III CADI
IX CAEDI
2016

ORTOGONALIDAD DE VECTORES EN LAS COMUNICACIONES TECNOLOGÍA CDMA

Luciano Savoie, savoieluciano@gmail.com

María Mercedes Gaitán, mgaitan@frp.utn.edu.ar

Ernesto Klimovsky, erklimo@gmail.com

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná

Resumen — En el Proyecto de investigación "La trascendencia del álgebra lineal en el ciclo superior de ingeniería" algunos trabajos corresponden a Ingeniería Electrónica. Allí, uno de los problemas en las comunicaciones de datos es cómo repartir entre varios usuarios el uso de un único canal de comunicaciones para poder gestionar diversas comunicaciones simultáneamente sin interferencias.

Para resolverlo, la tecnología Code Division Multiple Access (CDMA) emplea un esquema de codificación que asigna a cada transmisor un código único, escogido de forma que sea totalmente diferente del resto. El receptor capta las señales emitidas por todos los transmisores al mismo tiempo, pero puede seleccionar la señal de interés si conoce el código empleado.

Esto lo consigue usando la ortogonalidad entre vectores, cuyas coordenadas representan los datos a transmitir. Así, aunque el receptor capte señales de distintos usuarios al mismo tiempo, si conoce el código de transmisión del usuario de interés, podrá aislar sus datos de los del resto simplemente realizando el producto escalar de la señal recibida con el código del usuario. Al ser este código ortogonal respecto a todos los demás, el producto aislará la señal deseada y anulará el resto.

CDMA se emplea en sistemas de comunicaciones por radio frecuencia, tanto de telefonía móvil (constituye la base de redes 3G) como en transmisión de datos (WiFi) o navegación por satélite (GPS).

Palabras clave— *comunicaciones, vectores, ortogonalidad.*

1. Introducción

En las comunicaciones de datos se presenta la dificultad en la forma de repartir la utilización de un único canal de comunicación o medio de transmisión entre diversos usuarios, para que se puedan realizar varias comunicaciones al mismo tiempo. Sin un método de organización, aparecerían interferencias que podrían resultar molestas, o bien, directamente impedir la comunicación. Este concepto se denomina multiplexado o control de acceso al medio.

La multiplexación por división de código, acceso múltiple por división de código o Code Division Multiple Access (CDMA) es un término genérico que se utiliza para denominar varios métodos de multiplexación o control de acceso al medio basado en la tecnología de espectro expandido [1].

La señal se emite con un ancho de banda mucho mayor que el necesario para los datos a transmitir, por este motivo decimos que es una tecnología de espectro expandido.

Para resolver el problema mencionado, CDMA emplea una tecnología de espectro expandido y un esquema especial de codificación, por el que a cada transmisor se le asigna un código único, escogido de forma tal que sea ortogonal respecto a los de los demás y distinto del resto. El receptor capta las señales emitidas por todos los transmisores al mismo tiempo, pero gracias al esquema de codificación, que emplea códigos ortogonales entre sí, puede seleccionar la señal de interés si conoce el código empleado.

Otros esquemas emplean la división en frecuencia (FDMA), en tiempo (TDMA) o en el espacio (SDMA), para alcanzar el mismo objetivo, el cual es la separación de las distintas comunicaciones que se estén produciendo en cada momento y evitar o suprimir las interferencias entre ellas.

Una analogía posible para comprender rápidamente el problema del acceso múltiple es la mencionada por los autores Tanenbaum y Wetherall [2]. Consiste en considerar una habitación (que representaría el canal) en la que varias personas desean hablar al mismo tiempo. Si todas ellas hablan a la vez, se producirían interferencias y sería difícil la comprensión. Para evitar o reducir el problema, podrían hablar por turnos (división por tiempo), hablar unos en tonos más agudos y otros más graves de forma que sus voces se distinguieran (división por frecuencia), dirigir sus voces en distintas direcciones de la habitación (división espacial), o hablar en idiomas distintos (división por código) como en CDMA, donde sólo pueden entenderlo las personas que conocen el idioma, es decir, el código.

La Tecnología CDMA se usa en variados sistemas de comunicaciones por radio frecuencia, como en la telefonía móvil, allí constituye la base de las redes de tercera generación (3G), en la transmisión de datos (WiFi) y en la navegación por satélite mediante el sistema de posicionamiento global (GPS).

2. Conceptos matemáticos utilizados en CDMA

CDMA utiliza vectores cuyas componentes representan los datos a transmitir. Por ejemplo, la cadena binaria “1011” se representa por el vector (1, 0, 1, 1). Al mismo tiempo, aprovecha las propiedades matemáticas de operaciones entre vectores [3].

Dos vectores pueden multiplicarse mediante el producto escalar, que suma los productos de sus respectivas componentes [4].

Sean **a** = $(a_1, a_2,..., a_n)$ y **b** = $(b_1, b_2,..., b_n)$ dos vectores. Entonces el producto escalar de **a** y **b**, denotado por **a•b**, está dado por:

$$a \bullet b = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \bullet \left(b_1, b_2, ..., b_n\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i \qquad (1)$$

Por ejemplo, el producto escalar de un vector **a** = (1, 0, 1, 1) y un vector **b** = (1, -1, -1, 0) es:

a•b = (1)(1) + (0)(-1) + (1)(-1) + (1)(0) = 1 + (-1) = 0.

Además, si el producto escalar de dos vectores es 0, como en el ejemplo anterior, se dice que éstos son ortogonales entre sí.

Algunas propiedades del producto escalar ayudan a comprender cómo funciona CDMA.

Si los vectores **a** y **b** son ortogonales, y además, representan los códigos de dos usuarios de CDMA, entonces:

$$a \bullet b = 0 \qquad (2)$$

Aplicando la definición de producto escalar de vectores y sus propiedades, se tiene:

$$a \bullet a = \|a\|^2$$

$$a \bullet (a+b) = \|a\|^2 \quad ya\ que \quad a \bullet a + a \bullet b = \|a\|^2 + 0$$

$$a \bullet (-a+b) = -\|a\|^2 \quad ya\ que \quad -a \bullet a + a \bullet b = -\|a\|^2 + 0$$

$$b \bullet (a+b) = \|b\|^2 \quad ya\ que \quad b \bullet a + b \bullet b = 0 + \|b\|^2$$

$$b \bullet (a-b) = -\|b\|^2 \quad ya\ que \quad b \bullet a - b \bullet b = 0 - \|b\|^2$$

Aunque el receptor capte combinaciones lineales de los vectores **a** y **b**, es decir, las señales procedentes de **a** y **b** al mismo tiempo, sumadas en el aire, si conoce el código de transmisión del usuario de interés, siempre podrá aislar sus datos de los del resto de los usuarios, simplemente mediante el producto escalar de la señal recibida con el código del usuario. Al ser el código del usuario ortogonal respecto a todos los demás, el producto seleccionará la señal de interés y anulará el resto.

Este resultado para dos usuarios es extensible a todos los interesados que se desee, siempre que existan códigos ortogonales suficientes para el número de usuarios deseado, lo que se logra incrementando la longitud del código.

La Figura 1 muestra cuatro señales digitales de cuatro bits cada una cuyas representaciones vectoriales son ortogonales:

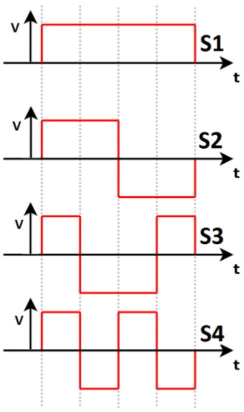

Figura 1. Representación de cuatro señales digitales ortogonales.
Fuente: elaboración propia

Si realizamos el producto escalar entre dos cualesquiera de ellas, comprobaremos que son ortogonales entre sí.

Por ejemplo, el producto escalar de las señales S2 = (1, 1, -1, -1) y S4 = (1, -1, 1, -1) es:

S2•S4 = (1)(1) + (1)(-1) + (-1)(1) + (-1)(-1) = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0.

3. Desarrollo

3.1 Implementación de CDMA

En los sistemas CDMA cada tiempo de bit se subdivide en *m* intervalos cortos llamados *chips*. En la Figura 1, por ejemplo, tenemos cuatro bits en cada señal, todos ellos de igual duración. Por lo general, hay 64 o 128 [chips/bit], pero en el ejemplo que se da a continuación por simplicidad utilizaremos 8 [chips/bit].

A cada estación de transmisión se le asigna un código único de *m* bits llamado *secuencia de chip*. Para transmitir un bit 1, una estación envía su secuencia de chips. Para transmitir un bit 0, envía el *complemento a uno* de su secuencia de chips (se intercambian los unos por ceros y los ceros por unos). No se permiten otros patrones. Por lo tanto, para *m = 8*, si a una determinada estación A se le asigna la secuencia de chips 00011011, ella envía un bit 1 mediante el envío de 00011011 y un bit 0 mediante el envío de 11100100.

El incremento de la cantidad de información que se va a enviar de *b* [bits/s] a *mb* [chips/s] sólo puede realizarse si el ancho de banda disponible se incrementa por un factor de *m*, lo que hace de CDMA una forma de comunicaciones de espectro expandido como habíamos mencionado anteriormente.

En la implementación de CDMA se utiliza una notación bipolar, donde el 0 binario es −1 y el 1 binario es +1. Además, mostraremos las secuencias de chips en notación vectorial, de manera que la transmisión de un bit 1 para la estación A es (-1, -1, -1, +1, +1, -1, +1,+1) y la transmisión de un bit 0, realizando el complemento, es (+1, +1, +1, -1, -1, +1, -1, -1). [2]

A continuación, mostramos las secuencias de chips asignadas a cuatro estaciones de ejemplo denominadas A, B, C y D; y su correspondiente notación bipolar:

$$\begin{array}{ll} A=(0,0,0,1,1,0,1,1) & A=(-1,-1,-1,+1,+1,-1,+1,+1) \\ B=(0,0,1,0,1,1,1,0) & B=(-1,-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1) \\ C=(0,1,0,1,1,1,0,0) & C=(-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1) \\ D=(0,1,0,0,0,0,1,0) & D=(-1,+1,-1,-1,-1,-1,+1,-1) \end{array}$$

Cada estación tiene su propia y única secuencia de chips. Utilizamos el símbolo A para indicar el vector de *m* chips para la estación A, y $\overline{A}$ para su complemento.

Todas las secuencias de chips son ortogonales entre sí, cumpliéndose las propiedades enumeradas anteriormente. Tales secuencias ortogonales de chips se pueden generar, por ejemplo, utilizando un método conocido como códigos de Walsh-Hadamard.

Durante cada tiempo de bit, una estación puede transmitir un 1 enviando su secuencia de chips, o puede transmitir un 0 enviando el complemento de su secuencia de chips, o puede quedarse en silencio y no transmitir nada.

Cuando dos o más estaciones transmiten de manera simultánea, sus señales bipolares se suman de manera lineal. Por ejemplo, si en un período de chips tres estaciones envían +1 y una estación envía −1, el resultado es +2. Se podría pensar que esto es como sumar voltajes; tres estaciones enviando +1 voltio y una estación enviando −1 voltio dan un total de 2 voltios.

Tomemos seis ejemplos de una y hasta cuatro estaciones que transmiten al mismo tiempo:

$$\text{Ejemplo 1: } --1- = C$$
$$\text{Ejemplo 2: } -11- = B + C$$
$$\text{Ejemplo 3: } 10-- = A + \overline{B}$$
$$\text{Ejemplo 4: } 101- = A + \overline{B} + C$$
$$\text{Ejemplo 5: } 1111 = A + B + C + D$$
$$\text{Ejemplo 6: } 1101 = A + B + \overline{C} + D$$

Observación: el símbolo – indica que dicha estación (de las cuatro que componen los ejemplos), no está transmitiendo en ese caso.

Las señales enviadas en cada caso son:

$$S1 = (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)$$
$$S2 = (-2, 0, 0, 0,+2,+2, 0,-2)$$
$$S3 = (0, 0,-2,+2, 0,-2, 0,+2)$$
$$S4 = (-1,+1,-3,+3,+1,-1,-1,+1)$$
$$S5 = (-4, 0,-2, 0,+2, 0,+2,-2)$$
$$S6 = (-2,-2, 0,-2, 0,-2,+4, 0)$$

En el Ejemplo 1, C transmite un bit 1, por lo que simplemente obtenemos la secuencia de chips de C. En el Ejemplo 2, tanto B como C transmiten bits 1, por lo que obtenemos la suma de sus secuencias de chips bipolares, o sea:

$$B + C = (-1,-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1) + (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1) = (-2, 0, 0, 0,+2,+2, 0,-2)$$

En el Ejemplo 3, la estación A envía un 1 y la estación B envía un 0. En el Ejemplo 4, A y C envían un 1 mientras que B envía un bit 0. En el Ejemplo 5, todas las estaciones envían un bit 1. Finalmente, en el Ejemplo 6, A, B y D envían un bit 1, mientras que C envía un bit 0. Observe que cada una de las secuencias S1 a S6 sólo representan un tiempo de bit.

Para recuperar el flujo de bits de una estación individual, el receptor debe conocer con anticipación la secuencia de chips de esa estación. Esto se realiza calculando el producto interno entre la secuencia de chips recibida, es decir, la suma lineal de todas las estaciones que transmitieron, y la secuencia de chips de la estación cuyo flujo de bits se está tratando de recuperar. Luego se divide ese resultado por el número de chips *m*.

Para hacer más concreto el proceso de decodificación, consideremos los seis ejemplos de las secuencias S1 a S6.

Suponga que el receptor está interesado en extraer el bit enviado por la estación C de cada una de las seis sumas S1 a S6. Para ello, calcula el bit realizando el producto escalar entre la señal S recibida y el vector correspondiente a la secuencia de chips de la estación C, y después se toma 1/8 del resultado (debido a que aquí $m = 8$).

Como se muestra a continuación, el bit correcto es decodificado de a uno por vez.

$$(S1 \bullet C)/m = [(-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (1+1+1+1+1+1+1+1)/8$$
$$(S1 \bullet C)/m = +1 \rightarrow \text{Correspondiente al 1 binario}$$

$$(S2 \bullet C)/m = [(-2, 0, 0, 0,+2,+2, 0,-2) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (2+0+0+0+2+2\ 0+2)/8$$
$$(S2 \bullet C)/m = +1 \rightarrow \text{Correspondiente al 1 binario}$$

$$(S3 \bullet C)/m = [(0, 0,-2,+2, 0,-2, 0,+2) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (0+0+2+2+0-2+0-2)/8$$
$$(S3 \bullet C)/m = 0 \rightarrow \text{La estación C permaneció en silencio}$$

$$(S4 \bullet C)/m = [(-1,+1,-3,+3,+1,-1,-1,+1) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (1+1+3+3+1-1+1-1)/8$$
$$(S4 \bullet C)/m = +1 \rightarrow \text{Correspondiente al 1 binario}$$

$$(S5 \bullet C)/m = [(-4, 0,-2, 0,+2, 0,+2,-2) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (4+0+2+0+2+0-2+2)/8$$
$$(S5 \bullet C)/m = +1 \rightarrow \text{Correspondiente al 1 binario}$$

$$(S6 \bullet C)/m = [(-2,-2, 0,-2, 0,-2,+4, 0) \bullet (-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)]/8$$
$$= (2-2+0-2,+0-2-4+0)/8$$
$$(S6 \bullet C)/m = -1 \rightarrow \text{Correspondiente al 0 binario}$$

3.2 Códigos de Walsh-Hadamard

Los códigos de Walsh constituyen uno de los códigos ortogonales más comúnmente usados en aplicaciones CDMA. Estos códigos se calculan a partir de una matriz cuadrada especial conocida como la matriz de Hadamard, por ello se denominan códigos de Walsh-Hadamard.

Para un conjunto de códigos de Walsh de longitud *n*, tendremos una matriz cuadrada de *n* códigos de Walsh, de modo que le corresponde una matriz de Hadamard de tamaño $n_x n$.

La primera columna de esta matriz contiene una serie de 1 y las siguientes columnas contienen una serie de 1 y -1 combinados. Cada columna es ortogonal entre sí, además, los 1 y -1 tienen la misma frecuencia de aparición a partir de la segunda columna.

Esta matriz es obtenida de forma recursiva a partir de la siguiente expresión:

$$H(2^k) = \begin{bmatrix} H(2^{k-1}) & H(2^{k-1}) \\ H(2^{k-1}) & -H(2^{k-1}) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Siendo: $H(2^0)=[1]$

Por consiguiente:

$$H(2^1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$H(2^2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$H(2^3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Se puede ver con facilidad que todas las filas y columnas son ortogonales entre sí y que la longitud de los códigos de Walsh siempre son potencias de 2.

Para facilitar la obtención de estas matrices se puede utilizar la función *hadamard(n)* en Matlab, la cual devuelve la matriz de Hadamard de orden *n*, recordando que *n* debe ser un número potencia de 2. En caso contrario, arrojará error.

```
>> hadamard(1)
ans =
     1
>> hadamard(2)
ans =
     1     1
     1    -1
>> hadamard(4)
ans =
     1     1     1     1
     1    -1     1    -1
     1     1    -1    -1
     1    -1    -1     1
```

```
>> hadamard(8)
ans =
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1    -1     1    -1     1    -1     1    -1
     1     1    -1    -1     1     1    -1    -1
     1    -1    -1     1     1    -1    -1     1
     1     1     1     1    -1    -1    -1    -1
     1    -1     1    -1    -1     1    -1     1
     1     1    -1    -1    -1    -1     1     1
     1    -1    -1     1    -1     1     1    -1
```

En el caso de utilizar un software libre como SciLab, no existe un comando que nos devuelva directamente una matriz de Hadamard de orden *n* [5]. Se puede recurrir a una herramienta con la que cuenta SciLab que es el instalador de módulos adicionales.

De los distintos módulos disponibles, utilizamos el denominado "Make Matrix", que cuenta con la función *hadamard (n)*, la cual devuelve una matriz de Hadamard de orden *n*, recordando que *n* debe ser un número potencia de 2.

Una vez instalado, ejecutamos:

```
-->makematrix_hadamard ( 1 )
 ans  =
    1.
-->makematrix_hadamard ( 2 )
 ans  =
    1.    1.
    1.  - 1.
-->makematrix_hadamard ( 4 )
 ans  =
    1.    1.    1.    1.
    1.  - 1.    1.  - 1.
    1.    1.  - 1.  - 1.
    1.  - 1.  - 1.    1.
-->makematrix_hadamard ( 8 )
 ans  =
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.  - 1.    1.  - 1.    1.  - 1.    1.  - 1.
    1.    1.  - 1.  - 1.    1.    1.  - 1.  - 1.
    1.  - 1.  - 1.    1.    1.  - 1.  - 1.    1.
    1.    1.    1.    1.  - 1.  - 1.  - 1.  - 1.
    1.  - 1.    1.  - 1.  - 1.    1.  - 1.    1.
```

1. 1. - 1. - 1. - 1. - 1. 1. 1.

1. - 1. - 1. 1. - 1. 1. 1. - 1.

4. A modo de cierre

La técnica de CDMA descripta, conocida en el ambiente de la telefonía móvil como CDMA sincrónico, fue desarrollada suponiendo un medio ideal y libre de ruido, con una capacidad, es decir el número de estaciones arbitrariamente grande.

En un medio real, los sistemas CDMA sincrónicos funcionan bien siempre que no haya excesivo retardo en la llegada de las señales, o sea, que el transmisor y el receptor deben estar sincronizados al momento de enviar y recibir información.

Además, en la práctica, las limitaciones físicas de los equipos reducen la capacidad de forma considerable. Por ejemplo, el estándar IS-95, un estándar de telefonía móvil utilizado en Argentina hasta el año 2008, empleaba códigos ortogonales de Walsh de 64 bits para codificar las señales y separar a sus distintos usuarios, lo que significa que cada estación podía manejar hasta un máximo de 64 usuarios en un mismo momento.

CDMA logró establecerse en el mercado de las comunicaciones móviles y ha madurado al punto en que no sólo es aceptable, sino también una solución muy práctica frente a otras tecnologías, instituyéndose como la base de los sistemas móviles de tercera generación (3G).

Como reflexión final con respecto a las tareas realizadas en el marco del Proyecto de investigación “La trascendencia del Álgebra Lineal en el ciclo superior de ingeniería”, señalamos la satisfacción de poder trabajar con becarios alumnos en cuestiones específicas de ingeniería, en este caso particular correspondiente a la carrera ingeniería electrónica. Retomamos conceptos básicos del Álgebra Lineal y vemos sus aplicaciones en las materias específicas de la carrera. También ellas se pueden constituir en un elemento disparador para próximos desarrollos de los becarios dentro del Proyecto. Asimismo, algunas cuestiones abordadas pueden llevarse al aula en dicha materia, Álgebra Lineal y Geometría Analítica, instaurando elementos motivadores para el estudio de la Matemática, siempre realizando las simplificaciones correspondientes para que puedan ser comprendidas por los alumnos de los primeros niveles de la carrera. La indagación constante de situaciones que muestren la necesidad del desarrollo de los conceptos matemáticos, contribuye para que desde los primeros años de la carrera se manifieste la aplicabilidad de los mismos.

5. Referencias

[1] YANG, S. (1998). *CDMA RF System Engineering*. Londres: Artech House Publishers, p.2-9, p.43-51.

[2] TANENBAUM, A; WETHERALL, D (2012). *Redes de Computadoras*. México: Pearson, p.117-119, p.146-147.

[3] KUMAR DAS, S. (2010). *Mobile Handset Design.* Wiley, p.165-170.

[4] GROSSMAN, S. (2008). *Álgebra Lineal.* México: McGraw-Hill, p.57-59.

[5] https://atoms.scilab.org.