Complemento Teórico

Análisis Matemático I

Integral Definida

INTEGRAL DEFINIDA

Aplicación de la integral definida

Para comprender el concepto de la integral definida, que es primordial, intentemos resolver el *problema del área*.

Calcular el área de una región plana no es un problema complicado, es una cuestión muy fácil de responder para regiones con lados rectos. Si la región plana es un rectángulo, se define como el producto del largo de la base $\boldsymbol{b}$ y el ancho o altura $\boldsymbol{h}$, siendo área $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{h}$. En el caso del área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos y rectángulos y sumar las áreas de estas figuras.

Sin embargo, al buscar el área de una región con lados curvos tenemos que encontrar la forma de hacerlo para hallar la definición exacta.

Entonces, busquemos como hallar el área de la región *S,* que se encuentra debajo de la gráfica de la función $y = f(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$.

Esto significa que la región plana S está limitada por la gráfica de una función continua $f\ [donde\ f(x) \geq 0]$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$, y el $eje\ x$.

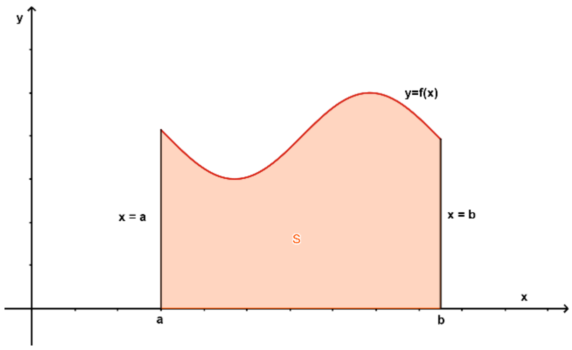


Ilustración 1 - Región plana S.

Al intentar resolver el problema del área, todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer que esta idea sea precisa dando una definición exacta de área.

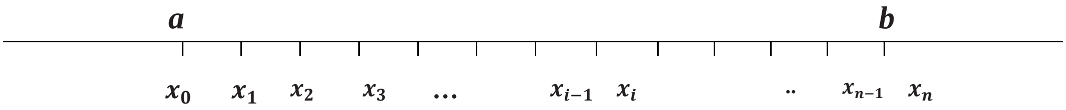
Si recordamos que, al definir la recta tangente, primero obtuvimos una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación, tomamos el límite de estas aproximaciones. De tal manera, seguiremos una idea similar para las áreas.

En este caso, consideremos una aproximación del área de la región plana *S,* por medio de rectángulos y la suma de las áreas de cada uno de ellos, conforme se incrementa el número de rectángulos, la aproximación tiende a ser cada vez más exacta. El límite cuando la cantidad de particiones aumenta y la amplitud de los intervalos tiende a cero nos acercará a la exactitud.

Comenzaremos en dividir la región S en rectángulos de igual amplitud, para ello dividimos el intervalo $[a, b]$ en $\boldsymbol{n}$ partes.

De esta manera generaremos sub-intervalos con igual amplitud Δx, tal que:

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, quedando determinados los sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con i desde 1 hasta n.



Al definir $f(x)$ continua en $[a , b]$ se verifica el Teorema de Valor Extremo. Dicho teorema asegura la existencia de un valor máximo absoluto M_i y de un valor mínimo absoluto m_i para la función continua en un intervalo cerrado $[\ a\ ;\ b]$.

Como la función es continua en $[\ a\ ;\ b]$ entonces lo será en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si nos posicionamos dentro de un sub-intervalo cualquiera $[x_{i-1}, x_i]$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, allí existirá un valor de *x*, perteneciente a ese sub intervalo, para el cual la función allí alcance el valor máximo de $f(x)$, es decir M_i.

Es así como obtenemos las dimensiones del rectángulo cuya base Δx_i y altura es M_i, el producto de ambos nos determinará el área de ese rectángulo y al ir incrementando la variable *i* desde *1*, hallaremos el área de cada uno de ellos.

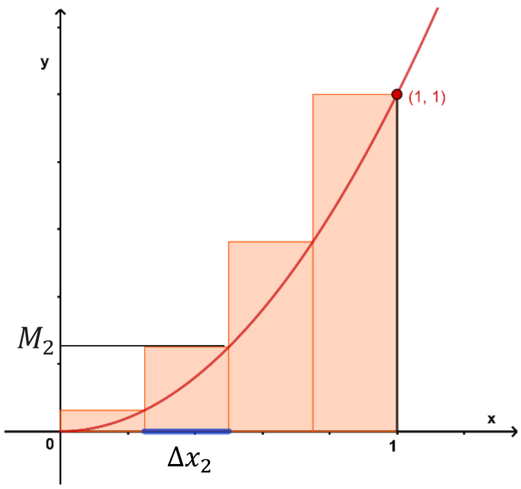


Ilustración 2 – Cálculo del área S_M.

Si sumamos las áreas de cada rectángulo hallado obtenemos $\boldsymbol{S_M}$.

Por lo tanto, podemos expresar a $\boldsymbol{S_M} = \sum_{i=1}^{n} M_i\ \Delta x_i$.

$\boldsymbol{S_M}$ que es la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, nos acerca al valor aproximado del área de la región comprendida entre la gráfica de la función para los valores de x comprendidos en $[a, b]$ y el eje de las *x*.

Consideremos el procedimiento anterior, pero en lugar de usar los rectángulos anteriores, es posible optar por otros más pequeños cuyas alturas son los valores mínimos de $f(x)$ en los sub-intervalos, por lo tanto consideremos el valor de la función m_i.

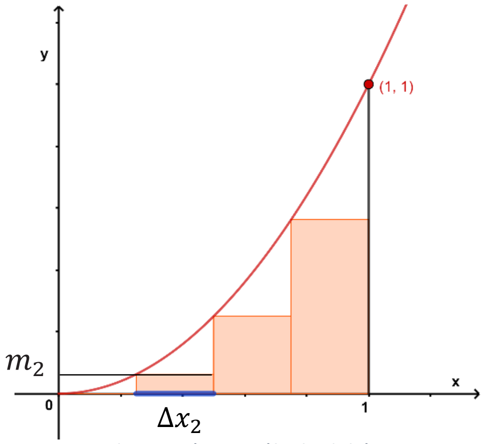


Ilustración 3 - Cálculo del área S_m.

Las dimensiones de cada uno de estos nuevos rectángulos quedarán entonces Δx_i (base) y m_i (altura). Así podemos calcular el área de cada rectángulo como el producto de $\Delta x_i * m_i$ para todo *i* desde *1* hasta *n*.

Si sumamos las áreas de cada rectángulo hallado obtenemos $\boldsymbol{S_m}$

Podemos expresar a $\boldsymbol{S_m} = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$

Pero no podemos perder de vista que en ambas opciones tendremos valores distintos, según tomamos el valor máximo o mínimo de cada sub-intervalo, es decir, el valor de la suma de las áreas de los rectángulos es distinta.

Pues, al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más bajos $\boldsymbol{S_m}$ (*Suma Menor*, considerando los valores mínimos de la función en cada sub-intervalo) y la suma de las áreas de los rectángulos más altos $\boldsymbol{S_M}$ (*Suma Mayor*, a partir de los valores máximos de la función en cada sub-intervalo), obtenemos **estimaciones** distintas una inferior y otra superior para el *Área.*

$$\boldsymbol{S_m} \leq \boldsymbol{S_M}$$

Entonces una respuesta posible para la pregunta ¿cómo hallar el área S? se encuentra en alguna parte entre ambas estimaciones antes mencionadas.

$$\boldsymbol{S_m} \leq \boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{S_M}$$

Ahora bien, si se divide el intervalo en sub intervalos mayores, se incrementa el número de rectángulos utilizados y se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región.

Si aplicamos límite, y si los límites existen, teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{S_m} \leq \boldsymbol{S_M}$$

Sabemos, entonces que

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{S_m} \leq \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{S_M}$$

Además, según lo que se planteó:

$$\boldsymbol{S_m} \leq \boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{S_M}$$

Entonces podemos asegurar que:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_m} \le \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S} \le \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_M}$$

Y por el teorema de la comprensión, si $\boldsymbol{S_m} \le \boldsymbol{S} \le \boldsymbol{S_M}$ cuando n tiende a infinito, podemos indicar que:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_m} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_M} = A$$

Finalmente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S} = A$$

El **área A** de la región S**,** que se encuentra debajo de la gráfica de la función $f\ (x)$, continua y positiva, es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} S$$

Ahora bien, en lugar de considerar los valores extremos (máximo absoluto o mínimo absoluto) de la función en los subintervalos, podría tomar la altura del *i*-ésimo rectángulo como el valor de $f(x)$ en *cualquier* número x_i^* en el *i*-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llaman **puntos muestras**. Teniendo entonces:

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1{}^*)\Delta x + f(x_2{}^*)\Delta x + f(x_3{}^*)\Delta x + \cdots .. + f(x_n{}^*)\Delta x]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Siendo ***A* el área de la región S**, que se encuentra debajo de la gráfica de la función $f(x)$, función positiva y continua.

Este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de cálculos incluso cuando $f(x)$ no es necesariamente una función positiva.

A partir de este límite podemos definir integral definida de la siguiente manera:

"Si $f(x)$ es una función continua definida en un intervalo $[a, b]$, divida en *n* sub-intervalos de igual ancho, donde $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_n = b$, son los extremos de cada sub-intervalo y elige los puntos muestra en cada sub-intervalo $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ *tal que* $\boldsymbol{x_i^*}$ ***sea el i-esimo.***

La integral definida de f, desde a hasta b se define como:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(\boldsymbol{x_i^*})\Delta x \qquad (1)$$

Siempre que exista el límite, si es que existe, entonces $\boldsymbol{f(x)}$ ***es integrable en el intervalo cerrado desde*** $\boldsymbol{x = a}$ ***hasta*** $\boldsymbol{x = b}$*.*

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, o si $f(x)$ tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x).dx$ existe.

Ahora bien, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma, para ello se debe tener en cuenta los siguientes conceptos:

Una función $\boldsymbol{F}$ recibe el nombre de **antiderivada de** $\boldsymbol{f}$ sobre un intervalo I

$$si \quad \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})\; para\; todo\; x\; en\; I.$$

Entonces F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, pues al $derivar\ F$ obtenemos como resultado la función f, por lo tanto, podemos definir la $antiderivada\ más\ general\ de\ f$ de la siguiente manera:

sobre *I* es $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$ ***pues al derivarla hallamos f***

entonces $\frac{\partial}{\partial x}\,(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

donde C es una constante arbitraria, la antiderivada general está formada por un conjunto de antiderivadas cada una de ella es miembro de la familia de la antiderivada general.

Las antiderivadas de una familia difieren entre sí en una constante.

Ahora desarrollaremos el teorema que relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral.

El cálculo diferencial nos permitió encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto y a partir del cálculo de la integral encontramos la solución para el problema del área desarrollado con anterioridad.

Este teorema deja al descubierto que los procesos de derivación y de integración (definida) son operaciones inversas. La pendiente de la recta tangente se definió partiendo del cociente de los incrementos, de la pendiente de la recta secante. De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió partiendo del producto del área de un rectángulo.

El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite utilizados para definir la derivada y la integral definida preservan esta relación inversa.

La primera parte del teorema PARTE I, trata de funciones definidas por la siguiente ecuación, con g que depende solo de x, que aparece como límite superior variable en la integral,

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Donde f es una función continua sobre el intervalo cerrado y x varía entre *a* y *b*.

El límite superior de la integral es variable, si fuese fijo el resultado sería un número.

En este caso, x puede variar, obteniendo entonces distintos números, entonces el resultado varía y se obtiene la función $g(x)$.

Si $f\ es\ una\ función\ positiva$ entonces $g(x)$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f desde a **hasta** x, siendo que x puede variar desde a a b.

Considere que si g se define como la integral de f, entonces g resulta ser una antiderivada de f.

Al hallar g' , por la definición de derivada, para $h > 0$ tenemos $g(x+h) - g(x)$ se obtiene restando las áreas, por lo tanto, **es** el área de la gráfica de f de x a $x+h$.

Para h pequeñas, esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo de altura $f(x)$ y ancho h.

$$g(x+h) - g(x) \approx f(x)\,h \qquad entonces \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia,

$$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Entonces la *derivada* de una *integral* definida con respecto de su *límite superior* es el *integrando* evaluado sobre el *límite superior*. Eso quedará demostrado, en el siguiente teorema (parte I)

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO- PARTE I

Si $f(x)$es continua en $[a,b]$, entonces la función $g(x)$ definida por:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

Es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y $g'(x) = f(x)$

DEMOSTRACIÓN

Si x y $x+h$ están en (a,b), entonces:

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt \; - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)dt \; + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \qquad\qquad (2)$$

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que $f(x)$ es continua en $[x, x+h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x+h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v)M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ en $[x, x+h]$.

De acuerdo a propiedades de las integrales, se tiene:

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \; \leq Mh$$

Es decir,

$$f(u)h \leq \int_{x}^{x+h} f(t)dt \ \leq f(v)h$$

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt \ \leq f(v)$$

Enseguida, utilizando la ecuación (2) para reemplazar la parte media de esta desigualdad

$$f(u) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(v) \qquad (3)$$

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$.

Ahora, dejando que $h \to 0$, después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$.

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

Porque $f(x)$ es continua en x. de acuerdo a expresión (3) y el teorema de la compresión:

$$g´(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o $x = b$, entonces la ecuación anterior se puede interpretar como un límite unilateral.

Porque g es derivable en $(a, b) \to$ g es continua en (a, b)

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} \int_a^a f(t)dt = g(a) \ \text{ y } \lim_{x\to b^-} g(x) = \lim_{x\to b^-} \int_a^b f(t)dt = g(b)$$

Entonces g es continua en $[a, b]$

De acuerdo con la notación de Leibniz para las derivadas, se puede expresar al Teorema Fundamental del Cálculo Parte I, como:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt \ = f(x)$$

cuando $f(x)$ es continua. En términos generales, esta última ecuación establece que si primero integra $f(x)$ y luego obtiene la derivada del resultado, se regresa a la función original $f(x)$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE II

Si $f(x)$es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, es decir, una función tal que $F´(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Si $F(x)$ es cualquier otra antiderivada de $f(x)$ en $[a, b]$, y sabiendo que la diferencia entre $F(x)$ y $g(x)$ es una constante tenemos que:

$$F(x) = g(x) + C$$

Para $a < x < b$. Pero tanto $F(x)$ como $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación anterior, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene:

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación $F(x) = g(x) + C$ con $x = a$ y $x = b$, llega a:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

La parte II del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, entonces puede evaluar $\int_a^b f(x)dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de $F(x)$ en los extremos del intervalo $[a, b]$.

Como utilizamos el teorema para resolver una integral

1. Partimos de suponer que conocemos una antiderivada o primitiva de f , la función $F(x)$ tal que $F'(x) = f$, ya que se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.

2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

BIBLIOGRAFÍA

STEWART, J. Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. Thomson Learning Publishers. 978-970-686-653-0- Edición 6ª - 2008

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. Cálculo I.970-10-5274-9 Edición 8 ª - 2006