 102)

Por supuesto, que en primera instancia no comprendían perfectamente lo que se deseaba transmitir, hubo distorsiones, las cuales a partir de diversas aproximaciones se fueron puliendo. Destacando que no fue sencillo trabajar a partir de resolver problemas, debido a que no estaban acostumbrados a la forma de resolución que ellos demandan, pero esto se subsanó a medida que las actividades se desarrollaron y ellos disminuían su ansiedad.

Esto se evidencia en la actividad donde debían confeccionar las diapositivas del power point. En este punto, coincidimos con la reflexión realizada por Zapata (1995, pág. 19):

> El aprendizaje por descubrimiento orienta... hacia la creatividad, a participar activamente, buscando y elaborando... incita de manera constante a poner en acción toda su capacidad.

También colaboró la decisión de realizar la secuencia en una modalidad taller ha sido beneficiosa, debido a que el horario rígido de la jornada no hubiera permitido desarrollar las actividades como fueron planificadas. Esto se debe a que principalmente es difícil en dos horas poder organizar el grupo, abordar la secuencia, realizar la puesta común y obtener conclusiones aunque sean parciales.

También el acceso a recursos digitales y su utilización para el desarrollo de las actividades marcó una diferencia. El software GeoGebra, favorece la exploración, al mismo tiempo posibilita trabajar con contenidos desde distintos registros. Al mismo tiempo:

> … abre la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda y permite adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje.
>
> (Novembre, 2015, pág. 14)

Consideramos que desarrollar las mismas consignas sin el recurso digital no hubiera sido lo mismo. Analizaremos la significatividad del uso de TIC, según los criterios esbozados por Barreiro y Rodríguez (2004), seleccionamos los inherentes a las actividades propuestas:

- Primer criterio: Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas.

  Los alumnos pueden visualizar, experimentar, buscar pruebas y realizar conjeturas. Los alumnos deben debatir, ponerse de acuerdo y anticipar una respuesta que posteriormente deberá ser “defendida” durante la puesta en común.

- Segundo criterio: Imprescindibilidad de TIC.

  Sería imposible realizar todas las construcciones de los rectángulos que pueden ser generados a partir de las dimensiones de las longitudes concebidas en la actividad “segmento” o los infinitos pentágonos regulares que permiten identificar la presencia de la proporcionalidad áurea en ellos; al mismo tiempo, lograr analizar la presencia de la proporcionalidad áurea en un cuadro como es el de “El Nacimiento de Venus”. Con lo cual el uso de TIC en este caso no solo facilita la tarea, sino que es una herramienta fundamental para generar análisis de los valores obtenidos y generar conjeturas.

- Tercer criterio: No perder de vista el objetivo matemático.

  En el desarrollo total de las actividades planteadas, los alumnos, tienen centrada su atención en la proporcionalidad áurea y el número de oro a través de buscar su presencia en objetos cotidianos, nuestros cuerpos, cuadros u objetos matemáticos como son los rectángulos o pentágonos regulares.

Además, consideramos que a partir de la implementación de la secuencia, los alumnos adquirieron ciertas destrezas matemáticas entre las que destacamos:

- Realizar de manera independiente partes de las actividades.
- Respetar y escuchar las propuestas de sus compañeros.
- Conceder valor a la palabra de un compañero, de la misma manera que lo hacen con el docente
- Tomar nota de sus producciones y se comprometan en las respectivas puestas en común
- Revisar los errores que han cometido y tomen nota de las correcciones realizadas

Perspectivas:

Las actividades planificadas deben desarrollarse teniendo presente que

> Los alumnos deben involucrarse en un trabajo de búsqueda de relaciones. El docente deberá "tirar de la cuerda" para transformar una conjetura en una propiedad válida y general.
>
> (Itzcovich, 2005, pág. 105)

En el aula, debe generarse una verdadera producción matemática, donde el docente tiene que: coordinar, mediar, colaborar, aportar contra ejemplos o simplemente hacer visibles las dificultades que los alumnos no percibieron. En las Instituciones Educativas se deberían formar equipos de trabajo capaces de planificar, producir y evaluar materiales multimedia para la enseñanza, acorde a los diseños curriculares vigentes, teniendo presente el contexto y necesidades de nuestros alumnos y profesores.

Al mismo tiempo los trabajos interdisciplinarios, como el abordado en esta secuencia, nos permitirían trabajar con colegas de otras áreas. Los temas son numerosos, tanto en relación a problemas de la enseñanza como a contenidos.

La Producción de materiales como el que se ha desarrollado en este trabajo de investigación debe ser tarea obligada de los organismos educativos. Propiciando la elaboración de los mismos, desde las propias aulas, ya que como se pudo vislumbrar el trabajo colaborativo nos permitirá dar solución a problemas de índole intelectual y social.

En vista de los resultados obtenidos y teniendo en cuenta futuras intervenciones consideramos que sería importante realizar los siguientes ajustes:

- Análisis de la proporcionalidad áurea a partir de manipular material concreto. Evitando la duda que las fotos han sido modificadas con la intención de que ellas cumplan dicha razón.
- Realizar la construcción del compás áureo. Él nos permitirá obtener las mediciones de manera más precisa, aún en espacios reducidos como lo son las falanges de los dedos.
- Luego de la realización de todas las actividades y la puesta en común final, que los alumnos realicen una exposición de las conclusiones a las que han arribado con el resto del alumnado en una feria de ciencias. De esta manera compartirían su experiencia y los conocimientos adquiridos con el resto de la institución. Consideramos que a partir de ella, también los docentes se sentirían motivados a realizar experiencias similares en sus respectivas áreas.

- Incorporar un cuestionario abierto dirigido a los alumnos, con la intensión de saber si el uso de tecnología fue de su agrado o no. Así mismo, para saber si consideran que el software GeoGebra les ayudo o facilitó comprender los contenidos que fueron abordados a lo largo de la secuencia.

Finalmente, acordamos que:

"Locura es hacer lo mismo una vez tras otra y esperar resultados diferentes"

Albert Einstein (1879 – 1955)

Alumnos de 1° "C" de la Escuela de Educación Secundaria N° 6 de Belén de Escobar

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R. Pochulu, M. y Varga, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática, análisis de causas y sugerencias de trabajo*. (Primera edición). Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Abrate, R., Delgado, G., & Pochulu, M. (s.f.). *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado el 7 de Mayo de 2014, de "Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática": http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Ammann, S., Biofano, F., Cicala, R., González, C., & Lupinacci, L. (2012). *GeoGebra. Entra al aula de Matemática* (Segunda Edición ed.). (R. Ferragina, Ed.) Montevideo , Uruguay : Ediciones Espartaco.

Aristóteles (2010). *Ética Nicomaquea. Ética Eudemiana*. Buenos Aires, Argentina: Aguilar.

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue, & R. M. Douday, *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (pág. 140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M., Douday, R., & Moreno, L. (1995). *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (P. Gómez, Ed.) Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente-Grupo Editorial Iberoamericana.

Atienza P., Sanandrés J., Sáinz M. y De Sárraga Gómez M. (2014) *Curso de lectura comprensiva. Guía del profesor*. Lleida: Lleida Universidad

Avila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Azinián, H. (2000). *Resolución de problemas matemáticos. Visualización y manipulación con computadora.* (Segunda Edición). Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas.

Barreiro, P. y Rodríguez, M. (2014, abril). ¿Cómo lograr un uso significativo de las TIC en las propuestas de enseñanza que los estudiantes de Profesorado de Matemática diseñan para el nivel medio? Comunicación presentada en el Seminario Nuevas Tecnologías: aplicaciones en la enseñanza de la Matemática y en la formación de profesores, Buenos Aires, Argentina.

Barreiro, P., y Casetta, I. (2012). Teoría de las Situaciones Didácticas . En M. Pochulu, y M. Rodríguez, *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (págs. 15-38). Cordoba: Editorial Universitaria de Villa María.

Berté, A. (2000). Matemática de EGB 3 al Polimodal (Segunda edición). Buenos Aires, Argentina: A – Z editora.

Berté, A. (2005). *Matemática dinámica.* (Tercera Edición). Buenos Aires, Argentina: A-Z editora.

Bressan, A, Bogisic, B y Crego, K (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, construir, decir y pensar.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. ((2006). *RAZONES PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA EN LA EDUACACIÓN BÁSICA*. Mirar, construir, decir y pensar… Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas (Segunda reimpresión)

Brousseau, G. (1986) *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Serie B, Trabajos de Matemática nro. 19 (revisión castellana 1993).

Brousseau, G. (1988) Los diferentes roles del maestro. Texto de una conferencia pronunciada en la UQAM en Enero de 1988, Canadá.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Primera edición ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cabanne, N. (2008). *Didáctica de la Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Bonum.

Cacheiro González, M.L. (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, nº 39, 69-81. Extraído el 18 de julio de 2014 de http://acdc.sav.us.es/pixelbit/images/stories/p39/06.pdf

Callejo, M. (2011). *Uso de applets en educación matemática*. Revista de Didáctica de la Matemática Uno N° 58. (págs. 5 - 7)

Carla, M., y Morales, N. (2005). *Revista: Inovaciones Educativas*. Recuperado el Junio de 2014, de: http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/ie7ta_edicion2005.pdf#

Carnelli, G., y Marino, T. (2012). Ingenieria Didactica. En M. Pochulu, y M. Rodríguez, *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (págs. 39-62). Cordoba: Editorial Universitaria de Villa María.

Condesse, V., & Minnaard, C. (10 de Marzo de 2007). *Revista Iberoamericana de Educación* . Recuperado el 15 de Junio de 2014, de "La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro": http://www.rieoei.org/deloslectores/1522Minnaard.pdf

Cope, B., & Mary, K. (2009). *Ubiquitous Learning. Exploring the anywhere/anytime possibilities for learning in the age of digital media.* (E. Quintana, Trad.) Illinois.

Corbalán, F. (2010). *La proporción aurea. El lenguaje matemático de la belleza*. (Colección: El mundo es matemático). España: RBA.

Decreto 459/2010 de Educación. Crea Programa "Conectar Igualdad.Com.Ar" de incorporación de la nueva tecnología para el aprendizaje de alumnos y adolescentes" Recuperado el 16 de Junio de 2015, de http://www.conectarigualdad.gob.ar/archivos/archivoSeccion/DecretoCreaci%C3%B3nCI.pdf

Del Puerto, S. Minnaard, C. Seminara, S. (2004). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas.* (Parte 1). Elementos de Matemática. Publicación didáctico científica editada por la Universidad CAEDE. Volumen XIX. Número LXXV. Buenos Aires, Argentina.

Del Puerto, S. Minnaard, C. Seminara, S. (2004). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas.* (Parte 2). Elementos de Matemática. Publicación didáctico científica editada por la Universidad CAEDE. Volumen XIX. Número LXXV. Buenos Aires, Argentina.

Díaz, A. (2009). LAS INTERACCIONES ENTRE PARES. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 25- 28). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Díaz, A. (2009). LAS INTERVENCIONES DEL DOCENTE. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 29- 31). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Echevarría, H. (2005) *Los diseños de investigación y su implementación en la educación*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Escobar, M. y Sancha, I. (2009). RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 57- 66). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Federico, C., Díaz, N.& Mercader, M. Facultades de Arquitectura y Urbanismo y de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. "Enseñanza Interdisciplinaria: Geometría y Arte. El ejemplo de la Vsica Piscis". Recuperado el 15 de Junio de 2014, de http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/federico.pdf

Fernández, A. y Vasches, C. (2009). *LAS FAMILIAS Y LA ENSEÑANZA*. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 35- 38). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

García López, M. d. (2011). *Core*. Recuperado el 17 de Mayo de 2014, de Tesis doctoral: "Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGera en el aula": http://core.ac.uk/download/pdf/12342122.pdf#page=1

Garrido García, R. (2013). *La proporción en el Arte*. Buenos Aires, Argentina: Jorge Baduino Ediciones

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Ghyka, M. C. (1953). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* (B. B. J., Trad.) Buenos Aires, Argentina: Poseidon.

Giménez, J. (Coord.) Abdounur, O., Badillo, E., Balbás, S., Corbalán, F., Dos Santos, J., Edo, M, García Cruz, J, Masip, A. y Spindel, V. *La proporción: arte y matemáticas*. Barcelona, España: Graó. Biblioteca de Uno. Serie Didáctica de las matemáticas.

Gramajo, J.M. (2012). Matemática: la "didáctica inversa". Buenos Aires: Argentina Investiga. Extraído el 8 de julio de 2015 de http://www.educ.ar/recursos/ver?rec_id=112228

Grandgenett, N., Harris, J. y Hofer, M. (2009). Documento "*Tipos de actividades*". Adaptación del material "Mathematics learning activity types", disponible en inglés. Extraído el 18 de julio de 2014 de http://activitytypes.wmwikis.net/file/view/MathLearningATs-Feb09.pdf

György, D. (1996). *El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación. Presidencia de la Nación.

Itzcovich, H. (2011). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (coord), Ressia de Moreno, B., Novembre, A., & Bererril, M. M. (2007). *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique Educación.

Luske, H. (Dirección). (1959). *Donald in Mathmagic Land (Donald en el país de las Matemágicas)* [Película].

Maglione, C., & Varlotta, N. (2011). *Investigación, gestión y busqueda de información en Internet. Serie estrategias en el aula para el modelo 1 a 1.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación (2007). *Matemática: leer, escribir y argumentar*. Serie Cuadernos para el Aula. Buenos Aires.

Ministerio de Educación, C. y. (Abril de 2007). *Universidad Nacional del Nordeste*. Recuperado el 10 de Junio de 2014, de "Apoyo al último año de secundaria para la articulación con el Nivel Superior" : http://www.unne.edu.ar/articulacion/documentos/matematica_alumnos.pdf

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2006). NAP. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Buenos Aires.

Mora, J. (2011). *Applets en geometría.* Revista de Didáctica de la Matemática Uno N° 58. (De la página 9 a 64)

Novembre, A. (2015). *Matemática y Tic. Orientaciones para la enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Anses.

Pacioli, L. (2013). *La Divina Proporción* (Primera Edición ed.). (R. Ricardo, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Losada. Reproducción facsimilar de la publicada en 1946.

Paenza, A. (2004). "Encontrar en el otro un cómplice para disfrutar de pensar, de saber, de cuestionarse. . . ". (V. Castro, Entrevistador)

Parra, C. y Saiz, I. (Comps.) (2002). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (Novena edición) Buenos Aires, Argentina: Paidos

Perez Gomez,R. (Diciembre de 2008). *Unión Revista Iberoamericana de Educación* . "Matemáticas para compartir la belleza". Recuperado el 15 de Junio de 2014, de: http://www.oei.es/oim/Union_016.pdf

Platón (2004). Diálogos: Ion, Timeo, Gorgias y Critias. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Libertador

Puig, L. (Editor) (1997). *Investigar y enseña. Variedades de la Educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente- Grupo Editorial Iberoamericana.

Radiotelevisión Española. (1996). *Más por menos. El numero áureo*. Recuperado el 20 de junio de 2014 de http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-numero-aureo/1290977/

Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18/1, nº 52, 7-33.
Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (2006). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A.Bressan y P. Sadovsky. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal

Saiz I. y Acuña, N. (2006). Y en relación con las computadoras... Consultado el 16 de Febrero de 2014 de http://www.aportes.educ.ar/sitios/aportes/recurso/index?rec_id=107524&nucleo=mate%20matica_nucleo_tic

Saiz, I. (2007). Una matemática con sentido (entrevista). Extraída el 8 de julio de 2015 de http://portal.educ.ar/noticias/entrevistas/irma-elena-saiz-una-matematica.php

Saiz, I. y Acuña, N. (2006). La inserción de las tecnologías ¿puede cambiar las prácticas matemáticas actuales? Consultado el 16 de Febrero de 2014 de http://www.aportes.educ.ar/sitios/aportes/recurso/index?rec_id=107523&nucleo=matematica_nucleo_tic

Saiz, I. y Acuña, N. (2006). La didáctica de la matemática como disciplina científica. Extraído el 17 de julio de 2014 de http://www.aportes.educ.ar/sitios/aportes/recurso/index?rec_id=107764&nucleo=matematica_nucleo_ense%C3%B1anza

Segal, S., y Giuliani, D. (2011). *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades* (Vol. 8). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Tosto, P. (1998). *LA COMPOSICIÓN ÁUREA EN LAS ARTES PLÁSTICAS. EL NÚMERO DE ORO*. (Tercera Edición). Buenos Aires, Argentina: Edicial.

Urquiza, M. (2009). MEDIDA. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 141- 148). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Vilchez González, N. (2007). *Dialnet*. Recuperado el 17 de Mayo de 2014, de "Enseñanza de la Geometría con utilización de recursos multimedia". Aplicación a la Primera etapa de Educación Básica. Tesis para obtener el grado de Doctora en Pedagogía : http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=8263

Villela, J. (2004). *Didáctica de la matemática. Dialogo entre profesionales de la enseñanza*. (Primera reimpresión)Buenos Aires, Argentina: UNSAM (Universidad Nacional de San Martín)

Villela, J. (2008). *¡PIEDRA LIBRE PARA LA MATEMÁTICA! APORTES Y REFLEXIONES PARA UNA RENOVACIÓN METOLOGICA EN LA ENSEÑANZA PRIMARIA*. Buenos Aires, Argentina: AIQUE Educación

Vivanco, J. (2008). Tratamiento de la información y competencia digital. Madrid: Alianza.

Willwrding, M. (1969). (Andres SestierBouclier, trad.) Temas de Geometría (pág 81 al 90) en *CONCEPTOS MATEMÁTICOS. UN ENFOQUE HISTÓRICO*. Méjico: Compañía Editorial Continental S.A. (Obra original publicada en 1967)

Wolman, S. y Quaranta, M. (2009). UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA. En *Enseñar Matemática, en la escuela primaria* (págs. 5- 14). Serie: respuestas. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Zapata, O. (1995). *Aprender jugando en la escuela primaria*. Méjico: Pax.