UTN SANTA FE

Resolución

Análisis Matemático I

Aplicación de la Integral Definida

A continuación, se brinda la resolución del problema planteado en la MUA. En el presente archivo se respeta la secuencia recomendada en el apartado ***Instrucciones*** para realizar el análisis y los cálculos del problema que Rodrigo tuvo que resolver:

1. Leer el problema planteado en el Contexto.

Rodrigo es Ingeniero Mecánico y actualmente se desempeña como jefe del Departamento de Mantenimiento en una empresa láctea de la zona. Como la fábrica está invirtiendo en nueva tecnología, le informaron que la sala de pasteurizado se debía reformar ya que se adquirió una desnatadora más sofisticada y un pasteurizador que procesa un mayor caudal. Entonces, una de las tareas que tenía a cargo era pintar una pared reformada de la sala. Para esa actividad debía:

- Seleccionar a un operario para que en turno extra realice la mano de obra.
- Calcular los litros de pintura que se requerirán.
- Comprar los pinceles, tarros de pintura y elementos necesarios.

Rodrigo evidenció que la pared a pintar está definida por las siguientes tres funciones:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \qquad g(x) = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + \frac{47}{10} \qquad w(x) = -(x - \frac{25}{2})$$

El primer tramo *f(x)* está definido en los primeros 3,5 metros de pared, el segundo *g(x)* desde la finalización del primero hasta los 8,5 metros y el último tramo correspondiente a *w(x)* desde el segundo tramo hasta los 11,5 metros.

¿Podrá Rodrigo calcular el área de la pared que se debe pintar? ¿Cuántos litros de pintura se deben comprar sabiendo que el rendimiento de la pintura por metro cuadrado de trabajo terminado es de 250 cm^3?

2. Identificar las variables involucradas.

x: ancho de la pared en metros.

f, g y ***w***: altura de la pared en metros.

3. Si es posible realizar un bosquejo de la situación planteada.

Ver Figura 1.

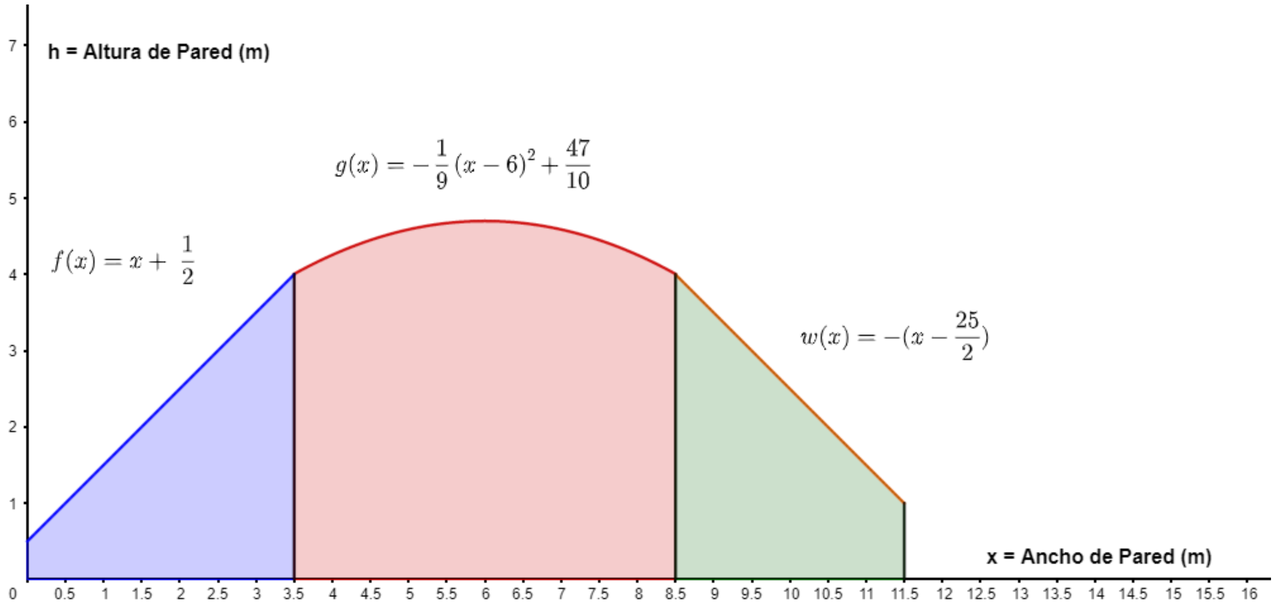

Figura 1: Representación de la situación problema.

4. Identificar los datos que brinda el problema y lo que se desconoce.

Datos:

- Funciones que representan cómo está delimitado cada tramo de la pared:

$f(x) = x + \frac{1}{2}$ cuando x toma valores entre 0 y 3,5

$g(x) = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + \frac{47}{10}$ cuando x toma valores entre 3,5 y 8,5

$w(x) = -(x - \frac{25}{2})$ cuando x toma valores entre 8,5 y 11,5

Incógnita:

Área total de la pared que se debe pintar para determinar cantidad de litros a comprar.

A continuación, **estimaremos**, realizando un cálculo **aproximado**, el resultado del área total de la pared para luego calcular el área mediante la aplicación de la integral definida.

5. Calcular el área aproximada S_M con *n=5* en cada tramo de la pared**.**

En este inciso se solicita la aproximación del área de interés para cada tramo dado.

Para ello, estimaremos el área, a través del cálculo de la sumatoria de las áreas de los rectángulos, que tienen igual base y sus respectivas alturas resultan del valor de la función en el valor de x que corresponda al máximo valor de la función de cada sub intervalo generado. Por ello, para estimar el área $S_{M_{Tramo1}}$, se debe dividir el intervalo de estudio en 5 (cinco) partes iguales, lo que nos determinará la base de cada rectángulo, mientras que la altura de cada uno de ellos será diferente y estará dada por el valor máximo de la función en cada sub intervalo.

Tramo 1:

La función $f(x)$ está definida para los valores de x desde 0 hasta 3.5 metros .

Se debe dividir el tramo completo en cinco partes para obtener cada subintervalo. Cada uno de ellos será de amplitud (3,5-0) /5= 0,7 metros. La función debe ser evaluada para el valor de x mayor de cada subintervalo, obteniendo la altura de cada uno de ellos $M_i, siendo\ i = 1\ hasta\ 5$

Rectángulo 1: $M_1 = f(0,7) = 0,7 + \frac{1}{2} = 1,2\ [m]$

Rectángulo 2: $M_2 = f(1,4) = 1,4 + \frac{1}{2} = 1,9\ [m]$

Rectángulo 3: $M_3 = f(2,1) = 2,1 + \frac{1}{2} = 2,6\ [m]$

Rectángulo 4: $M_4 = f(2,8) = 2,8 + \frac{1}{2} = 3,3\ [m]$

Rectángulo 5: $M_5 = f(3,5) = 3,5 + \frac{1}{2} = 4\ [m]$

Todos los rectángulos tendrán como base la amplitud de cada subintervalo, es decir (3,5-0) /5= 0,7 metros y como altura M_i, según corresponda $siendo\ i = 1\ hasta\ 5$.

Como el área del rectángulo es base por altura, el área estimada del Tramo 1 está dada por:

$$S_{M_{Tramo1}} = 0,7.M_1 + 0,7.M_2 + \ldots + 0,7.M_5 = 0,7x(1,2 + 1,9 + 2,6 + 3,2 + 4) = 9,1\ [m^2]$$

Tramo 2:

La función $g(x)$ está definida para los valores de x desde 3,5 hasta 8,5 metros. Los cinco rectángulos tendrán la base igual a (8,5 – 3,5)/5 = 1 metro, mientras que la altura de cada uno de ellos estará dada por:

Rectángulo 1: $M_1 = g(4,5) = -\frac{1}{9}(4,5 - 6)^2 + \frac{47}{10} = 4,45\ [m]$

Rectángulo 2: $M_2 = g(5,5) = -\frac{1}{9}(5,5 - 6)^2 + \frac{47}{10} = \frac{841}{180} \cong 4,67\ [m]$

Rectángulo 3: $M_3 = g(6) = -\frac{1}{9}(6 - 6)^2 + \frac{47}{10} = 4,7\ [m]$

Rectángulo 4: $M_4 = g(6,5) = -\frac{1}{9}(6,5 - 6)^2 + \frac{47}{10} = \frac{841}{180} \cong 4,67\ [m]$

Rectángulo 5: $M_5 = g(7,5) = -\frac{1}{9}(7,5 - 6)^2 + \frac{47}{10} = 4,45\ [m]$

Como el área del rectángulo es base por altura, el área máxima estimada del Tramo 2 está dada por:

$$S_{M_{Tramo2}} = 1.M_1 + 1.M_2 + ... + 1.M_5 = 4{,}45 + 4{,}67 + 4{,}70 + 4{,}67 + 4{,}45 \cong 22{,}94\ [m^2]$$

Tramo 3:

La función $w(x)$está definida para los valores de x desde 8,5 hasta 11,5 metros. Los cinco rectángulos tendrán una base de (11,5-8,5)/5= 0,6 metros, mientras que la altura de cada uno de ellos estará dada por:

Rectángulo 1: $M_1 = w(8.5) = -\left(8.5 - \frac{25}{2}\right) = 4\ [m]$

Rectángulo 2: $M_2 = w(9{,}1) = -\left(9{,}1 - \frac{25}{2}\right) = 3{,}4[m]$

Rectángulo 3: $M_3 = w(9{,}7) = -\left(9{,}7 - \frac{25}{2}\right) = 2{,}8\ [m]$

Rectángulo 4: $M_4 = w(10{,}3) = -\left(10{,}3 - \frac{25}{2}\right) = 2{,}2\ [m]$

Rectángulo 5: $M_5 = w(10{,}9) = -\left(10{,}9 - \frac{25}{2}\right) = 1\ {,}6[m]$

Como el área del rectángulo es base por altura, el área máxima estimada del Tramo 3 está dada por:

$$S_{M_{Tramo3}} = 0{,}6.M_1 +, 0{,}6.M_2 + ... + 0{,}6.M_5 = 0{,}6x(4 + 3{,}4 + 2{,}8 + 2{,}2 + 1{,}6) = 8{,}4\ [m^2]$$

La suma de todas las $S_{M_{Tramos}}$ nos determinan un área total estimada:

El área total S_M de la pared está dada por:

$$S_M = S_{M_{Tramo1}} + S_{M_{Tramo2}} + S_{M_{Tramo3}} \cong 9{,}1 + 22{,}94 + 8{,}4 \cong 40{,}44\ [m^2]$$

6. Calcular el área aproximada S_m para cada tramo con *n=5*.

De manera similar al inciso previo, en este apartado hay que estimar el área de la pared S_m, para ello se debe dividir el intervalo de estudio en 5 (cinco) partes iguales, lo que nos determinará la base de los rectángulos, mientras que la altura de cada uno de ellos será diferente y estará dada por el valor mínimo de la función para el valor x que corresponda a ese mínimo en el sub intervalo.

Tramo 1:

La función $f(x)$ está definida para los valores de x desde 0 hasta 3.5 metros .

Se debe dividir el tramo completo en cinco partes para obtener cada sub intervalo. Cada uno de ellos será de amplitud (3,5-0) /5= 0,7 metros, mientras que la altura de cada uno de ellos estará dada por:

<u>Rectángulo 1:</u> $m_1 = f(0) = 0 + \frac{1}{2} = 0,5\ [m]$

<u>Rectángulo 2:</u> $m_2 = f(0,7) = 0,7 + \frac{1}{2} = 1,2\ [m]$

<u>Rectángulo 3:</u> $m_3 = f(1,4) = 1,4 + \frac{1}{2} = 1,9\ [m]$

<u>Rectángulo 4:</u> $m_4 = f(2,1) = 2,1 + \frac{1}{2} = 2,6\ [m]$

<u>Rectángulo 5:</u> $m_5 = f(2,8) = 2,8 + \frac{1}{2} = 3,3\ [m]$

Como el área del rectángulo es base por altura, el área del tramo 1 está dada por:

$$S_{m_{Tramo1}} = 0,7.m_1 + 0,7.m_2 + \ldots + 0,7.m_5 = 0,7.(0,5 + 1,2 + 1,9 + 2,6 + 3,3) = 6,65\ m^2$$

Tramo 2:

La función $g(x)$ está definida para los valores de x desde 3,5 hasta 8,5 metros. Los cinco rectángulos tendrán la base igual a (8,5 – 3,5)/5 = 1 metro,, mientras que la altura de cada uno de ellos estará dada por:

<u>Rectángulo 1:</u> $m_1 = g(3,5) = 4,01$

<u>Rectángulo 2:</u> $m_2 = g(4,5) = -\frac{1}{9}(4,5-6)^2 + \frac{47}{10} = 4,45\ [m]$

<u>Rectángulo 3:</u> $m_3 = g(5,5) = -\frac{1}{9}(5,5-6)^2 + \frac{47}{10} = 4,67\ [m]$

<u>Rectángulo 4:</u> $m_4 = g(7,5) = -\frac{1}{9}(7,5-6)^2 + \frac{47}{10} = 4,45\ [m]$

<u>Rectángulo 5:</u> $m_5 = g(8,5) = -\frac{1}{9}(8,5-6)^2 + \frac{47}{10} = 4,01\ [m]$

Como el área del rectángulo es base por altura, el área estimada del Tramo 2 está dada por:

$$S_{m_{Tramo2}} = 1.m_1 + 1.m_2 + \ldots + 1.m_5 = 4,01 + 4,45 + 4,67 + 4,45 + 4,01 \cong 21,59\ [m^2]$$

Tramo 3:

La función $w(x)$está definida para los valores de x desde 8,5 hasta 11,5 metros. Los cinco rectángulos tendrán una base de (11,5-8,5)/ 5= 0,6 metros, mientras que la altura de cada uno de ellos estará dada por:

<u>Rectángulo 1:</u> $m_1 = w(9,1) = -(9,1 - \frac{25}{2}) = 3,4\ [m]$

<u>Rectángulo 2:</u> $m_2 = w(9,7) = -(9,7 - \frac{25}{2}) = 2,8\ [m]$

Rectángulo 3: $m_3 = w(10{,}3) = -(10{,}3 - \frac{25}{2}) = 2{,}2\ [m]$

Rectángulo 4: $m_4 = w(10{,}9) = -(10{,}9 - \frac{25}{2}) = 1{,}6\ [m]$

Rectángulo 5: $m_5 = w(11{,}5) = -\left(11{,}5 - \frac{25}{2}\right) = 1\ [m]$

Como el área del rectángulo es base por altura, el área del Tramo 3 está dada por:

$$S_{m_{Tramo3}} = 0{,}6.m_1 +, 0{,}6.m_2 +\ldots+ 0{,}6.m_5 = 0{,}6.(3{,}4 + 2{,}8 + 2{,}2 + 1{,}6 + 1) = 6{,}6\ [m^2]$$

La suma de todas las $S_{m_{Tramos}}$ nos determinan un área total estimada:

Finalmente, área total S_m de la pared está dada por:

$$S_m = S_{m_{Tramo1}} + S_{m_{Tramo2}} + S_{m_{Tramo3}} = 6{,}65 + 21{,}59 + 6{,}6 \cong 34{,}84\ [m^2]$$

Esto nos indica que el **área exacta** se encontrará entre ambas **áreas totales estimadas.**

Para calcular exactamente cuanta pintura debe comprar Rodrigo aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) que nos permite de forma sencilla resolver las integrales.

7. Calcular el área exacta S de cada tramo.

A través de todos los conceptos y herramientas que se han adquirido, se sabe que la aplicación de la integral definida de una función continua o seccionalmente continua y positiva es el área debajo de la curva. En este apartado haremos uso de esta aplicación para calcular el área total de la pared a pintar.

Tramo 1:

$$S_1 = \int_0^{3,5} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^{3,5} x dx + \int_0^{3,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{3,5} + \frac{1}{2}x \Big|_0^{3,5}$$

$$\left(\frac{1}{2}(3{,}5)^2 - \frac{1}{2}(0)^2\right) + \left(\frac{1}{2}3{,}5 - \frac{1}{2}0\right) = \frac{63}{8} = 7{,}875\ [m^2]$$

Tramo 2:

$$S_2 = \int_{3,5}^{8,5} \left(-\frac{1}{9}(x-6)^2 + \frac{47}{10}\right) dx = \int_{3,5}^{8,5} -\frac{1}{9}(x-6)^2 dx + \int_{3,5}^{8,5} \frac{47}{10} dx =$$

$$-\frac{1}{9}\int_{3,5}^{8,5} (x^2 - 12x + 36) dx + \int_{3,5}^{8,5} \frac{47}{10} dx =$$

$$-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x\right) \Big|_{3,5}^{8,5} + \frac{47}{10}x \Big|_{3,5}^{8,5} =$$

$$-\frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{3}(8{,}5)^3-6(8{,}5)^2+36.8{,}5\right)-\left(\frac{1}{3}(3{,}5)^3-6(3{,}5)^2+36.3{,}5\right)\right]+\left(\frac{47}{10}8{,}5-\frac{47}{10}3{,}5\right)=$$

$$\approx 22{,}3426\ [m^2]$$

Tramo 3:

$$S_3=\int_{8,5}^{11,5}-\left(x-\frac{25}{2}\right)dx=-\int_{8,5}^{11,5}\left(x-\frac{25}{2}\right)dx=-\left(\int_{8,5}^{11,5}x\,dx-\int_{8,5}^{11,5}\frac{25}{2}dx\right)=$$

$$-\int_{8,5}^{11,5}x\,dx+\int_{8,5}^{11,5}\frac{25}{2}dx\ =-\left(\frac{1}{2}x^2\left|_{8,5}^{11,5}\right.\right)+\frac{25}{2}x\left|_{8,5}^{11,5}\right.$$

$$-\left(\tfrac{1}{2}(11{,}5)^2-\tfrac{1}{2}(8{,}5)^2\right)+\left(\tfrac{25}{2}11{,}5-\tfrac{25}{2}8{,}5\right)=\tfrac{15}{2}=7{,}5\ [m^2]$$

Área exacta total

Finalmente, el área total de la pared está dada por:

$$S=S_{Tramo1}+S_{Tramo2}+S_{Tramo3}$$

$$S\approx 37{,}7176\ [m^2]$$

La cantidad exacta de pintura que deberá comprar Rodrigo

Para hallar la cantidad de pintura debemos multiplicar el área exacta total hallada por la cantidad de pintura que se requiere por $[m^2]$

$$\mathbf{37,7176}[m^2]*250\,\frac{[cm^3]}{[m^2]}$$

Por lo tanto, Rodrigo necesitará 9429,4 $[cm^3]$ de pintura, que corresponde a 9,4[l] de pintura.

8. Mediante el deslizador presentado en el apartado Situación Dinámica, incrementar el número de rectángulos y analizar como varía el área aproximada bajo la curva.

Observar que cada tramo posee su propio deslizador. ¡A jugar!

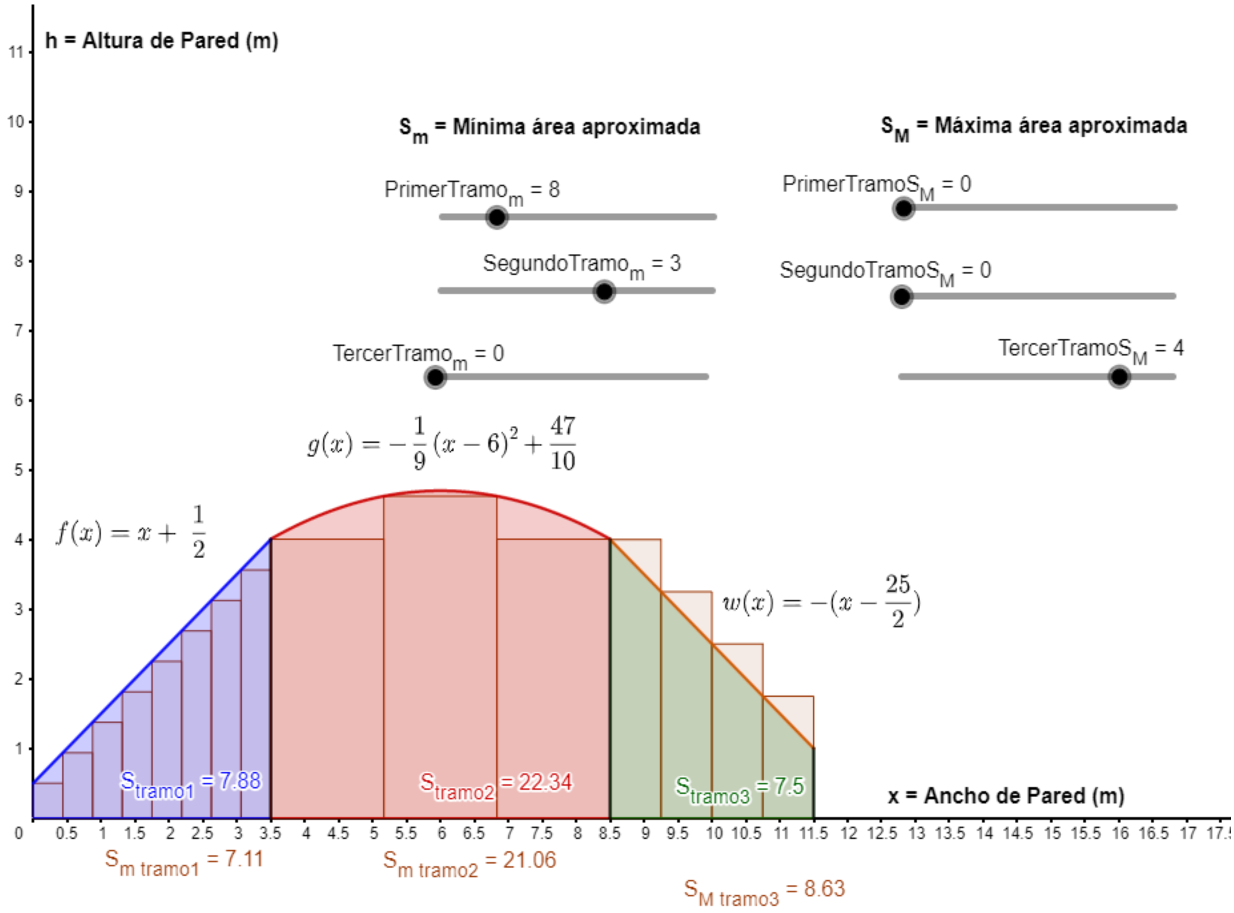

Figura 2: Captura de la situación dinámica de la MUA.

Figura 2: notar que los deslizadores que están debajo de S_m estiman el área para cada uno de los tres tramos, mientras que los deslizadores que están debajo de S_M aproximan el área. Debajo de cada tramo se puede observar el valor del área aproximada, en el caso de los dos primeros tramos. Finalmente, dentro de cada tramo se evidencia el valor del área exacta, denominada S.

9. Obtener conclusiones respecto al cálculo de las áreas aproximadas y el área exacta.

Una de las primeras conclusiones que seguramente pensaste es que cuán mayor es la cantidad de rectángulos (pulsor del deslizador lo más posible a la derecha) más se acerca el valor del área estimada al valor exacto del área.

Empleando la integral definida, se calcula el valor exacto del área, ya que se considera que el número de rectángulos tiende a infinito. De esta manera, se evidencia que el cálculo aproximado a través de la suma mayor sobreestima el valor real del área de la pared. Contrariamente, a través de la suma inferior se subestima el valor. Esto nos lleva a afirmar que:

$$\boldsymbol{S_m < S < S_M}$$

Para nuestro caso de estudio, por ejemplo, para cinco rectángulos se obtiene:

$$\mathbf{34{,}84}\ [m^2] < \mathbf{37{,}7176}\ [m^2] < \mathbf{40{,}44}\ [m^2]$$

Mientras que para veinte rectángulos (n=20) se obtiene:

$$\mathbf{37,01\ [m^2] < 37,7176\ [m^2] < 38,42[m^2]}$$

A medida que se incrementa n notamos que nos aproximamos cada vez más al área exacta, que obtenemos cuando aplicamos integral definida.